arXiv:2602.04860v1 [math.DG] 4 Feb 2026

关于拖拉机丛与余维二类空浸入的注记

Rodrigo Mor´on 数学´系，莱´昂大学$rmors@unileon.es$
https://orcid.org/0000-0001-7651-5965

摘要

我们从外在观点研究共形托拉器丛，并将其与到洛伦兹流形中的余维二类空浸入联系起来。我们证明，至少在局部上，每一个黎曼共形结构都允许将其正规共形拖拉机丛自然实现为某个适当构造的洛伦兹外围空间之切丛的拉回。最后，我们在这一外在框架下重新表述刻画正规共形拖拉机丛平行截面的经典方程，表明它们可以完全用相应类空浸入的几何来表达。这一外在视角为平行标准拖拉机与共形和乐提供了更多几何洞见。

1 引言

共形几何有多种等价的表述方式，每一种都凸显了底层结构的不同方面，并使我们能够研究不同类别的不变量。从最基本的层面来看，光滑流形上的黎曼共形结构由一个黎曼度量等价类给出，其中两个度量等价，当且仅当它们相差一个定义在流形上的光滑正函数因子。等价地，共形结构也可以用向量丛数据来描述，这些数据编码了相同的几何信息。共形托拉器丛理论提供了这种描述，其渊源可追溯至 Thomas [11] 的工作，且此后已成为共形几何中的重要工具。在这种方法中，一个($n \geq 3$)维流形上的共形结构由一个秩为 $n+2$ 的向量丛编码，该丛配备了洛伦兹丛度量、一个特定的光状线子丛，以及一个与之相容的线性联络，称为正规拖拉机联络，参见定义 3.1 及后续讨论。共形几何的另一种等价表述由抛物型嘉当几何给出，参见例如 [1], [2] 和 [3]。在各种等价观点中，本文将仅采用拖拉机形式体系。

在近期的研究 [6], 中，研究者从外在视角考察了共形托拉器丛，并将其与洛伦兹流形中的余维二类空浸入联系起来。研究表明，给定$\widetilde{}$一个类空浸入 $\Psi\colon (M^n, g) \to (M^{n+2}, \tilde{g})$，以及一个满足适当几何条件的类光法向量场$\xi$ ，并假设内在—外在相容条件
$\widetilde{}$(9)成立，则配备诱导度量 $\tilde{g}$和联络 ∇ 的拉回丛 $\Psi^*(TM) \to M$ 自然具有正规共形拖拉机丛的结构， [6, 参见推论 3.6] 或命题 3.4。拖拉机几何的这种外在实现尤其引人注目，因为它使我们能够从子流形理论的角度重新诠释共形问题。例如，众所周知，正规共形拖拉机丛存在平行截面这一事实，在爱因斯坦度量和共形和乐的研究中发挥着核心作用（参见 [4], [5] 及其中的参考文献）；在这一外在框架下，刻画此类平行截面存在性的方程可以转化为关于浸入的几何条件，参见第 6 节。

2020 年数学主题分类。主分类 53B30、53C18、53C42。次分类 53A35、53A40、53C50。关键词。 共形几何、洛伦兹几何、类空子流形、标准牵引丛。

然而， [6] 所发展的方法依赖于具有预定性质的余维二类空浸入的先验 存在性，而文中并未论证这一假设是否成立。本文的主要目的是消除这一限制，并证明上述外在图景至少在局部总是成立的。更确切地说，设 (M, c) 是一个 n 维黎曼共形结构。固定一个代表度量 $g \in c$ 和一个定义在 M 上的可容许的一参数族 (1,1)-张量γ（可容许性的定义见第 4 节）。利用这些数据，我们构造一个洛伦兹流

$$\widetilde{M} := \mathbb{R}_{>0} \times (-\delta, \delta) \times M$$

其度量为

$$\widetilde{g} = d(rt) \otimes dt + dt \otimes d(rt) + t^2 \langle -, - \rangle_r^g, \qquad \langle V, W \rangle_r^g := g(\gamma(r)(V), W),$$

其中 $(t, r) \in \mathbb{R}_{>0} \times (-\delta, \delta)$ 且 $V, W \in \mathfrak{X}(M)$。请注意，环境度量 $\widetilde{g}$显式依赖于g 和族 γ，并定义了一个洛伦兹外围空间，其中 M 可实现为类空子流形。这族洛伦兹流形最早在 [7]中引入；其主要性质总结见第 4 节。对于任意光滑函数 $u \in C^\infty(M)$，我们定义余维二类空浸入

$$\Psi^u \colon M \longrightarrow (\widetilde{M}, \widetilde{g}), \qquad x \mapsto (e^{u(x)}, 0, x),$$

其诱导度量满足 $\Psi^{u^*}(\widetilde{g}) = e^{2u} g$. 换言之，虽然 $\widetilde{g}$ 由 g 和 γ确定，但浸入Ψ^u 还依赖于 u，后者对诱导度量进行共形缩放。这些浸入也在 [7], 中引入，不过其目的与本文不同；其主要特征总结见第 5 节。

主要结果定理 5.1 表明，当 $\widetilde{g}$ 的里奇张量沿超曲面 $\{r =_\sim 0\} \subset M$ 消失时，浸入 Ψ^u 能够以以上引入的意义恢复正规共形拖拉机丛。直接推论是，推论 5.2 表明，这一条件确定了 γ 在 $r = 0$ 处的导数，如下所示:

$$g(\dot{\gamma}(0)(-), -) = 2P^g,$$

其中 P^g 表示 g 的 Schouten 张量，定义为

$$P^g := \frac{1}{n-2}\Big(\mathrm{Ric}^g - \frac{\mathrm{S}^g}{2(n-1)} g\Big),$$

其中 Ric^g 和 S^g 分别表示度量 g 的里奇曲率和标量曲率。从这个意义上说，Schouten 张量自然地表现为一个对称的 (0，2) 型张量，它通过 Ψ^u 控制正规共形拖拉机丛的外在实现，且与函数 u 的选取无关。最后，注记 5.5 表明，至少在局部总能满足关于 γ 的这一条件。

最后，在第 6 节中，我们重新探讨正规共形拖拉机丛的平行截面的存在性问题。借助本文发展的外在实现，我们将刻画平行截面的方程重新表述为一个完全以类空浸入的几何性质为基础的方程组，见命题 6.1。接着，我们证明该方程组与度量分裂下表述的平行截面经典方程完全一致，见命题 6.3。这确立了内在描述与外在描述之间的完全等价性。此外，外在视角还为平行标准拖拉机的结构提供了更多几何洞见，并进一步凸显了余维二类空浸入作为研究共形几何的一种自然且有效的几何框架所发挥的作用。

2 子流形理论预备知识

$\widetilde{\ }$除非另有说明，我们均假设 $n \geq 2$。若（连通的）$\sim n$维流形 M 浸入到一个 $(n+2)$ 维洛伦兹流形 M 中，光滑浸入 $\Psi\colon M \to (M, \widetilde{g})$ 称为类空的，当且仅当诱导度量 $g := \Psi^*(\widetilde{g})$ 是黎曼度量。这里， $\Psi^*(\widetilde{g})$ 表示由浸入Ψ诱导的 $\widetilde{g}$ 的拉回。注意，本节也可以针对任意余维的一般情形来撰写，但我们

决定聚焦于我们感兴趣的情形，即研究浸入洛伦兹符号环境空间中的余维二类空浸入。令 $\mathfrak{X}(M)$ 表示沿 $\widetilde{\ }$ 类空浸入 Ψ的向量场的 $C^\infty(M)$–模，即拉回丛 $\Psi^*(TM) \to M$的光滑截面空间。 $\widetilde{\ }$ 每个向量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 都以自然的方式确定一个向量场 $X|_\Psi := X \circ \Psi \in \mathfrak{X}(M)$。通过以下方式，向量场 $\mathfrak{X}(M)$ 的集合可视为 $\mathfrak{X}(M)$ 的一个 $C^\infty(M)$–子模： $\overline{\ }$

$$\mathfrak{X}(M) \to \overline{\mathfrak{X}}(M), \quad V \mapsto T\Psi \cdot V,$$

其中 $T\Psi$ 表示浸入 Ψ 的微分映射，并且对于所有 $x \in M$，有 $(T\Psi \cdot V)(x) := T_x\Psi \cdot V_x$。通常，对于 $V \in \mathfrak{X}(M)$，我们有如下分解 $\overline{\ }$

$$V = T\Psi \cdot V^\top + V^\perp,$$

其中，对于所有 $x \in M$，有 $V_x^\top \in T_xM$和 $V_x^\perp \in (T_x\Psi \cdot T_xM)^\perp$。我们称 $V^\top$ 为 V的切向部分，称 $V^\perp$为 V的法向部分。沿着 Ψ的所有法向量场构成的 $\mathfrak{X}(M)$ 的 $C^\infty(M)$–子模记为 $\mathfrak{X}^\perp(M)$。必要时，我们会明确写出浸入及其微分映射。

我们和记 $\widetilde{\nabla}$ 分别表示 $\widetilde{g}$ 和 g的列维-奇维塔联络。通常，我们也将 M上的诱导联络记为 ∇。将诱导联络 ∇分解为切向部分和法向部分，便得到 Ψ 的高斯公式和魏因加滕公式如下（参见 [8, 第 4]章）：

$$\widetilde{\nabla}_V(T\Psi \cdot W) = T\Psi \cdot \nabla_V W + \mathrm{II}(V, W) \qquad \text{and} \qquad \widetilde{\nabla}_V \zeta = -T\Psi \cdot A_\zeta V + \nabla^\perp_V \zeta, \tag{1}$$

对于任意切向量场 V， $W \in \mathfrak{X}(M)$ 和 $\zeta \in \mathfrak{X}^\perp(M)$。这里， $\nabla^\perp$ 表示 M上的法联络，II 表示第二基本形式，而 A_ζ 表示与 ζ相关联的魏因加滕端同态（或形算子）。每个魏因加滕端同态 A_ζ 都是自伴的，且第二基本形式是对称的。它们还满足以下公式

$$g\left(A_\zeta V, W\right) = \widetilde{g}\left(\mathrm{II}(V, W), \zeta\right). \tag{2}$$

平均曲率向量场定义为 $\mathbf{H} = \frac{1}{n}\operatorname{trace}_g \mathrm{II}$，其中 trace_g 表示关于度量 g的迹。

现在假设沿着 Ψ存在一个全局光状法标架 $\{\xi, \ell\}$。也就是说， ξ 和 ℓ 是沿着 Ψ 全局定义的两个法向量场，满足 $\widetilde{g}(\xi,\ \xi) = \widetilde{g}(\ell,\ \ell) = 0$，并满足归一化条件 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{g}(\xi,\ \ell) = -1$。在这种情况下，拉回丛 $\Psi^*(TM) \to M$存在一个典范的向量丛同构

$$\Psi^*(T\widetilde{M}) \simeq \underline{\mathbb{R}} \oplus TM \oplus \underline{\mathbb{R}}. \tag{3}$$

在此识别下，第一个平凡线丛对应于 $\operatorname{Span}(\xi)$，中间的直和项通过 $T\Psi$ 与切丛 TM 识别，最后一个平凡线丛对应于 $\operatorname{Span}(\ell)$。另一方面，利用公式 (2)，浸入的第二基本形式可对所有V，$W \in \mathfrak{X}(M)$ 表示为

$$\mathrm{II}(V, W) = -g(A_\ell V, W)\,\xi - g(A_\xi V, W)\,\ell. \tag{4}$$

对该表达式取迹，可得平均曲率向量场为

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{n}\Big(\operatorname{trace}(A_\ell)\xi + \operatorname{trace}(A_\xi)\ell\Big). \tag{5}$$

3 共形托拉器丛与余维二类空浸入

本节回顾共形托拉器丛和拖拉机联络的概念，定义遵循 [2]。此外，还将回顾洛伦兹几何中由类空浸入提供的外在观点，正如先前在 [6] 中所讨论的那样。

定义 3.1 设 M 是一个 n维流形。那么：

• 流形 M 上的（黎曼）共形托拉器丛是一个秩为 $n+2$ 的实向量丛$\mathcal{T}\to M$，其配备了洛伦兹符号的丛度量$\mathbf{h}$以及一个指定方向的类光线子丛 $\mathcal{T}^1\subset\mathcal{T}$。

• 共形托拉器丛 $\mathcal{T}\to M$ 上的拖拉机联络 $\nabla^{\mathcal{T}}$是一种线性联络，满足$\nabla^{\mathcal{T}}\mathbf{h}=0$，且下述映射 β 是覆盖 M的向量丛同构：

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\ \beta\ } & \mathrm{Hom}\big(\mathcal{T}^1,(\mathcal{T}^1)^\perp/\mathcal{T}^1\big) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & M & \end{array}$$

其中，β 定义为

$$\beta(V_x)\big(\xi\big)=\nabla^{\mathcal{T}}_{V_x}\sigma+\mathcal{T}^1_x, \tag{6}$$

with $x\in M$, $V_x\in T_xM$, $\xi\in\mathcal{T}^1_x$ and $\sigma\in\Gamma(\mathcal{T}^1)$ any section satisfying $\sigma(x)=\xi$.

设 $(\mathcal{T},\mathcal{T}^1,\mathbf{h}\ \nabla^{\mathcal{T}})$ 是流形 M上的一个共形托拉器丛，并赋有拖拉机联络。由式 (6) 可知，每个非消失局部截面 $\sigma\in\Gamma(\mathcal{T}^1)$ 都给出如下向量丛同构：

$$\beta_\sigma\colon TM\to\Big((\mathcal{T}^1)^\perp/\mathcal{T}^1\Big),\quad V\mapsto\nabla^{\mathcal{T}}_V\sigma+\mathcal{T}^1. \tag{7}$$

因此，每个非消失局部截面 $\sigma\in\Gamma(\mathcal{T}^1)$ 都通过公式在 M 上诱导出一个黎曼度量 $\mathbf{h}^\sigma$

$$\mathbf{h}^\sigma(V,W):=\mathbf{h}(\beta_\sigma(V),\beta_\sigma(W)), \tag{8}$$

对于 $V,W\in\mathfrak{X}(M)$，任何其他非消失局部截面 $\bar\sigma\in\Gamma(\mathcal{T}^1)$ 都可写为 $\bar\sigma=f\sigma$，其中 f 是 M上的某个非消失光滑函数。因此，截面 σ 的不同选取会在 M 上诱导出共形相关的度量，进而在 M上确定一个共形类 c。若我们从黎曼共形结构 (M,c) 出发，且由 $(\mathcal{T},\mathcal{T}^1,\mathbf{h}\ \nabla^{\mathcal{T}})$ 在 M上诱导出的共形结构与 c一致，则称 $(\mathcal{T},\mathcal{T}^1,\mathbf{h}\ \nabla^{\mathcal{T}})$ 是该固定黎曼共形结构的标准共形托拉器丛。此外，还存在若干规范化条件，以确保 $n\geq 3$ 的拖拉机联络唯一；详情见 [2, 第 2 节。满足这些规范化条件的唯一拖拉机联络称为正规拖拉机联络。由此得到的结构 $(\mathcal{T},\mathcal{T}^1,\mathbf{h}\ \nabla^{\mathcal{T}})$ 由底层共形结构唯一确定（差一个同构），称为正规共形拖拉机丛。

注 3.2 考虑由数据（$\mathcal{T}$，$\mathcal{T}^1$，$\mathbf{h}\ \nabla^{\mathcal{T}}$）在 M上诱导的黎曼共形结构 c。度量 $g\in c$ 的每一种选取都为我们提供如下 $\mathcal{T}$的分解。度量 $g\in c$由定向截面 $\sigma\in\Gamma$（$\mathcal{T}^1$）通过条件 $g=\mathbf{h}^\sigma$确定，其中$\mathbf{h}^\sigma$ 由（8）给出。于是，我们得到 g-分解

$$\mathcal{T}\overset{g}{\simeq}\underline{\mathbb{R}}\oplus TM\oplus\underline{\mathbb{R}},$$

其中 $\underline{\mathbb{R}}$表示平凡丛 $M\times\mathbb{R}\to M$。第一个平凡丛 $M\times\mathbb{R}\to M$ 来自由 σ导出的 $\mathcal{T}^1$ 的平凡化。TM 的副本借助于

$$F\colon TM\to\mathcal{T},\quad V_x\mapsto\nabla^{\mathcal{T}}_{V_x}\sigma.$$

对每一个 $x\in M$给出。第二个平凡丛 $M\times\mathbb{R}\to M$ 来自唯一的类光截面$\delta\in\Gamma$（$\mathcal{T}$），使得$\mathbf{h}$（σ，δ）$=-1$且$\mathbf{h}$（δ，F（TM））$=0$。

现在我们转向类空余维二浸入到洛伦兹流形中的情形。在此背景下，[6] 探讨了如何确定这类浸入何时能够使我们将正规共形拖拉机丛还原为一个与该浸入自然相关的拉回丛。尽管其中的结果是在更一般的框架下表述的，本文将注意力限于以下情形。

设 M 为一个 n 维流形，且 $(M,\ \widetilde{g})$ 为一个 $(n+2)$ 维洛伦兹流形。考察一个类空浸入 $\Psi\colon M \to (M,\ \widetilde{g})$，其诱导度量为 g。假设沿着 Ψ 存在一个全局光状法标架 $\{\xi, \ell\}$，使得与 ξ 相关联的魏因加滕端同态满足 $A_\xi = -\mathrm{Id}$，并且 ξ 关于法联络平行，即 $\nabla^\perp \xi = 0$. 在这些假设下，对于黎曼共形结构 $(M,\ [g])$，标准共形拖拉机丛有一个自然的选取，如 [6, 命题 3.1] 所述。它由以下四元组给出

$$\big(\Psi^*(T\widetilde{M}), \mathrm{Span}(\xi), \widetilde{g}, \widetilde{\nabla}\big),$$

其中 $\Psi^*(T\widetilde{M}) \to M$ 表示 M 的切丛的拉回，特定光状线子丛 $\mathcal{T}^1$ 由张成空间(ξ)给出，拖拉机度量 $\mathbf{h}$ 是由 $\widetilde{g}$ 诱导的洛伦兹丛度量，而拖拉机联络是诱导联络 $\widetilde{\nabla}$。我们将 $\big(\Psi^*(T\widetilde{M}),$ 张成空间$(\xi)\ \widetilde{g}, \widetilde{\nabla}\big)$ 称为与对 (Ψ, ξ) 相关联的拖拉机丛。

注3.3 在上述设定中，值得注意的是，(7) 中定义的映射约化为 $\beta_\xi(V) = -T\Psi \cdot A_\xi(V) +$ 张成空间$(\xi) = T\Psi \cdot V +$ 张成空间(ξ), 因此，由 (8) 可得 $g = \mathbf{h}^\xi$。考虑到注 3.2 与魏因加滕公式 (1)，由于 ξ 关于法联络是平行的，故 (3) 中给出的分解与拖拉机丛的 g- 分解相一致。这反映了如下事实：在当前的外在构造中，特定光状线子丛 $\mathcal{T}^1$ 被等同于张成空间(ξ)，从而固定了 $\mathcal{T}^1$ 的一个整体截面。这样的选取强于一般共形托拉器丛的数据，并且等价于在共形类 $[g]$中固定一个代表度量 g。因此，在上述情形中，这一外在观点自然给出拖拉机丛的 g-分解。

本节最后回顾诱导联络与正规拖拉机联络何时重合的一个刻画。更准确地说，我们陈述 [6, Cor. 3.6] 的一个适用于当前情形的特例。

命题 3.4 令 $\big(\Psi^*(T\widetilde{M})$, 张成空间$(\xi)\ \widetilde{g}, \widetilde{\nabla}\big)$ 为与这对 (Ψ, ξ) 相关联的拖拉机丛。那么$\big(\Psi^*(T\widetilde{M})$, 张成空间$(\xi)\ \widetilde{g}, \widetilde{\nabla}\big)$ 是正规共形拖拉机丛，当且仅当 g 的里奇张量满足

$$\mathrm{Ric}^g(V,W) = \frac{n}{2}\|\mathbf{H}\|^2 g(V,W) - (n-2)\,\widetilde{g}(\mathbf{H},\xi)\,g\big(V, A_\ell W\big), \tag{9}$$

对每个 $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ 均成立。

注 3.5 尽管命题 3.4 中给出的条件对于二维黎曼共形结构也有意义，但在这种情况下，它并不能保证拖拉机联络的唯一性。

4 与共形结构相关联的一族洛伦兹流形

现在我们介绍一族洛伦兹流形，它们将作为本文所研究的浸入类的目标空间。由于这族流形已在 [7], 中介绍过，我们仅回顾后续论述所需的要点。

设 (M, c) 是一个 n 维黎曼共形结构。若光滑单参数族 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathcal{T}_{(1,1)}M$ 满足以下条件，则称其为可容许的：

1. 对每个 $r \in \mathbb{R}$，张量场 $\gamma(r)$ 关于任意度量 $g \in c$ 都是自伴的。
2. $\gamma(0) = \mathrm{Id}$。
3. 存在 $\delta > 0$，使得对于所有 $|r| < \delta$，$\gamma(r)$ 都不是奇异的。

γ 的光滑性是指：对于每个向量场 $V \in \mathfrak{X}(M)$ 以及每个点 $x \in M$，导数

$$\dot{\gamma}(r)(V_x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\gamma(r+\varepsilon)(V_x) - \gamma(r)(V_x)}{\varepsilon} \in T_x M$$

存在。特别地，张量 $\dot{\gamma}(0) \in \mathcal{T}_{(1,1)}M$ 是良定义的。我们注意到，当 M 紧致时，上述定义中的条件 3 可以删去；并且至少在局部上，δ 在一般情形下总是存在。

我们固定一个度量 $g \in c$和一个容许族 γ。对每个 $r \in \mathbb{R}$，我们在M 上如下定义一个对称张量

$$\langle V, W\rangle_r^g = g\Big(\gamma(r)(V), W\Big).$$

显然，$\langle , \rangle_0^g = g$，因此这一构造给出度量 g的一个光滑单参数变形。此外，由容许性，张量 $\langle , \rangle_r^g$ 对 $|r| < \delta$是正定的。我们现在考虑流形

$$\widetilde{M} := B \times M, \quad B := \mathbb{R}_{>0} \times (-\delta, +\delta), \tag{10}$$

在 B上具有坐标 (t, r)，并赋予洛伦兹度量

$$\widetilde{g} = d(rt) \otimes dt + dt \otimes d(rt) + t^2 \langle -, - \rangle_r^g. \tag{11}$$

$\widetilde{\ }$我们用 $\mathfrak{L}(M)$ 表示 $\mathfrak{X}(M)$ 上由 M 上的向量场经自然提升得到的向量场空间。通过$\widetilde{\ }$记号的轻微滥用，我们对向量场 $V \in \mathfrak{X}(M)$ 及其到 $\mathfrak{X}(M)$ 的提升使用相同的记号。

$\widetilde{\ }$的列维-奇维塔联络 $\widetilde{\nabla}$ $\widetilde{M}, \widetilde{g}$满足

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_t} \partial_t = \widetilde{\nabla}_{\partial_r} \partial_r = 0, \qquad \widetilde{\nabla}_{\partial_t} \partial_r = \widetilde{\nabla}_{\partial_r} \partial_t = \frac{1}{t} \partial_r,$$

$$\widetilde{\nabla}_V \partial_t = \frac{1}{t} V, \quad \widetilde{\nabla}_V \partial_r = \frac{1}{2} \gamma(r)^{-1}(\dot{\gamma}(r)(V)),$$

$$\widetilde{\nabla}_V W|_{r=0} = -\frac{1}{2t} \widetilde{g}(\dot{\gamma}(0)(V), W) \partial_t - \frac{1}{t^2} \widetilde{g}(V, W) \partial_r + \nabla_V W,$$

其中，$V, W \in \mathfrak{L}(M)$，且 ∇ 表示(M, g)的列维-奇维塔联络，见 [7, 命题 3.6]。此外，$(M, \widetilde{g})$的$\widetilde{\ }$$\widetilde{\ }$里奇张量 Ric 在 $r = 0$ 上的限制满足

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}|_{r=0}(\partial_t, \partial_t) = \widetilde{\mathrm{Ric}}|_{r=0}(\partial_t, V) = 0, \quad V \in \mathcal{L}(M),$$

and

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}|_{r=0}(V, W) = \mathrm{Ric}^g(V, W) - \frac{\mathrm{trace}(\dot{\gamma}(0))}{2} g(V, W) - \left(\frac{n-2}{2}\right) g\left(\dot{\gamma}(0)(V), W\right), \tag{12}$$

其中，$V, W \in \mathfrak{L}(M)$，且 Ric^g 表示(M, g)的里奇张量，见 [7, 推论 3.9]。因此，沿 $r = 0$里奇张量的消失可表征如下：

- For $n = 2$, it satisfies that $\widetilde{\mathrm{Ric}}|_{r=0}(V, W) = 0$ if and only if

  $$\mathrm{trace}(\dot{\gamma}(0)) = 2K^g,$$

  其中 K^g 是 g的高斯曲率。

- 对于 $n \geq 3$，它满足 $\widetilde{\mathrm{Ric}}|_{r=0}(V, W) = 0$ 当且仅当

  $$g(\dot{\gamma}(0)(-), -) = 2P^g,$$

  其中，P^g 是 g的 Schouten 张量。

注 4.1 正如 [7, 命题 3.3], 中所指出的，这族洛伦兹流形为 $(M,\ c)$ 提供了预环境空间，其意义与 [2]中引入的相同。尽管下文并不需要这一视角，但鉴于构造此类空间本身固有的困难，我们认为有必要提及这一点。

5 通过一类余维二类空浸入实现正规共形拖拉机丛

设 $(M,\ c)$ 是一个 n 维黎曼共形结构。在本节中，我们固定一个度量$\sim g \in c$和一个容许族 γ。根据这些数据，我们考虑由 (10) 和 (11) 构造的洛伦兹流形 $(M,\ \widetilde{g})$。

对于任意函数 $u \in C^\infty(M)$，我们定义映射

$$\Psi^u \colon M \to (\widetilde{M}, \widetilde{g}), \qquad x \mapsto \big(e^{u(x)}, 0, x\big), \tag{13}$$

它给出一个满足 $\Psi^{u^*}(\widetilde{g}) = e^{2u} g.$ 的类空浸入。 Ψ^u 的微分映射为 b y

$$T\Psi^u(V) = e^u V(u)\, \partial_t\big|_{\Psi^u} + V\big|_{\Psi^u}, \tag{14}$$

对每个 $V \in \mathfrak{X}(M)$ 都成立。根据 (14) 进行直接计算可知，向量场

$$\xi^u = e^u \partial_t\big|_{\Psi^u} \quad \text{and} \quad \ell^u = e^{-u}\frac{\|\nabla u\|^2}{2}\partial_t\big|_{\Psi^u} - e^{-2u}\partial_r\big|_{\Psi^u} + e^{-2u}\nabla u\big|_{\Psi^u}$$

张成了 Ψ^u 的法丛，其中 ∇u 表示函数 u 关于度量 g 的梯度，而 $\|\cdot\|$ 表示由 g 诱导的范数。此外，容易验证 $\{\xi^u, \ell^u\}$ 定义了一个全局光状法标架。

令 A_{ξ^u} 和 A_{ℓ^u} 分别表示对应于类光法向量场 ξ^u 和 ℓ^u 的魏因加滕端omorphism。则

$$A_{\xi^u} = -\mathrm{Id} \quad \text{and} \quad A_{\ell^u} = e^{-2u}\left[\frac{\dot\gamma(0) - \|\nabla u\|^2\,\mathrm{Id}}{2} + g(\nabla u, \mathrm{Id})\,\nabla u - \nabla\nabla u\right], \tag{15}$$

其中 $\nabla\nabla u$ 表示相对于列维-奇维塔联络∇ 的 u 梯度的协变导数，∇ 属于（$M,\ g$），即对所有 $V \in \mathfrak{X}$（M），$\nabla\nabla u$（V）：$= \nabla_V \nabla u$，详见 [7, 命题 4.2]。此外，ξ^u 和 ℓ^u 相对于法联络均为平行的，见 [7, 推论 4.3]。利用公式 (4)，浸入 Ψ^u 的第二基本形式 II^u 可表示为

$$\mathrm{II}^u(V,W) = -g\Big(\frac{\dot\gamma(0)(V) - \|\nabla u\|^2 V}{2} + V(u)\nabla u - \nabla_V\nabla u, W\Big)\,\xi^u + e^{2u} g(V,W)\,\ell^u, \tag{16}$$

对所有向量场 $V,\ W \in \mathfrak{X}$（M）。特别地，由公式 (5) 可得平均曲率向量场

$$\mathbf{H}^u = \frac{e^{-2u}}{n}\left(\Delta u - \frac{\mathrm{trace}(\dot\gamma(0)) - (n-2)\|\nabla u\|^2}{2}\right)\xi^u + \ell^u, \tag{17}$$

其中 Δ 表示与度量 g相关联的拉普拉斯算子。

至此，所需的全部框架均已准备就绪，可以陈述本文关于通过浸入恢复正规共形拖拉机丛的主要定理。

定理 *5.1* 设 $\big(\Psi^{u^*}(T\widetilde{M})$，张成空间 *Span(*$\xi^u$*)* $\widetilde{g}^u,\ \widetilde{\nabla}^u\big)$ 为与对偶（$\Psi^u,\ \xi^u$）相关联的拖拉机丛，其中 $\widetilde{g}^u$ 表示沿浸入 Ψ^u的度量 $\widetilde{g}$ 的限制，∇^u 为沿 Ψ^u的诱导联络。那么，$\big(\Psi^{u^*}(T\widetilde{M})$，张成空间 *Span(*$\xi^u$*)* $\widetilde{g}^u,\ \widetilde{\nabla}^u\big)$ 是正规共形拖拉机丛，当且仅当对每个 $V,\ W \in \mathfrak{L}$（M），$\widetilde{Ric}|_{r=0}$（$V,\ W$）$= 0$。

证明。 命题 3.4 将问题归结为验证 (13) 中引入的浸入 Ψ^u 满足度量 $e^{2u}g$ 的条件 (9)，当且仅当对于每个 $V,\ W \in \mathfrak{L}(M)$，里奇曲率 $|_{r=0}(V,\ W) = 0$。考虑方程 (15) 和 (17)，条件 (9) 可改写为

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}^{e^{2u}g}(V,W) = &\left(-\Delta u + \frac{\mathrm{trace}(\dot\gamma(0))}{2} - (n-2)\|\nabla u\|^2\right) g(V,W)\\ &+ \left(\frac{n-2}{2}\right) g\big(\dot\gamma(0)(V), W\big) + (n-2) g\big(\nabla u, V\big) g\big(\nabla u, W\big) - (n-2) g\big(\nabla_V\nabla u, W\big).\end{aligned}$$

另一方面，众所周知，两个共形相关度量的里奇张量满足

$$\text{里奇曲率}^{e^{2u}g} = \text{里奇曲率}^{g} - \Delta u\, g - (n-2)\|\nabla u\|^2 g + (n-2) g(\nabla u,\ -) g(\nabla u,\ -) - (n-2) g(\nabla_V \nabla u,\ W).$$

结合这些表达式并利用方程（12），证明即告完成。 ■

推论 5.2 设 $\left(\Psi^{u^*}(T\widetilde{M})\text{、张成空间}(\xi^u)\ \widetilde{g}^u\text{、}\ \widetilde{\nabla}^u\right)$ 为与该对 (Ψ^u, ξ^u)相关联的拖拉机丛。则 $\left(\Psi^{u^*}(T\widetilde{M})\text{、张成空间}(\xi^u)\ \widetilde{g}^u\text{、}\ \widetilde{\nabla}^u\right)$ 是正规共形拖拉机丛，当且仅当：

- 对于 $n = 2$，它满足条件：其中 K^g 是 g的高斯曲率。 $\operatorname{trace}(\dot{\gamma}(0)) = 2K^g,$

- 对于 $n \geq 3$，它满足条件：其中 P^g 是 g的 *Schouten* 张量。 $g(\dot{\gamma}(0)(-), -) = 2P^g,$

注记 5.3 我们回顾注记 3.5 中的结论：在 $n = 2$的情形下，规范化条件并不构成真正的规范化，因为它无法保证拖拉机联络的唯一性。

注记 5.4 如定理 5.1 所示，这些浸入能够恢复正规拖拉机联络的必要条件并不取决于浸入本身，而仅取决于洛伦兹度量 $\widetilde{g}$ 沿 $r = 0$的曲率条件。用预环境空间的术语来说，这相当于要求里奇张量沿尺度丛消失。因此，这一结果与 [2, 第 2 节5],相符，其中也出现了相同的曲率条件，尽管该处构造正规拖拉机联络的方式有所不同：它是通过商过程将预环境李维-奇维塔联络下降得到的。

注记 5.5 定理 5.1 中给出的规范化条件，或等价地，推论 5.2 中的规范化条件，至少在局部总是可以满足的。事实上，对于 $n \geq 3$，考虑曲线 $\gamma(r) = \mathrm{Id} + 2rP^g$，其中$\frown P^g(V,\ W) = g(P^g(V)\ W)$，对于 $V,\ W \in \mathfrak{X}(M)$。对于任意点 $x \in M$，存在一个开邻域$x \in \mathcal{O} \subset M$，使得 γ 在 $\mathcal{T}_{(1,1)}\mathcal{O}$上定义一个容许族。注意，特定的选择 $\gamma(r) = \widehat{\mathrm{Id} + 2rP^g}$可以替换为任何满足 $\gamma(0) = \mathrm{Id}$ 且 $\dot{\gamma}(0) = 2P^g$的曲线。这一观察使我们能够将正规共形拖拉机丛视为与余维二类空浸入相关联的拉回丛。

注 5.6 假设 $\widetilde{\mathrm{Ric}}|_{r=0} = 0$。那么 Ψ^u 满足方程 (9)。由该方程可知，$(M, e^{2u}g)$ 是爱因斯坦度量，当且仅当浸入 Ψ^u 是全脐的；特别地，共形类 c 包含爱因斯坦度量，当且仅当存在某个 $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$，使得 Ψ^u 是全脐的。为证明第一个等价关系，只需注意到由 (9) 可知，$\mathrm{Ric}^{e^{2u}g} = he^{2u}g$ 当且仅当$A_{\ell^u} = \mu\mathrm{Id}$，其中 $h, \mu \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 是某些光滑函数。于是方程 (5) 必然蕴含

$$\mu = \widetilde{g}(\mathbf{H}^u, \ell^u), \qquad \|\mathbf{H}^u\|^2 = -2\,\widetilde{g}(\mathbf{H}^u, \xi^u)\,\widetilde{g}(\mathbf{H}^u, \ell^u),$$

由这些恒等式可直接得到等价关系。此外，在这种情况下，里奇张量满足

$$\mathrm{Ric}^{e^{2u}g} = (n-1)\|\mathbf{H^u}\|^2\, e^{2u}g$$

并且，根据第 [8, 页的习题 21，对于 $n \geq 3$ 函数 $\|\mathbf{H}^u\|^2$ 必为常数。这与以下事实一致：当 $\operatorname{trace}(\dot{\gamma}(0)) = \frac{S^g}{n-1}$（这在 $\widetilde{\mathrm{Ric}}|_{r=0} = 0$ 时成立），并利用共形变换下标量曲率的变换律，公式 (17) 化为

$$\mathbf{H}^u = -\frac{1}{2n(n-1)}\, S^{e^{2u}g}\, \xi^u + \ell^u,$$

因此 $\|\mathbf{H}^u\|^2 = \frac{S^{e^{2u}g}}{n\ n-1}()$。值得注意的是，$\mathbf{H}^u$ 的这个最后表达式推广了 [9, 推论 4.5]和 [10,推论 3.7]。

6 正规共形拖拉机丛的平行截面

作为本文的总结，本节旨在重新表述正规共形拖拉机丛的平行截面存在性问题，并在情形 $n \geq 3$ 下，用与（13）族中的类空浸入相关的拉回丛来表达。下文中，我们固定选取一个满足推论 5.2 的规范化条件的容许族 γ，使得相应的拖拉机丛确实是正规共形拖拉机丛。由于正规共形拖拉机丛在同构意义下唯一，因此定理 5.1 中出现的所有正规共形拖拉机丛彼此同构。因此，不失一般性，我们可以将注意力限于情形 $u = 0$。也就是说，我们将研究与对 (Ψ^0, ξ^0) 相关的正规共形拖拉机丛。为简化记号，以下将其记为 $\big(\Psi^*(T\widetilde{M}), \mathrm{Span}(\xi)\ \widetilde{g}, \widetilde{\nabla}\big)$，并约定从现在起所有表达式中均省略上标 0。

由于正规拖拉机联络恰好就是诱导联络，研究平行截面的存在性等价于证明存在满足下式的 $W \in \mathfrak{X}(M)$

$$\widetilde{\nabla}_V W = 0, \ \text{for every } V \in \mathfrak{X}(M). \tag{18}$$

注意，我们可以将 W 分解为

$$W = T\Psi \cdot W^\top + W^\perp,$$

其中 $W^\top \in \mathfrak{X}(M)$ 且 $W^\perp \in \mathfrak{X}^\perp(M)$。因此，由 (1) 可知

$$\widetilde{\nabla}_V W = T\Psi \cdot \nabla_V W^\top + \mathrm{II}(V, W^\top) - T\Psi \cdot A_{W^\perp} V + \nabla^\perp_V W^\perp.$$

于是，方程 (18) 可等价地表述如下。

命题 6.1 设 $\big(\Psi^*(T\widetilde{M})$、张成空间$(\xi)\ \widetilde{g}$、$\widetilde{\nabla}\big)$ 为与这一对 (Ψ, ξ) 相关联的正规共形拖拉机丛。那么，当且仅当满足以下条件时，$W \in \mathfrak{X}(M)$ 是 $\big(\Psi^*(T\widetilde{M})$、张成空间$(\xi)\ \widetilde{g}$、$\widetilde{\nabla}\big)$ 的平行截面：

$$\begin{cases} \nabla_V W^\top = A_{W^\perp} V, \\ \mathrm{II}(V, W^\top) + \nabla^\perp_V W^\perp = 0. \end{cases} \tag{19}$$

对于每个 $V \in \mathfrak{X}$（M）。

注 6.2 设 $W^\perp$ 关于 $\nabla^\perp$平行。于是，根据（19）中的第二个方程，我们对每个 $V \in \mathfrak{X}(M)$得到 $\mathrm{II}(V, W^\top) = 0$。因此，由方程（16）可知，$W^\top = 0$。consequently，不存在具有纯切向分量的非平凡平行截面，即满足 $W^\perp = 0$的平行截面。尽管这一观察很初等，但它 exemplifies 了所提出框架的有效性：该框架将寻找平行 tractor 截面的问题转化为了具体的几何条件。

由于 $W^\perp \in \mathfrak{X}^\perp(M)$ 和 $\{\xi, \ell\}$ 构成一个全局法标架，$W^\perp$可分解为

$$W^\perp = W_1 \xi + W_2 \ell, \quad W_1, W_2 \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

利用（15），我们得到

$$A_{W^\perp} V = W_1 A_\xi V + W_2 A_\ell V = -W_1 V + W_2 \widehat{P}^g(V),$$

其中 $\widehat{P}^g$ 定义于注记 5.5 中。因此，（19）中的第一个方程可以改写为

$$\nabla_V W^\top = -W_1 V + W_2 \widehat{P}^g(V).$$

现在，考虑到 ξ 和 ℓ 关于法联络平行，并使用第二基本形式的公式 (16)，直接计算即可证明，(19) 中的第二个方程等价于

$$\big(-P^g(V, W^\top) + V(W_1)\big)\,\xi + \big(g(V, W^\top) + V(W_2)\big)\,\ell = 0,$$

也就是说，
等价于

$$\begin{cases} \widehat{P}^{g}(W^{\top}) = \nabla W_1, \\ W^{\top} = -\nabla W_2. \end{cases}$$

因此，我们可以得出结论：寻找正规共形拖拉机丛平行截面的问题可以改写如下。

命题 6.3 设 $\left(\Psi^{*}(T\widetilde{M})\right.$、张成空间$(\xi)$ $\widetilde{g}$为与这一对 (Ψ, ξ)相关联的正规共形拖拉机丛。设 $W \in \mathfrak{X}$ (M) 写作 —

$$W = T\Psi \cdot W^{\top} + W_1\xi + W_2\ell,$$

其中 $W^{\top} \in \mathfrak{X}(M)$ 且 $W_1, W_2 \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$。那么，当且仅当满足以下条件时， W是 $\left(\Psi^{*}(T\widetilde{M})\right.$、张成空间$(\xi)$ $\left.\widetilde{g}, \widetilde{\nabla}\right)$ 的平行截面：

$$\begin{cases} \nabla_V W^{\top} = -W_1 V + W_2 \widehat{P}^{g}(V), \\ \widehat{P}^{g}(W^{\top}) = \nabla W_1, \\ W^{\top} = -\nabla W_2, \end{cases} \tag{20}$$

对每个 $V \in \mathfrak{X}(M)$均成立。

注释 6.4 系统 (20) 与用注释 3.2 和 3.3 中引入的 g-分解表述的、刻画正规共形拖拉机丛平行截面的经典方程完全一致。特别是，这表明本文的表述 (19) 与标准拖拉机描述完全等价。关于经典方法，参见 [5]。

参考文献

˘[1] A. Cap 和 A.R. Gover，《抛物几何的托架演算》，美国数学会汇刊，**354**（2002），1511–1548。˘[2] A. Cap 和 A.R. Gover，《标准托架与共形环境度量构造》，全球分析与几何年刊，**24**（3）（2003），231–259。˘[3] A. Cap 和 J. Slov´ak，《抛物几何 I：背景与一般理论》，数学调查与专著丛书 **154**，AMS，2009年。[4] A.R. Gover，《黎曼符号下的近爱因斯坦流形与庞加莱–爱因斯坦流形》，几何与物理学杂志，**60**（2010），182–204。[5] A.R. Gover 和 P. Nurowski，《 n 维共形爱因斯坦度量的障碍》，几何与物理学杂志，**56**（2006），450–484。[6] R. Mor´on 和 F.J. Palomo，《洛伦兹流形中的正规托架共形丛与余维二类空子流形》，微分几何及其应用，**82** （2022），论文编号 101897，共 10 页。[7] R. Mor´on 和 F.J. Palomo，《洛伦兹流形中的余维二类空子流形与共形结构》，数学分析与应用杂志，**536** （2024），第 1 期，论文编号 128170。[8] B. O'Neill，《半黎曼几何及其在相对论中的应用》，学术出版社，纽约，1983年。[9] O. Palmas、F.J. Palomo 和 A. Romero，《洛伦兹–闵可夫斯基时空中紧致类空子流形的总平均曲率》，爱丁堡皇家学会学报 *A* 辑，**148** （2018），199–210。[10] F.J. Palomo 和 A. Romero，《通过光锥研究四维洛伦兹–闵可夫斯基时空中的类空曲面》，爱丁堡皇家学会学报 *A* 辑，，**143** （2013），881–892。

[11] T.Y. Thomas, 《论共形几何》, 美国国家科学院院刊, **12** (1926年), 352–359。

声明与披露

• 资金支持：作者部分获得西班牙科学与创新部和欧洲区域发展基金项目 PID2024-156031NB- I00 的支持。

• 竞争利益：作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。