一般一 -参数族的三维 Filippov 系统

RODRIGO D. EUZ´EBIO[1],MARCO A. TEIXEIRA[2], 和 DURVAL J. TONON[1]

Abstract. 本文探讨了定义在典型奇异性附近的三维分段光滑向量场（PSVF）一参数族的开性、稠密性和结构稳定性条件。我们的研究是局部的，切换集 M 是嵌入于 $\mathbb{R}^3$ 中的一个 $2D$ 曲面。简言之，我们分析了分段光滑向量场中出现的某些余维一奇异性的鲁棒性和标准形。本文采用的主要工具包括向量场与 M 之间的接触理论、分岔理论和流形拓扑学。我们的主要结果给出了一系列稳健的数学结论，其形式类似于经典的 Kupka-Smale 定理：我们证明了一大类具有一般和拟一般奇异性的分段光滑向量场具有开性和稠密性。由于与分段光滑向量场相关的某些解并不唯一，本文始终以 Filippov理论作为研究方法的基础。

arXiv:2602.04857v1 [math.DS] 4 Feb 2026

1. Introduction

向量场局部分岔理论的核心，是确定适当的条件，以保证奇点附近轨线的稳定性。这些向量场生成的微分方程系统可在局部表示为 $\dot{x} = f(x,\ \lambda)$，其中 λ 是一个分岔参数。关于分岔理论的基础内容，可参见例如 [1, 33]。

对高于二维的分段光滑向量场中局部分岔现象的研究仍不够充分。一般而言，随着相空间维数增加，分段光滑分岔的分析会变得愈发复杂，导致情形及子情形大量增加。尽管如此，不同科学学科中的若干现实现象均由分段光滑向量场建模，值得系统研究。例如，相关应用见于控制理论 [24], 电气与电子系统 [4, 6], 生物建模 [7], 以及疾病治疗的替代方案 [8]。

本文采用光滑分岔理论和分段光滑分岔理论中成熟的研究成果，研究三维分段光滑向量场中的局部分岔。处理分段光滑向量场有多种方法（例如参见 [11, 25]），其中最常用的两种分别是 Filippov 和 Utkin 提出的方法（参见 [13, 31]）。尽管 Utkin 的方法比 Filippov 的方法更适用于实际应用，尤其是在控制理论中，但 Filippov 提出的约定似乎更适合分段光滑向量场的形式化研究，例如分岔和标准形研究。归根结底，当 Utkin 引入的控制函数为线性函数时，两种形式体系是等价的，因此，在某些场景中，例如控制理论、继电系统和线性系统，Filippov 的方法也适用于实际应用；例如参见 [2]。鉴于本文的研究目标，我们采用 Filippov 约定，因为用于构建本文结果的大部分背景材料也采用这一约定。此外，出于同样的原因，我们采用 Filippov 的原始方法，即对向量场取凸线性组合，而

2020 *Mathematics Subject Classification.* 37G05, 37G10, 37G15, 37G35, 37G40.*Key words and phrases.* 奇点、分段光滑向量场、分岔、余维、展开、结构稳定性。

不是采用微分包含或隐藏动力学等方法。关于分段光滑向量场的全面而现代的观点，可参阅 Jeffrey 的研究（例如参见 [5, 26, 27, 25]）。关于本文所采用理论框架的背景知识，请参阅 [15, 30]。

我们定义一个余维一曲面 $M = h^{-1}(0)$，其中 0 是光滑函数 $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 的正则值。该曲面将 $\mathbb{R}^3$ 分为两个半空间：满足 $h(x) \geq 0$的“+”半空间，以及满足$h(x) \leq 0$的“-”半空间。我们用 Ω^r 表示分段光滑向量场 $X = (X^+, X^-)$ 的空间，并赋予积拓扑。这里， X^+与 X^- 是定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的向量场，但分别限制在“+”半空间和“-”半空间上（详见第 2.2 节）。

在光滑向量场的背景下，已有一套相当成熟的理论，可对分岔情形进行细致分析，包括标准形、展开以及余维分类（二维情形见 [12, 21, 30] ，三维情形见[22] ）。然而，对于分段光滑向量场，现有结果要有限得多。在二维情形中，对零余维、余维一和余维二现象的分类，以及标准形的构造，并建立分段光滑向量场与其相应标准形之间的拓扑等价，已取得一定进展 [3, 9, 16, 18]。例如，Novaes 等人 [28] 分析了连接双折奇点与其自身的闭轨的分岔图，将该情形刻画为余维二现象，并给出一个浸没映射来描述它。

在三维情形下，文献 [10, 29],基于 Vishik [32]的研究结果，描述了结构稳定的分段光滑向量场的一些零余维子集。将分岔理论推广到三维分段光滑向量场面临的一项重大挑战，是新类型奇点的出现，尤其是 T-奇异性（或双折奇点），它可能导致混沌行为、不变锥或无限不稳定模（参见 [5, 15]）。此外，研究者还考察了其他全局分岔以及马蹄的存在性 [14]。

我们还探讨结构稳定性问题。结构稳定性是动力系统理论中的一个基本概念，因为它在理论和实践中都具有重要意义。观察邻近系统呈现出不同的动力学行为，凸显了理解哪些模型具有结构稳定性的重要性。

最后，我们指出，分段光滑向量场理论的重要进展，受到对曲面边界附近向量场的研究启发。在这方面，Sotomayor 和 Teixeira [22]以及 Vishik[32]作出了重要贡献。尤其是，Vishik 对三维一般边界点的分类确立了尖点和折叠作为一般奇点，并通过应用奇点理论提供了宝贵的工具与见解。

我们用 Ω^r 表示所有分段光滑向量场的集合，用 $\Omega^T \subset \Omega^r$ 表示分段光滑向量场的子集，其中两个向量场 $X^{\pm}$在某一点与 M 相切。设 Ξ_0 为零余维分段光滑向量场的集合，并定义 $\Omega_1^r = \Omega^r \setminus (\Xi_0 \cup \Omega^T)$，称之为分岔集。更多细节请参见第2 节和3节。

本文的主要结果确定了 Ω_1^r 中结构稳定（在 Ω_1^r 内）的分段光滑向量场子集，并证明该子集构成 Ω^r 的余维一子流形。我们明确刻画了构成这一余维一子流形的分段光滑向量场单参数族，并为每个族给出标准形和展开。此外，我们证明该子流形在 Ω_1^r 中是开且稠密的，并且结构稳定。最后，为了完整而明确地刻画 Ω^r 中的这一余维一子流形，我们构造了一个光滑映射 $\eta : \Omega^r \to \mathbb{R}$ ，该映射沿所考察的每个单参数族都是浸没。

因此，本文的主要贡献如下：（1）确定了 Ω^r 的一个余维一子流形，该子流形在 Ω_1^r 内结构稳定；（2）推导出每个相关一参数族的标准形和展开；（3）证明该子流形在 Ω_1^r 中开且稠密；（4）明确构造了一个浸没 $\eta : \Omega^r \to \mathbb{R}$，用于刻画所考察的每个一参数族。

我们强调，据我们所知，现有文献中的结果并未为三维分段光滑向量场背景下的分岔分析提供系统性框架。

本文的组织结构如下：第2 节介绍一些预备知识、定义和符号；第3 节陈述本文的主要结果。第4 节介绍并讨论分段光滑向量场中若干零余维和一余维子集的几何要素。第5节和6 节给出本文主要结果的证明。最后，附录A 将给出一些关于分岔理论的结果。

2. 基本理论

2.1. 三维流形边界附近的向量场。本小节所涉及概念和结果的详细内容集中在 [22, 32] 中。我们假设，在局部范围内，$\mathbb{R}^3$ 原点附近的边界由 $M = h^{-1}(0)$ 给出，其中 $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 是一个以原点为正则点的光滑映射。下面给出光滑向量场芽的定义。

定义 1. 考虑 Z 一个 C^r 向量场，以及在 $\mathbb{R}^3$ 原点邻域内的一个 C^r 类向量场芽，它是按以下方式定义在原点邻域内的 C^r 向量场的一个等价类：若两个 C^r 向量场 Z_1 和 Z_2 分别定义在 $\mathbb{R}^3$中包含原点紧邻域的邻域 U_1 和 U_2 内，且存在一个邻域 $U_3 \subset \mathbb{R}^3$ 使得 $0 \in U_3 \subset U_1 \cap U_2$ 和$Z_1|_{U_3} = Z_2|_{U_3}$，则它们等价。

我们使用记号（$\mathbb{R}^3$，0）（芽意义下），以强调我们考虑的是原点邻域内的局部动力学。这样，光滑向量场 Z 就是这个等价类的一个代表元。在原点邻域内定义的所有C^r 向量场芽的集合，赋予 C^r-拓扑，并满足 $r \geq 1$，记为 $\mathfrak{X}^r$。对于每个 $Z \in \mathfrak{X}^r$，我们定义一个光滑函数 $Zh : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$，其定义为 $Zh = \langle Z, \nabla h \rangle$ 其中 $\langle ., . \rangle$ 是 $\mathbb{R}^3$中的典范内积。我们将 $Z^n h\,(p) = Z\,(Z^{n-1}h)\,(p)$ $n \geq 2$记作。

定义 2. 设 $Z \in \mathfrak{X}^r$。我们称：

(a) 0 是 Z 的 M-正则点，当且仅当 $Zh(0) \neq 0$。(b) 0 是 Z 的折叠奇点，当且仅当 $Zh(0) = 0$ 且 $Z^2h(0) \neq 0$。(c) 0 是 Z 的尖点奇点，当且仅当 $Zh(0) = Z^2h(0) = 0, Z^3h(0) \neq 0$，且向量 $dh(0)$、$dZh(0)$ 和 $dZ^2h(0)$线性无关。

Z 的切向集合，

$$S_Z = \{p \in M; Zh(p) = 0\},$$

而 S_Z 中的任一元素都是 Z 的切向奇点（或简称奇点）。下文将刻画光滑向量场相对于 M 在 $(\mathbb{R}^3, 0)$ 中的一般行为。该方法基于 [22, 32]。

定义 3. 我们将 Σ_0 满足以下任一条件的元素集合称为 $Z \in \mathfrak{X}^r$：

(a) 0 是 M 的正则点，属于 $Z\,(Zh(0)\neq 0)$；
(b) 0 是 Z的折叠奇点；(c) 0 是 Z 的尖点奇点。

在 [22] 中已证明，子集 Σ_0 是开且稠密的，并刻画了 $\mathfrak{X}^r$中的结构稳定性。下一步是研究分岔集$\mathfrak{X}_1^r=\mathfrak{X}^r-\Sigma_0$。通常，对$\Sigma_1\subset\mathfrak{X}_1^r$的刻画基于一些问题：该子集由余维一的光滑向量场组成，涉及不稳定向量场，但不排除一般背景。这意味着，定义 Σ_0 时施加的某些条件被违反，但仍考虑准一般性假设。

在我们的方法中，我们关注局部动力学，因此准一般性指的是点 p为余维一奇点的情形。换言之，所谓准一般性，是指分段光滑向量场恰好不满足一个一般条件，该条件对应于余维一退化，而所有其他条件仍然一般。

我们举例说明这种情况。例如，设 Z 不在 Σ_0上。因此我们可以考虑以下情形：(i) $Z(0)=0$ 或 $(ii)Z(0)\neq 0$，且不满足定义 *3*中的条件 (*b*)、(*c*) 之一。在第一种情形下，我们要求 0 是 Z 的双曲奇点，且其特征子空间与边界横截。在情形 (ii) 下，0 不能是折点或尖点，但必须假设一些额外的准一般条件。

定义4。 称 Σ_1 为集合 $\Sigma_1(a)\cup\Sigma_1(b)\subset\mathfrak{X}^r$，其中：

1- Σ_1*(a)* $\subset\mathfrak{X}^r$ 是满足以下条件的光滑向量场 Z 的集合：*0* 是双曲奇点，特征向量在 *0* 处与 M 横截， DZ *(0)* 的特征值代数重数均为 *1*。非共轭特征值的实部互不相同：若 $\lambda_i\neq\lambda_j$, $\lambda_i\neq\lambda_j$，则 $Re(\lambda_i)\neq Re(\lambda_j)$，其中 λ_i,λ_j 是 $DZ(0)$ 的特征值，且 λ_j 是数 λ_j 的共轭数。*2-* Σ_1*(b)* $\subset\mathfrak{X}^r$ 是满足以下条件的光滑向量场 Z 的集合：$Z(0)\neq 0$, $(Zh)(0)=0=(Z^2h)(0)$，且以下条件之一成立：$(b.1)$ $(Z^3h)(0)\neq 0$, $dim\{dh(0)\ d(Zh)(0)\ d(Z^2h)(0)\}=2$，并且 *0* 是 $Zh\,|_M$ 的 *Morse*意义下的非退化临界点；$(b.2)$ $(Z^3h)(0)=0$, $(Z^4h)(0)\neq 0$，且 *0* 是 $Zh\,|_M$ 的正则点。

设 $H(h)$ 为函数 h 的海森矩阵。

定义5. 若 $Z\in\Sigma_1(a)$ 则我们区分以下情形：

$(a.1)$ **节点**： $DZ(0)$ $\lambda_j, j=1,2,3$ 的特征值均为互不相同的实数，且符号相同；$(a.2)$ **鞍点**： $DZ(0)$ $\lambda_j, j=1,2,3$ 的特征值均为互不相同的实数，其中一个的符号与其他特征值相反；$(a.3)$ **焦点**： $DZ(0)$ 的特征值为 $\lambda_{12}=a\pm ib$, $\lambda_3=c$，其中 a,b,c均非零且互不相同，且 $a\neq c$。

如果 $Z\in\Sigma_1(b)$ 则我们区分以下情形：

$(b.1.1)$ 定义*4*（$b.1$）中给出的唇形，且 $det(H(Zh(0)))>0$，见图*1*；$(b.1.2)$ 定义*4*（$b.1$）中给出的喙对喙，且 $det(H(Zh(0)))<0$，见图*2*；$(b.1.3)$ 定义*4*（$b.2$）中给出的燕尾，见图*3*。

2.2. 分段光滑向量场。在分段光滑向量场的背景下，我们考虑 M，即切换流形（或不连续流形），作为两个光滑向量场 X^+ 和 X^-的公共边界。我们定义 $M^+ = \{p \in (\mathbb{R}^3, 0);\ h(p) \geq 0\}$ 和 $M^- = \{p \in (\mathbb{R}^3, 0);\ h(p) \leq 0\}$，并在前述定义中，根据 $p \in M^+$或 $p \in M^-$，分别考虑 $X(p) = X^+(p)$ 或$X(p) = X^-(p)$。分段光滑向量场芽的定义见 [15]。

定义 6。 *PSVFs* 的一个 C^r-芽是两个 C^r 向量场的等价类 $X = (X^+, X^-)$，其定义如下： $X_1 = (X_1^+, X_1^-)$ 当且仅当 $X_2 = (X_2^+, X_2^-)$ 与 $X_2^\pm$芽等价时，二者等价。

我们定义由下式给出的 PSVFs

$$X(q) = \begin{cases} X^+(q), q \in M^+ \\ \\ X^-(q), q \in M^-, \end{cases}$$

其中 $X^\pm \in \mathfrak{X}^r$。称 $\Omega^r = \mathfrak{X}^r \times \mathfrak{X}^r$ 为在 0 处所有 PSVFs X 芽组成的空间，并赋予积拓扑；记为 $X = (X^+, X^-)$。在 M中，我们区分以下开区域:

- **穿越区域：** $M^c = \{p \in M;\ (X^+h)(p)(X^-h)(p) > 0\}$。在方便时，我们记 $M_+^c = \{p \in M;\ (X^+h)(p) > 0,\ (X^-h)(p) > 0\}$ 以及 $M_-^c = \{p \in M;\ (X^+h)(p) < 0,\ (X^-h)(p) < 0\}$。
- **不稳定滑动区域：** $M^e = \{p \in M;\ (X^+h)(p) > 0,\ (X^-h)(p) < 0\}$。
- **稳定滑动区域：** $M^s = \{p \in M;\ (X^+h)(p) < 0,\ (X^-h)(p) > 0\}$。

设 $\mathcal{O} = M^c \cup M^e \cup M^s$。注意，对于任意 $p \in \mathcal{O}$，我们得到 $X^+(p) \neq 0$，以及 $X^-(p) \neq 0$；若 $p \in M^s$，则$\langle (X^- - X^+)(p)\ \nabla h(p) \rangle > 0$。

切换流形 M 上各点处轨迹解的定义遵循 Filippov 约定，见 [13]。与 X 相关联的滑动向量场是与 M^s, ^{e}相切的向量场。显然，若 $q \in M^s$，则对于 $-X$有 $q \in M^e$，因此我们可以在 M^e上定义与 X相关联的滑动向量场，其定义为 $-(-X)^s$。 ~ ~下文中，两种情形均记作 X^s 。具体而言，向量场 X^s 由下式给出

$$\widetilde{X}^s(p) = \frac{1}{X^-h(p) - X^+h(p)}(X^-h(p)X^+(p) - X^+h(p)X^-(p)), \tag{1}$$

其中 $X^\pm = (X_1^\pm, X_2^\pm, X_3^\pm)$。显然，向量场 $\widetilde{X}^s$ 与下述重标度向量场 拓扑等价:

$$X^s(p) = X^-h(p)X^+(p) - X^+h(p)X^-(p) \tag{2}$$

对于 $p \in M^s$，它与 $-X^s(p)$ 在 $p \in M^e$ 时拓扑等价。因此， X^s或 $-X^s$可以在保持 X^s 的方向不变的同时，延伸 C^r-~至 $M^s \cup M^e$ 的边界之外。本文将 X 经过 M^s 边界上点 p 的轨迹定义为 X^s 的轨迹与 X^+ 或 X^- 的轨道的串接，其中该轨道连接至 p，前提是这样的轨道存在。因此，轨线由 X^s、 X^+ 和 X^- 的弧串接而成。对于 M^e 边界上的点，也存在类似情况。

定义 7. </style}点 称为伪平衡点，如果 $(p) = 0$。

如上所述，Filippov 约定描述了切换曲面上可能出现的三种基本动力学形式：穿越、稳定滑动和不稳定滑动。

定义 8. X的流记为 ϕ_X，由 X^+、X^- 和 X^s的流拼接而成，分别记为 ϕ_{X^+}、ϕ_{X^-} 和 ϕ_{X^s}。

定义 9. 我们称 $0 \in M$ 为：

- X的正则-正则点，如果它是向量场 X^+和 X^-的正则点，并且：$0 \in M^c$或 $0 \in [M^s \cup M^c]$和 $X^s(0) \neq 0$;

- X 的双折奇点，如果它是向量场 X^+ 和 X^-的折叠奇点；
- X 的折叠-尖点奇点，如果它是 X^+ 的尖点奇点和 X^-的折叠奇点。

下面我们区分双折奇点的类型：

(a) 抛物型：或者 $[(X^+)^2h(0) \cdot (X^-)^2h(0)] > 0$；($b$)
双曲型：$(X^+)^2h(0) > 0$ 以及 $(X^-)^2h(0) < 0$；(c) 椭
圆型：$(X^+)^2h(0) < 0$ 以及 $(X^-)^2h(0) > 0$。

2.3. 与双折奇点相关的对合和首次返回映射。以下构造主要基于文献 [23] 中探讨的问题。考虑 $X^+ \in \mathfrak{X}^r$，并假设 $X^+(0) \neq 0$ 且$X^+h(0) = 0$。设 N_0 是经过 0 点的 X^+ 的一个横截截面。现在利用隐函数定理，存在邻域 $U_{X^+}(0) \subset M$ 和 $V_{X^+}(0) \subset N_0$，以及一个光滑函数 $\eta_{X^+}: U_{X^+}(0) \subset M \to V_{X^+}(0)$，其定义为：对每个 $p \in U_{X^+}(0) \subset M$，$\eta_{X^+}(p)$ 是 X^+ 的轨迹经过 p 时与 N_0 相交的点。当然，$\eta_{X^+}(0) = 0$，且 η_{X^+} 的奇异集与 S_{X^+} 相重合，即 X^+ 的相切点。当 η_{X^+} 是一个折叠映射（依据映射奇点理论）时，可以确定满足 $\eta_{X^+} \circ \gamma_{X^+} = \eta_{X^+}$ 的对称微分同胚 γ_{X^+}。映射 γ_{X^+} 是一个对合，其不动点集中在 S_{X^+} 上。与 $X^- \in \mathfrak{X}^r$ 相关，同样可以得到诸如 $U_{X^-}(0)$ S_{X^-}、η_{X^-} 和 γ_{X^-} 等对象。现在，给定 $X = (X^+, X^-)$ 的一个椭圆型双折叠奇点，我们可以考虑定义在区域 $U_{X^+}(0)$ 与 $U_{X^-}(0)$ 交集上的复合映射 $\varphi_X = \gamma_{X^-} \circ \gamma_{X^+}$，它作为与 0 点处的 M 相关的首次返回映射。关于更多细节，建议感兴趣的读者参阅文献[23]。

我们用 L_X 表示 φ_X 的线性部分。注意，φ_X 满足：$det(D\varphi_X)(0) = 1$。因此，一般而言，$D\varphi(0)$ 的特征值为 β 和 β^{-1}，并满足以下条件之一：

(a) $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $\beta \neq 0$（鞍型）。(b) $\beta = e^{i\theta}$，且 $\theta \in (0, \pi)$（椭圆型）。
在这种情况下，L_X 是旋转。

3. Main results

本节陈述一些涉及子集 $\Xi_1 \subset \Omega_1^r$ 的结果。关于 Ξ_1 和 Ω_1^r 的构造/定义，详见第 4 节。考虑如下形式的分段光滑向量场 $X = (X^+, X^-)$，它们分别在原点处具有奇异点和正则点，并满足以下附加条件：

(**H**) (a) $X^-(0)$ 与 M 在 0 处横截；(b) 原点是 X^+ 和 X^s 的双曲奇点；(c) DX^+(0) 和 $DX^s(0)$ 的特征值代数重数均为 1；(d) 与 $DX^+(0)$ 相关的特征向量在原点处与 M 横截。

接下来，我们考虑另一种情形：两个向量场 $X^{\pm}$ 在原点处均与 M 横截，切换曲面与 M^s 重合, ^{e}，且原点是滑动向量场的一个非双曲奇点；例如，参见 [30]。

注 1. 注意，若原点是 X^s 的双曲奇点，则 X 处的分段光滑向量场在原点处结构稳定，参见 [16] 中的命题*3.5*。

因此，需要考虑两种情况：(1) 原点是 X^s 的鞍结奇点；(2) 原点是 X^s 的 Hopf 奇点。在后一种情况下，如果分段光滑向量场 $X = (X^+, X^-)$ 满足以下附加条件，我们就称其在原点处对于 X^s 呈现 Hopf 奇点：

(HS) (a) 原点是 X^s 的唯一奇点；(b) X^s 仅有双曲周期轨道；(c) X 的任意轨迹的 α 和 $\omega-$ 极限集均为奇点或周期轨道；(d) X^s 没有鞍连接。

6由此，我们定义 $\Xi_1 = \bigcup_{i=1} \Xi_1(i)$，其中 $\Xi_1(1) = \{X \in \Omega^r$;0 是 X^+ 的唇形奇点，也是 $X^-\}$ 的正则点，参见定义5；$\Xi_1(2) = \{X \in \Omega^r$;0 是 X^+ 的喙对喙奇点，也是 $X^-\}$ 的正则点；$\Xi_1(3) = \{X \in \Omega^r$;0 是 X^+ 的燕尾奇点，也是 $X^-\}$ 的正则点；$\Xi_1(4) = \{X \in \Omega^r$;0 是 X^+ 的奇点，也是 X^- 的正则点，并满足条件 (H)$\}$；$\Xi_1(5) = \{X \in \Omega^r$; 0 是 $X^{\pm}$ 的正则点，也是 $X^s\}$ 的鞍结奇点。$\Xi_1(6) = \{X \in \Omega^r$;0 是 $X^{\pm}$ 的正则点，是 X^s 的 Hopf 奇点，并满足条件 (HS)$\}$。

我们规定切换流形 $M = h^{-1}(0) = \{(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}^3, 0); x_3 = 0\}$，即 $h(x_1, x_2, x_3) = x_3$。下面给出本文的主要结果。

T定理 1. 子集 Ξ_1 是 Ω^r 上的余维一 C^r 子流形。在此基础上 $on,$

(a) $X \in \Omega_1^r$ 相对于 Ω_1^r 是 M-稳定的，当且仅当 $X \in \Xi_1$；*(b)* Ξ_1 在 Ω_1^r 中开且稠密；*(c)* 存在 Ω^r 的邻域 $\mathcal{V}_X \subset$ 、 *0* 的邻域 $U_0 \subset (\mathbb{R}^3, 0)$ 以及一个 C^r 映射 $\eta: \mathcal{V}_X \to \mathbb{R}$，使得 *1)* 若 $X \in \mathcal{V}_X$，则 $X|_{U_0}$ 与 $X|_{U_0}$ 拓扑等价，当且仅当 $\eta(X) = 0$；*2)* 若 $X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2} \in \mathcal{V}_X$ 且 $\eta(X_{\lambda_1}) \cdot \eta(X_{\lambda_2}) > 0$，则 $X_{\lambda_1}|_{U_0}$ 与 $X_{\lambda_2}|_{U_0}$ 拓扑等价。

接下来，我们证明集合 Ξ_1 可以刻画为六个余维一 C^r 流形6 $\Xi_1 = \bigcup_{i=1} \Xi_1(i)$ 的并。下一个结果给出 $\Xi_1 = \bigcup_{i=1} \Xi_1(i)$ 子集的标准形和展开。

定理 2. 考虑 $X_0 \in \Xi_1(i)$ $i = 1, \ldots, 6$。以下结论成立。

（a）若 $X_0 \in [\Xi_1(1) \cup \Xi_1(2)]$，则其拓扑标准形为 $X_\lambda = (X_\lambda^+, X_0^-)$，其中 $X_\lambda(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, x_1^2 + \lambda x_2 \pm x_2^2)$，且 $X_0^-(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, \pm 1)$。（$b$）若 $X_0 \in \Xi_1(3)$，则其拓扑标准形为 $X_\lambda = (X_\lambda^+, X_0^-)$，其中 $X_\lambda^+(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, x_1^3 - x_2 + \lambda x_1^2)$，且 $X_0^-(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, \pm 1)$。

(c) 若 $X_0 \in \Xi_1(4)$，则其拓扑标准形为 $X_\lambda = (X_\lambda^+, X_0^-)$，其中 $X_\lambda^+(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1 x_1, x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_3(x_3 - \lambda) + x_2)$（实数情形），或者 $X_\lambda^+(x_1, x_2, x_3) = (\lambda_1 x_1, x_1 + \alpha x_2 + x_3, -x_2 + x_3(\alpha - \lambda))$（复数情形），且 $X_0^-(x_1, x_2, x_3) = (a, b, c)$，$a \neq 0$。

(d) 若 $X_0 \in \Xi_1(5)$，则其拓扑标准形为 $X_\lambda = (X_\lambda^+, X_0^-)$，其中 $X_\lambda^+(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1^2 - \lambda, 0)$，且 $X_0^-(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$，这对应于在 $(0,0,0)$ 处 M 上的拓扑标准形 X_λ^s，其由 $X_\lambda^s(x_1, x_2) = (-x_2, x_1^2 - \lambda, 0)$ 给出。

(e) 若 $X_0 \in \Xi_1(6)$，则其拓扑标准形为 $X_\lambda = (X_\lambda^+, X_0^-)$，其中 $X_\lambda^+(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + \lambda x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) - 2\lambda x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), 0)$，且 $X_0^-(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$，这对应于在 $(0, 0, 0)$ 处 M 上的拓扑标准形 X_λ^s，其由 $X_\lambda^s(x_1, x_2) = (\lambda x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)\ x_1 + \lambda x_2 - x_2(x_1^2 + x_1^2), 0)$ 给出。

余维一奇点的展开如图1、2、3、4、5 和6、7和8所示。

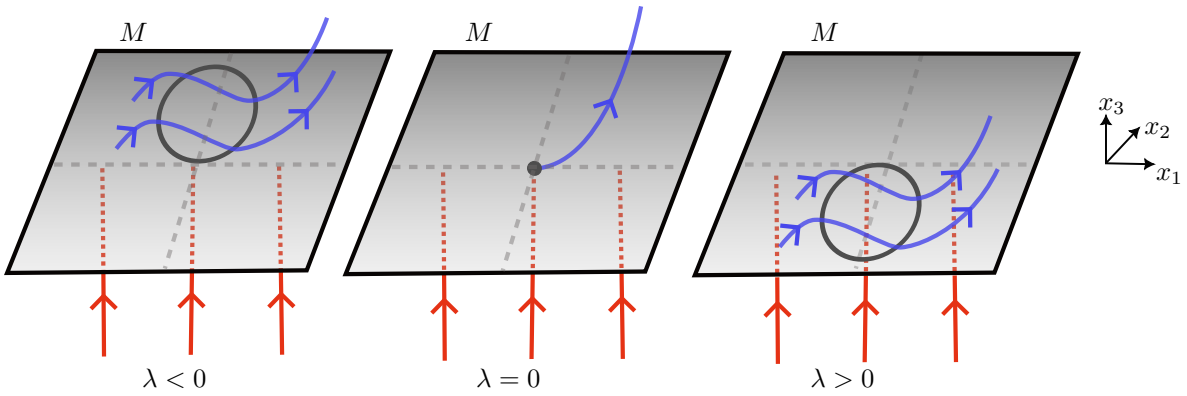

FIGURE 1. 唇形奇点的展开。

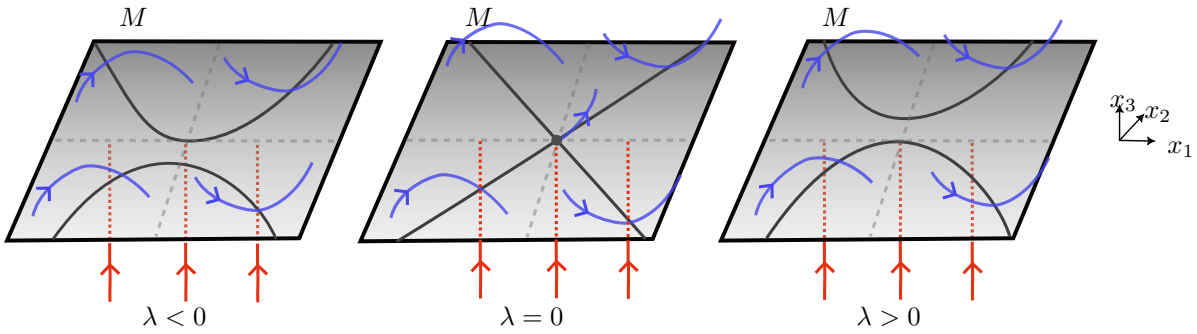

FIGURE 2. 喙对喙奇点的展开。

3**注 2**。在 $X_0 \in \bigcup_{i=1}^{3} \Xi_1(i)$ 的情况下，如果我们选择一个局部坐标系，使光滑向量场 $X_0^\pm$ 为管状，则这些情况下对应的展开为：

(a) 若 $X_0 \in [\Xi_1(1) \cup \Xi_1(2)]$ 则其拓扑标准形为 $X_\lambda = (X_\lambda^+, X_0^-)$，其中 $X_\lambda^+(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, \lambda x_2)$ $X_0^-(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, \pm 1)$，且 $h(x_1, x_2, x_3) = x_3 - (x_1^3 \pm x_1 x_2^2)$。(b) 若 $X_0 \in \Xi_1(3)$，则其拓扑标准形为 $X_\lambda = (X_\lambda^+, X_0^-)$，其中 $X_\lambda^+(x_1, x_2, x_3) = (1, \lambda x_1, 0)$，$X_0^-(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, \pm 1)$，且 $h(x_1, x_2, x_3) = x_3 - (x_1^4 + x_1 x_2)$。

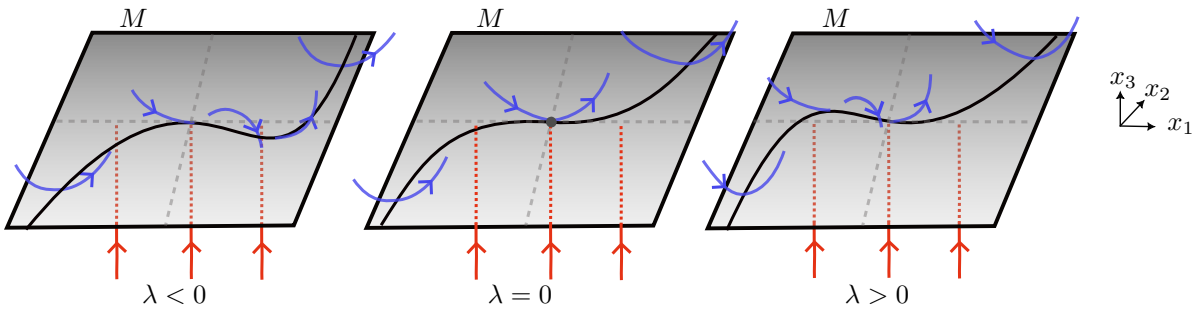

FIGURE 3. 燕尾奇点的展开。

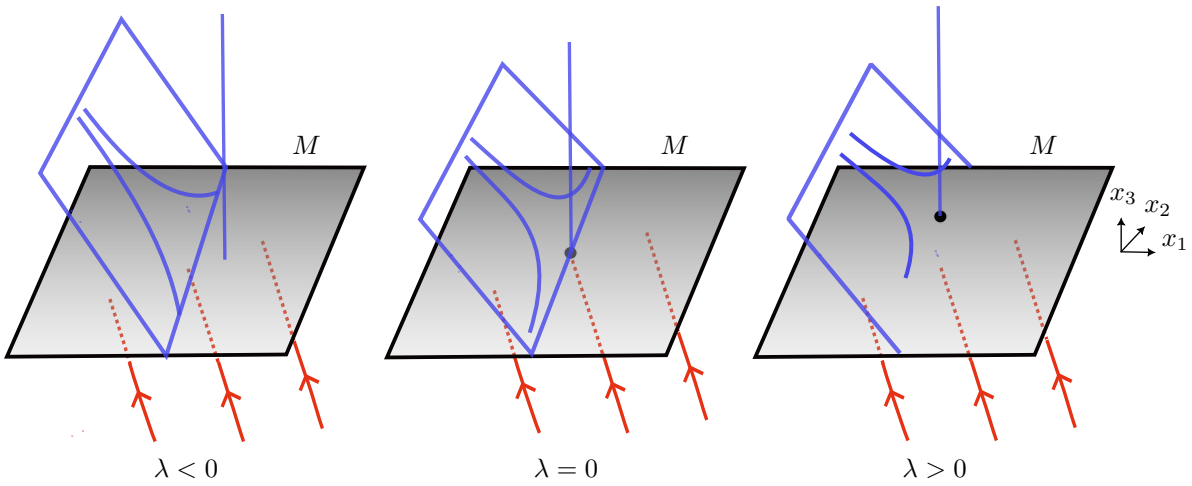

FIGURE 4. 鞍点奇点的展开。

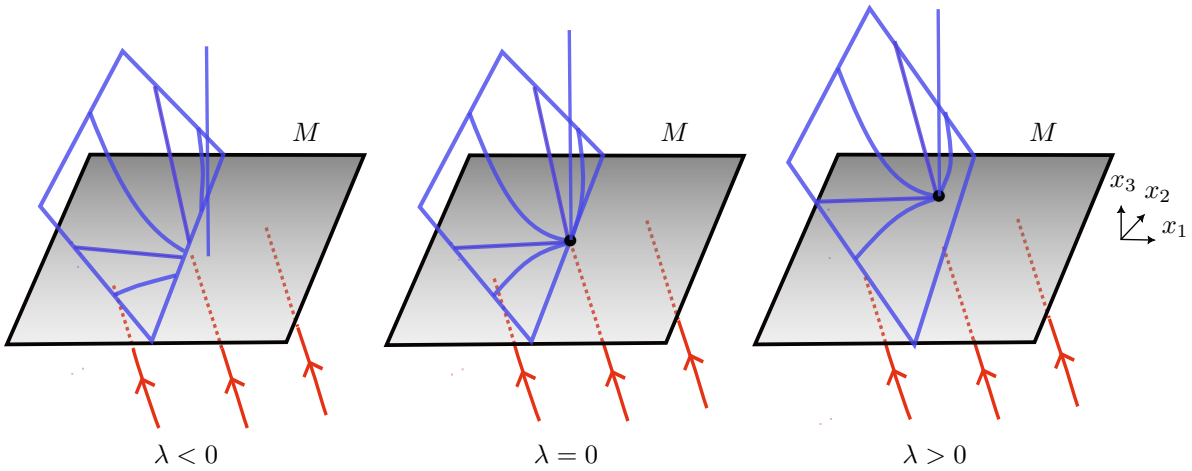

FIGURE 5. 节点奇点的展开。

4. SUBSETS OF CODIMENSION ZERO AND ONE OF 3D PSVFS

4.1. **零余维奇点的分类：** $X \in \Omega^r$。若原点是双折奇点，则 X^+ 的流可以诱导一个对合 $\gamma_{X^+}: M \to M$，见第2.3小节。此时，区域 M^s 与 M^e 之间存在经由 X^+的轨线实现的局部连接，并且沿这些连接必须满足某些横截条件。若原点是椭圆型双折叠奇点，则首次返回映射

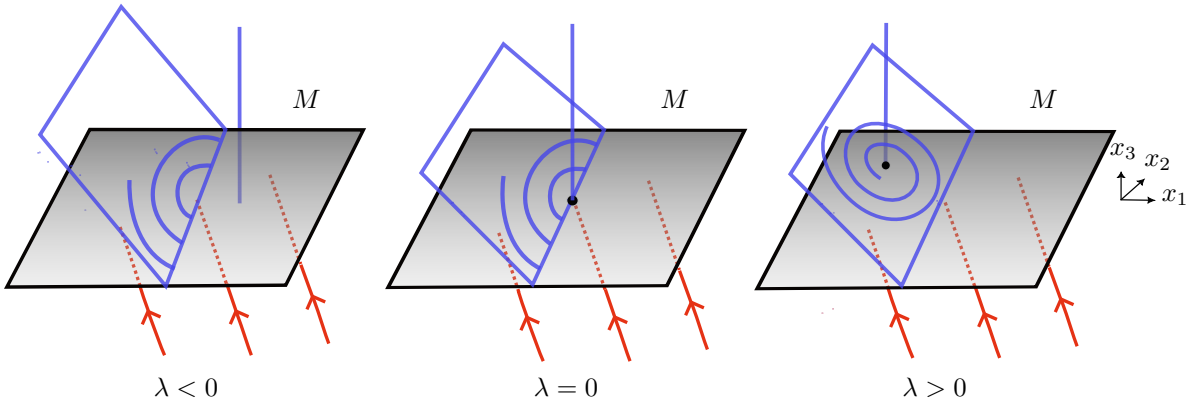

FIGURE 6. 焦点奇点的展开。

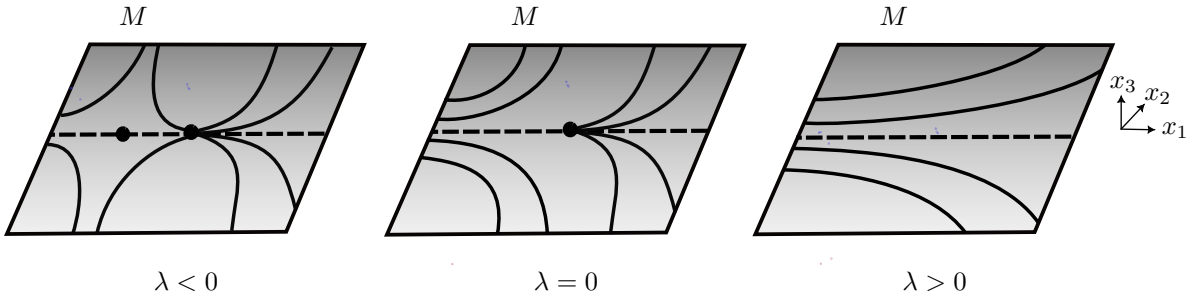

FIGURE 7. 鞍结奇点的展开。

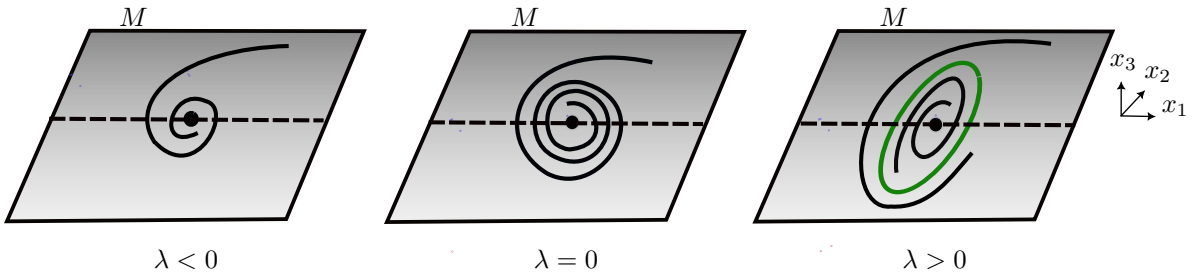

FIGURE 8. Hopf奇点的展开。

φ_X 在原点的一个邻域内定义。对于原点为双折奇点的情况，如 [15], 所述，我们定义以下附加条件：

(P) 若原点是 $X \in \Omega^r$ 的抛物型双折奇点，则与 X^+ 相关联的对合芽γ_{X^+} 在 0 处满足：

(a) $\gamma_{X^+}(S_{X^-}) \pitchfork S_{X^-}$ 在原点；(b) X^s 和 $\gamma^*_{X^+}(X^s)$ 在 $M^s \cap \gamma_{X^+}(M^e)$ 的每一点横截；(c) $\gamma_{X^+}(S_{X^-}) \pitchfork X^s$ 在原点。

(E) 若原点是 $X \in \Omega^r$ 的椭圆型双折叠奇点，则与 X 相关的首次返回映射 φ_X 在 0 处的芽在 0 处有一个鞍型不动点，其两个局部不变流形 W^s_{loc}, W^u_{loc} 均包含于M^c中。

下面，我们通过考察各情形的内在性质，给出零余维和余维一分段光滑向量场的子集。我们定义子集

$$\Xi_0 = \bigcup_{i=1}^{4} \Xi_0(i),$$

其中

$\Xi_0(1) = \{X \in \Omega^r$；0 是两者的正则点 $X^{\pm}\}$；$\Xi_0(2) = \{X \in \Omega^r$；0 是 X^+ 的折叠奇点，也是 $X^-\}$ 的正则点；$\Xi_0(3) = \{X \in \Omega^r$；0 是 X^+ 的尖点奇点，也是 $X^-\}$ 的正则点；$\Xi_0(4) = \{X \in \Omega^r$；0 是 X 的双折奇点，且满足条件 **(P)** 和**(E)**$\}$。

4.2. $\boldsymbol{\Omega}$ $X \in$的一些余维一子集^r。 根据 [29], 集合 Ξ_0 在原点处局部结构稳定。此外，它不是 Ω^r中的剩余集。我们打算以类似于第2.1小节所述的方式，分别破坏定义集合 Ξ_0的各个条件。

因此，在以下分析中，我们考虑那些以稳定方式违反定义集合 Ξ_0 的前述各项条件的分段光滑向量场子集，并假设至少有一个向量场与切换曲面 M 横截。我们将 Ω^T 记为满足以下条件的分段光滑向量场集合： $X = (X^+, X^-)$两者 $X^{\pm}$ 在原点处均与 M 相切。关于 Ω^T 中余维为一的子集的分析，例如原点为折叠–尖点奇点的情形，将在后续工作中展开。这样，我们得到一系列集合，包含于

$$\Omega^r_1 = \Omega^r \setminus \left(\Xi_0 \cup \Omega^T\right).$$

本工作的目的之一是给出 Ω^r_1 中的一个开稠密集，即 Ξ_1。

我们强调，为了定义第 $\Xi_1 \subset \Omega^r$ 节中陈述的余维为一子流形 3，我们对 $DX^+(0)$ 和 $DX^s(0)$ 的特征值与特征向量施加了某些条件。接下来，我们给出一些结果和例子，以讨论对光滑向量场 X^+ 施加的一般条件中，哪些会由滑动向量场 X^s (见引理 1 和2) 继承，另一方面，哪些一般条件不会被 X^s (见例 1) 继承。

我们选择原点附近的局部坐标 $x = (x_1, x_2, x_3)$，使得 $X^+ = (X_1^+, X_2^+, X_3^+)$ 满足 $X_3(x) = x_2$ 且 $h(x) = x_3$，因此 $M = h^{-1}(0)$ 是一个包含原点的局部超平面。

引理 1。 如果 $p \in M$ 是 X^+ 的奇点，那么它也是 X^s 的奇点。

前述结果的证明是直接的，并且可由表达式（2）直接得到。

引理 2。 如果 $DX^+(p)$ 的特征子空间在 p 处与 M 横截，那么 $DX^s(p)$ 的特征子空间将与 S_{X^+} 横截，其中 S_{X^+} 是 X^s 的边界。

证明。 我们将 $p = (0,0,0)$ 设为原点。由 [22] 若 $DX^+(p)$ 的特征子空间在原点处与 M 横截，则 $\frac{\partial X_2^+}{\partial x_1}(0,0,0) \neq 0$。滑动向量场由下式给出

$$X^s(x_1, x_2) = (X_1^+(x_1, x_2, 0)X_3^-(x_1, x_2, 0) - x_2 X_1^-(x_1, x_2, 0), X_2^+(x_1, x_2, 0)X_3^-(x_1, x_2, 0) - x_2 X_2^-(x_1, x_2, 0)).$$

注意， $X^s(0,0) = (0,0)$，且 $X^s(x_1,x_2)$ 在 $(0,0)$ 处的线性化向量场为 $A^s.(x_1,x_2)^T$，其中

$$A^s = D^s_X(0,0) = \begin{pmatrix} X_3^-(0,0,0)\frac{\partial X_1^+}{\partial x_1}(0,0,0) & -X_1^-(0,0,0) + X_3^-(0,0,0)\frac{\partial X_1^+}{\partial x_2}(0,0,0) \\ \\ X_3^-(0,0,0)\frac{\partial X_2^+}{\partial x_1}(0,0,0) & -X_2^-(0,0,0) + X_3^-(0,0,0)\frac{\partial X_2^+}{\partial x_2}(0,0,0) \end{pmatrix}.$$

S_{X^+}的边界 X^s是与 X^+相关联的折叠线，即 $S_{X^+} = \{(x_1,\ x_2);\ x_2 = 0\}$。因此，若特征向量 v_1和 v_2满足 $\langle \widetilde{v},\ v_i\rangle \neq 0,\ i = 1,\ 2$，则它们与 S_{X^+}横截，其中 A^s的特征向量为 v_1和 v_2，$\widetilde{v} = (1,\ 0)$是曲线$(x_1,\ 0)$在 M上的梯度。计算 v_1和 v_2后，可知对于 $i = 1$和 $i = 2$，均有 $\langle \widetilde{v},\ v_i\rangle \neq 0$，前提是以下条件之一成立：

(i) $X_3^-(x,\ y,\ 0) = 0$，这不可能发生，因为在这种情况下，X^-的轨线包含在 M中；(ii) $\frac{\partial X_2^+}{\partial x_1}(0,\ 0,\ 0) = 0$，根据假设，这不可能发生；(iii) $X_1^-(x,\ y,\ 0) = X_3^-(x,\ y,\ 0)\frac{\partial X_3^+}{\partial x_2}(0,\ 0,\ 0) = 0$，这不可能发生，否则 X^s将会在$(0,\ 0,\ 0)$处存在一个连续统的平衡点。

因此，结论得证。

□

下面的例子表明，X^+的其他一般条件并不像奇点的存在性和横截性那样能传递到$(X^+)^s$。更确切地说，我们证明，对于 X^+，原点是一个孤立奇点；但这一性质不会传递给向量场 X^s，后者有连续统多个平衡点。

例*1*。考虑线性分段光滑向量场 $X = (X^+, X^-)$，其中 $X^\pm = (X_1^\pm, X_2^\pm, X_3^\pm)$，且 $X^+(x_1,x_2,x_3) = (x_2, -2x_1 - x_2, x_2 + 3x_3)$，以及 $X^-(x_1,x_2,x_3) = (a,b,c)$。因此，我们认为 $M = \{x_3 = 0\}$，使 $c \neq 0$与 M在原点处横截。不失一般性，令 $c < 0$。显然，原点是 X^+的一个孤立奇点。此外，它属于焦点-鞍点型，因为（与 X^+相关联的）线性化向量场的特征值为$\lambda_{1、2} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{7})$和 $\lambda_3 = 3$。定义在M上的扩展滑动向量场为$(X^+)^s(x_1,x_2) = ((-a+c)x_2, -2cx_1 - (b+c)x_2)$。

如引理 *1*所示，由于原点是 X^+的一个奇点，因此它也是$(X^+)^s$的一个奇点。然而，我们注意到，当且仅当 $a \neq c$且 $c \neq 0$时，该奇点是孤立的。如果 $a = c$或 $c = 0$，则分别在直线 $x_1 = -\frac{(b+c)x_2}{2c}$或 $x_2 = 0$上存在连续统个奇点。

前面的例子表明，存在一些分段光滑向量场，其 X^+奇点的双曲性／横截性／代数重数为一的一般条件并未导出 X^s。因此，第 X^s 节条件 **(H)**中对向量场 3 所给出的额外条件是必要的。

在接下来的例子中，我们将证明 $\Xi_1(5)$ 和 $\Xi_1(6)$ 非空。

例 2 (非双曲 双曲鞍结奇点)。考虑线性分段光滑向量场 $X = (X^+,\ X^-)$ 其中 e

$$\begin{aligned} X^+(x_1,x_2,x_3) &= (a_1x_1 + a_2x_3 + a_1(a_1+a_3), a_4x_3, a_5x_3 - 1), \\ X^-(x_1,x_2,x_3) &= \left(\mu + a_3x_1 + a_6x_3 - a_1(a_1+a_3), -x_2 + a_7x_3, -\frac{1}{a_1}x_1 + a_8x_3 + 1\right), \end{aligned}$$

满足 $a_1 \neq 0$ 和 $M = \{x_3 = 0\}$。注意到 $X^+(0,0,0) = (a_1(a_1+a_3)\,0, -1)$，且 $X^-(0,0,0) = (\mu - a_1(a_1+a_3),\,0,\,1)$，也就是说，$X^+$ 和 X^- 在 $(0,0,0)$ 处是正则的。此外，我们得到 $X^+h(0,0,0) = -1$ 且 $X^-h(0,0,0) = 1$，因此 $(0,0,0)$ 是一个滑动点，因为它满足条件 $X^+h(0,0,0)X^-h(0,0,0) = -1 < 0$。特别地，$X^{\pm}(0,0,0)$ 在 $(0,0,0)$ 处与 M 横截。扩展滑动向量场 X^s 写作 $X^s(x_1,x_2) = (\mu - x_1^2, -x_2)$，也就是说，对于 $\mu = 0$，X^s 在 $(0,0)$ 处具有一个鞍结奇点，即一个准一般奇点。因此，$X \in \Xi_1(5) \neq \emptyset$。

例 3 (Hopf 奇点)。考虑 $M = \{x_3 = 0\}$ 和分段光滑向量场 $X = (X^+, X^-)$，其中

$$\begin{aligned} X^+(x_1,x_2,x_3) &= (-y + x(\mu-1), x + y(\mu-1), x^2+y^2-1), \\ X^-(x_1,x_2,x_3) &= (x, y, 1). \end{aligned}$$

滑动向量场 $X^s(x_1,x_2) = (\mu x_1 - x_2 - x_1(x_1^2+x^2)\;\; x_1 + \mu x_2 - x_2(x_1^2+x_2^2))$是 $\mu = 0$在原点发生 *Hopf* 分岔的经典标准形。

5. Proof of Theorem 1

5.1. 浸没的构造。在以下每种情形中，我们都明确给出相应的浸没，该浸没刻画了每种情形下分段光滑向量场的余维一子流形。该构造受到文献[22]中工作的启发。

5.1.1. 唇形与喙对喙情形。我们考虑 $X_0 = (X_0^+, X_0^-) \in \Xi_1(1) \cup \Xi_1(2)$。因此，$X_0^+h(0) = (X_0^+)^2h(0) = 0$，$(X_0^+)^3h(0) \neq 0$，且 $\{Dh(0)\;\; DX_0^+h(0)\;\; D(X_0^+)^2h(0)\}$ 线性相关。此外，原点是 X_0^+h的非退化点，因此我们有：

$$X_1^+(0) \neq 0, \quad X_2^+(0) = 0, \quad X_3^+(0) = 0, \quad \frac{\partial X_3^+}{\partial x_1}(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_2 \partial x_3}(0) = 0,$$

$$\frac{\partial X_3^+}{\partial x_2}(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1 \partial x_2}(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1^2(0)} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_2^2(0)} \neq 0.$$

我们定义

$$\begin{aligned} \xi : [\Xi_1(1) \cup \Xi_1(2)] \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (X,(x_1,x_2)) &\mapsto \det[Dh(x_1,x_2,0), DX^+h(x_1,x_2,0), D(X^+)^2h(x_1,x_2,0)]. \end{aligned}$$

由于 0 是 X_0 的喙对喙或唇形奇点，因此我们有 $\xi(X_0,0) = 0$。另一方面，

$$D\xi(X_0,0) = \left(0, -X_1^+(0)\frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1^2}(0) \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_2^2}(0), 0\right) \neq 0.$$

因此，由隐函数定理，存在Ω_1^r中 X_0 的邻域 $\mathcal{V}_{X_0}$、$0 \in \mathbb{R}^2$ 的邻域 $\mathcal{U}$ 以及唯一的C^r 映射 $\tilde{\alpha}$：$\mathcal{V}_{X_0} \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$，满足 $\tilde{\alpha}(X) = 0$，使得 $\xi(X, \tilde{\alpha}(X)) = 0$。因此 $p_X(\tilde{\alpha}(X), 0)$是唇形或

X的喙对喙奇点。考虑该映射

$$\eta: \quad \mathcal{V}_{X_0} \to \mathbb{R}$$

$$X \mapsto \eta(X) = \xi(X, p_X).$$

注意， $\Xi_1(1) \cup \Xi_1(2) = [\eta^{-1}(0) \cap \mathcal{V}_{X_0}]$。还需证明，对于所有 $X = (X^+, X^-) \in \eta^{-1}(0) \cap \mathcal{V}_{X_0}$，映射 $d\eta(X)$ 都是满射。考虑由下式给出的光滑曲线 $\gamma : (-\lambda_0, \lambda_0) \to \Omega_1$

$$\gamma(\lambda) = X_\lambda = (X_0^+ + \lambda(0, 0, x_2), X_0^-).$$

注意， $\eta(X_0) = 0$ 且

$$\begin{aligned}
\eta(\gamma(\lambda)) \quad &= -\left(\frac{\partial X_3^+}{\partial x_2}\right)^2 \frac{\partial X_2^+}{\partial x_1} + \frac{\partial X_3^+}{\partial x_1}\left(X_3^+ \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_2 \partial x_3} + X_2^+ \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_2^2} + \frac{\partial X_1^+}{\partial x_2}\frac{\partial X_3^+}{\partial x_1} + X_1^+ \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1 \partial x_2}\right) \\
&\quad + \frac{\partial X_3^+}{\partial x_2}\left(\left(\frac{\partial X_2^+}{\partial x_2} - \frac{\partial X_1^+}{\partial x_1}\right)\frac{\partial X_3^+}{\partial x_1} - X_3^+ \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1 \partial x_3} - X_2^+ \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1 \partial x_2} - X_1^+ \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1^2}\right) \\
&\quad + \lambda\Bigg[\left(\frac{\partial X_2^+}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial X_1^+}{\partial x_1}\right)\frac{\partial X_3^+}{\partial x_1} - X_3^+ \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1 \partial x_3} \\
&\qquad - \frac{\partial X_3^+}{\partial x_2}\left(2\frac{\partial X_2^+}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1 \partial x_3}\right) - X_2^+ \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1 \partial x_2} - X_1^+ \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1^2}\Bigg] + O(\lambda^2).
\end{aligned}$$

因此,

$$d\eta(X) \cdot \gamma'(0) \quad = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\eta(\gamma(\lambda)) - \eta(Z_0)}{\lambda} = -X_1^+(0)\frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1^2}(0) \neq 0,$$

从而完成此情形的证明。

5.1.2. 燕尾情形。 我们考虑 $X_0 = (X_0^+, X_0^-) \in \Xi_1(3)$。因此 $X_0^+ h(0) = (X_0^+)^2 h(0) = (X_0^+)^3 h(0) = 0, (X_0^+)^4 h(0) \neq 0$，并且原点是 $X_0^+ h$ 的正则点，因此我们有:

$$\begin{aligned}
&X_1^+(0) \neq 0, \quad X_1^+(0) = 0, \quad X_3^+(0) = 0, \quad \frac{\partial X_3^+}{\partial x_1}(0) = 0, \quad \frac{\partial X_1^+}{\partial x_1}(0) = 0, \\
&\frac{\partial X_3^+}{\partial x_3}(0) = 0, \quad \frac{\partial X_3^+}{\partial x_2}(0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 X_1^+}{\partial x_1^2}(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1^2}(0) = 0, \quad \frac{\partial^3 X_3^+}{\partial x_1^3}(0) \neq 0.
\end{aligned}$$

我们定义

$$\xi : \Omega_1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(X, (x_1, x_2)) \mapsto \quad (X^+)^3 h(x_1, x_2, 0).$$

由于 0 是 X 的燕尾奇点，我们有 $\xi(X_0^+, 0) = 0$。另一方面,

$$\begin{aligned}
D\xi(X_0, 0) \quad &= \Bigg(X_1^+(0)^2 \frac{\partial^3 X_3^+}{\partial x_1^3}(0), \left(\frac{\partial X_1^+}{\partial x_2}(0)\right)^2 \frac{\partial X_3^+}{\partial x_2}(0) + \frac{\partial X_1^+}{\partial x_3}(0)\left(\frac{\partial X_3^+}{\partial x_2}(0)\right)^2 + 2X_1^+(0)\frac{\partial X_1^+}{\partial x_2}(0)\frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1 \partial x_2}(0) \\
&\quad + X_1^+(0)\frac{\partial X_3^+}{\partial x_2}(0)\left(2\frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1 \partial x_3}(0) + \frac{\partial^2 X_1^+}{\partial x_1 \partial x_2}(0)\right) + \frac{\partial X_1^+}{\partial x_1}(0)\frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1 \partial x_2}(0) + X_1^+(0)\frac{\partial^3 X_3^+}{\partial x_1^2 \partial x_2}(0), \\
&\quad \frac{\partial X_1^+}{\partial x_3}(0)\left(\frac{\partial X_1^+}{\partial x_2}(0)\frac{\partial X_3^+}{\partial x_2}(0) + 2X_1^+(0)\frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1 \partial x_2}(0)\right) + X_1^+(0)\frac{\partial X_3^+}{\partial x_2}(0)\frac{\partial^2 X_1^+}{\partial x_1 \partial x_3}(0) + \frac{\partial X_1^+}{\partial x_1}(0)\frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1 \partial x_3}(0) \\
&\quad + X_1^+(0)\frac{\partial^3 X_3^+}{\partial x_1^2 \partial x_3}(0)\Bigg) \neq 0.
\end{aligned}$$

因此，由隐函数定理，存在 $\mathcal{V}_{X_0}$，它是 Ω_1^r 中 X_0 的邻域；存在 $\mathcal{U}$，它是 $0\in\mathbb{R}^2$ 的邻域；以及唯一的 C^r 映射 $\widetilde{\alpha}\colon \mathcal{V}_{X_0}\to\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2$，满足 $\widetilde{\alpha}(X)=0$，使得 $\xi(X,\widetilde{\alpha}(X))=0$。因此，$p_X(\widetilde{\alpha}(X),0)$ 是 X 的燕尾奇点。考虑映射

$$\begin{aligned}\eta:\mathcal{V}_{X_0} &\to\mathbb{R}\\ X &\mapsto \eta(X)=\xi(X,p_X).\end{aligned}$$

注意，$\Xi_1(3)=[\eta^{-1}(0)\cap\mathcal{V}_{X_0}]$。还需证明，对于所有 $X=(X^+,\ X^-)\in\eta^{-1}(0)\cap\mathcal{V}_{X_0}$，我们有 $d\eta(X)$ 是满射。定义 $\gamma:(-\lambda_0,\ \lambda_0)\to\Omega^r$ 为由下式给出的光滑曲线

$$\gamma(\lambda)=X_\lambda=(X_0^+ +\lambda(0,0,x_1^2),X_0^-). \tag{3}$$

考虑 (3)，注意 $\eta(X_0)=0$ 以及

$$\begin{aligned}\eta(\gamma(\lambda)) &= X_3^+\left[\left(\frac{\partial X_3^+}{\partial x_3}\right)^2+X_3^+\frac{\partial^2X_3^+}{\partial x_3^2}+\frac{\partial X_2^+}{\partial x_3}\frac{\partial X_3^+}{\partial x_2}+X_2^+\frac{\partial^2X_3^+}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{\partial X_1^+}{\partial x_3}\frac{\partial X_3^+}{\partial x_1}+X_1^+\frac{\partial^2X_3^+}{\partial x_1\partial x_3}\right]\\ &+X_2^+\left[\frac{\partial X_3^+}{\partial x_3}\frac{\partial X_3^+}{\partial x_2}+\frac{\partial X_2^+}{\partial x_2}\frac{\partial X_3^+}{\partial x_2}+X_3^+\frac{\partial^2X_3^+}{\partial x_2\partial x_3}+X_2^+\frac{\partial^2X_3^+}{\partial x_2^2}+\frac{\partial X_1^+}{\partial x_2}\frac{\partial X_3^+}{\partial x_1}+X_1^+\frac{\partial^2X_3^+}{\partial x_1\partial x_2}\right]\\ &+X_1^+\left[\frac{\partial X_3^+}{\partial x_2}\frac{\partial X_2^+}{\partial x_1}+\frac{\partial X_3^+}{\partial x_3}\frac{\partial X_3^+}{\partial x_1}+\frac{\partial X_1^+}{\partial x_1}\frac{\partial X_3^+}{\partial x_1}+X_3^+\frac{\partial^2X_3^+}{\partial x_1\partial x_3}+X_2^+\frac{\partial^2X_3^+}{\partial x_1\partial x_2}+X_1^+\frac{\partial^2X_3^+}{\partial x_1^2}\right]\\ &+\Bigg[2(X_1^+)^2+2x_1X_3^+\frac{\partial X_1^+}{\partial x_3}+2x_1X_1^+\frac{\partial X_3^+}{\partial x_3}+x_1^2\left(\frac{\partial X_3^+}{\partial x_3}\right)^2+2x_1^2X_3^+\frac{\partial^2X_3^+}{\partial x_3^2}+2x_1X_2^+\frac{\partial X_1^+}{\partial x_2}\\ &+x_1^2\frac{\partial X_2^+}{\partial x_3}\frac{\partial X_3^+}{\partial x_2}+2x_1^2X_2^+\frac{\partial^2X_3^+}{\partial x_2\partial x_3}+2x_1X_1^+\frac{\partial X_1^+}{\partial x_1}+x_1^2\frac{\partial X_1^+}{\partial x_3}\frac{\partial X_3^+}{\partial x_1}+2x_1^2X_1^+\frac{\partial^2X_3^+}{\partial x_1\partial x_3}\Bigg]\lambda+\mathcal{O}(\lambda^2)\end{aligned}$$

沿曲线 $\gamma(\lambda)$ 对映射 η 求导，得到

$$d\eta(X)\cdot\gamma'(0)=\lim_{\lambda\to0}\frac{\eta(\gamma(\lambda))-\eta(X_0)}{\lambda}=2[X_1^+(0)]^2\neq0,$$

从而证明映射 $d\eta(X)$ 是满射。

5.1.3. 奇点-正则情形。考虑 $X_0=(X_0^+,\ X_0^-)\in\Xi_1(4)$。于是 $X_0^+(0)=0$，$X_0^-\neq0$ 且 0 是满足 $\Xi_1(4)$ 中条件的双曲奇点。根据 Thom 横截性定理以及 0 的双曲性（[20] 的命题 3.1），存在邻域 $\mathcal{V}_{X_0}=V_{X_0^+}\times V_{X_0^-}$（属于 $X_0\in\Omega^r=\mathfrak{X}^r\times\mathfrak{X}^r$），以及 $(\mathbb{R}^3,\ 0)$ 中 0 的邻域 U_p，并且存在唯一的函数 $\phi\colon\mathcal{V}_{X_0^+}\to U_p\subset\mathbb{R}^3$，满足 $\phi(X_0^+)=0$，使得每个 $X=(X^+,\ X^-)\in\mathcal{V}_{X_0}$ 都满足

- $X^+\in V_{X_0^+}$ 有一个唯一的双曲奇点 $\phi(X^+)=p_{X^+}\in U_p$；
- $X^-\in V_{X_0^-}$ 在 $U_p\cap M$ 上与 M 横截。

此外，如有必要，缩小 $\mathcal{V}_{X_0}$，并利用滑动向量场 X^s 是 X^+ 和 X^-的线性组合这一事实，存在一个函数 $\phi^s\colon\mathcal{V}_{X_0}\to U_p\cap M$，满足 $\phi(X_0)=0$，使得每个 $X\in\mathcal{V}_{X_0}$ 都满足

- X^s 有一个唯一的双曲奇点 $\phi^s(X)=p_{X^s}\in U_p\cap M$。

如有必要，进一步缩小 $\mathcal{V}_{X_0}$，即可得到以下条件之一：

(1) 若 p_{X^+} 和 p_{X^s} 分别是 X^+ 和 X^s的实奇点，则：(1a) $DX^+(p_{X^+})$ 和 $DX^s(p_{X^s})$ 的特征值代数重数均为 1；

(1b) 与 $DX^+(p_{X^+})$ 和 $DX^s(p_{X^s})$ 相关联的特征向量分别横截于 M 和 $\partial X^s := \{(x_1, x_2) \in M;\ x_2 = 0\}$（$X^s$的边界）。

(1c) $DX^+(p_{X^+})$ 的非共轭特征值的实部互不相同。

(2) 若 p_{X^+} 是 X^+ 的实奇点，且 p_{X^s} 是 X^s 的虚奇点，则 (1) 中关于 X^+ 的一般条件成立，并且 X^s 在 $\partial X^s \cap U_p$ 上与 ∂X^s 横截；

(3) 若 p_{X^+} 是 X^+ 的虚奇点，且 p_{X^s} 是 X^s 的实奇点，则 (1) 中关于 X^s 的一般条件成立，并且 X^+ 在 $U_p \cap M$ 上与 M 横截；

(4) 若 p_{X^+} 和 p_{X^s} 分别是 X^+ 和 X^s 的虚奇点，则 (2) 和 (3) 中关于 X^+ 和 X^s 的一般横截条件成立。

我们注意到，在上文的每个项目 (1) –(4) 中，一般条件都在邻域 $\mathcal{V}_{X_0}$ 上成立。现在，按照 [22], , 令 N 为一个在 0 处横截于 M 的一维截面，并令 $\rho\colon\ U_p \longrightarrow N$ 为平行于 M、在 N 上的投影。这是可能的，因为 M 局部是超平面 $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_3 = 0\}$。不失一般性，设 $N = \langle(0, 0, 1)\rangle$ 为由 (0, 0, 1) 张成的直线，它与 M 正交。因此，ρ 是关于第一变量的典范投影 $\rho(x_1, x_2, x_3) = x_3$。考虑函数

$$\eta :\ \mathcal{V}_{X_0} \to \mathbb{R}$$

$$(X^+, X^-) \mapsto \rho(p_{X^+}).$$

根据函数 η 的构造，显然 $\Xi_1(4) \subset [\eta^{-1}(0) \cap \mathcal{V}_{X_0}]$。包含关系 $[\eta^{-1}(0) \cap \mathcal{V}_{X_0}] \subset \Xi_1(4)$ 也显然成立，因为每个 $X \in \mathcal{V}_{X_0}$ 都满足 $\Xi_1(4)$ 的一般条件 $(a) - (d)$，并且由于 $\eta(X) = 0$，我们有 $X \in \Xi_1(4)$，从而证明了命题 (a)。

现在我们将证明，对于所有 $X = (X^+,\ X^-) \in \eta^{-1}(0) \cap \mathcal{V}_{X_0}$，都有 $d\eta(X)$ 是满射。事实上，考虑由下式给出的光滑曲线

$$\gamma(\lambda) \quad = X_\lambda(x_1, x_2, x_3) = (X^+_\lambda(x_1, x_2, x_3), X^-_0(x_1, x_2, x_3))$$

其中 $X^+_\lambda(x_1,\ x_2,\ x_3) = X^+_0(x_1,\ x_2,\ x_3 - \lambda)$。此外，我们得到

$$d\eta(X) \cdot \gamma'(0) = \frac{d}{d\lambda}\eta(\gamma(\lambda))\big|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\eta(\gamma(\lambda)) - \eta(X)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\eta(\gamma(\lambda))}{\lambda} = 1,$$

因为 $\eta(X) = \rho(p_{X^+}) = \rho(0) = 0$ 且 $\eta(\gamma(\lambda)) = \eta(X_\lambda) = \rho(^{p_{X^+_\lambda}}) = \rho(0,\ 0,\ \lambda) = \lambda$，从而完成此情形的证明。

5.1.4. 正则-正则鞍结奇点情形。为了证明向量场 $X \in \Xi_1(5)$ 的相关结果，我们指出，p 是 X^s 的准一般奇点，而 X^s 是定义在 $2-$ 曲面 M 上的平面向量场。因此，我们可以应用 Sotomayor 的结果（见 [30]），以构造满足向量场 X^s 的假设 (a) 和 (b) 的函数 η。为完整起见，下面我们概述 η 的构造；具体细节见 [30]。

考虑 $X_0 = (X^+_0,\ X^-_0) \in \Xi_1(5)$，则 $X^+_0(0) \neq 0,\ \ X^-_0(0) \neq 0$，且 0 是 X^s_0 的准一般奇点。根据横截性定理，存在 $\mathcal{V}_{X_0} = V_{X^+_0} \times V_{X^-_0}$ Ω $X_0 \in {}^r = \mathfrak{X}^r \times \mathfrak{X}^r$ 的邻域、U_p 中 0 的邻域$\mathbb{R}^3$，以及唯一的 C^r 函数 ϕ：$\mathcal{V}_{X_0} \to U_p \subset \mathbb{R}^3$，满足 $\phi(X_0) = 0$，使得对于每个 $q \in U_p \cap M$，每个 $X = (X^+,\ X^-) \in \mathcal{V}_{X_0}$ 都满足 $X^{\pm}(q) \neq 0$。

假设 0 是 X_0^s 的鞍结点，并设 $\lambda_1 = 0$ 和 $\lambda_2 \neq 0$ 是定义在切空间 $T_0\mathbb{R}^3$ 上的 DX_0^s 的两个特征值，其中 $T_0\mathbb{R}^3$ 是 X_0^s 在 0 处的线性化。设 T_1 和 T_2 分别是与 λ_1 和 λ_2 相关的特征子空间，并令 $\pi_1: T_p \longrightarrow T_1$ 为到 T_1 的投影映射。我们有 $DX_0^s(v) = [V, X_0^s](p)$，其中 $[V, X]$ 是 V 与 X 的李括号；对于 $v \in T_1$、$v \neq 0$，我们定义 $\Delta_1(X_0^s, p, v) = \pi_1(V, [V, X_0^s])(p)$。由于 $p = 0$ 对于 X_0^s 是一个鞍结点，存在 $v \neq 0$ 使得 $\Delta_1(X_0^s, 0, v) \neq 0$。在这些条件下，设 (z_1, z_2) 是 $0 \in M$ 附近的一个坐标系，满足 $z_1(0) = z_2(0) = 0$ 且 $\frac{\partial}{\partial z_i}(p) \in T_i$。在这些坐标下，令 $X_0^s = (X_1^s, X_2^s)$，我们得到

$$
\begin{aligned}
X_1^s(z_1, z_2) &= \Delta_1 z_1^2 + b z_1 z_2 + c z_2^2 + o(z_1^2 + z_2^2), \\
X_2^s(z_1, z_2) &= \sigma z_2 + \alpha z_1^2 + \beta z_1 z_2 + \gamma z_2^2 + o(z_1^2 + z_2^2),
\end{aligned} \tag{4}
$$

其中 $\sigma(X, p) = \lambda_2$ 且 $\Delta_1\left(X, p, \frac{\partial}{\partial z_1}(p)\right) = \frac{\partial^2 X_1^s}{\partial z_1^2}(0, 0)$ 非零，因为 0 是鞍结点。我们假设 $\sigma(X, p) < 0$ 且 $\Delta_1\left(X, p, \frac{\partial}{\partial z_1}(p)\right) > 0$。

设 $N_0^0 = N_0 \cap M$ 与 B_0 分别为 0 和 X 的邻域，其中 N 是 $\mathbb{R}^3$ 中 0 的一个邻域。由连续性，存在 X_0^s 的一个邻域 B_0^s，使得对每个 $Y \in B$，我们得到 $Y^s = (Y_1^s, Y_2^s)$ 位于 B_0^s 中。此外，对适当的 v_{Y^s}，可得 $\frac{\partial Y_2^s}{\partial z_2} < 0$，$\Delta_1(Y^s, v_{Y^s}) > 0$，且 $trace(DY^s(q)) < 0$ 位于 N_0^s 中，其中 $q \in N_0^s$ 是 $Y^s \in B_0^s$ 的任一非一般奇点。另外，$\Delta_1(Y^s, q, v_{Y^s}) > 0$，即 q 是 Y^s 的鞍结点。

定义 $F: B_0^s \times N_0^s \longrightarrow \mathbb{R}$ 由 $F(Y^s; z_1, z_2) = Y_2^s(z_1, z_2)$ 给出。我们还定义函数 $\mathcal{X}_1^+$、$\mathcal{X}_2^+$ 和 $\mathcal{X}_3^+$ 如下，从而可以为鞍结点情形定义所需的函数：

(a) 对 F 使用隐函数定理，可知存在一个 C^r 函数 $\mathcal{X}_1^+: B_1 \times I_1 \longrightarrow I_2$、$B_1$ 和 I_1，I_2 分别是 X_0^s 和 0 的邻域，使得 $\mathcal{X}_1^+(X_0^s, 0) = 0$，且 $F(Y^s; z_1, \mathcal{X}_1^+(Y^s, z_1)) = Y_2^s(z_1, z_2) = 0$ 对于 $(Y^s, z_1) \in B_1 \times I_1$ 成立，当且仅当 $z_2 = \mathcal{X}_1^+(Y^s, z_1)$。

(b) 定义 C^r 函数 $\mathcal{X}_2^+: B_1 \times I_1 \to \mathbb{R}$，由 $\mathcal{X}_2^+(Y^s, z_1) = Y_1^s(z_1, \mathcal{X}_1^+(z_1, Y^s))$ 给出，它满足 $\frac{\partial \mathcal{X}_2^+}{\partial z_1}(X_0^s, 0) = 0$ 以及 $\frac{\partial^2 \mathcal{X}_2^+}{\partial z_1^2}(X_0^s, 0) \neq 0$。

(c) 对 C^{r-1} 函数 $\frac{\partial \mathcal{X}_2^+}{\partial z_1}$ 应用隐函数定理，我们得到一个函数 $\mathcal{X}_3^+: B \longrightarrow I_1$，它满足 $\mathcal{X}_3^+(X_0^s) = 0$ 以及 $\frac{\partial \mathcal{X}_2^+}{\partial z_1}(Y^s, \mathcal{X}_3^+(Y^s)) = 0$，仅当 $z_1 = \mathcal{X}_3^+(Y^s)$ 时对 $Y^s \subset B_1$、$z_1 \in I_1$ 成立，其中 $B \subset B_0^s$。

所需的函数通过设置 $\eta: B \longrightarrow \mathbb{R}$ 得到

$$
\eta(Y) = \mathcal{X}_2^+(Y^s, \mathcal{X}_3^+(Y^s)) = Y_1^s(\mathcal{X}_3^+(Y^s), \mathcal{X}_1^+(Y^s, \mathcal{X}_3^+(Y^s))).
$$

根据构造，$\Xi_1(5) \subset [\eta^{-1}(0) \cap \mathcal{V}_{X_0}]$。另一方面，$[\eta^{-1}(0) \cap \mathcal{V}_{X_0}] \subset \Xi_1(5)$ 成立，因为根据 $\mathcal{X}_1^+$、$\mathcal{X}_2^+$ 和 $\mathcal{X}_3^+$ 的定义，$Y \in B$ 满足：当且仅当 Y^s 在 N_0^s 中有一个奇点时，$z_2 = \mathcal{X}_1^+(Y^s, z_1)$ 和 $\mathcal{X}_2^+(Y^s, z_1) = 0$；该奇点是一个鞍结点，因为 $\Delta_1 > 0$ 和 $\sigma < 0$。

现在我们将证明，对于所有 $X = (X^+, X^-) \in \eta^{-1}(0) \cap \mathcal{V}_{X_0}$，$d\eta(X)$ 是主观的。事实上，相应的向量场 $X^s = (X_1^s, X_2^s)$ 是一个光滑向量场，在原点处有一个鞍结奇点。我们注意到，假设 $X^+ = (X_1^+, X_2^+, X_3^+)$ 和 $X^- = (X_1^-, X_2^-, X_3^-)$，为了产生相应的滑动向量场 X^s，X^+ 与 X^- 的分量关系如下：

$$
X_1^+ = \frac{X_3^+ X_1^s - X_1^- X_2^s}{X_3^+ X_2^- - X_1^- X_3^-}, \quad X_2^+ = \frac{X_3^- X_1^s - X_2^- X_2^s}{X_3^+ X_2^- - X_1^- X_3^-}, \tag{5}
$$

其中 $(X_3^+X_2^- - X_1^-X_3^-)(x_1,\ x_2,\ x_3) \neq 0$。考虑由下式给出的光滑曲线 $\gamma\colon(-\lambda_0,\ \lambda_0) \to \Omega^r$

$$\gamma(\lambda) = X_\lambda = (X_\lambda^+, X^-) = \left(X^+ + \lambda\left(\frac{X_3^+}{X_3^+X_2^- - X_1^-X_3^-}, \frac{X_3^-}{X_3^+X_2^- - X_1^-X_3^-}, 0\right), X^-\right), \tag{6}$$

其中 $X_0^+ = X^+$ 与 $X^+,\ X^-$ 由关系式（5）定义。可以看出，滑动向量场 X_λ^s与 X_λ 相关联，现为 $X_\lambda^s =$（$X_1^s + \lambda,\ X_2^s$）。考虑（6）并对映射 η沿曲线 γ（λ）求导，我们得到

$$d\eta(X)\cdot\gamma'(0) = \frac{d}{d\lambda}\eta(\gamma(\lambda))\big|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\eta(\gamma(\lambda)) - \eta(X_0)}{\lambda} = 1,$$

对原点邻域内的所有（$x_1,\ x_2$）成立，因为 $\eta(X_0) = 0$ 且 $\eta(\gamma(\lambda)) = X_\lambda^s(X_3^+(X)\ X_1^+(X,\ X_3^+(X))) = X_1^s(0,\ 0) + \lambda = \lambda$，从而完成证明。

5.1.5. 正则-正则-*Hopf*奇点情形。 考虑 $X_0 = (X_0^+,\ X_0^-) \in \Xi_1(6)$，并如上一小节证明第一段那样，取适当的邻域和函数。设 $\sigma(X_0^s,\ p)$ 与 $\Delta(X_0^s,\ p)$ 分别表示 $D[X_0^s]_p$ 的迹和行列式，其中 X_0^s 是与 X_0 相关联的滑动向量场。则 $D[X_0^s]_p$ 的特征值的虚部满足

$$(\sigma(X_0^s, p))^2 - 4\Delta(X_0^s, p) < 0 \quad \text{and} \quad \sigma(X_0^s, p) = 0.$$

此外，对于任意滑动向量场 Y^s，由连续性可知，若 $\sigma(Y^s,\ q) = 0$ 且 $Y^s(q) = 0$，则 $\rho'_{X_0^s}(0) = 1$ 且 $(\rho_{X_0^s})^{(3)}(0) \neq 0$，其中 ρ 表示与 p相关联的首次返回映射。

设 $(z_1,\ z_2)$ 是 p 周围的一个坐标系，其中 $z_1(p) = z_2(p) = 0$。根据隐函数定理可知，对于 X 的每个邻域 B，存在一个函数 P，定义在 X_0^s 的某个邻域 B^s 上，使得每个 $Y \in B$ 都对应一个 $Y^s = (Y_1^s,\ Y_2^s) \in B^s$，其平衡点为 $q = P(Y^s)$。定义函数$\eta : B \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\eta(Y) = \sigma(Y^s, P(Y^s)) = \frac{\partial Y_1^s}{\partial z_1}(P(Y^s)) + \frac{\partial Y_2^s}{\partial z_2}(P(Y^s)),$$

它是矩阵 $DY^s_{P(Y^s)}$ 的迹。取 N^s 为 0 的一个邻域，使得 N^s 的边界 ∂N^s 与每个 $Y^s \in B^s$ 横截。在条件 (a) – (d) 下，可以证明 Y^s 在 N^s 上有一个奇点$P(Y^s)$，当且仅当 $\eta(Y^s) \neq 0$ 时，该奇点是一般的；而当 $\eta(Y^s) > 0$ 时，则存在一条一般的稳定周期轨道。不过，我们将带边界 $M \setminus \partial N^s$ 的流形记为 M_1，因此限制 $X_1^s = X_0^s|_{M_1}$ 是结构稳定的。此外，如有必要缩小 B^s，则每个向量场 $Y^s \in B^s$ 都满足： $Y_1 = Y^s|_{M_1}$ 与 X_1^s 拓扑等价，并且由于 M_1 上结构稳定向量场的开性，它也是结构稳定的。因此，我们有 $\Xi_1(6) = [\eta^{-1}(0) \cap \mathcal{V}_{X_0}]$。

还需证明 $d\eta_X(X) \neq 0$。相应的向量场 $X^s = (X_1^s,\ X_2^s)$是一个在原点呈现 Hopf 奇点的光滑向量场。假设 $X^+ = (X_1^+,\ X_2^+,\ X_3^+)$ 和 $X^- = (X_1^-,\ X_2^-,\ X_3^-)$，为生成相应的滑动向量场 X^s，X^+ 和 X^- 的分量满足方程（5）中的关系。在此情况下，考虑

$$\gamma(\lambda) = X_\lambda = (X_\lambda^+, X^-) = \left(X^+ + \lambda\left(\frac{z_1X_3^+}{X_3^+X_2^- - X_1^-X_3^-}, \frac{z_1X_3^-}{X_3^+X_2^- - X_1^-X_3^-}, 0\right), X^-\right), \tag{7}$$

其中 $X_0^+ = X^+$。与 X_λ 相关联的滑动向量场 X_λ^s 现在为 $X_\lambda^s = (X_1^s + \lambda z_1, X_2^s)$。考虑（7），得到

$$d\eta(X)\cdot\gamma'(0) = \frac{d}{d\lambda}\eta(\gamma(\lambda))\big|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\eta(\gamma(\lambda)) - \eta(X_0)}{\lambda} = 1,$$

对于原点的某个邻域内的所有 (z_1, z_2)。事实上，$\eta(X_0) = 0$ 和 $\eta(\gamma(\lambda)) = \eta(X_\lambda) = \sigma(X^s_\lambda, P(X^s_\lambda)) = \frac{\partial X^+_\lambda}{\partial z_1}(P(X^s_\lambda)) + \frac{\partial X^-_0}{\partial z_2}(P(X^s_\lambda)) = \overline{\lambda} + \frac{\partial X^s_1}{\partial z_1}(0, 0) + \frac{\partial X^s_2}{\partial z_2}(0, 0) = \overline{\lambda_0}$ 这就完成了此情形的证明。

65.2. **开性：** $\Xi_1 \subset \Omega^r_1$。我们回顾一下，$\Xi_1 = \bigcup_{i=1} \Xi_1(i)$ 以及各子集 $\Xi_1(i)\ i = 1$，.....，6 属于$_{i=1}\Omega^r_1$ 的开性由第 5.1 节可知。

5.3. **稠密性：** $\Xi_1 \subset \Omega^r_1$。设 $X = (X^+, X^-) \in \Omega^r_1$，并假设原点是$X$的退化奇点，因此 $X^-(0) \neq 0$ 且 $X^+(0)$ 满足以下条件之一。

(I) 若 $X^+(0) \neq 0$ 且 $X^+h(0) = 0$，则会出现涉及相切的情形，这些情形可分为以下几种：

(a) $(X^+)^2h(0) = (X^+)^3h(0) = (X^+)^4h(0) = 0$ 和 $(X^+)^kh(0) \neq 0$ 对于 $k \geq 5$ 或 (b) $(X^+)^2h(0) = 0$，$(X^+)^3h(0) \neq 0$，$det(dh(0)\ d(X^+)h(0)\ d(X^+)^2h(0)) = 0$ 且 $rank(\text{Hess}(X^+h(0))) = R < 2$。

(II) 如果 $X^+(0) \neq 0$ 且 $X^+h(0) \neq 0$，那么会出现涉及原点处两个横截向量场生成滑动向量场的情形。具体情形如下：

(c) 0 是平面向量场 X^s 的奇点，其具有实特征值且余维大于或等于二；

(d) 0 是平面向量场 X^s 的奇点，且为重数大于或等于二的弱焦点。

(III) 若 $X^+(0) = 0$，则我们得到如下涉及 M 上奇点的情形：

(e) 0 是 X^+ 的奇点，且满足以下条件中的至少一项：0 不是 X^+ 或 X^s 的双曲奇点；$DX^+(0)$ 或 $DX^s(0)$ 的特征值的代数重数大于或等于 2；与 $DX^+(0)$ 相关联的特征向量在 0 处不与 M 横截。

此时我们将证明分为两种情形。关于切触正则PSVF的证明由子集 $\Xi_1(1) \cup \Xi_1(2) \cup \Xi_1(3)$ 构成；关于奇异点-正则/正则-正则-奇异PSVF的证明由子集 $\Xi_1(4) \cup \Xi_1(5) \cup \Xi_1(6)$ 构成。

接下来，我们通过构造一个序列 $\{X_n\} \subset \Xi_1(1) \cup \Xi_1(2) \cup \Xi_1(3)$ 来考虑情形 (I)，使得 $X_n \to X$。考虑函数 $t \mapsto X_t(p) = \varphi_X(\{v8, p)$ 是从 p 出发的 X 轨迹。

情形 a：在此情形下，$\varphi_X(t, p)$ 是 $h \circ \varphi_X(t, p) = f(t, p)$ 的一个重数为.....的根，重数为 k。根据 Malgrange 准备定理，见 [17, 19],，存在 C^r 个定义在 (0,0) 的某个邻域内的实值函数 a_1、.....、a_k，b，使得

$$b(f(t,p),p) = t^k + \sum_{i=1}^{k-1} t^i a_i(f(t,p),p),$$

在 (0,0) 的邻域内。考虑由 $X_n = X + \frac{1}{n}\left(0,\ 0,\ x_1^3\right)$ 给出的序列 $\{X_n\} \subset \Xi_1(3)$。这样，我们得到满足以下条件的 $f_n(t, p) = h(X_{n,t}(p)) = h(\varphi_{X_n}(t, p))$

$$\widetilde{b}(f_n(t,p),p) = \left(\frac{c_4}{n} + \mathcal{O}(p^1)\right) t^4 + \sum_{i=1, i\neq 4}^{k-1} t^i \alpha_i(f_n(t,p),p) + t^k,$$

其中 $c_4 \neq 0, ||\alpha_i - a_i|| = \frac{1}{n}\mathcal{O}(p^1)$ 对应 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$。注意，根据构造可知 $X_n \to X$。

情形（b）：考虑一个局部坐标系，在这种情况下，我们有

$$X_1^+(0)\neq 0,\qquad X_2^+(0)=0,\qquad X_3^+(0)=0,\qquad \frac{\partial X_3^+}{\partial x_1}(0)=0,\qquad \frac{\partial X_3^+}{\partial x_2}(0)=0,$$

$$\frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1^2}(0)\neq 0,\quad \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_2\partial x_3}(0)=0,\quad \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1\partial x_2}(0)=0,\quad \frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_2^2}(0)=0.$$

由此，$rank(\mathrm{Hess}(X^+h(0)))<2$。事实上，$det(\mathrm{Hess}(Xh(0)))=\left[\frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_1^2}(0)\right]\left[\frac{\partial^2 X_3^+}{\partial x_2^2}(0)\right]=0$。考虑一个序列 $\{X_n\}$，使得 $X_n=X+\frac{1}{2n}\Big((0,0,x_2^2)、(0,0,0)\Big)$，并注意到 $X_n^+,1(0)\neq 0, X_n^+,2(0)=0, X_n^+,3(0)=0, \partial X_n^+,{}^3_{\partial x_1}(0)=0, \partial X_n^+,{}^3_{\partial x_2}(0)=0, \partial^2 X_n^+,{}^3_{\partial x_1^2}(0)\neq 0, \partial^2 X_n^+,{}^3_{\partial x_2\partial x_3}(0)=0, \partial^2 X_n^+,{}^3_{\partial x_1\partial x_2}(0)=0, \partial^2 X_n^+,{}^3_{\partial x_2^2}(0)\neq 0$。因此 $\{X_n\}\subset[\Xi_1(1)\cup\Xi_1(2)]$，且 $X_n\to X$。

情形 (II) 中条目 (c) 和 (d) 的证明如下。设 X 是一个分段光滑向量场，其滑动向量场为 $X^{s\sim}$，并满足条目 (c) 的条件。则 X^s 可以由一个向量场 X^s 逼近，该向量场具有一个鞍结型准一般奇点（见 [21, 30]）。此外，由于 X^s 与 X^s 足够接近，且 X^s 是 C^r-函数的凸线性组合，因此可以找到一个向量场 $X=(X^+,X^-)$，它在积拓扑中与 $X=(X^+,X^-)$ 足够接近，并且 X^s 是与 X 相关联的滑动向量场（见第 5.1.4 和 5.1.5 小节），故 $X\in\Xi_1(5)$。类似地，如果 X 是一个向量场，其滑动向量场为 X^s，并满足条目 (d) 的条件，我们便可得到另一个接近 X 的向量场 $X\in\Xi_1(6)$。

接下来要证明情形 (III) 的条款 (e)，设 X^+ 是满足条件 (e) 的向量场。若 0 是 X^+的非双曲奇点，我们可以取一个接近 X^+ 的 X_1^+，使得 0 对于 X_1^+是双曲的，例如参见 [20]。若 X_1^s 以 0 为非双曲奇点，如前所述，存在一个接近 X_1^s 的 X_2^s，使得 0 是双曲奇点，并且 X_2^s 是与一个接近 X_1^+和 X^+的向量场 X_2 相关联的滑动向量场。若与 $DX_2^+(0)$ 相关联的特征向量在 0 处不与 M 横截，我们可以利用横截映射的稠密性（Thom 定理），确保存在一个向量场 X_3^+，它充分接近 X_2^+，同时也接近 X^+。最后，若 $DX_3^+(0)$ 或 $DX_3^s(0)$ 的特征值的代数重数大于或等于二，我们可以再次应用 Malgrange 准备定理以及特征值关于 $DX_3^+(0)$ 和 $DX_3^s(0)$ 的连续性，构造一个收敛到 X_3 的序列 X_n，使得序列 $X_n=(X_n^+,\ X^-)$ 收敛到 $X=(X^+,\ X^-)$，且 $\{X_n\}\subset\Xi_1(4)$。

5.4. **定理** (a) **和** (c) **的证明（定理 1）**。证明直接来自第 5.1 小节中给出的各情形下浸没映射的构造。

6. 定理 2 的证明

定理 a) 和 (b) 各项的证明 2 直接来自定理 $\Xi_1(i)$ $i=1,2,3$ 的证明中给出的与子集相关联的浸没映射构造 1。各项 (c) 的证明是经典的，见 [22]。我们只增加了一般条件 $a\neq 0$，该条件决定了X_0^-与 M 在 0 处的轨迹之间的横截接触。

条目（d）和（e）的证明类似，因此我们只给出条目（d）的证明。它们也可以由定理 1 的证明推出，但不如条目（a）和（b）那样直接，因此我们将在下文给出证明。若

$X_0 \in \Xi_1$(5)，则其滑动向量场 $X_0^s = (X_1^s, X_2^s)$ 在 0 处有一个鞍结点，并假设它是这类光滑向量场的经典鞍结点。令方程 (4) 中的 $\Delta = 1$、$\sigma = -1$ 及其他参数均为零，即可得到这一结果。由方程 (5) 和 (6)，根据已固定的 X_1^s 和 X_2^s 的表达式，可以得到向量场 X_λ^+ 和X_0^-的表达式。注意，由方程 (5) 可知，当 $X_3^+ = 0$ 时必须有 $X_1^- X_3^- \neq 0$，因此令 $X_1^- = X_3^- = 1$ 和 $X_2^- = 0$。于是，向量场 X_0^-写作 $X_0^-(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$，并令 $X_0^+(x_1, x_2, x_3) = (X_1^+, X_2^+, X_3^+) = (-x_2, x_1^2, 0)$。最后，由方程 (6)，$X_\lambda^+$ 写作

$$X_\lambda^+(x_1, x_2, x_3) = X_0^+(x_1, x_2, x_3) + \lambda(0, -1, 0) = (-x_2, x_1^2 - \lambda, 0).$$

定义在 $X_\lambda^s(x_1, x_2)$ 上的表达式可直接写为 M，即 $X_\lambda^s(x_1, x_2) = (-x_2, x_1^2 - \lambda, 0)$，这与方程（4）一致，其中参数取证明开头所设定的值。

Appendix A.

本附录介绍一些对读者很重要的分岔理论概念，以补充第2节的内容。

A.1. 分岔理论简述。 结构稳定性的概念基于以下定义：

定义 10。 若存在一个保定向的同胚，将 X 的轨线映射到 $\tilde{X}$ 的轨线上，同时保持 M 的区域及滑动向量场不变，则称 Ω^r 中具有切换曲面 M 的两个向量场 X 和 $\tilde{X}$ 为 M-等价。

向量场 $X \in \Omega^r$ 若存在一个邻域 $\mathcal{V} \subset \Omega^r$，使得 X 与 $\tilde{X}$ 的每个 $X \in \mathcal{V}$ 都是 M-等价的，则称其为结构稳定的。

当参数发生微小变化时，系统族的行为出现定性变化，就会发生分岔现象。任何分岔的一个重要特征是其余维，也就是说，发生该分岔所需改变的参数数量下限。在维数等于该分岔余维的任意参数空间中，分岔的展开描述了分岔附近一般可能出现的所有动力学行为。

注 3。 我们强调，X 的拓扑结构由X^+、X^-、X^s 和 φ_X构成（当这些组成部分均有定义时），还包括这些组成部分的所有迭代，参见第2.2 节和第2.3节。因此请注意，$X = (X^+, X^-)$在0 处的余维至少是X^+ 与 X^- 在0处的余维之和。为说明这一现象，在例4中，我们展示了一个余维无穷的分段光滑向量场，而 X^+ 和 X^-的余维均为零。

例4。 考虑 $X = (X^+, X^-) \in \Omega^r$，其中 $X^+(x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, -1)$，且 $X^-(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 1)$。注意，$X^+$ 和 X^-均与 M横截，因此它们是零余维的，见 [22]。切换流形M 与滑动区域 M^s重合。根据（1），滑动向量场是一个恒等于零的二维光滑向量场，也就是说，这是一个无穷余维光滑向量场。

致谢。 Rodrigo Donizete Euz´ebio 部分获得了巴西国家科学技术发展委员会（CNPq，资助项目 402060/2022-9 和 308652/2022-3）的支持。Durval Jos´e Tonon 部分获得了巴西国家科学技术发展委员会（CNPq，资助项目 310362/2021-0）的支持。Marco Antonio Teixeira 部分获得了巴西国家科学技术发展委员会（CNPq，资助项目 301646/2022-8）以及圣保罗州研究支持基金会（FAPESP，资助项目 2018/13481-0）的支持。

利益声明。 作者声明不存在利益冲突。

References

[1] V. Aframovich, *Dynamical Systems V: Bifurcation Theory and Catastrophe Theory*, 第5卷, Springer-Verlag, 1994。[2] C. Bonet、T. M. Seara、E. Fossas 和 M. R. Jeffrey, 《非光滑系统中滞后与平滑所产生相反效应的统一解释方法》, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 50（2017）, 142–168。[3] T. Carvalho、J. A. L. Cardoso 和 D. J. Tonon, 《具有滑动区域的余维一平面分段光滑向量场的标准形》, *Journal of Dynamical and Differential Equations*, 30(4)（2018）, 1899–1920。[4] D. Chillingworth, 《冲击振子的间断几何》, *Dynamical Systems*, 17（2002）, 389–420。[5] A. Colombo 和 M. R. Jeffrey, 《非确定性混沌与分段光滑流中的双折奇点》, *SIAM Journal onApplied Dynamical Systems*, 10(2)（2011）, 423–451。[6] R. Cristiano、D. J. Pagano、T. Carvalho 和 D. J. Tonon, 《退化双折奇点处的分岔与穿越极限环》, *Journal of Differential Equations*, 268(1)（2019）, 115–140。[7] J.-L. Gouze 和 T. Sari, 《生物模型中出现的一类分段线性微分方程》, *Dynamical Systems*, 17（2003）, 229–316。[8] T. de Carvalho、R. Cristiano、L. F. Gon،calves 和 D. J. Tonon, 《间歇性HIV治疗数学模型的动力学全局分析》, *Nonlinear Dynamics*, 2020。[9] T. de Carvalho 和 D. J. Tonon, 《余维一平面分段光滑向量场的标准形》, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(7)（2014）, 1450090。[10] T. de Carvalho 和 D. J. Tonon, 《 $\mathbb{R}^3$上的分段光滑向量场的结构稳定性与标准形》, *PublicationsMathématiques de Debrecen*, 86(3–4)（2015）, 255–274。[11] M. di Bernardo、C. J. Budd、A. R. Champneys 和 P. Kowalczyk, *Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*, 应用数学科学, 第163卷, Springer, 2008。[12] F. Dumortier, 《平面向量场的奇点》, *Journal of Differential Equations*, 23（1977）, 53–106。[13] A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, 数学及其应用, 第18卷, Springer, 1988。[14] O. M. Gomide 和 M. A. Teixeira, 《三维Filippov系统中的链：一种混沌现象》, *Journal de Mathématiques Pures etAppliquées*, 159（2022）, 168–195。[15] O. M. L. Gomide 和 M. A. Teixeira, 《三维Filippov系统的结构稳定性：一种半局部方法》, *MathematischeZeitschrift*, 294(1–2)（2020）, 419–449。[16] M. Guardia、T. M. Seara 和 M. A. Teixeira, 《平面Filippov系统的低余维一般分岔》, *Journal of Differential Equations*, 250(4)（2011）, 1967–2023。[17] S. Izumiya、M. C. Romero-Fuster、M. A. S. Ruas 和 F. Tari, *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*, World Scientific, 2015。[18] Y. A. Kuznetsov、S. Rinaldi 和 A. Gragnani, 《平面Filippov系统中的单参数分岔》, *International Journal ofBifurcation and Chaos*, 13(8)（2003）, 2157–2188。[19] B. Malgrange, 《可微函数的准备定理》, 载于 *Differential Analysis*, 孟买学术研讨会, 牛津大学出版社, 1964, 203–208。[20] J. Palis 和 W. de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1982。

[21] M. M. Peixoto，《二维流形上的结构稳定性》，*Topology*，1（1962），101–120。[22] J. Sotomayor 和 M. A. Teixeira，《三维流形边界附近的向量场》，载于 *Lecture Notes in Mathematics*，第1331卷，Springer，1988，169–195。[23] M. A. Teixeira，《不连续向量场的稳定性条件》，*Journal of Differential Equations*，88(1)（1990），15–29。[24] V. Utkin，《高阶滑模控制的讨论方面》，*IEEE Transactions on Automatic Control*，61(3)（2016），829–833。[25] M. R. Jeffrey，*Hidden Dynamics: The Mathematics of Switches*，*Decisions and Other Discontinuous Behaviour*，Springer International Publishing，Cham，2018。[26] M. R. Jeffrey，《切换交界处的动力学：层级、同律性与多重滑动》，*SIAM Journal on Applied DynamicalSystems*，13(3)（2014），1082–1105。[27] M. R. Jeffrey，《不连续与切换模型中的隐藏动力学》，*Physica D: Nonlinear Phenomena*，273–274（2014），34–45。[28] D. D. Novaes、M. A. Teixeira 和 I. O. Zeli，《平面Filippov系统中通向双折奇点的余维二连接的一般展开》，*Nonlinearity*，31(5)（2018），2083。[29] M. A. Teixeira 和 O. M. L. Gomide，《三维分段光滑动力系统的一般奇点》，载于 *Advances in Mathe-matics and Applications: Celebrating 50 Years of the Institute of Mathematics*，*Statistics and Scientific Computing*，*University ofCampinas*，C. Lavor 和 F. A. M. Gomes（编），Springer International Publishing，Cham，2018，第373–404页。[30] J. Sotomayor，《二维流形上向量场的一般一参数族》，*Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*，43（1974），5–46。[31] V. I. Utkin，《具有滑模的变结构系统》，*IEEE Transactions on Automatic Control*，22（1977），212–222。[32] S. M. Viˇsik，《流形边界邻域中的向量场》，*Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*，27(1)（1972），21–28。[33] S. Wiggins，*Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*，Texts in Applied Mathematics，第2卷，Springer，2003。

[1] Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Avenida Esperança s/n, Campus Samambaia, CEP 74690-900, Goiânia, Goiás, Brazil.*Email address*: euzebio@ufg.br*Email address*: djtonon@ufg.br

[2] Departamento de Matemática, IMECC, Universidade Estadual de Campinas Rua Sérgio Buarque de Holanda 651, Cidade Universitária - Barão Geraldo, 6065, Campinas, SP, Brazil.*Email address*: teixeira@ime.unicamp.br