arXiv:2602.04865v1 [math.AG] 4 Feb 2026

刻画（d， h）-椭圆型稳定不可约曲线

JulianaCoelho Renata Costajulianacoelhochaves@id.uff.br renatac@id.uff.br

2026年2月5日

摘要

我们利用容许覆盖来刻画（d， h）-椭圆型稳定不可约曲线，即那些作为光滑曲线极限的曲线，而这些光滑曲线存在到亏格为 $h \geq 1$ 的光滑曲线的次数为-d 的有限映射。

1 引言

若光滑曲线 C 存在到 $\mathbb{P}^1$的次数为d 的映射，则称其为 d-可展的。可展度，即使 C 为 d-可展所需的最小 d ，是研究代数曲线时一个重要的数值不变量。更一般地，若C 存在到亏格为h的光滑曲线的次数为d 的态射，则称其为（d， h）-椭圆的。由 de Franchi 定理可知，若 $d \geq 2$，则一般的亏格为 $g \geq 2$ 的曲线 C 对于任意 $h \geq 1$ 都不是（d， h）-椭圆的（见 [2, 推论 XXI.8.32]）。因此，一个有趣的问题是探究这样的光滑曲线如何退化，也就是是（d， h）-椭圆光滑曲线在 $h \geq 1$时可能有哪些稳定极限。

本文借助容许覆盖理论来处理这一问题。该理论由 [7], 提出，并由许多作者大幅推广，例如 [1]和[8]中的工作。比如， [5], 中已采用这一方法，作者确定了所谓的亏格 3 稳定曲线的双椭圆轨迹的类，也就是M_3中（2，1）-椭圆曲线的轨迹。 $h = 1$ 这一情形与椭圆积分的经典研究有关;一 [6],也对其进行了研究，尽管没有使用容许覆盖理论。该文作者考察了存在两个态射映至亏格为 1 的光滑曲线的亏格 2 稳定曲线。

1.1 主要结果

本文在 $\mathbb{C}$ 上进行研究。如前所述，我们称稳定曲线 C为（d， h）-椭圆曲线，如果它是光滑曲线的极限；或者等价地，如果存在一个从与 C 稳定等价的曲线到亏格为 h 的曲线的 d 重容许覆盖。粗略地说，容许覆盖是节点曲线之间的有限映射

满足若干条件的映射，其中一项条件是：将映射的光滑分支点视为标记点时，目标曲线是带标记稳定曲线。

在第 3 节中，我们通过将这一条件改为“目标曲线的每个节点都位于两个分支的交点处”，来定义伪可容许覆盖。在命题 5 中，我们按照 [3], 所引入的方式，给出伪可容许覆盖的粘合；在命题 6 中，我们证明可以利用伪可容许覆盖刻画 (d,h)-椭圆性。

在第 4 节中，我们聚焦于不可约曲线。在定理 10 中，我们根据不可约稳定曲线的正规化，刻画了对于 $h \geq 1$ 而言为 (d,h)-椭圆的不可约稳定曲线。这一结果与 [4], 的结果类似，后者讨论了具有两个分支的稳定曲线在 $h = 0$ 的情形。因此，在推论11和12中，我们考察了仅有一个节点的不可约稳定曲线情形。

2 技术背景

本文始终在复数域 $\mathbb{C}$ 上进行讨论。

一条曲线 C 是$\mathbb{C}$上的连通、射影且约化的维数1概形。我们用 C^{sing} 表示 C 的奇点集，用 C^{sm} 表示C的光滑点集。 C 的亏格 是其算术亏格 $g(C) := h^1(C, \mathcal{O}_C)$。$C$ 的一个子曲线 Y 是一个纯维数1的约化子概形，等价地说，是 C的不可约分支的约化并。若 $Y \subseteq C$ 是子曲线，则称 $Y^c := C \setminus Y$ 是 C中 Y 的补集 。

一条节点曲线 C 是至多具有普通双重点（称为节点）的曲线。若存在 C 的一个子曲线 Y 使得$Y \cap Y^c = \{n\}$，则称一个节点为分离的 。设 C 为一条节点曲线， $\nu\colon C_\nu \to C$ 为其正规化。设 n 是 C的一个节点。满足 $\nu(n_1) = \nu(n_2) = n$ 的点 n_1， $n_2 \in C_\nu$ 称为 n 的分支。

一条有理链 是亏格为 0 的节点曲线。我们指出，一条曲线是有理链，当且仅当其所有节点均为分离节点，且其所有分支均为有理分支。一个环 是节点曲线 E，其对偶图是一个环；也就是说，在适当重排后， E的各分支 $E_1, \ldots, E_s$ 满足：对 $i = 1, \ldots, s-1$， E_i 与 E_{i+1} 交于一点，且 E_s 与 E_1 交于一点。我们将环 E 记为有序 s元组（$E_1, \ldots, E_s$）。一个有理圈 是所有分支均为有理分支的环。注意，有理圈是亏格为 1 的曲线。

设 g 与 n 为满足 $2g - 2 + n > 0$的非负整数。一条 n点带标记稳定曲线，其亏格为 g，是亏格为 g 的曲线 C，并带有 n 个互不相同的标记点 $p_1, \ldots, p_n \in C$，使得对 C的每一个光滑有理分支 E，交点 $E \cap E^c$ 中的点数与使 p_i 位于 E 上的指标 i 的个数之和至少为三。一条稳定曲线 是一条 0 点带标记稳定曲线。

设 $\pi\colon C \to B$ 是曲线之间的有限映射，且 $p \in C$ 和 $q \in B$ 是光滑点，满足 $\pi(p) = q$。设 x 是 C 在 p 附近的局部参数， t 是 B 在 q 附近的局部参数。那么在 p 附近，映射 π 局部表示为 $t = x^e$，其中 e 是 π 在 p 处的分歧指数，记作 $e_\pi(p)$。注意， $1 \leq e_\pi(p) \leq d$，其中 d 是 π 的次数。我们称 π 是分歧的

在 p 处分歧，或者称 p 是 π 的分歧点，如果 $e_\pi(p) \geq 2.$。此外，如果 $e_\pi(p) = d$，则称 π 在 p 处全分歧。最后，如果对于某个 $p' \in \pi^{-1}(q)$，$e_\pi(p') \geq 2$，则称 q 是 π 的分支点。

3 容许覆盖

光滑曲线 C 是（d, h）-椭圆的，如果它存在一个次数为 d 的态射到亏格为 h的光滑曲线。在本文中，我们将稳定曲线 C 定义为（d, h）-椭圆的，如果它是稳定曲线模空间 $\mathcal{M}_g$ 中光滑（d, h）-椭圆曲线的极限。更确切地说，当存在一个平滑化 $f: \mathcal{C} \to S$，其一般纤维是光滑的（d, h）- 椭圆曲线，且特殊纤维同构于 C 时，就会出现这种情况。

或者，也可以用容许覆盖来刻画（d, h）-椭圆性。一个 d-层的容许覆盖由一个次数为 d的有限态射 $\pi: C \to B$组成，其中 B 和 C 是节点曲线，并且：

1. $\pi^{-1}(B^{\mathrm{sing}}) = C^{\mathrm{sing}}$；2. π 在 C^{sing}之外是单分支的，也就是说，对于 B 的每个光滑点，在 C 中至多存在一个点在此处分歧，且该点的分歧指数为 2；3. B 与 π的光滑分支点一起考虑时是稳定标记曲线；4。对于 B 的每个节点 q 以及位于其上的 C 的每个节点 n，C 在 n 上的两条分支以相同的分歧指数映射到 B 在 q 上的两条分支。

设 C 和 C' 为节点曲线。若 C 可以通过将 C' 的某些光滑有理分支压缩为一点而从 C' 得到，则称 C' 稳定等价于 C；这些光滑有理分支与 C' 的其他分支仅在一两个点相交。我们注意到，稳定等价并非等价关系，而是偏序，因此我们记作 $C' \succ_{stab} C$，表示 C' 稳定等价于 C。此外，在此情况下，$g(C) = g(C')$，并且存在一个压缩映射 $\tau: C' \to C$。若点 $p' \in C'$ 位于点 $p \in C$ 之上，则称点 $p' \in C'$ 位于点 $p \in C$ 之上，即 $\tau(p') = p$。

定理 1。稳定曲线 C 是（d, h）-椭圆的，当且仅当存在一个 d 重的容许覆盖 $C' \to B$，其中 $C' \succ_{stab} C$ 且 $g(B) = h$。

证明。由 [8] 可得。 □

现在我们引入一种稍微放宽的可容许性概念，但正如我们将在命题 6 中看到的，它与原概念等价。设 C 和 B 为节点曲线。次数为 d 的有限态射$\pi: C \to B$ 称为 d- 层伪可容许覆盖，若其满足容许覆盖的条件 (1)、(2) 和 (4)，并且还满足：

3′。该曲线 B 没有内部节点。

下一个结果是 [3, 引理 32], 的伪容许版本，为完整起见，我们将其列于此处。

引理 2. 设 C 为一条节点曲线，且 $\pi : C' \to B$ 为一个 d 叶伪容许覆盖，其中 $C' \succ_{stab} C$。则对 C 的每个不可约分支 C_r，存在 C' 的唯一不可约分支 C'_r，使得 $\tau(C'_r) = C_r$，且 $\tau|_{C'_r}$ 是一个正规化映射，其中 $\tau\colon C' \to C$ 是压缩映射。

证明。 由于 B 的各分支是光滑的，且 $\pi^{-1}(B^{sing}) = C^{sing}$，故 C' 的各分支也是光滑的。固定 C 的一个分支 C_r，由定义，存在 $\tau^{-1}(C_r)$ 的唯一分支 C'_r 支配 C_r。由于 C'_r 是光滑的，$\tau|_{C'_r}$ 是一个正规化映射。 □

以下两个结果已出现在 [3], 中，尽管其背景是到亏格为 0 的曲线的容许覆盖。

引理 3. 设 $\pi : C \to B$ 为节点曲线之间次数为 d 的有限态射。若 π 满足 d 叶伪容许覆盖的条件 (1)、(3′) 与 (4)，则存在一个 d 叶伪容许覆盖 $\pi' : C' \to B'$，使得 C'（分别为 B'）与 C（分别为 B）稳定等价，以 C（分别为 B）为子曲线，且 $\pi'|_C = \pi$。

证明。 证明过程与 [3, 定理 3.3 (a)]类似。 □

命题 4。 设 C 为一条节点曲线，n 为 C 的一个节点，使得 C 在 n 处的正规化 C_n 是连通的。设 $\pi\colon C'_n \to B$ 是节点曲线之间的一个次数为 d 的有限映射，满足伪容许曲线的条件 (1)、(3′)和 (4)，其中 $C'_n \succ_{stab} C_n$。

设 $n^{(1)}, n^{(2)} \in C_n$ 为 n 的分支，设 $n'^{(1)}, n'^{(2)}$ 为 C'_n 中分别位于 $n^{(1)}$ 和 $n^{(2)}$ 上方的光滑点。若 $\pi(n'^{(1)}) = \pi(n'^{(2)})$，则存在一个 d 重准容许覆盖 $\pi'\colon C' \to B'$，其中 $C' \succ_{stab} C$, $C'_n \subset C'$ 和$\pi'|_{C_n} = \pi$。

证明。 证明与 [3, 定理 3.4 (b)] 的证明作相应调整即可。 □

下面的结果描述了伪容许覆盖的一种粘合，与 [3], 中的粘合类似，但更适合研究 $h \geq 1$ 的 (d, h)-椭圆性。

命题 5。 设 C 是一条稳定曲线，令 C_n 为在节点 $n_1, \ldots, n_\delta$ 处对C作正规化所得的曲线。假设 C_n 连通，并设 $\pi\colon C'_n \to B$ 是一个次数为 d 的有限映射，满足伪容许覆盖的条件 (1),(3′) 和 (4)，其中 B 是一条亏格为 h 的曲线，且 $C'_n \succ_{stab} C_n$。令 $n_i^{(1)}, n_i^{(2)} \in C_n$ 为 n_i 的分支，令 $n_i'^{(1)}$, $n_i'^{(2)}$ 为 C'_n 的光滑点，分别位于 $n_i^{(1)}$ 和$n_i^{(2)}$ 之上，其中 $i = 1, \ldots, \delta$。假设

(a) $e_\pi(n_i'^{(1)}) = e_\pi(n_i'^{(2)})$, *for* $i = 1, \ldots, \delta$;

(b) 存在 q_1、$q_2 \in B$，使得 $q_1 \neq q_2$ 且 $\pi^{-1}(q_j) = \{n_1'^{(j)}, \ldots, n_\delta'^{(j)}\}$，对于 $j = 1$，2。

那么存在一个 d 重伪可容许覆盖 π' ： $C' \to B'$ ，其中$C' \succ_{stab} C$、$C'_n \subset C'$ 且 $\pi'|_{C'_n} = \pi$。此外， $g(B') = h+1$ ，并且 C 是$(d, h+1)$-椭圆的。

证明。 令 $e_i := e_\pi(n_i'^{(1)}) = e_\pi(n_i'^{(2)})$，其中 $i = 1$、……、 δ。为构造覆盖 π'，我们按如下步骤进行。我们将以下对象粘合起来（见图1）：

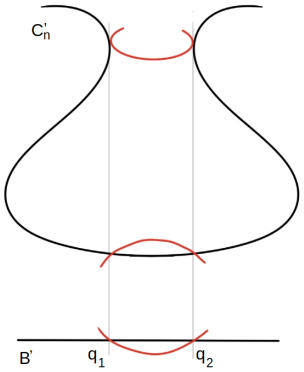

图1： $d = 3$的（d， $h+1$）-椭圆性

- 取一份 $\mathbb{P}^1$ ，位于 B 中并经过 q_1 和 q_2。将这份拷贝记为 L;
- 取一份 $\mathbb{P}^1$ ，位于 C'_n 中并经过 $n'_{(1)\,i}$ 和 $n'_{(2)\,i}$ ，并通过一个次数为 e_i的映射映到 L ，该映射在 $n'_{(1)\,i}$和 $n'_{(2)\,i}$处全分歧，其中 $i = 1$、……、 δ。

因此，由 C'_n 我们得到一条与 C稳定等价的节点曲线 $\tilde{C}$ ；由 B 得到一条节点曲线 $\tilde{B}$ ，使得 $g(\tilde{B}) = h+1$；以及映射 $\tilde{\pi}$： $\tilde{C} \to \tilde{B}$ ，其限制在 C'_n 上时由映射 π 给出，而限制在添加到 C上的有理分支上时，则由上述映射给出。根据构造， C'_n 是 C 的子曲线$\tilde{C}$，且映射 $\tilde{\pi}$ 满足伪容许覆盖定义中的条件 (1)、(3′) 和 (4)。由引理 3 可知，存在一个 d层的伪容许覆盖 π'： $C' \to B'$，其中 C' 与 C 稳定等价，且B' 与 B稳定等价。

□

我们通过证明稳定曲线的（d， h）-椭圆性可以用伪容许覆盖来刻画，从而结束本节。

命题 6。 稳定曲线 C 是（d， h）-椭圆的，当且仅当存在一个d层伪容许覆盖 π： $C' \to B$ ，其中 $C' \succ_{stab} C$ 且 $g(B) = h$。

证明。 根据定理 1，只需证明，对于每个伪可容许覆盖 $\tilde{\pi}$： $\tilde{C} \to \tilde{B}$ 都存在一个容许覆盖 π： $C \to B$ ；反过来，对于每个容许覆盖 π： $C \to B$ 都存在一个伪可容许覆盖

~ ~π： $C \to B$，使得 $B \succ_{stab} B$ 并且 $C \succ_{stab} C$ 下图交换

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\tau_C} & \widetilde{C} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \widetilde{\pi} \\ B & \xrightarrow{\tau_B} & \widetilde{B} \end{array} \tag{1}$$

其中 τ_C 和 τ_B 是压缩映射。

首先，令 $\pi: C \to B$ 为一个非容许的 d重伪容许覆盖。于是存在 B 的有理分支 W，其中至多包含两个点，这些点是 B 的节点或 π的光滑分支点。注意，若 C 的一个分支 L 满足 $\pi(L) = W$，则根据黎曼–胡尔维茨公式， L 与其补集至多交于两点，且其亏格为 0。由于映射 π满足容许覆盖定义中的条件 (1)、(2) 和 (4)，要满足条件 (3)，只需压缩这些分支 W 以及映射到 W的 C 的分支~ ~。因此，我们得到曲线 B 和 C，以及一个诱导映射~ ~$\widetilde{\pi}$: $C \to B$，如 (1) 所示。

~ ~反过来，令 $\widetilde{\pi}: C \to B$ 为一个非伪-

~ ~可容许的 d重容许覆盖，也就是说， B 具有内部节点。现在注意，对于满足 $\widetilde{\pi}(n) = q$的 $n \in C$ 和~$q \in B$， q 是 B 的内部节点，当且仅当n 是 C的内部节点。因此，令 C' 和 B' 分别为 C 和 B在其内部节点处的正规化。于是， $\widetilde{\pi}$ 诱导出一个 d重容许覆盖$\pi': C' \to B'$，它也是拟容许的。此外，若 B是 q 的内部节点且 $\widetilde{\pi}^{-1}(q) = \{n_1, \ldots, n_\delta\}$，则相对于 n_1、.....、n_δ的各分支， π'满足命题 5 的条件。因此，对 B的每个内部节点依次应用命题 5，我们得到一个伪容许覆盖π: $C \to B$，如 (1) 所示。 □

4 (d, h)-不可约曲线的椭圆性

本节的目标是根据正规化来刻画不可约节点（d, h）-椭圆曲线。首先，我们需要一个引理。

引理 7。设 C 为一条节点曲线，且 C' 为一条与 C 稳定等价的节点曲线，其压缩映射为 τ： $C' \to C$。

(a) 若 Z_1和 Z_2是 C'的两个连通子曲线，且 $\tau(Z_1) = \tau(Z_2)$ 是 C的一个子曲线，则 $\tau(Z_1) = \tau(Z_2) = \tau(Z_1 \cap Z_2)$。***(b)*** 若 C 不可约，则 C' 的任意两个正亏格子曲线的交点都不是有限的。***(c)*** 设 $\pi: C' \to B$ 是一个 d重伪容许覆盖。假设 C 不可约，令 C_n 为 C 的正规化，并令 $B_0 = \pi(C_n)$。那么， B 的每个正亏格子曲线 Z 都必须包含 B_0。特别地，若 B 存在一个分支 W，使得 $g(W) \geq 1$，那么 $W = B_0$。

证明。 首先证明 (a)。设 $Z := \tau(Z_1) = \tau(Z_2)$，并假设 Z 是 C的一个子曲线。回顾引理 2，若 W 是 C的一个分支，则存在唯一一个 C'的分支 W'，使得 $\tau(W') = W$。因此，若 $W \subset Z$，则必有 $W' \subset Z_1$，且 $W' \subset Z_2$。由此可得 $W' \subset Z_1 \cap Z_2$，从而$Z = \tau(Z_1 \cap Z_2)$。

为证明 (b)，设 Z_1 和 Z_2 是 C' 的两个正亏格子曲线，使得 $\tau(Z_1)$ 和 $\tau(Z_2)$ 是 C的子曲线。由于 C不可约，我们必有$\tau(Z_1) = \tau(Z_2)$；由 (a) 可知，这意味着 $Z_1 \cap Z_2$ 不可能是有限的。

最后证明 (c)。假设 B 存在一个不包含 B_0的正亏格子曲线 Z。那么 C_n 不包含于 $\pi^{-1}(Z)$。令 W 为 $\pi^{-1}(Z)$的一个连通分支。由于 $\pi(W) = Z$，我们必有 $g(W) \geq g(Z) \geq 1$。特别地，这意味着 W 未被 τ压缩。但由于 C 不可约，这意味着 $\tau(W) = C = \tau(C_n)$，并且由 (a) 可知， $W \cap C_n$不可能是有限的。由于 C_n不可约，这意味着 $C_n \subset W$，矛盾。 □

命题 8. 设 C 是一条不可约节点曲线， C_n 是它的正规化。设 $\pi : C' \to B$ 是一个 d 重伪容许覆盖，其中 $C' \succ_{stab} C$。若 $g(B) \geq 1$，则 $\pi|_{C_n}$ 的次数为 d。

证明。 令 $B_0 := \pi(C_n)$，并设 e 是限制 $\pi|_{C_n}$ 的次数。假设$1 \leq e \leq d-1$。由于 π 是一个次数为 d 的映射，因此存在 C' 的一个不包含 C_n 的连通子曲线 Z，使得 $C_n \cup Z \subset \pi^{-1}(B_0)$。若 e' 是 $\pi|_Z$ 的次数，则 $e' \geq 1$ 且 $e + e' \leq d$。我们需要考虑两种情形。

若 $g(B_0) \geq 1$，则 C_n 和 Z 也必定具有正亏格，因为它们映射到 B_0。由引理 7 可知， $C_n \cap Z$ 不是有限的；又由于 C_n 不可约，必有 $C_n \subset Z$，这与 Z 的选择矛盾。

现假设 $g(B_0) = 0$。则由引理 7，B的每个不可约分支亏格均为 0，并且由于 $g(B) \geq 1$，在 B中存在一个有理圈 $E = (E_1, \dots, E_s)$，它必定包含 B_0，设为 $E_1 = B_0$。令 $q_1, p_1, \dots, p_{s-1}, q_2 \in B$ 满足

$$E_1 \cap B_0 = q_1, \quad E_s \cap B_0 = q_2, \quad \text{and} \quad E_i \cap E_{i+1} = p_i, \quad \text{for } i = 1, \dots, s-1.$$

令 $q_1^1 \in C_n$ 与 $q_1^2 \in Z$ 满足

$$\pi(q_1^1) = \pi(q_1^2) = q_1$$

由于 q_1 是一个节点且 π 是伪可容许的，故 q_1^1 与 q_1^2 也是节点。因此，存在 C' 的有理分支 E_1^1 与 E_1^2，使得

$$q_1^1 = C_n \cap E_1^1 \quad \text{and} \quad q_1^2 = Z \cap E_1^2.$$

注意，我们必有 $\pi(E_1^1) = \pi(E_1^2) = E_1$。此外，由于 E_1 还有另一个节点，即 p_1，故 E_1^1 与 E_1^2 也各有节点，分别设为 p_1^1 与 p_1^2，使得

$$\pi(p_1^1) = \pi(p_1^2) = p_1.$$

因此，存在 E_2^1 和 E_2^2 这两个 C' 的有理分支，使得

$$p_1^1 = E_1^1 \cap E_2^1 \quad \text{and} \quad p_1^2 = E_1^2 \cap E_2^2$$

并且再次有， $\pi(E_2^1) = \pi(E_2^2) = E_2$。

依此类推，对于 $j = 1$， 2，我们得到 C' 的有理分支 E_1^j， E_2^j，....., E_s^j，使得 $\pi(E_i^j) = E_i$，并且当 $i = 1$，....., $s-1$时， E_i^j 在 p_{i+1}^j 处与 E_{i+1}^j 相交。最后，由于 E_s 在节点 q_2 处与 B_0 相交，因此 E_s^1 与 C_n 相交，且 E_s^2 与 Z 相交。因此

$$C_n \cup E_1^1 \cup \ldots \cup E_s^1 \quad \text{and} \quad Z \cup E_1^2 \cup \ldots \cup E_s^2$$

它们是 C' 的两个正亏格子曲线，且没有共同的分支，这与引理 7 矛盾，从而表明 $e = d$。 □

我们指出，对于到亏格为 0 的曲线的容许覆盖或伪容许覆盖，前述结果并不成立，定理 3.3 和推论 3.5] 即可证明这一点： [3, 。

引理 *9.* 设 C 是一条不可约节点曲线， C_n 是其正规化。设 $\pi: C' \to B$ 是一个 d 重伪容许覆盖，其中 $C' \succ_{stab} C$。假设 $g(B) \geq 1$。设 $n \in C$ 是一个节点，并以 n^1、 $n^2 \in C_n$ 表示其分支。若 $\pi(n^1) \neq \pi(n^2)$，则存在 B 中的一个环 Z，使得 $\pi(n^1)$ 和 $\pi(n^2)$ 是 Z 的节点。此外，我们有 $e_\pi(n^1) = e_\pi(n^2)$。

证明。假设不存在这样的 B 环。那么，每个包含 $q_1 := \pi(n^1)$ 和 $q_2 := \pi(n^2)$ 的 B 连通子曲线都必须包含 $B_0 := \pi(C_n)$。现在，由于 C' 与 C 稳定等价，存在一条不包含 C_n 且连接 n^1 与 n^2 的有理链 $Y' \subset C'$。因此，由于 Y' 连通， $\pi(Y')$ 也连通；又由于 $\pi(Y')$ 包含 q_1 和 q_2，所以 $\pi(Y')$ 必须包含 B_0。于是，存在 Y' 的一个分支 L，使得 $\pi(L) = B_0$。由于 $B_0 = \pi(C_n)$，限制 $\pi|_{C_n}$ 的次数必小于 d，这与命题 8 矛盾。

现在证明最后一个断言。设 $Z = (B_0, E_1, ..., E_s) \subset B$ 是所述的环，满足 $q_1 \in E_1$ 和 $q_2 \in E_s$。令 $Y = E_1 \cup \cdots \cup E_s$，即 $Y := Z \setminus B_0$。此外，令 $\widetilde{Y} \subset Y'$，使得 $C_n \cup \widetilde{Y}$ 是 C' 中经过 n^1 和 n^2 的一个环，例如 $C_n \cup \widetilde{Y} = (C_n, \widetilde{E}_1, ..., \widetilde{E}_r)$，其中 $n^1 \in \widetilde{E}_1$ 和 $n^2 \in \widetilde{E}_r$。注意， $\pi(\widetilde{Y}) \subset Y$。

不妨设 $e_\pi(n^1) < e_\pi(n^2)$。则存在一点 $m_1 \in \widetilde{Y}$ 不同于 n^1，使得 $\pi(m_1) = q_1$。由于 q_1 是一个节点，因此~也是如此，并且存在 C' 的一个有理分支 E_1'，不同于 E_1，且包含 m_1。注意到 $\pi(E_1') = B_0$，因此 $q_2 \in \pi(E_1')$。于是存在 $m_2 \in E_1'$，使得 $\pi(m_2) = q_2$。由于 q_2 是一个节点，因此 m_2 也是如此，并且存在 C' 的一个有理分支 E_2'，不同于 E_1'，经过 m_2。于是 E_2' 映射到经过 q_2、不同于 B_0 的 B' 的分支。应用与命题 8 证明中所用类似的论证，我们得到 C' 中一条不包含 E_1' 且连接 m_1 和 m_2 的链。但这意味着 m_1 是一个三重点，矛盾。 □

最后，我们得到本节的核心结果，它根据稳定不可约曲线的正规化的椭圆性及其节点的构型来刻画该曲线的 (d, h)-椭圆性。

定理 10. 设 C 为一条不可约结点曲线，并设 C_n 为其正规化。设 $n_1, \ldots, n_\delta$ 为 C 的节点，并设 n_1^i、$n_2^i \in C_n$ 为 n_i 的分支，对每个 $i = 1, \ldots, \delta$。设 d、$h \in \mathbb{Z}$，其中 $d \geq 2$ 且 $h \geq 1$。

曲线 C 是 (d, h)-椭圆的，当且仅当对于某个 $h' \leq h$， C_n 是光滑的 (d, h')-椭圆曲线，且存在次数为 d 的有限映射 $\pi : C_n \to B_0$ 和 $g(B_0) = h'$，使得存在整数

$$0 \leq \delta_0 < \delta_1 < \ldots < \delta_{s-1} < \delta_s = \delta$$

以及互不相同的点

$$q_{\delta_1}^1, q_{\delta_1}^2, \ldots, q_{\delta_s}^1, q_{\delta_s}^2 \in B_0$$

其中 $s = h - h'$，并且不妨重新排列后有

(a) $\pi(n_i^1) = \pi(n_i^2)$ *for* $i = 1, \ldots, \delta_0$;

(b) $\pi^{-1}(q_{\delta_k}^1) = \{n_{\delta_{k-1}+1}^1, \ldots, n_{\delta_k}^1\}$ *and* $\pi^{-1}(q_{\delta_k}^2) = \{n_{\delta_{k-1}+1}^2, \ldots, n_{\delta_k}^2\}$ *for* $k = 1, \ldots, s$;

(c) $e_\pi(n_i^1) = e_\pi(n_i^2)$, *for each* $i = \delta_0 + 1, \ldots, \delta$.

证明。首先假设 C 是一个 (d, h)-椭圆曲线，并设 π: $C' \to B$ 是一个次数为 d 的伪容许覆盖，其中 $C' \succ_{stab} C$ 且 $g(B) = h$。于是，由命题 8，映射 $\pi|_{C_n}$ 的次数为 d。

令 δ_0 为满足 n_i^1 和 n_i^2 在 π下的像相同的节点 n_i 的个数。若 $\delta_0 = \delta$，则无需证明。现在假设 $\delta_0 < \delta$。于是存在 $i \in \{1, \ldots, \delta\}$，使得 $\pi(n_i^1) \neq \pi(n_i^2)$。令 $q^1 := \pi(n_i^1)$ 和 $q^2 := \pi(n_i^2)$。

若对某个 $i' \in \{1, \ldots, \delta\}$，有 $\pi(n_{i'}^1) = q^1$，则必有 $\pi(n_{i'}^2) = q^2$。事实上，若 $\pi(n_{i'}^2) \neq q^2$，则存在 $q \in B_0$，满足 $q \neq q^2$，使得$\pi(n_{i'}^2) = q$。由于 C' 与 C 稳定等价，故在 C'中存在一条不包含 C_n、连接 n_i^1 和 n_i^2 的有理链；由引理 9，该链映射为 B 中的一条不包含 B_0、经过 q^1 和 q^2的有理链。同理，在 C' 中存在一条不包含 C_n、连接 $n_{i'}^1$ 和 $n_{i'}^2$ 的有理链，它映射为 B 中的一条不包含 B_0、经过 q^1 和 q的有理链。由于 q^1 也是 B_0中的一点，因此在这种情况下， q^1 将是 B 的一个三重点，这与 B 是节点曲线这一事实矛盾。

令 t_1 为满足 $\pi(n_i^1) = q^1$ 的 $i \in \{1, \ldots, \delta\}$ 的数量，并设 $\delta_1 := \delta_0 + t_1$。令 $q_{\delta_1}^1 := q^1$ 且 $q_{\delta_1}^2 := q^2$，我们证明了，必要时重新排列节点，

$$\pi^{-1}(q_{\delta_1}^1) = \{n_i^1 \mid i = \delta_0 + 1, \ldots, \delta_1\}$$

and

$$\pi^{-1}(q_{\delta_1}^2) = \{n_i^2 \mid i = \delta_0 + 1, \ldots, \delta_1\}.$$

若 $\delta_1 = \delta$，则问题得解。否则，存在 $i \in \{1, \ldots, \delta\}$ 使得$\pi(n_i^1) \neq \pi(n_i^2)$ 且 $\{\pi(n_i^1)\ \pi(n_i^2)\} \neq \{q_{\delta_1}^1, q_{\delta_1}^2\}$。在这种情况下，按上述方法继续，我们得到互异的点 $q_{\delta_2}^1$, $q_{\delta_2}^2 \in B_0$，它们在 π 下的原像具有上述形式。如此继续，我们得到

$$0 \leq \delta_0 < \delta_1 < \ldots < \delta_s = \delta$$

以及如所述的互异点 $q_{\delta_1}^1$，$q_{\delta_1}^2$，……，$q_{\delta_s}^1$，$q_{\delta_s}^2$，$\in B_0$，其中某个 $s \in \mathbb{N}$。根据引理 9，每一对 $q_{\delta_j}^1$ 和 q_{δ}^2 都对应于 B 的一个环 Z_j，该环包含 B_0，并以 $q_{\delta_j}^1$ 和 $q_{\delta_j}^2$ 为节点。因此 $g(B) \geq g(B_0) + s$。

此外，B中不存在其他环。事实上，根据引理 7，B 的任意环Z 都必须包含 B_0。如果~~q~~^{1}，$q^2 \in B_0$ 是交点$B_0 \cap (Z \setminus B_0)$中的点，那么 $(\pi|_{C_n})^{-1}(q^1)$ 和 $(\pi|_{C_n})^{-1}(q^1)$中的点是 C 的节点分支，这将意味着 q^1 和 q^2 对于某个j而言会是 $q_{\delta_j}^1$ 和 $q_{\delta_j}^2$。因此，我们得到等式 $g(B) = g\,B_0 + s$。最后，根据引理 9，对于每个 $i = \delta_0 + 1, \ldots, \delta$，都有 $e_\pi(n_i^1) = e_\pi(n_i^2)$。

反之，假设存在一个如 π 所述的映射。那么连续应用命题 5 s 次，随后应用命题 4，即可得到结论。 □

例如，对于 $h \geq 1$，可以对仅具有一个节点的 (d, h)-椭圆不可约曲线进行分类。

推论 11. 设 C 是只有一个节点 n的不可约节点曲线。设C_n 是 C 的正规化，n_1、$n_2 \in C_n$ 是该节点的分支。设 d、$h \in \mathbb{Z}$ 满足 $d \geq 2$ 和 $h \geq 1$。那么，当且仅当 C_n满足以下条件之一时，C 是(d, h)-椭圆的

(a) C_n 是(d, h)-椭圆的，且存在次数为 d 的有限映射 $\pi\colon C_n \to B_0$，并且 $g(B_0) = h$，且 $\pi(n_1) = \pi(n_2)$；或

(b) C_n 是$(d, h-1)$-椭圆的，且存在次数为 d 的有限映射 $\pi\colon C_n \to B_0$，并且$g(B_0) = h - 1$，且 $\pi(n_1) \neq \pi(n_2)$，并且 π 在 n_1 和 n_2处全分歧。

证明。 由定理 10 得出。 □

推论 12。 设 C 是一条只有一个节点 n 的不可约结点曲线，并设 C_n 是它的正规化。若 C_n 是双曲椭圆曲线且亏格至少为 *2*，则 C 要么是双曲椭圆曲线，要么是双椭圆曲线，但不能同时是二者。

证明。 由定理 10 得出，因为 C_n 的超椭圆映射是唯一的。 □

参考文献

[1] Dan Abramovich、Alessio Corti 和 Angelo Vistoli。《扭曲丛与容许覆盖》。载于：*Comm. Algebra* 31.8（2003），第3547–3618页。[2] Enrico Arbarello、Pillip A. Cornalba Maurizio 和 Griffiths。代数曲线几何第*II*卷。Springer，2011。[3] Juliana Coelho 和 Frederico Sercio。《稳定曲线的可展度》。载于：*Mathematische Nachrichten* 292.11（2019），第2338–2351页。 DOI: 10.1002/ mana.201600376。[4] Juliana Coelho 和 Frederico Sercio。《刻画双分支稳定曲线的可展度》。载于：*Geometriae Dedicata* 214.1（2021），第157–176页。 DOI: s10711-021-00609-y。

[5] Carel Faber 和 Nicola Pagani。《亏格3中双椭圆轨迹的类》。载于：《国际数学研究通知》 12（2015），第3943–3961页。 DOI：10.1093/imrn/rnu057。[6] Marco Franciosi、Rita Pardini 和 S¨onke Rollenske。《亏格二的（d, d’）-椭圆曲线》。载于：《数学档案》56（2018），第299–317页。 DOI：10.4310/ARKIV. 2018.v56.n2.a6。[7] Joe Harris 和 David Mumford。《论曲线模空间的 Kodaira 维数》。载于：《数学发明》 67（1982），第23–86页。[8] Shinichi Mochizuki。《Hurwitz 方案紧化的几何学》。载于：《数学科学研究所刊物》 31.3（1995），第355–441页。