多普勒正交频分复用信道的容量界

Pablo Orellana[‡§]、Zheng Li[‡]、Jean-Marc Kelif[‡]、Sheng Yang[§]和 Shlomo Shamai (Shitz)[*]
[‡] Orange Innovation，92320，沙蒂永，法国[§]巴黎-萨克雷大学、法国国家科学研究中心、CentraleSup´elec，信号与系统实验室，91190，伊维特河畔吉夫，法国
[*]以色列理工学院，海法，3200003，以色列 电子邮箱：{pablo.orellana、zheng1.li、jeanmarc.kelif}@orange.com，sheng.yang@centralesupelec.fr，sshlomo@ee.technion.ac.il

arXiv:2602.04862v1 [cs.IT] 4 Feb 2026

摘要——近地轨道（LEO）卫星系统因高速移动而受到显著的多普勒效应影响。尽管多普勒频移在很大程度上可以得到补偿，残余频率不确定性仍会造成一种结构化的信道不确定性，从而限制可达速率。我们采用如下块衰落信道对这一效应进行建模：$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{F} + s\boldsymbol{G}$，其中 s 是一个未知的标量随机参数。我们首先在一般的 $N \times N$ 多输入多输出场景下研究该模型。针对这一信道，我们基于显式传输方案推导可达速率下界，并采用对偶方法得到信道容量上界。我们研究高斯信号传输，并提出一种实用的叠加方案，该方案结合子空间对齐（SN）与连续干扰消除，其中粗层数据流作为隐式导频，用于解码细化层数据。我们刻画了近相干和高信噪比区间内的渐近容量，并通过多普勒正交频分复用仿真表明，所提出的 SN 方案以较低复杂度实现了接近最优的速率。

I. 引言

尽管 5G 实现了高吞吐量、低时延和大规模连接，但要实现无处不在的覆盖仍然颇具挑战，尤其是在偏远地区。非地面网络（NTN），特别是低地球轨道（LEO）卫星系统，是一种颇具前景的补充方案，但会受到高路径损耗、长时延和强烈多普勒效应的影响。低地球轨道卫星的高轨道速度会引起快速的频率变化，导致正交频分复用（OFDM）系统出现同步误差和载波间干扰，从而降低可实现速率。因此，理解多普勒效应对于非地面网络的设计至关重要。

尽管非地面网络中的多普勒效应已得到广泛研究，但信息论信道容量分析仍然有限。现有研究要么假设多普勒估计和补偿是理想的 [1], [2],，要么专注于多普勒估计和抑制技术 [3]–[5], ，将多普勒主要视为一种损害因素，而非信道不确定性的根源。此外，缺乏既便于解析处理又能忠实刻画多普勒效应的信道模型，进一步阻碍了信道容量分析：统计模型依赖平稳性假设 [6], ，而准确的线性时变模型通常难以解析处理。

从信息论的角度来看，众所周知，信道不确定性会导致与相干高斯情形显著不同的行为。在反向证明方面，Lapidoth 和 Moser 的对偶框架为非相干平坦衰落信道 [7]提供了紧致的信道容量上界。在可达性方面，非相干多输入多输出的几何信令方案，例如酉空时调制和格拉斯曼流形编码，刻画了未知衰落带来的自由度惩罚 [8]。一个反复出现的主题是，不确定性往往会导致非高斯最优输入：对于非相干瑞利衰落，容量达成输入是具有有限多个质量点的离散分布 [9],；相关的离散结构结果也适用于峰度约束下的莱斯模型 [10]。相位不确定性是另一个典型例子：高信噪比下的信道容量特征同样依赖于对偶性类型的论证，并且与相干加性高斯白噪声情形有根本差异 [11],[12]。这些结果促使我们开展当前工作，采用匹配的可达性方案和基于对偶性的上界研究一种结构化的多普勒诱导不确定性模型。

本文采用一种形式为 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{F} + s\boldsymbol{G}$ 的易于处理的块衰落信道对残余多普勒效应进行建模，其中 s 是一个未知的标量随机参数。我们首先在一般的 $N \times N$ 多输入多输出场景下研究这一模型。针对该信道，我们利用显式传输方案推导可达速率下界，并通过基于对偶性的途径得到信道容量上界；同时证明，秩一不确定性使系统的自由度至多为 $N-1$ 。在可达性方面，我们分析高斯信号传输，并提出一种结合子空间对齐与连续干扰消除的基于叠加的预编码方案，其中粗层的一条数据流充当隐式导频，从而使其余精化层数据流能够被解码。我们还刻画了不确定性方差较小时的近相干区间。最后，我们通过数值分析将这些结果应用于低地球轨道卫星系统中受多普勒影响的正交频分复用信道。

本文其余部分安排如下。第二节介绍系统模型和问题表述。第三节给出基于高斯信号传输的下界。第四节描述并分析所提出的方案。第五节推导信道容量上界及渐近行为。第六节将这些结果应用于受多普勒影响的正交频分复用信道，并总结全文。

II. 符号说明

标量用小写字母表示，例如 s，向量用粗体小写字母表示，例如 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$，矩阵用粗体大写字母表示（例如 $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{Q}_x$）。 $N \times N$单位矩阵为 $\boldsymbol{I}_N$。我们将$(\cdot)^T$ 和$(\cdot)^H$ 分别记为转置和埃尔米特（共轭）转置。迹、行列式和秩算子分别为tr(·)、det(·)和rank(·)。期望记为 $\mathbb{E}[\cdot]$。服从圆对称复高斯分布的随机变量/向量

记为 $\mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$。除非另有说明，加性噪声为 $\boldsymbol{z}\sim\mathcal{CN}(\mathbf{0}\mathbf{0}\mathbf{0},\boldsymbol{I}_N)$。欧几里得范数为 $\|\cdot\|$；更一般地，$\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{S}}^2:=\boldsymbol{y}^H\boldsymbol{S}\boldsymbol{y}$ 表示由 $\boldsymbol{S}\succeq 0$诱导的二次型。示性函数为$\mathbf{1}\mathbf{1}(\cdot)$，$\delta[\cdot]$ 表示克罗内克δ。弗罗贝尼乌斯范数为 $\|\cdot\|_F$。符号$(\cdot)^{\perp}$表示子空间的正交补。

III. 系统模型与问题表述

A. 动机示例：具有多普勒效应的正交频分复用信道

我们简要回顾一种标准的正交频分复用模型，以说明本文所研究的抽象信道。考虑一个离散时间L抽头多径信道

$$y[m]=e^{j2\pi\phi[m]}\sum_{l=0}^{L-1}h_l x[m-l]+z[m],\quad m=1,\dots,N+N_{\mathrm{cp}},$$

其中，$N_{\mathrm{cp}}=L-1$ 为循环前缀长度，$\{h_l\}$ 为信道抽头，$z[m]$为加性白高斯噪声。相位旋转 $\phi[m]$ 对多普勒效应进行建模，其表示为$\phi[m]=\frac{m}{N}f_d$，其中 f_d 表示以OFDM子载波间隔归一化的多普勒频移。我们假设 f_d 是随机的，但在一个OFDM符号内保持不变。

在进行循环前缀移除和离散傅里叶变换（DFT）后，频域输入输出关系可写为

$$\tilde{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{H}\tilde{\boldsymbol{x}}+\tilde{\boldsymbol{z}},\tag{1}$$

其中，$\tilde{\boldsymbol{x}}$、$\tilde{\boldsymbol{y}}$和 $\tilde{\boldsymbol{z}}$ 分别表示频域发射信号、接收信号和噪声向量，$\boldsymbol{H}\in\mathbb{C}^{N\times N}$ 为有效的多普勒-OFDM频域信道矩阵，表示为：

$$\boldsymbol{H}(i,k)=\left(\sum_{l=0}^{L-1}h_l e^{-j2\pi\frac{l}{N}k}\right)\cdot\boldsymbol{B}(i,k),\tag{2}$$

$$\boldsymbol{B}(i,k)=\frac{1}{N}\frac{\sin(\pi(f_d+k-i))}{\sin\left(\frac{\pi}{N}(f_d+k-i)\right)}e^{j2\pi\Psi(i,k)},\tag{3}$$

$$\Psi(i,k)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2L-1}{N}+1\right)f_d+\left(1-\frac{1}{N}\right)(k-i)\right],\tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{N\times N}$ 表示多普勒频移导致的载波间干扰（ICI）。在不存在多普勒频移的情况下（$f_d=0$，例如经过完美补偿后），$\boldsymbol{H}$ 为对角矩阵；多普勒频移通过非对角项引发载波间干扰。

当多普勒频移较小时，对 $\boldsymbol{H}(f_d)$在 $f_d=0$ 附近（或更一般地，在多普勒估计值 f_d附近）进行一阶泰勒展开，可得近似式

$$\boldsymbol{H}\approx\boldsymbol{F}+f_d\boldsymbol{G},\tag{5}$$

其中，对于 f_d 方差较小的情况

$$\boldsymbol{F}(i,k):=\sum_{l=0}^{L-1}h_l e^{-j2\pi\frac{l}{N}k}\delta[i-k],\tag{6}$$

$$\boldsymbol{G}(i,k):=\left(\sum_{l=0}^{L-1}h_l e^{-j2\pi\frac{l}{N}k}\right)\boldsymbol{D}(i,k),\tag{7}$$

$$\boldsymbol{D}(i,k):=\frac{\pi}{N}\frac{e^{-j\frac{\pi}{N}(k-i)}}{\sin\left(\frac{\pi}{N}(k-i)\right)}\mathbf{1}(k\neq i)+j\pi\left(1+\frac{2L-1}{N}\right)\mathbf{1}(k=i),\tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{F}$ 对应名义频域信道，$\boldsymbol{G}$ 则体现了对多普勒引起的载波间干扰的敏感性。

如果多普勒频移未能得到完美补偿，但除残余估计误差外均为已知，那么 $\boldsymbol{F}$ 不再是对角矩阵，但仍是接收机已知的确定量，而式（5）中的 f_d 表示方差较小的残余多普勒误差。这一近似引出了以下抽象信道模型。

B. 抽象信道模型

根据式（5），我们考虑以下无记忆信道：

$$\boldsymbol{y}[i]=\boldsymbol{H}[i]\boldsymbol{x}[i]+\boldsymbol{z}[i],\qquad i=1,\dots,n,\tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{x}[i]\in\mathbb{C}^N$为信道输入，$\boldsymbol{z}[i]\sim\mathcal{CN}(\mathbf{0},\boldsymbol{I}_N)$为加性白高斯噪声；信道矩阵为

$$\boldsymbol{H}[i]=\boldsymbol{F}+s[i]\boldsymbol{G},\tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}\in\mathbb{C}^{N\times N}$是固定的，且发射机和接收机均已知；$\{s[i]\}$是建模信道不确定性的独立同分布（i.i.d.）$\mathcal{CN}(0,\sigma^2)$随机变量。除非另有说明，$\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{G}$可以具有任意结构。输入满足平均功率约束

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\|\boldsymbol{x}[i]\|^2\le P.\tag{11}$$

由于信道是平稳且无记忆的，其信道容量可用单字母刻画表示为

$$C(P)=\max_{P_X:\,\mathbb{E}\|\boldsymbol{x}\|^2\le P}I(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}).\tag{12}$$

给定 $\boldsymbol{x}$时，输出 $\boldsymbol{y}$ 服从均值为$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$、协方差为的复高斯分布

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{I}_N+\sigma^2\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{G}^H.\tag{13}$$

因此，条件微分熵为

$$h(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{x})=N\log(\pi e)+\mathbb{E}\left[\log\left(1+\sigma^2\|\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}\|^2\right)\right].\tag{14}$$

全文中的对数均为自然对数，速率以奈特为单位。

IV. 高斯信号传输的可达性

我们首先研究单层高斯信号传输的可达性，即令信道输入服从 $\boldsymbol{x}\sim\mathcal{CN}(\mathbf{0},\boldsymbol{Q}_x)$，其中 $\boldsymbol{Q}_x\succeq 0$且 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_x)\le P$。

A. 最优解码

给定一个实现 $s = s_0$，信道输出服从均值为零、协方差为

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{y}|s=s_0} := \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{F} + s_0\boldsymbol{G})\boldsymbol{Q}_x(\boldsymbol{F} + s_0\boldsymbol{G})^H. \tag{15}$$

因此，$\mathrm{P}_{\boldsymbol{y}|s=s_0} = \mathcal{CN}\Big(\mathbf{0},\, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{y}|s=s_0}\Big)$，且条件微分熵为

$$h(\boldsymbol{y} \mid s) = N\log(\pi e) + \mathbb{E}_s\Big[\log\det\big(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{y}|s}\big)\Big]. \tag{16}$$

由于条件化会降低熵，

$$I(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = h(\boldsymbol{y}) - h(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}) \geq h(\boldsymbol{y} \mid s) - h(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}). \tag{17}$$

利用 $\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}$ 的条件协方差结构，可得

$$I(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \geq \mathbb{E}_s\Big[\log\det\big(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{y}|s}\big)\Big] - \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\Big[\log\Big(1 + \sigma^2\,\|\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}\|^2\Big)\Big]. \tag{18}$$

对第二项应用詹森不等式，可得以下结果。

命题 1（高斯信号传输与最优解码）。信道容量满足

$$C(P) \geq \max_{\boldsymbol{Q}_x \succeq 0:\, \mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_x) \leq P} R_G(\boldsymbol{Q}_x), \tag{19}$$

其中

$$R_G(\boldsymbol{Q}_x) := \mathbb{E}_s\Big[\log\det\big(\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{F} + s\boldsymbol{G})\boldsymbol{Q}_x(\boldsymbol{F} + s\boldsymbol{G})^H\big)\Big] - \log\big(1 + \sigma^2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{G}^H)\big). \tag{20}$$

当 $\sigma^2 = 0$ 时，下界 (19) 是紧的，并且与信道容量一致；此时信道可简化为矩阵为 $\boldsymbol{F}$ 的确定性多输入多输出信道。

B. 线性接收机与广义互信息界

除了采用最优接收机外，也可以使用次优线性接收机，对应于以下下界。

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) &= h(\boldsymbol{x}) - h(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) && (21)\\ &= h(\boldsymbol{x}) - h(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{y}) && (22)\\ &\geq h(\boldsymbol{x}) - h(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})) && (23)\\ &\geq \log\det(\boldsymbol{Q}_x) - \log\det(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{LMMSE}}_{x|y}), && (24)\end{aligned}$$

其中，(22) 利用了给定随机变量时微分熵的平移不变性，(23) 基于条件化会降低熵，(24) 则基于在协方差固定时，高斯随机向量使微分熵最大这一事实。我们选择线性最小均方误差估计器作为接收机，其误差协方差为

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{LMMSE}}_{x|y} := \mathbb{E}\Big[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{y})^H\Big], \tag{25}$$

其中 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y})$是与二阶统计量相匹配的线性最小均方误差估计器矩阵。于是，输出协方差 $\boldsymbol{Q}_y$ 和输入输出互协方差 $\boldsymbol{Q}_{xy}$ 为

$$\boldsymbol{Q}_y = \mathbb{E}[\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^H] = \boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{F}^H + \boldsymbol{R}_0,$$

and

$$\boldsymbol{Q}_{xy} = \mathbb{E}[\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^H] = \boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{F}^H.$$

因此，线性最小均方误差估计器为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{Q}_{xy}\boldsymbol{Q}_y^{-1} && (26)\\ &= \boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{F}^H(\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{F}^H + \boldsymbol{R}_0)^{-1}, && (27)\end{aligned}$$

将 (27) 代入 (25) 并进行一些代数运算后，可得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{LMMSE}}_{x|y} = \big(\boldsymbol{Q}_x^{-1} + \boldsymbol{F}^H\boldsymbol{R}_0^{-1}\boldsymbol{F}\big)^{-1}, \tag{28}$$

其中 等效干扰协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_0$ 为

$$\boldsymbol{R}_0 := \boldsymbol{I} + \sigma^2\,\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{G}^H. \tag{29}$$

于是，我们得到以下采用高斯输入和线性接收机的下界。

命题2（采用线性接收机的高斯信号传输）。信道容量满足

$$C(P) \geq \max_{\boldsymbol{Q}_x \succeq 0:\, \mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_x) \leq P} R_G^{\mathrm{Lin}}(\boldsymbol{Q}_x), \tag{30}$$

其中

$$R_G^{\mathrm{Lin}}(\boldsymbol{Q}_x) := \log\det\big(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{F}^H(\boldsymbol{I} + \sigma^2\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{G}^H)^{-1}\boldsymbol{F}\big). \tag{31}$$

界（30）是广义互信息（GMI）[13],的一个实例，即采用高斯码本以及与LMMSE误差协方差相匹配的最近邻解码度量所能达到的速率 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{LMMSE}}_{x|y}$。当 $\sigma^2 = 0$时，该界是紧的，因为此时失配度量与匹配解码器相一致。

虽然线性接收机简单且实用，但它将自干扰视为无结构噪声，从而产生有效扰动协方差 $\boldsymbol{R}_0$ ，该协方差在高信号功率或较大不确定性 σ^2下可能占主导。相比之下，最优解码利用了信道不确定性的结构，但会导致解码度量非凸且在实践中难以实现。这一差距促使下一节提出叠加与子空间对齐方案。

V. Superposition Coding and Subspace Alignment

我们考虑一种包含两个独立层的叠加编码方案，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_d + \boldsymbol{x}_p, \tag{32}$$

其中 $\boldsymbol{x}_p$ 承载首先被解码并充当隐式导频的粗层，而 $\boldsymbol{x}_d$ 承载精细数据层，从而引发连续干扰消除（SIC）。精化层被线性预编码为

$$\boldsymbol{x}_d = \boldsymbol{V}\boldsymbol{w}_d, \tag{33}$$

其中 $\boldsymbol{w}_d \in \mathbb{C}^M$ with $M \leq N$，且 $\boldsymbol{V} \in \mathbb{C}^{N\times M}$ 是半酉（$\boldsymbol{V}^H\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}$），并且仅取决于已知的信道参数。将 $\boldsymbol{x}_p = 0$ 和 $M = N$设定为相应值即可恢复单层高斯方案，而基于导频的方案

对应于一个确定性的非零 $\boldsymbol{x}_p$。可达速率可分解为

$$I(\boldsymbol{w}_d, \boldsymbol{x}_p; \boldsymbol{y}) = I(\boldsymbol{x}_p; \boldsymbol{y}) + I(\boldsymbol{w}_d; \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}_p). \tag{34}$$

我们设计 $\boldsymbol{V}$，使精化层与一个对未知系数 s不变的接收端子空间对齐，从而能够在无需信道知识的情况下解码 $\boldsymbol{x}_p$，然后利用其解码 $\boldsymbol{w}_d$。

A. 子空间对齐预编码

引理 1. 令 $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{N\times N}$。存在一个半酉矩阵 $\boldsymbol{V} \in \mathbb{C}^{N\times(N-1)}$，满足 $\boldsymbol{V}^H\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}_{N-1}$，使得

$$\operatorname{rank}\big[\boldsymbol{F}\boldsymbol{V} \;\; \boldsymbol{G}\boldsymbol{V}\big] \le N-1.$$

我们将所有此类矩阵 $\boldsymbol{V}$记为 $\mathcal{V} := \mathcal{V}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$ 集合。

证明。 我们证明，总能找到一个非零 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^N$以及一个列向量属于 $\ker(\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{F}) \cap \ker(\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{G})$ 的半酉 $\boldsymbol{V}$。于是 $\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{F}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{G}\boldsymbol{V} = 0$，因此$[\boldsymbol{F}\boldsymbol{V} \;\; \boldsymbol{G}\boldsymbol{V}]$ 的每一列都属于 $\boldsymbol{w}^\perp$，从而 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{F}\boldsymbol{V} \;\; \boldsymbol{G}\boldsymbol{V}] \le \dim(\boldsymbol{w}^\perp) = N-1$。

情况 *1*：秩$(\boldsymbol{F}) < N$。取 $\boldsymbol{w} \in \ker(\boldsymbol{F}^H) \setminus \{0\}$，因此 $\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{F} = 0$。若 $\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{G} = 0$，则对所有 $\boldsymbol{V}$都有 $\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{G}\boldsymbol{V} = 0$。否则，$\ker(\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{G})$ 的余维为 1，因此维数为$N-1$。选取 $\boldsymbol{V}$，其列构成 $\ker(\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{G})$ 的标准正交基。根据构造，$\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{F}\boldsymbol{V} = 0$ 且 $\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{G}\boldsymbol{V} = 0$。

情况 *2*：秩$(\boldsymbol{G}) < N$。对称地，取 $\boldsymbol{w} \in \ker(\boldsymbol{G}^H)\backslash\{0\}$，并令 $\boldsymbol{V}$ 的标准正交列张成 $\ker(\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{F})$（维数为 $N-1$）。于是 $\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{G}\boldsymbol{V} = 0$ 且 $\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{F}\boldsymbol{V} = 0$。

情况 *3*：秩$(\boldsymbol{F})$ =秩$(\boldsymbol{G}) = N$。考虑矩阵铅笔 $\boldsymbol{F} + t\boldsymbol{G}$ 和多项式 $p(t) = \det(\boldsymbol{F} + t\boldsymbol{G})$，其次数为 N，且首项系数和常数项均非零（$\det(\boldsymbol{G}) \neq 0$，$\det(\boldsymbol{F}) \neq 0$）。根据代数基本定理，$p$ 有一个根 $t_\star \in \mathbb{C}$，因此 $\boldsymbol{F} + t_\star\boldsymbol{G}$ 是奇异矩阵。设 $\boldsymbol{w} \neq 0$ 满足 $(\boldsymbol{F} + t_\star\boldsymbol{G})^H\boldsymbol{w} = 0$，即 $\boldsymbol{F}^H\boldsymbol{w} = -t_\star^*\boldsymbol{G}^H\boldsymbol{w}$，因此 $\boldsymbol{F}^H\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{G}^H\boldsymbol{w}$ 共线。因此 $\ker(\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{F}) = \ker(\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{G})$ 是一个维数为 $N-1$ 的超平面。选取 $\boldsymbol{V}$，其标准正交列张成这个公共核。于是 $\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{F}\boldsymbol{V} = 0$ 且$\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{G}\boldsymbol{V} = 0$。

在所有情况下，这样的半酉 $\boldsymbol{V}$ 都存在，并且满足秩 $[\boldsymbol{F}\boldsymbol{V} \;\; \boldsymbol{G}\boldsymbol{V}] \le N-1$。 □

为方便起见，定义

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{V}) := \mathcal{S}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{V}) := \operatorname{span}\big(\boldsymbol{F}\boldsymbol{V}, \boldsymbol{G}\boldsymbol{V}\big),$$

并将 $\mathcal{S}^\perp(\boldsymbol{V}) := \mathcal{S}^\perp(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{V})$ 定义为维数为$d_\perp$的零空间；令 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{U}_\perp$ 为半酉矩阵，其列分别构成 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}^\perp$的标准正交基。

精化层信号经过预编码后为 $\boldsymbol{x}_d = \boldsymbol{V}\boldsymbol{w}_d$，其中$\boldsymbol{w}_d \sim \mathcal{CN}(0,\ \boldsymbol{Q}_d)$ 满足 $\boldsymbol{Q}_d \succeq 0$和 $P_d := \operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}_d) \le P$，而$\boldsymbol{V} \in \mathcal{V}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$ 是可优化的预编码器。由引理 1 可知，对于任意 s 和 $\boldsymbol{w}_d$，$\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_d = (\boldsymbol{F}\boldsymbol{V} + s\boldsymbol{G}\boldsymbol{V})\boldsymbol{w}_d$ 的列均属于 $\mathcal{S}(\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{G},\ \boldsymbol{V})$，也就是说，精化层被限制在一个固定的接收端子空间中，其维数至多为 $N-1$，且与 s 的实现无关。

B. 粗层编码与解码

接收信号为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_d + \boldsymbol{z}$。根据数据处理不等式，

$$I(\boldsymbol{x}_p; \boldsymbol{y}) \ge I(\boldsymbol{x}_p; \boldsymbol{U}_\perp^H\boldsymbol{y}) = I(\boldsymbol{x}_p; \boldsymbol{U}_\perp^H\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{U}_\perp^H\boldsymbol{z}). \tag{35}$$

选取一个固定的单位向量 $\boldsymbol{v}_p$，并且

$$\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{v}_p w_p,$$

其中 $w_p \sim \mathrm{P}^{w_p}$ 满足 $\mathbb{E}|w_p|^2 \le P_p := P - P_d$。因此，粗层的可达速率为

$$R_p(\mathrm{P}_{w_p}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{v}_p) := I\Big(w_p;\ (\boldsymbol{U}_\perp^H\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_p + s\boldsymbol{U}_\perp^H\boldsymbol{G}\boldsymbol{v}_p)w_p + \boldsymbol{z}_p\Big),$$

其中 $\boldsymbol{z}_p := \boldsymbol{U}_\perp^H\boldsymbol{z} \sim \mathcal{CN}(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{I})$；速率仅通过子空间 $\mathcal{S}(\boldsymbol{V})$ 依赖于 $\boldsymbol{U}_\perp$，因为高斯噪声是各向同性的。取 $\boldsymbol{U}_\perp$ 的任意一列，例如 $\boldsymbol{u}_\perp$，即可得到一个标量莱斯信道，其确定性分量为 $\boldsymbol{u}_\perp^H\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_p$，随机分量为 $s\,\boldsymbol{u}_\perp^H\boldsymbol{G}\boldsymbol{v}_p \sim \mathcal{CN}\big(0,\ |\boldsymbol{u}_\perp^H\boldsymbol{G}\boldsymbol{v}_p|^2\big)$。

C. 通过正交投影从 $\boldsymbol{x}_p$ 估计 s

解码粗层后，我们减去其确定性贡献，并定义

$$\tilde{\boldsymbol{y}} := \boldsymbol{y} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_p = s\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}_p + (\boldsymbol{F} + s\boldsymbol{G})\boldsymbol{V}\boldsymbol{w}_d + \boldsymbol{z}. \tag{36}$$

为消除精细层信号，我们将 $\tilde{\boldsymbol{y}}$ 投影到正交补 $\mathcal{S}^\perp$ 上。定义

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_\perp := \boldsymbol{U}_\perp^H\tilde{\boldsymbol{y}} = s\boldsymbol{U}_\perp^H\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{z}_\perp, \qquad \boldsymbol{z}_\perp \sim \mathcal{CN}(0, \boldsymbol{I}_{d_\perp}), \tag{37}$$

其中 $\boldsymbol{U}_\perp^H\boldsymbol{F}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}_\perp^H\boldsymbol{G}\boldsymbol{V} = 0$ 按照构造成立。因此，精细层贡献被完全消除，且 $\tilde{\boldsymbol{y}}_\perp$ 仅依赖于 $(s,\ \boldsymbol{x}_p)$ 和噪声。

假设 $s \sim \mathcal{CN}(0,\ \sigma^2)$，这对 $(s,\ \tilde{\boldsymbol{y}}_\perp)$ 服从联合高斯分布，且由 $\tilde{\boldsymbol{y}}_\perp$ 估计 s 的最小均方误差估计器与线性最小均方误差估计器一致，

$$\hat{s} = (\|\boldsymbol{g}_\perp\|^2 + \sigma^{-2})^{-1}\boldsymbol{g}_\perp^H\tilde{\boldsymbol{y}}_\perp, \tag{38}$$

其中 $\boldsymbol{g}_\perp := \boldsymbol{U}_\perp^H\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}_p$。相应的误差方差为

$$\sigma_{e_s}^2 = \mathbb{E}\big[|s - \hat{s}|^2\big] = (\|\boldsymbol{g}_\perp\|^2 + \sigma^{-2})^{-1} \tag{39}$$

给定 $\boldsymbol{x}_p$ 后，估计器的输出满足

$$\hat{s} \mid \boldsymbol{x}_p \sim \mathcal{CN}\big(0, \sigma^2 - \sigma_{e_s}^2\big),$$

并且估计误差 $e_s := s - \hat{s}$ 与 $\hat{s}$ 相互独立。注意，$\|\boldsymbol{g}_\perp\|^2$ 仅通过 $\mathcal{S}(\boldsymbol{V})$ 依赖于 $\boldsymbol{U}_\perp$，因此估计噪声误差仅取决于 $\boldsymbol{V}$。

D. 给定 $(\hat{s},\ \boldsymbol{x}_p)$ 时 $\boldsymbol{w}_d$ 的条件线性最小均方误差

我们使用来自 (38) 的边信息 $\hat{s}$ 对精化层进行解码。首先，我们消除粗层中估计出的随机分量：

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_1 := \tilde{\boldsymbol{y}} - \hat{s}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}_p = (\boldsymbol{F} + \hat{s}\boldsymbol{G})\boldsymbol{V}\boldsymbol{w}_d + e_s\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{V}\boldsymbol{w}_d) + \boldsymbol{z}. \tag{40}$$

然后，我们投影到对齐的精细层子空间 $\mathcal{S}$上。

$$\boldsymbol{y}_{\mathcal{S}} := \boldsymbol{U}^H\tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tag{41}$$

其中，投影高斯噪声 $\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{z}$ 与仅取决于 $\boldsymbol{z}_\perp = \boldsymbol{U}_\perp^H\boldsymbol{z}$ 的估计噪声 e_s 相互独立。

在给定 $(\hat{s},\ \boldsymbol{x}_p)$ 的条件下，我们可以计算协方差$\boldsymbol{C}_{wy_S\,|\,\hat{s},\ \boldsymbol{x}_p}$和 $\boldsymbol{C}_{y_Sy_S\,|\,\hat{s},\ \boldsymbol{x}_p}$并应用线性最小均方误差估计器

$$\hat{\boldsymbol{w}}_d(\hat{s},\boldsymbol{x}_p,\boldsymbol{y}_S) := \boldsymbol{C}_{wy_S\,|\,\hat{s},\boldsymbol{x}_p}\,\boldsymbol{C}^{-1}_{y_Sy_S\,|\,\hat{s},\boldsymbol{x}_p}\,\boldsymbol{y}_S, \tag{42}$$

其中，条件协方差通过有效信道 $(\boldsymbol{F}+\hat{s}\boldsymbol{G})\boldsymbol{V}$依赖于$\hat{s}$，并取决于由$e_s$引起的干扰。利用标准方法，我们可以推导出相应的条件线性最小均方误差协方差

$$\boldsymbol{C}_e(\hat{s},\boldsymbol{x}_p) := \Big(\boldsymbol{Q}_d^{-1} + \boldsymbol{V}^H(\boldsymbol{F}+\hat{s}\boldsymbol{G})^H\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R}^{-1})\boldsymbol{U}^H(\boldsymbol{F}+\hat{s}\boldsymbol{G})\boldsymbol{V}\Big)^{-1}, \tag{43}$$

with

$$\boldsymbol{R} := \boldsymbol{I}_{N-d_\perp} + \boldsymbol{U}^H\sigma_{e_s}^2\,\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_p\boldsymbol{x}_p^H + \boldsymbol{V}\boldsymbol{Q}_d\boldsymbol{V}^H)\boldsymbol{G}^H\boldsymbol{U}. \tag{44}$$

尽管对于固定的$\hat{s}$ 和 $\boldsymbol{w}_d$，(42) 关于 $\boldsymbol{y}_S$ 是线性的，但总体映射 $\tilde{\boldsymbol{y}} \mapsto \hat{\ }\boldsymbol{w}_d$ 通常并非线性，因为滤波器系数取决于随机变量 $\hat{s}$。等价地，接收机采用了一个由$\hat{s}$索引的随机线性滤波器。

E. 可达速率

现在，我们采用与第四节-B中相同的最近邻度量失配解码器。因此，精化层的可达速率为

$$I(\boldsymbol{w}_d;\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{x}_p,\hat{s}) = h(\boldsymbol{w}_d) - h\big(\boldsymbol{w}_d-\hat{\boldsymbol{w}}_d\mid\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_p,\hat{s}\big), \tag{45}$$

下界为 $\log\det(\boldsymbol{Q}_d) - \mathbb{E}_{\hat{s},\ \boldsymbol{x}_p}\Big[\log\det\big(\boldsymbol{C}_e(\hat{s},\ \boldsymbol{x}_p)\big)\Big]$。回忆一下，$\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{v}_p w_p$ 在满足 $w_p \sim \mathrm{P}^{w_p}$的条件下，我们有如下可达速率 $R_d(\mathrm{P}^{w_p},\ \boldsymbol{Q}_d,\ \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{v}_p)$:

$$\mathbb{E}_{\hat{s},\boldsymbol{x}_p}\Bigg[\log\det\Big(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q}_d\boldsymbol{V}^H(\boldsymbol{F}+\hat{s}\boldsymbol{G})^H\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R}^{-1})\boldsymbol{U}^H(\boldsymbol{F}+\hat{s}\boldsymbol{G})\boldsymbol{V}\Big)\Bigg], \tag{46}$$

其中，期望是针对$(\boldsymbol{x}_p,\ \hat{s})$的联合分布取的。

结合两层的下界，我们得到子空间对齐方案的可达速率。

命题3（采用子空间对齐的叠加编码）。信道容量满足

$$C(P) \ \geq \max_{\mathrm{P}_{w_p},\,\boldsymbol{V},\,\boldsymbol{v}_p,\,\boldsymbol{Q}_d} R_{\mathrm{SA}}(\mathrm{P}_{w_p},\boldsymbol{V},\boldsymbol{v}_p,\boldsymbol{Q}_d), \tag{47}$$

满足功率约束以及对齐约束 $\boldsymbol{V}\in\mathcal{V}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$，其中

$$R_{\mathrm{SA}} := R_p + R_d.$$

一个特别相关的特例是，当 P^{w_p} 选为狄拉克测度时，$\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{v}_p w_p$ 便成为确定性的。在这种情况下，可达速率化简为$R_{\mathrm{SA}} = R_d(\boldsymbol{Q}_d,\ \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{v}_p)$，因为粗层不传递任何信息。在这些条件下，所提出的策略实际上专门化为一种纯粹基于导频的传输方案。在许多参数范围内，与叠加编码相比，使用确定性导频造成的速率损失可以忽略不计，因为粗层的主要作用是帮助可靠地估计状态变量 s。

VI. 信道容量上界

我们利用对偶性（变分）上界来约束互信息

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) &= h(\boldsymbol{y}) - h(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{x}) \\ &\leq \mathbb{E}\left[\log\frac{1}{q(\boldsymbol{y})}\right] - h(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{x}), \end{aligned} \tag{48}$$

对任意概率密度函数 $q(\boldsymbol{y})$ 均成立，其中期望是相对于由 $P_XP_{Y|X}$ 诱导的真实输出分布 P_Y 计算的。

一种标准方法是针对经过平滑参数化的族 $\{q_\theta,\theta\in\Theta\}$ 对式 (48) 进行优化。本文考虑 Lapidoth–Moser [7] 提出的正则化伽马族:

$$q_\theta(\boldsymbol{y}) = c_\theta\left(\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{S}}^2+\delta\right)^{\alpha-1}\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{S}}^{2(1-N)}\,e^{-(\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{S}}^2+\delta)/\beta}, \tag{49}$$

其中 $\theta := (\alpha>0,\beta>0,\delta\geq 0,\boldsymbol{S}\succ 0)$，$\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{S}}^2 := \boldsymbol{y}^H\boldsymbol{S}\boldsymbol{y}$，且 $c_\theta := \Gamma(N)\,\det(\boldsymbol{S})\,\pi^N\beta^\alpha\Gamma(\alpha,\delta/\beta)$ $\Gamma(\alpha,\xi) := \int_\xi^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt.$ 为方便起见，我们将输入限制为具有有界支撑$\mathcal{X}(r) = \{\boldsymbol{x}:\|\boldsymbol{x}\|\leq r\}$。这可确保数值稳定性，且不失一般性，因为所得上界取决于 r，并且可以任意增大。我们进一步设定 $\delta = 0$ 并假设 $\alpha\leq N$，并选择$\beta := \beta(\boldsymbol{Q}_x,\boldsymbol{S})$ $= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\big[\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{S}}^2\big]$。代入所选的$q_\theta$后，式 (48) 中的微分交叉熵项可写为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\log\frac{1}{q(\boldsymbol{y})}\right] &= \alpha\log\beta(\boldsymbol{Q}_x,\boldsymbol{S}) + \log\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(N)} + \alpha + N\log\pi \\ &\quad - \log\det(\boldsymbol{S}) + (N-\alpha)\mathbb{E}\left[\log\left(\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{S}}^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{50}$$

对关于 $(s,\boldsymbol{z})$ 的条件对数矩应用詹森不等式，得到

$$\mathbb{E}_{s,\boldsymbol{z}}\Big[\log\big(\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{S}}^2\big)\,\Big|\,\boldsymbol{x}\Big] \leq \log\left(\mathbb{E}_{s,\boldsymbol{z}}\Big[\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{S}}^2\,\Big|\,\boldsymbol{x}\Big]\right), \tag{51}$$

其中 $\mathbb{E}_{s,\boldsymbol{z}}\big[\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{S}}^2\,\big|\,\boldsymbol{x}\big] = \gamma(\boldsymbol{S},\boldsymbol{x})$，且

$$\gamma(\boldsymbol{S},\boldsymbol{x}) := \mathrm{tr}(\boldsymbol{S}) + \boldsymbol{x}^H\big(\boldsymbol{F}^H\boldsymbol{S}\boldsymbol{F} + \sigma^2\boldsymbol{G}^H\boldsymbol{S}\boldsymbol{G}\big)\boldsymbol{x}. \tag{52}$$

对 $\boldsymbol{x}$ 取期望，得到

$$\beta(\boldsymbol{Q}_x,\boldsymbol{S}) = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{tr}\Big(\boldsymbol{S}\big(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{F}^H + \sigma^2\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{G}^H\big)\Big). \tag{53}$$

将 (51) 和 (52) 代入 (50)，并结合 (14)，(48) 中的上界可写为

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) &\leq \alpha\log\beta(\boldsymbol{Q}_x,\boldsymbol{S}) + \log\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(N)} + \alpha - N \\ &\quad - \log\det(\boldsymbol{S}) + \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[\log\frac{\gamma(\boldsymbol{S},\boldsymbol{x})^{N-\alpha}}{1+\sigma^2|\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}\|^2}\right], \end{aligned} \tag{54}$$

再将关于 $\boldsymbol{x}$ 的期望用关于 $\mathcal{X}(r)$ 的上确界替代，可得以下结果。

命题4。信道容量的上界为

$$C(P,r) \leq \max_{\substack{\boldsymbol{Q}_x\succeq 0\\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_x)\leq P}}\ \inf_{\substack{\alpha\in(0,N]\\ \boldsymbol{S}\succeq 0}} R_{\mathrm{UB}}(\alpha,\boldsymbol{S},\boldsymbol{Q}_x), \tag{55}$$

其中

$$R_{\mathrm{UB}}(\alpha,\boldsymbol{S},\boldsymbol{Q}_x) := \alpha\log\beta(\boldsymbol{Q}_x,\boldsymbol{S}) + \log\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(N)} + \alpha - N - \log\det(\boldsymbol{S}) + \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}(r)} \log\left(\frac{\gamma(\boldsymbol{S},\boldsymbol{x})^{N-\alpha}}{1+\sigma^2\|\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}\|^2}\right). \quad (56)$$

即使不求解最小化问题，通过固定 α 和 $\boldsymbol{S}$也能得到有效的上界。特别是，选择 $\alpha = N$和 $\boldsymbol{S} = \det(\boldsymbol{\Sigma_y})^{1/N}\boldsymbol{\Sigma_y}^{-1}$，其中

$$\boldsymbol{\Sigma_y} := \boldsymbol{I} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{F}^H + \sigma^2\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{G}^H, \quad (57)$$

得出

$$R_{\mathrm{UB}} = \alpha\log\beta = \log\det(\boldsymbol{\Sigma_y}). \quad (58)$$

因此，

$$C(P) \le \max_{\substack{\boldsymbol{Q}_x\succeq 0\\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_x)\le P}} \log\det\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{F}^H + \sigma^2\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{G}^H\right), \quad (59)$$

当 $\sigma^2 = 0$ 时该式取等。

A. 小 σ 区间

当 σ 较小时，平凡上界 (59) 得出 $C(P) \le C_G(P) + O(\sigma^2)$，其中 $C_G(P)$ 表示在 $\sigma = 0$ 时得到的确定性信道的信道容量。$O(\sigma^2)$ 项为正，且当 $\sigma \to 0$ 时与 σ^2 成正比。

该 $O(\sigma^2)$ 项由 (59) 得出，如下所示

$$\begin{aligned} C(P) &\le \max_{\substack{\boldsymbol{Q}_x\succeq 0\\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_x)\le P}} \left(\log\det\boldsymbol{\Sigma}_0 + \log\det(\boldsymbol{I} + \sigma^2\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{G}^H)\right) && (60)\\ &\le C_G(P) + \max_{\substack{\boldsymbol{Q}_x\succeq 0\\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_x)\le P}} \log\det(\boldsymbol{I} + \sigma^2\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{G}^H) && (61)\\ &\le C_G(P) + \max_{\substack{\boldsymbol{Q}_x\succeq 0\\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_x)\le P}} \sigma^2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{G}^H) && (62)\\ &\le C_G(P) + \sigma^2 f(P) && (63)\\ &\le C_G(P) + O(\sigma^2, P) && (64) \end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{\Sigma}_0 = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{F}^H$是确定性信道的协方差；对于 $A \succeq 0$，由 $\log\det(\boldsymbol{I} + A) \le \mathrm{tr}(A)$ 可得 (62)，且扰动项按 σ^2 的阶缩放；在 (63) 中，我们定义

$$f(P) = \max_{\substack{\boldsymbol{Q}_x\succeq 0\\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_x)\le P}} \mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{G}^H), \quad (65)$$

其中，$f(P)$ 是功率约束的函数。如果 $f(P)$ 有界，那么对于所有 P，扰动项均为 $O(\sigma^2)$。

另一方面，根据（19）中的可达下界 R_G，我们得到 $C(P) \ge C_G(P) + O(\sigma^2)$，其中 $O(\sigma^2)$ 项为负，且其阶为 σ^2。事实上，由于 s 为高斯，扰动 $\Delta(s) := (\boldsymbol{F} + s\boldsymbol{G})\boldsymbol{Q}_x(\boldsymbol{F} + s\boldsymbol{G})^H - \boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{F}^H$呈现指数衰减尾部：当 $\sigma \to 0$时，其概率 that $\|\Delta(s)\| \ge 1$呈指数级小。在这种情况下，$O(\sigma^2)$项由（18）如下得到

$$\begin{aligned} C(P) &\ge \max_{\substack{\boldsymbol{Q}_x\succeq 0\\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_x)\le P}} \left(\mathbb{E}_s\left[\log\det(\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{F} + s\boldsymbol{G})\boldsymbol{Q}_x(\boldsymbol{F} + s\boldsymbol{G})^H\right] - \log\left(1 + \sigma^2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{G}^H)\right)\right) && (66)\\ &= \max_{\substack{\boldsymbol{Q}_x\succeq 0\\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_x)\le P}} \left(\log\det\boldsymbol{\Sigma}_0 + \mathbb{E}_s\left[\log\det(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\Delta(s))\right] - \log\left(1 + \sigma^2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{G}^H)\right)\right). && (67) \end{aligned}$$

Let $\boldsymbol{Q}_x^* = \arg\max_{\substack{\boldsymbol{Q}_x\succeq 0\\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_x)\le P}} \log\det\boldsymbol{\Sigma}_0$, so that

$$C_G(P) = \log\det\boldsymbol{\Sigma}_0^*, \quad (68)$$

且 $\boldsymbol{\Sigma}_0^*$ 是采用最优输入协方差 $\boldsymbol{Q}_x^*$计算的确定性信道协方差。然后，根据对数行列式的二阶泰勒界，即 $\log\det(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}) \ge \mathrm{tr}\,\boldsymbol{A} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A})$，其中 $\|\boldsymbol{A}\| \le 1$；以及对数的一阶泰勒界，即 $\log(1 + x) \le x$，其中 $|x| \le 1$，(67) 的下界为

$$\begin{aligned} C(P) &\ge C_G(P) + \mathbb{E}_s\left[\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{*-1}\Delta(s)) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{*-1}\Delta(s)\boldsymbol{\Sigma}_0^{*-1}\Delta(s))\right] - \sigma^2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_x^*\boldsymbol{G}^H) && (69)\\ &\ge C_G(P) + \sigma^2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{*-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_x^*\boldsymbol{G}^H) - \sigma^2\|\boldsymbol{\Sigma}_0^{*-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_x^*\boldsymbol{F}^H\|_F^2 - \sigma^2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_x^*\boldsymbol{G}^H) - \sigma^4\,\mathrm{tr}((\boldsymbol{\Sigma}_0^{*-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_x^*\boldsymbol{G}^H)^2) && (70)\\ &\ge C_G(P) + O(\sigma^2), && (71) \end{aligned}$$

其中 $\Delta(s) = s^*\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{G}^H + s\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{F}^H + |s|^2\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{G}^H$。由于 $\mathbb{E}[s] = 0$，取平均后所有一阶项均消失，而主导修正项的阶为 σ^2。

因此，在此区间内，信道容量确实为 $C_G(P) + O(\sigma^2)$。

B. 高信噪比区间

在高信噪比区间 $P \to \infty$ 内，由式 (19) 可得

$$R_G = (N-1)\log P + O(1),$$

其中，$O(1)$ 项在 $P \to \infty$ 时保持有界。此外，第四节中介绍的基于导频的方案也能够达到 $(N-1)$对数 $P + O(1)$。

为建立相匹配的上界，我们在式 (56) 中令 $\alpha = N - 1$和 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{I}$。经过直接代数运算，可得上界

$$(N-1)\log\left(\frac{1}{N-1}\mathbb{E}\left[\gamma(\boldsymbol{I},\boldsymbol{x})\right]\right) + \log\frac{1}{N-1} - 1 + \log\max\left\{N,\ \lambda_{\max}\left(\boldsymbol{I} + \sigma^{-2}(\boldsymbol{G}^H\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{F}^H\boldsymbol{F}\right)\right\}, \quad (72)$$

其按（$N-1$）对数 $P + O(1)$ 的比例缩放，因为 $\mathbb{E}[\gamma(\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{x})]$会随 P 线性增长。

因此，该信道具有 $N-1$ 个自由度。在小-σ 区域，针对上下界中的 $O(1)$ 项推导紧致表达式，仍是未来值得研究的方向。

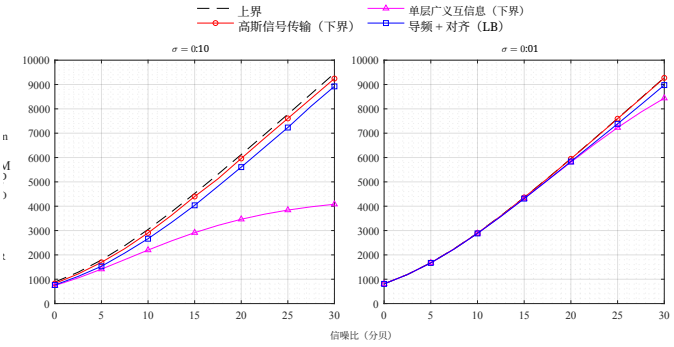

图1. 具有 1024 个子载波的多普勒 OFDM 信道容量界比较。左： $\sigma = 0.1$。右: $\sigma = 0.01$。

VII. 数值应用与结论

数值结果基于一种基于 OFDM 的 NTN 信道模型获得。载波频率设为 $f_c = 2$ GHz，子载波间隔设为 $\Delta f = 15$ kHz，系统带宽为 20 MHz。采样周期为 $T_s = 1/(\Delta f \cdot 1024)$，对应于标准的 OFDM 数值配置。多径传播遵循表 I 中的 3GPP NTN–TDL-A 信道模型 [14]。

NTN-TDL-A 模型提供了一种抽头延迟线（TDL）表示，其中每个抽头 k 由归一化延迟 $\tau_{k,\text{ model}}$、平均抽头功率 P_k （单位为分贝）以及衰落分布表征。归一化延迟经过缩放，以达到所需的均方根时延扩展 DS_{desired} [15]，具体如下

$$\tau_k \text{ [ns]} = \tau_{k,\text{model}} \cdot DS_{\text{desired}} \text{ [ns]}, \tag{73}$$

对于所考虑的低地球轨道卫星场景， $DS_{\text{desired}} = 100$ 为 ns。然后，使用采样周期 $T_s \approx 65.104$ns 将得到的连续时间延迟映射为离散时间采样索引。对于每个抽头，其采样索引可计算为

$$n_k = \text{round}\left(\frac{\tau_k}{T_s}\right). \tag{74}$$

使用表 I 中的归一化延迟，缩放后的延迟为 $\tau_k \approx$(0, 108.11，284.16) ns，对应的采样索引为n_k =(0，2，4)。平均抽头功率从分贝转换为线性刻度。由于每个抽头均服从瑞利衰落，因此复抽头系数生成为

$$\alpha_k = \sqrt{P_k}\, g_k, \qquad g_k \sim \mathcal{CN}(0,1), \tag{75}$$

使得 $\mathbb{E}\{|\alpha_k|^2\} = P_k$。最后，离散时间信道脉冲响应构造如下:

$$h_\ell = \sum_{k}^{L-1} \alpha_k\, \delta[\ell - n_k]. \tag{76}$$

针对一个 OFDM符号计算有效频域信道矩阵，并对归一化多普勒频移进行线性化，从而得到抽象模型 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{F} + s\boldsymbol{G}$ 中使用的矩阵 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$。将残余多普勒系数 s 建模为零均值复高斯分布

表 I NTN-TDL-A 信道模型

抽头编号	归一化延迟	功率（分贝）	衰落分布
1	0	0	瑞利
2	1.0811	-4.675	瑞利
3	2.8416	-6.482	瑞利

随机变量，其方差为 σ^2，并在一个 OFDM符号内保持恒定。

在图1中，我们绘制了本文针对中等和较小多普勒跟踪误差 $\sigma = 0.1$ 和$\sigma = 0.01$分别推导出的容量界。可以看到，在这种情况下，采用最优解码的高斯输入下界接近所推导的上界。如果使用相同的输入分布，但采用次优且实际应用中的LMMSE接收机和最近邻解码度量，则可以看到，即使是秩一不确定性也会造成不利影响，并使可达速率即使在中等信噪比下也达到饱和。然而，借助所提出的叠加编码和子空间对齐方案，我们无需牺牲实用性即可实现接近最优的性能。在此示例中，粗层不包含信息，对应于基于导频的方案。

总之，我们的信息论分析表明，所提出的子空间对齐方案能够有效缓解多普勒引起的载波间干扰，并以较低的接收机复杂度实现接近信道容量的性能。

参考文献

[1] D. Goto、H. Shibayama、F. Yamashita 和 T. Yamazato，“用于高容量传输的LEO-MIMO卫星系统”，载于*2018*年*IEEE*全球通信会议（*GLOBECOM*）。IEEE，2018年，第1–6页。[2] J. Sedin、L. Feltrin 和 X. Lin，“采用LEO卫星的5G新空口非地面网络吞吐量与容量评估”，载于*GLOBECOM 2020—2020*年*IEEE*全球通信会议。IEEE，2020年，第1–6页。[3] X. Lin、Z. Lin、S. E. L¨owenmark、J. Rune、R. Karlsson等，“5G新空口非地面网络中的多普勒频移估计”，载于*2021*年*IEEE*全球通信会议（*GLOBECOM*）。IEEE，2021年，第1–6页。[4] M. Pan、J. Hu、J. Yuan、J. Liu 和 Y. Su，“一种用于LEO卫星通信的高效盲多普勒频移估计与补偿方法”，载于*2020*年第*20*届*IEEE*国际通信技术会议（*ICCT*）。IEEE，2020年，第643–648页。[5] B.-H. Yeh、J.-M. Wu 和 R. Y. Chang，“LEO卫星下行链路OFDMA系统的高效多普勒补偿”，*IEEE*车辆技术汇刊，2024年。[6] H. Q. Ngo、H. Tataria、M. Matthaiou、S. Jin 和 E. G. Larsson，“莱斯衰落下无小区大规模MIMO的性能”，载于*2018*年第*52*届阿西洛马会议：信号、系统与计算机。IEEE，2018年，第980–984页。[7] A. Lapidoth 和 S. M. Moser，“利用对偶性推导容量界及其在平坦衰落信道多天线系统中的应用”，*IEEE*信息论汇刊，第49卷，2467，2003年10月，第2426页。[8] L. Zheng 和 D. N. C. Tse，“格拉斯曼流形上的通信：非相干多天线信道的几何方法”，*IEEE*信息论汇刊，第48卷，第2期，第359–383页，2002年。[9] I. C. Abou-Faycal、M. D. Trott 和 S. Shamai，“离散时间无记忆瑞利衰落信道的容量”，*IEEE*信息论汇刊，第47卷，第4期，第1290–1301页，2002年。[10] M. C. Gursoy、H. V. Poor 和 S. Verd´u，“非相干莱斯衰落信道——第一部分：容量达成输入的结构”，*IEEE*无线通信汇刊，第4卷，2206，2005年5月，第2193页。[11] A. Lapidoth，“高信噪比下的相位噪声信道”，载于*IEEE*信息论研讨会论文集。IEEE，2002年，第1–4页。[12] S. Yang 和 S. Shamai (Shitz)，“离散时间MIMO相位噪声信道的复用增益”，*IEEE*信息论汇刊，第63卷，第4期，第2394–2408页，2017年。[13] A. Lapidoth，“加性非高斯噪声信道的最近邻解码”，*IEEE*信息论汇刊，第42卷，第5期，第1520–1529页，1996年。[14] 3GPP，“技术规范组无线接入网；支持非地面网络的新空口研究（第15版）”，载于*3GPP*，技术报告 *TR 38.811*，2020年。[15] ——，“技术规范组无线接入网；0.5至100 GHz频段信道模型研究（第19版）”，载于*3GPP*，技术报告 *TR 38.901*，2025年。