arXiv:2602.04882v1 [math.DG] 4 Feb 2026

微分形式对：预接触几何的框架

2026年2月4日

Xavier Gr`acia

数学系，罗维拉-威尔吉利大学`加泰罗尼亚理工大学，巴塞罗那，电子邮箱：
xavier.gracia@upc.edu — ORCID：0000-0003-1006-4086

´Ángel Mart´ínez-Mu˜ñoz

计算机工程与数学系，罗维拉-威尔吉利大学，塔拉戈纳，电子邮箱：
angel.martinezm@urv.cat — ORCID：0009-0002-8944-5403

Xavier Rivas

Dep计算机工程与数学系，罗维拉-威尔吉利大学，塔拉戈纳 a
e-m邮箱：xavier.rivas@urv.cat— ORCID：0000-0002-4175-5157

摘要

预接触流形通过弱化定义 1-形式的极大非可积条件，扩展了接触几何。我们通过研究满足温和正则性条件的一般 1-形式与 2-形式对，阐明这一结构的几何基础。我们借助其类对这些形式对进行刻画，分析 Reeb 向量场或刘维尔向量场等特定向量场的作用，并研究其他相关几何对象。随后，我们将预接触结构视为由处处非零的 1-形式及其外微分构成的形式对这一特殊情形。我们还定义了预接触流形上的哈密顿动力学。最后通过若干实例阐释该理论。

关键词： 微分形式的类、接触结构、预接触形式、Reeb 向量场、刘维尔向量场、共形变换、预辛与余辛几何

MSC2020 分类代码： 53D10, 53D05, 58A10, 37J39

目录

1 引言 2 2 一形式与二形式的二元组 3 2.1 微分形式的秩.3 2.2 微分形式对.4 2.3 1-形式与2-形式的双元组.5 2.4 Reeb 向量场与 Liouville 向量场.6 2.5 该类的其他刻画.8 3 与双元组相关联的几何结构 9 3.1 特征张量场.9 3.2 扩展特征分布.11 3.3 扩展3-形式.12 4 一些重要例子 13 4.1 接触结构.13 4.2 余辛结构与预余辛结构.13 4.3 辛结构与预辛结构.14 4.4 哈密顿系统.15 4.5 局部共形辛流形.16 5 预接触形式 16 5.1 预接触形式.16 5.2 接触哈密顿系统与预接触哈密顿系统.18 6 奇偶性的共形变换 20 6 1 . 偶奇性的变换.22 6 2 24 . 奇奇性的保持.结论与展望 25 致谢 26 参考文献 26

1 引言

19世纪晚期，Sophus Lie提出了接触变换的概念，这是一类保持某些微分方程解集的变换。他的工作为现代接触几何理论奠定了基础，此后该理论在几何光学、热力学、哈密顿动力学和流体力学等广泛领域中得到了应用。关于接触几何与拓扑发展的详细历史记述以及详尽的参考文献，见 [13]。

$(2n+1)$维流形上的一个接触分布是一个极大不可积的超平面场。在局部，这个超平面场可以表示为所谓的接触形式 $\eta \in \Omega^1(M)$的核，并满足条件

$$\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^n \neq 0$$

在每个点处成立。该条件确保由 $\operatorname{Ker}\eta$ 定义的分布在 Frobenius定理的意义下尽可能远离可积。注意，如果 $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ 是一个处处非零函数，那么 $f\eta \in \Omega^1(M)$ 与 η生成相同的接触分布。因此，接触分布在局部等价于满足上述不可积条件的 1-形式的一个共形类。

接触几何的工具和结构已被证明对于建模耗散系统非常有效（有关一些应用，参见 [1, 16, 25]）。特别是对于力学系统，接触几何已成功应用于描述非保守的拉格朗日和哈密顿动力学 [9, 12]。这类系统的变分表述归功于 G. Herglotz（参见 [20, 21]），大约始于1930年。这种方法类似于分别通过辛几何和余辛几何对自治和非自治哈密顿系统进行的表述 [24]。

在接触拉格朗日力学的框架内，有一个受到相对较少关注的课题：对奇异拉格朗日系统的分析。对于这类系统，其基础几何框架并非接触几何，因为其中涉及的结构具有某种退化性。这种情况与普通（辛）力学类似：在普通力学中，对奇异拉格朗日函数的几何研究自然会涉及预辛几何（见 [4, 15]）。

在接触力学背景下研究奇异拉格朗日系统的初步尝试见于 [10], ，作者在其中给出了预接触形式的定义。正如 [7], 后来指出的，这项分析不够一般，因为它只考虑了几何结构存在 Reeb 向量场的情形，而这一假设并非总能满足。造成这一局限的主要原因是， [10] 旨在研究预接触流形上的哈密顿系统，其运动方程明确依赖于 Reeb 向量场的存在。然而，在最近的一篇论文 [19], 中，我们推导出了接触哈密顿方程的两种新的等价表述。值得注意的是，这两种表述都不依赖于 Reeb 向量场，而其存在性和唯一性并无保证。这一进展自然促使我们全面研究预接触形式，这正是本文的目标。

由超平面场定义的预接触结构也已有研究，例如参见 [17,26, 27]。相比之下，我们的方法聚焦于预接触结构由全局1-形式给出的情形[1]。这种更为具体的观点在某些应用中很常见，例如几何力学；同时，它也将成为我们研究的关键，正如我们将要解释的那样。

类似于接触形式的定义，我们将预接触形式定义为处处不为零的1-形式 $\eta \in \Omega^1(M)$，使得 $\mathrm{d}\eta$ 的秩为常数，并且对于某个 r,

$$\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^r \neq 0\,, \qquad \eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^{r+1} = 0$$

[1]在文献中，这种情形有时称为 *co-oriented* （预）接触结构。

在 M的每一点。这一条件与微分形式的类的概念有关（参见 [14, 第六章]）。当微分形式的类为常数时，直观而言，它表示在局部表示该形式所需的最少坐标数。它可以通过一个涉及该形式及其微分的代数条件计算得出。于是，对于一个 1-形式 η，当且仅当其类为 $2r+1$ 或 $2r+2$ 时，它是预接触形式，前提是 η 处处非零。

为了确立这些结果及其他结果，我们发现采用稍微更一般的方法很有用，即考察由一个微分1-形式和一个2-形式组成的对（τ，ω）。通过将类的定义推广到此类对，我们可以研究一些特殊向量场的性质，例如 Reeb 向量场与 Liouville 向量场；它们存在的条件分别等价于对（τ，ω）的类为奇数或偶数。这些刻画为描述由几何结构自然诱导的一些对象的性质提供了必要工具，例如张量场$\omega+\tau\otimes\tau$或3-形式 $\tau\wedge\omega$。我们还确立了某些函数可用于改变类的奇偶性的条件。所有这些结果均应用于特定的对（η，$\mathrm{d}\eta$），该对由一个1-形式 η 及其外微分构成，恰好对应预接触流形的情形。作为应用，我们引入了预接触流形上的哈密顿动力学。

本文结构如下。在第 2 节中，我们首先介绍全文所用主要对象的记号和定义，并陈述一些基本结果。随后，我们研究由一个微分1-形式和一个2-形式构成的对。我们根据其类刻画这类结构，并将这一概念与 Reeb 向量场和 Liouville向量场的存在性联系起来。在第 3 节中，我们介绍并研究由微分形式对所诱导的一些几何对象的性质。第 4 节给出该框架的一些相关例子。在第 5 节中，我们应用前述结果来刻画和研究预接触流形。我们还在预接触流形上定义哈密顿力学，并给出解存在所必须满足的一些条件。最后，在第 6 节中，我们提出一些新结果，用以刻画能够改变由一个1-形式和一个2-形式构成的对的类的奇偶性的函数。我们还给出此类函数存在的充分条件。

全文中，所有流形和映射均为光滑的。约定对交叉重复指标求和。

2 一个 1-形式和一个 2-形式的双元组

本节旨在研究由一个 1-形式和一个 2-形式组成的对的若干性质，并假设其满足某些正则性条件。我们首先给出预备定义，然后陈述并证明一些基本结果。

2.1 微分形式的秩

定义 2.1。 设 $\alpha\in\Omega^p(M)$ 是一个 p-形式。它定义了一个向量丛态射

$$\begin{array}{rccc}\widehat{\alpha}\colon & \mathrm{T}M & \longrightarrow & \bigwedge^{p-1}\mathrm{T}^*M\\ & v & \longmapsto & \iota_v\alpha\end{array}$$

其在点 x 处的核为

$$\operatorname{Ker}\alpha_x=\{v\in\mathrm{T}_xM\mid\iota_v\alpha_x=0\}\,.$$

其湮灭子为

$$(\operatorname{Ker}\alpha_x)^\circ=\{u\in\mathrm{T}^*_xM\mid\iota_vu=0\quad\text{for every } v\in\operatorname{Ker}\alpha_x\}\,.$$

α 的秩就是这个线性映射的秩；它等于核的余维。

定理 2.2 ([14])。 给定流形 p 上的 $\alpha \in \Omega^p(M)$-形式，其多重线性映射的像为

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_xM \times \overset{(p-1)}{\cdots} \times \mathrm{T}_xM &\longrightarrow \mathrm{T}_x^*M \\ (v_1, \ldots, v_{p-1}) &\longmapsto \iota_{v_1} \cdots \iota_{v_{p-1}} \alpha \end{aligned}$$

是 $(\operatorname{Ker} \alpha_x)^\circ$。

特别地，该定理意味着，对于 1-形式 $\alpha \in \Omega^1(M)$，我们有

$$(\operatorname{Ker} \alpha_x)^\circ = \langle \alpha_x \rangle \,.$$

而如果 $\omega \in \Omega^2(M)$ 是一个 2-形式，那么

$$(\operatorname{Ker} \omega_x)^\circ = \langle \iota_{e_1}\omega_x, \ldots, \iota_{e_m}\omega_x \rangle \,,$$

其中 $e_1, \ldots, e_m$ 构成 T_xM 的一组基。

定理 2.3 ([14, 23])。设 $\omega \in \Omega^2(M)$ 是定义在 M 上的一个2-形式。那么， ω 的秩在 M 的每一点处都是偶数。此外，该秩在点 x 处为 $2r$ 当且仅当

$$(\omega_x)^r \neq 0 \,, \qquad (\omega_x)^{r+1} = 0 \,.$$

（我们用 ω^r 表示 ω 的 r 重外积。）

命题 2.4 （[14]）。设 $\omega \in \Omega^2$（M）是一个常秩 2 形式。那么，若 ω 的秩为 $2r$，则有

$$(\operatorname{Ker} \omega)^\circ = (\operatorname{Ker} \omega^s)^\circ \,,$$

对所有 $s = 1$、……、 r。

2.2 微分形式对

定义 2.5。设 $\alpha \in \Omega^p$（M）是 M 上的一个 p 形式，且 $\beta \in \Omega^q$（M）。在点 $x \in M$ 处，这一对（α， β）的特征分布为

$$\mathcal{K}_{(\alpha,\beta)_x} = \operatorname{Ker} \alpha_x \cap \operatorname{Ker} \beta_x \,.$$

（α， β）在 x 处的类是其特征分布在 x 处的余维。

$$\operatorname{cl}(\alpha, \beta)_x = \operatorname{codim} \mathcal{K}_{(\alpha,\beta)_x} \,.$$

特征分布的湮灭子是

$$\mathcal{K}^\circ_{(\alpha,\beta)_x} = (\operatorname{Ker} \alpha_x \cap \operatorname{Ker} \beta_x)^\circ = (\operatorname{Ker} \alpha_x)^\circ + (\operatorname{Ker} \beta_x)^\circ \,,$$

t因此类 i 等于该湮灭子的维数，$\operatorname{cl}(\alpha, \beta)_x = \dim ((\operatorname{Ker} \alpha_x)^\circ + (\operatorname{Ker} \beta_x)^\circ)$。

由格拉斯曼恒等式，我们有

$$\dim((\operatorname{Ker} \alpha)^\circ + (\operatorname{Ker} \beta)^\circ) = \dim(\operatorname{Ker} \alpha)^\circ + \dim(\operatorname{Ker} \beta)^\circ - \dim((\operatorname{Ker} \alpha)^\circ \cap (\operatorname{Ker} \beta)^\circ) \,,$$

或者，换言之，

$$\operatorname{cl}(\alpha, \beta) = \operatorname{rank} \alpha + \operatorname{rank} \beta - \dim((\operatorname{Ker} \alpha)^\circ \cap (\operatorname{Ker} \beta)^\circ) \,. \tag{1}$$

注 2.6. 给定一个 p-形式 $\alpha \in \Omega^p(M)$，特征分布的通常定义是

$$\mathcal{K} \coloneqq \mathcal{K}_{(\alpha,\mathrm{d}\alpha)} = \operatorname{Ker} \alpha \cap \operatorname{Ker} \mathrm{d}\alpha \,,$$

并且， α 的类是特征分布的余维 [14, 23]。

如果形式 $\alpha \in \Omega^p(M)$ 是闭的，那么

$$\mathcal{K} = \operatorname{Ker} \alpha \,,$$

因为 $\mathrm{d}\alpha = 0$。特别是，这意味着如果 α 是一个闭的 p-形式，那么 α 的秩等于其类。因此，根据定理2.3，每个闭的 2-形式都具有偶类。 △

2.3 1-形式和 2-形式的双元组

从现在起，我们将考虑一对 $(\tau,\ \omega)$，其中 $\tau\in\Omega^1(M)$ 且 $\omega\in\Omega^2(M)$。在大多数结果中，我们都需要这些形式满足某些正则性条件，从而得到常秩分布。在此之前，我们先探讨一些可能出现非常秩的情形。

首先，如果 τ 是一个 1-形式，那么它在一点 x 处的秩为 0（当 $\tau_x=0$时），或为 1（当 $\tau_x\neq 0$时）。

- 如果 $\tau_x=0$，那么 Ker τ_x的余维为 $=$Ker τ_x的维数$^\circ=0$，且 $\dim\left((\operatorname{Ker}\tau_x)^\circ\cap(\operatorname{Ker}\omega_x)^\circ\right)=0$。因此方程（1）化为

$$\operatorname{cl}(\tau_x,\omega_x)=\operatorname{rank}\omega_x\,, \tag{2}$$

  因此该类为偶类。

- 如果 $\tau_x\neq 0$，则 $(\operatorname{Ker}\tau_x)^\circ=\langle\tau_x\rangle$，因此 $\operatorname{codim}(\operatorname{Ker}\tau_x)=\dim(\operatorname{Ker}\tau_x)^\circ=1$。由此，

$$\dim\left((\operatorname{Ker}\tau_x)^\circ\cap(\operatorname{Ker}\omega_x)^\circ\right)\in\{0,1\}.$$

  此外，方程（1）化为

$$\operatorname{cl}(\tau_x,\omega_x)=1+\operatorname{rank}\omega_x-\dim((\operatorname{Ker}\tau_x)^\circ\cap(\operatorname{Ker}\omega_x)^\circ)\,. \tag{3}$$

命题 2.7。考虑一对 $(\tau、\ \omega)$。点 x 处的类是 $2r$ 或 $2r+1$，当且仅当 ω_x 的秩为 $2r$。此外：

(a) 如果一对的类为常数，则 ω 的秩为常数。(b) 如果该类为常数且为奇数，则 τ 处处非零。

证明。如果 ω_x 的秩为 $2r$，那么从前面的讨论可以清楚地看出，该类必为 $2r$ 或 $2r+1$。

假设 $\operatorname{cl}(\tau_x,\omega_x)=2r$。方程（1）意味着 $\operatorname{rank}(\omega_x)=2r-\operatorname{rank}\tau_x+\dim((\operatorname{Ker}\tau_x)^\circ\cap(\operatorname{Ker}\omega_x)^\circ)$，而最后两项只能是 0 或 1，因此它们的和不可能大于 1 或小于 -1。因此，由于 ω 在 x 处的秩必须为偶数，$\operatorname{rank}(\omega_x)=2r$。

若 $\operatorname{cl}(\tau_x,\omega_x)=2r+1$，则由方程 (2) 可得 $\tau_x\neq 0$。现在，利用方程 (3)，以及 $\dim\left((\operatorname{Ker}\tau_x)^\circ\cap(\operatorname{Ker}\omega_x)^\circ\right)\in\{0,1\}$，我们有 $\operatorname{rank}(\omega_x)=2r$。

□

前一个命题的逆命题并不成立，如以下反例所示。

例 2.8. 形式的秩为常秩，并不能保证对 (τ,ω) 具有常类。考虑具有坐标 (x,y,z) 的 $M=\mathbb{R}^3$，并设

$$\tau=\mathrm{d}z\,,\qquad \omega=\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\,.$$

两个形式的秩均为常秩 $(\operatorname{rank}\tau=1,\operatorname{rank}\omega=2)$，但它们的类并非常数：在 $z\neq 0$ 处为 3，在 $z=0$ 处降为 2。△

例 2.9. 如果 ω 的秩为常秩，且配对的类为常数且为偶数，那么 τ 不一定处处非零。例如，我们取 $M=\mathbb{R}^2$，其坐标为 $(x,\ y)$，并且

$$\tau=x\mathrm{d}x\,,\qquad \omega=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\,.$$

显然，在 $x=0$ 所在的点处，τ 为零；ω 的秩为 2，且配对的类为常数并等于 2。△

从这些定义可以清楚看出，下列陈述等价：(a) $\mathcal{K}_{(\tau,\omega)}=\operatorname{Ker}\tau\cap\operatorname{Ker}\omega=0$；(b) $\operatorname{cl}(\tau,\ \omega)=\dim M$；(c) $\mathrm{T}^*M=(\operatorname{Ker}\tau)^\circ+(\operatorname{Ker}\omega)^\circ$。此外：

命题 2.10。 设(τ,ω) 是一个由 *1*-形式和 *2*-形式组成的对。下列陈述等价：

(i) $\mathrm{T}^*M = (\mathrm{Ker}\ \tau)^\circ \oplus (\mathrm{Ker}\ \omega)^\circ$；$(ii)$ $\mathrm{T}M = \mathrm{Ker}\ \tau \oplus \mathrm{Ker}\,\omega$；$(iii)$ $\mathrm{cl}(\tau,\ \omega) = \dim M$ 且类为奇数或 $\tau = 0$。

鉴于命题 2.7 和命题 2.10，显然，常类的情形具有更好的性质。为避免重复，我们将采用以下术语：

定义 2.11。 若这一对具有常类，我们称 $(\tau,\ \omega)$ 为一个双元组 。

2.4 Reeb和刘维尔向量场

本节将介绍与双元组相关的两类特殊向量场，并着重说明它们与类之间的联系。这些向量场是后续各节的核心，并在几何和分析力学中有重要应用。

定义 2.12。 设 (τ,ω) 是由一个 1-形式和一个 2-形式组成的对。

- 该对的 ***Reeb*** 向量场 是满足以下条件的向量场 R

$$\iota_R\tau = 1\,, \qquad \iota_R\omega = 0\,.$$

- 该对的 刘维尔向量场 是满足以下条件的向量场 Δ

$$\iota_\Delta\omega = \tau\,.$$

在特定点 $x \in M$ 处也采用类似的命名方式：若向量 R_x 是 ***Reeb*** 向量，或向量 Δ_x是该对 (τ_x,ω_x) 的 刘维尔向量 ，则意味着相同的关系在 x 处成立。

注意，Reeb 向量场与 Liouville 向量场不能同时存在。事实上，若 Reeb 向量场 R 和 Liouville 向量场 Δ同时存在，则

$$\iota_R\iota_\Delta\omega = \iota_R\tau = 1\,,$$

但另一方面，由于 $\iota_R\omega = 0$，我们有

$$\iota_R\iota_\Delta\omega = -\iota_\Delta\iota_R\omega = 0\,,$$

这与前面的方程相矛盾。

于是，类的奇偶性给出了 Reeb 向量场或刘维尔向量场存在的充要条件，如下一个定理所述。

定理 2.13. 设 (τ,ω) 是一个双元组。

- 以下陈述等价：(i) 该双元组的类是奇数。(ii) 核 $\omega \not\subset$ 核 τ.(iii) 该双元组具有一个 *Reeb* 向量场。

- 下列陈述是等价的：(i) 双元组的类是偶的。(ii) $\mathrm{Ker}\ \omega \subset \mathrm{Ker}\ \tau$。$(iii)$ 该双元组具有刘维尔向量场。

对于一个对(τ_x, ω_x) 以及里布向量或*Liouville*向量，类似的陈述成立。

证明。

- **奇数情形**。假设双元组的类为奇数。由方程（3）可知，这等价于核的湮灭子的交为零，并且等价于

$$(\operatorname{Ker}\tau)^\circ \not\subset (\operatorname{Ker}\omega)^\circ\,.$$

这与下式相同：

$$\operatorname{Ker}\omega \not\subset \operatorname{Ker}\tau\,.$$

这证明了（i）与（ii）等价。
根据 Reeb 向量场的定义，若条件（iii）成立，则条件（ii）直接成立。

反过来，假设条件 (ii) 成立。由于$\omega \subset \mathrm{T}M$ 的核按假设具有常维数，因此它定义了一个向量子丛，而限制映射 $\phi := \tau|_{\operatorname{Ker}\omega}\colon \operatorname{Ker}\omega \longrightarrow M\times\mathbb{R}$, 是一个向量丛态射，并且根据条件 (ii) 它是满射。因此，我们可以对短正合列应用分裂引理（例如参见 [11, 第 118]页）：

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_{(\tau,\omega)} \longrightarrow \operatorname{Ker}\omega \xrightarrow{\phi} M\times\mathbb{R} \longrightarrow 0$$

从而得到一个映射 $j\colon M\times\mathbb{R}\to\operatorname{Ker}\omega$，使得 $\phi\circ j = \mathrm{Id}$。最后，我们可以利用 j将常截面 $s\colon (x) \in M \mapsto (x,1) \in M\times\mathbb{R}$ 提升为 Ker ω 的一个截面；根据构造，该截面满足 Reeb 向量场的性质。

- **偶数情形**。假设该双元组的类为偶数。由与前面相同的论证可知，这等价于

$$(\operatorname{Ker}\tau)^\circ \subset (\operatorname{Ker}\omega)^\circ\,,$$

这相当于

$$\operatorname{Ker}\omega \subset \operatorname{Ker}\tau\,.$$

这证明了 (i) 与 (ii) 等价。
若存在李维尔向量场 Δ，则由以下事实可知条件 (ii) 成立：若$X \in \operatorname{Ker}\omega$，则

$$\iota_X\tau = \iota_X\iota_\Delta\omega = -\iota_\Delta\iota_X\omega = 0\,.$$

反之，假设条件 (ii) 成立。我们有

$$\operatorname{Im}\widehat{\omega} = (\operatorname{Ker}\widehat{\omega})^\circ \supset (\operatorname{Ker}\widehat{\tau})^\circ = \langle\tau\rangle\,,$$

其中我们用到了定理2.2 和 (ii)。但由于 $0\to\operatorname{Ker}\widehat{\omega}\to\mathrm{T}M\to\operatorname{Im}\widehat{\omega}\to 0$ 是恰当的，它可以分裂，因此我们有一个映射 $j\colon\operatorname{Im}\widehat{\omega}\to\mathrm{T}M$，使得 $\widehat{\omega}\circ j = \mathrm{Id}$，进而可用来构造一个满足刘维尔向量场条件的截面。 $\Delta = j\circ\tau$满足刘维尔向量场的条件。

在给定点处的这些陈述不需要任何正则性条件，而且其证明确实更简单。

□

我们以简要分析双元组相对于 Reeb 向量场或刘维尔向量场的李导数来结束本节。其证明可直接由定义得出：

引理 2.14. 对于一个 *Reeb* 向量场 R,

$$\mathscr{L}_R\tau = \iota_R\mathrm{d}\tau\,,\qquad \mathscr{L}_R\omega = \iota_R\mathrm{d}\omega\,;$$

以及对于刘维尔向量场 Δ,

$$\mathscr{L}_\Delta\tau = \iota_\Delta\mathrm{d}\tau\,,\qquad \mathscr{L}_\Delta\omega = \iota_\Delta\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\tau\,.$$

2.5 该类的其他刻画

引理 2.15. 设(τ,ω)是一个由微分*1*-形式和*2*-形式组成的对，且 $x \in M$。那么$\mathrm{cl}(\tau_x,\omega_x) = 2r+1$ 当且仅当，

$$\omega_x^{r+1} = 0\,, \qquad \tau_x \wedge \omega_x^r \neq 0\,.$$

证明。 假设 cl$(\tau_x,\ \omega_x) = 2r+1$。则 ω 的秩必为 $2r$，由命题 2.7 可知，从而

$$\omega_x^r \neq 0, \qquad \omega_x^{r+1} = 0\,.$$

现在，由于该类为奇，$\tau_x \neq 0$ 且存在一个 Reeb 向量 R_x。若假设 $\tau_x \wedge \omega_x^r = 0$，则有

$$0 = \iota_{R_x}(\tau_x \wedge \omega_x^r) = \omega_x^r$$

这构成矛盾，因此必有 $\tau_x \wedge \omega_x^r \neq 0$。

对于逆命题，注意这两个条件蕴含秩$(\omega_x) = 2r$ 以及 $\tau_x \neq 0$。因此，该类要么为 $2r$，要么为 $2r+1$。然而，若该类为偶，则将存在刘维尔向量 Δ_x 且

$$0 = \iota_{\Delta_x}(\omega_x^{r+1}) = (r+1)\tau_x \wedge \omega_x^r\,,$$

这就产生了矛盾，因此该类必为 $2r+1$。 □

命题 2.16。 设(τ,ω)是一对由微分*1*-形式和*2*-形式组成的对象。那么(τ,ω)是类为 $2r+1$ 的双元组，当且仅当，

$$\omega^{r+1} = 0\,, \qquad \tau \wedge \omega^r \neq 0\,.$$

证明。 该结论可直接由前一个引理得出。 □

引理 2.17。 设(τ,ω)是一对由微分*1*-形式和*2*-形式组成的对象，且 $x \in M$ 是一个点。那么$\mathrm{cl}(\tau_x,\omega_x) = 2r$ 当且仅当，

$$\omega_x^r \neq 0\,, \qquad \omega_x^{r+1} = 0\,, \qquad \tau_x \wedge \omega_x^r = 0\,.$$

若 $\tau_x \neq 0$，则 $\omega_x^r \neq 0$ 和 $\tau_x \wedge \omega_x^r = 0$ 蕴含 $\omega_x^{r+1} = 0$。

证明。 假设 cl$(\tau_x,\omega_x) = 2r$。由命题 2.7 可知，秩$\omega_x = 2r$。因此，根据定理 2.3，我们有

$$\omega_x^r \neq 0, \qquad \omega_x^{r+1} = 0\,.$$

现在，由于该类是偶数，存在一个刘维尔向量 Δ_x，并且我们有

$$0 = \iota_{\Delta_x}(\omega_x^{r+1}) = (r+1)\tau_x \wedge \omega_x^r\,,$$

这意味着 $\tau_x \wedge \omega_x^r = 0$。

对于逆命题，首先注意，如果 $\omega_x^r \neq 0$ 且 $\tau_x \wedge \omega_x^r = 0$，那么该类必定是偶数。事实上，如果该类是奇数，就会存在一个 Reeb 向量 R_x，使得

$$0 = \iota_{R_x}(\tau_x \wedge \omega_x^r) = \omega_x^r\,,$$

这与 $\omega_x^r \neq 0$ 矛盾。

此外，若我们假设 $\tau_x \neq 0$，那么由存在刘维尔向量 Δ_x 这一事实可知，且

$$\iota_{\Delta_x}(\omega_x^{r+1}) = (r+1)\tau_x \wedge \omega_x^r = 0\,,$$

根据命题 2.4，我们有必然 $\omega_x^{r+1}=0$，因为 $\Delta_x \notin \operatorname{Ker}\omega_x$。

条件 $\omega_x^r \neq 0$ 和 $\omega_x^{r+1}=0$ 意味着 ω_x 的秩为 $2r$，根据定理2.3，因此该类也必定是 $2r$。

□

注 2.18。前述引理中的最后一个结果也称为 Lepage定理，参见[23, 命题 2.5]。△

注 2.19。注意，若 $\mathrm{cl}(\tau_x,\omega_x) = 2r$ 且 $\tau_x \neq 0$，那么作为命题2.4 和刘维尔向量场存在的直接推论，我们有

$$\tau_x \wedge \omega_x^i \neq 0\,,$$

对所有 $i=1,\dots,r-1$。 △

命题 2.20。设 (τ,ω) 是一个由微分*1*-形式和 *2*-形式构成的对。对 (τ,ω) 是类 $2r$ 的双元组，当且仅当，

$$\omega^r \neq 0\,, \qquad \omega^{r+1}=0\,, \qquad \tau\wedge\omega^r=0\,.$$

此外，若 τ 处处非零，则 (τ,ω) 是类为 $2r$ 的双元组，当且仅当，

$$\omega^r \neq 0\,, \qquad \tau\wedge\omega^r=0\,.$$

证明。 该结果直接由前一引理得出。 □

我们可以将前述两个命题结合起来，得到一对的类与其某些代数性质之间的关系：

推论 2.21. 设 (τ,ω) 为一对 *1*-形式与 *2*-形式。下列陈述等价：

(i) τ 处处非零，且 (τ,ω) 具有常类，为 $2r+1$ 或 $2r+2$。(ii) ω 具有常秩 $\tau\wedge\omega^r\neq 0$，且 $\tau\wedge\omega^{r+1}=0$。

在前述等价条件成立的前提下，若 $\omega^{r+1}=0$，则该类为奇数；若 $\omega^{r+1}\neq 0$，则该类为偶数。

3 与双元组相关的几何结构

本节介绍一些与双元组相关的几何对象。具体而言，我们将提出并研究特征张量、扩展特征分布和扩展3-形式，并说明它们与双元组的类以及 Reeb 向量场或刘维尔向量场之间的关系。

3.1 特征张量场

下面将证明，一个基于一对（τ，ω）构造的 2-协变张量场 B 尤其有用。我们将其引入为对称部分与反对称部分之和：

定义 3.1。与一对 (τ，ω) 相关联的特征张量场是如下给出的二阶协变张量场：

$$B=\tau\otimes\tau+\omega\,.$$

一般而言， B 既不是对称的，也不是斜对称的。该张量场定义了一个向量丛态射，

$$\begin{array}{rccc}\widehat{B}\colon & \mathrm{T}M & \longrightarrow & \mathrm{T}^*M \\ & v & \longmapsto & B(v,\cdot)=\iota_v B=(\iota_v\tau)\tau+\iota_v\omega\,.\end{array}$$

因此，我们还有一个 $\mathscr{C}^\infty(M)$-模态射，可以简记为

$$\begin{array}{rccc}\widehat{B}\colon & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \Omega^1(M) \\ & X & \longmapsto & B(X,\cdot)=\iota_X B=(\iota_X\tau)\tau+\iota_X\omega\,.\end{array}$$

命题 3.2. 设 (τ,ω) 是一对由一个微分1-形式和一个2-形式组成的形式。那么

$$\mathcal{K}_{(\tau,\omega)}=\operatorname{Ker}\tau\cap\operatorname{Ker}\omega=\operatorname{Ker}\widehat{B}=(\operatorname{Im}\widehat{B})^\circ\,,$$

在每一点都成立。因此，

$$\mathcal{K}^\circ_{(\tau,\omega)}=(\operatorname{Ker}\widehat{B})^\circ=\operatorname{Im}\widehat{B}\,,$$

因此，配对的类等于$\operatorname{Im}B$的维数。

证明。 我们先来看 $\operatorname{Ker}\tau\cap\operatorname{Ker}\omega=\operatorname{Ker}B$。包含关系 $\operatorname{Ker}\tau\cap\operatorname{Ker}\omega\subseteq\operatorname{Ker}B$ 显然成立。对于另一方向的包含，假设有 $B(X)=0$，即

$$\widehat{B}(X)=(\iota_X\tau)\tau+\iota_X\omega=0\,.$$

然后，再用 X 对该表达式进行收缩，得到 $(\iota_X\tau)^2=0$，这意味着 $\iota_X\tau=0$，进而得到 $\iota_X\omega=0$。因此，$X\in\operatorname{Ker}\tau\cap\operatorname{Ker}\omega$，正如我们所要证明的。

最后，我们要证明 $(\operatorname{Im}B)^\circ=\operatorname{Ker}B$。首先证明 $(\operatorname{Im}B)^\circ\supseteq\operatorname{Ker}B=\mathcal{K}_{(\tau,\omega)}$。事实上，对于任意向量 Y 和任意 $X\in\mathcal{K}_{(\tau,\omega)}$，有

$$\iota_X\widehat{B}(Y)=(\iota_Y\tau)\iota_X\tau+\iota_X\iota_Y\omega=-\iota_Y\iota_X\omega=0\,.$$

由于在每个点处这两个子空间的维数相同，它们必然相等。 □

推论 3.3. 设 (τ,ω) 为一对。以下条件等价：

(i) B 是一个向量丛同构。(ii) 该对的特征分布为零。(iii) 该对的类等于流形的维数。

命题 3.4。 设 (τ,ω) 是一个奇类双元组。那么，向量场 X 是该双元组的 ***Reeb*** 向量场，当且仅当 $B(X)=\tau$。因此，所有 ***Reeb*** 向量场均由 $R=R_0+\Gamma$给出，其中 R_0 是一个特定 ***Reeb*** 向量场，且 $\Gamma\in\mathcal{K}_{(\tau,\omega)}$。

证明。 如果 R 是一个 Reeb 向量场，则根据其定义可直接得到 $B(R)=\tau$。反过来，如果对于某个向量场 $X\in\mathfrak{X}(M)$ 有

$$\widehat{B}(X)=(\iota_X\tau)\tau+\iota_X\omega=\tau\quad\Longrightarrow\quad\iota_X\omega=(1-\iota_X\tau)\tau\,,$$

那么，将该表达式与一个 Reeb 向量场进行缩并，我们必然得到 $\iota_X\tau=1$。由此可知 $\iota_X\omega=0$。因此， X 是一个 Reeb 向量场。 □

命题 3.5。 设 (τ,ω) 是一个偶类双元组。那么，向量场 X 是刘维尔向量场，当且仅当 $B(X)=\tau$。因此，所有刘维尔向量场都由 $\Delta=\Delta_0+\Gamma$给出，其中 Δ_0 是一个特定的刘维尔向量场，且 $\Gamma\in\mathcal{K}_{(\tau,\omega)}=\operatorname{Ker}\omega$。

证明。 若 Δ 是一个刘维尔向量场，则可直接验证 $B(\Delta) = \tau$，因为根据定义， $\Delta \in \mathrm{Ker}\ \tau$。反之，若对于某个向量场 X，有

$$(\iota_X\tau)\tau + \iota_X\omega = \tau \quad \Longrightarrow \quad \iota_X\omega = (1 - \iota_X\tau)\tau\,.$$

将最后一个表达式与一个刘维尔向量场作缩并，

$$\iota_\Delta\iota_X\omega = -\iota_X\tau = 0\,,$$

因此，必有 $X \in \mathrm{Ker}\ \tau$。这意味着 $\iota_X\omega = \tau$，所以 X 是一个刘维尔向量场。 □

由此，Reeb 向量场与 Liouville 向量场都可表征为原像 $\widehat{B}^{-1}(\tau)$ 中的元素。

3.2 扩展特征分布

定义 3.6。 令 (τ, ω) 为一个微分1-形式与一个2-形式组成的对。其扩展特征分布[2] 在 $x \in M$ 处为

$$\mathcal{X}_{(\tau,\omega)_x} = \{v \in \mathrm{Ker}\,(\tau_x) \mid \iota_v\omega_x = a\,\tau_x\,,\ \text{for some } a \in \mathbb{R}\}\,.$$

注意，根据定义 $\mathcal{K}_{(\tau,\omega)x} \subseteq \mathcal{X}_{(\tau,\omega)x}$，且如果 $\tau_x = 0$，则等式成立。

引理 3.7. 设 (τ, ω) 是由一个微分*1*-形式和一个*2*-形式构成的对，并且 $x \in M$。

- 如果该对在 x 处的类为奇数，则

$$\mathcal{X}_{(\tau,\omega)_x} = \mathcal{K}_{(\tau,\omega)_x}\,.$$

- 如果该对在 x 处的类为偶数，则有以下两种情况之一：

$$\tau_x = 0 \quad \textit{and} \quad \mathcal{X}_{(\tau,\omega)_x} = \mathcal{K}_{(\tau,\omega)_x}\,,$$

or

$$\tau_x \neq 0 \quad \textit{and} \quad \mathcal{X}_{(\tau,\omega)_x} = \mathcal{K}_{(\tau,\omega)_x} \oplus \langle\Delta_x\rangle\,,$$

其中 Δ_x 是 x处的任意刘维尔向量。

证明。 若类为奇数，注意，如果 $v \in \mathcal{X}_{(\tau,\omega)_x}$，则这意味着 $\iota_v\omega_x = 0$；否则我们就会得到刘维尔向量的存在性。若类为偶数，则该结论可直接由刘维尔向量的定义推出。

□

命题 3.8。 设 (τ, ω) 是一个双元组，且 τ 处处非零。当且仅当满足以下条件时，该类为奇类：

$$\mathcal{X}_{(\tau,\omega)} = \mathcal{K}_{(\tau,\omega)}\,.$$

当且仅当满足以下条件时，该类为偶类：

$$\mathcal{X}_{(\tau,\omega)} = \mathcal{K}_{(\tau,\omega)} \oplus \langle\Delta_0\rangle\,,$$

其中 Δ_0 是该双元组的任意刘维尔向量场。

证明。 这可直接由前述引理得出。 □

推论 3.9。 一个双元组 (τ, ω)，其中 τ 处处非零，当且仅当扩展特征分布 $\mathcal{X}_{(\tau,\omega)}$ 是秩为 $m - 2r - 1$ 的正则分布时，其类为 $2r + 1$ 或 $2r + 2$。

[2]在 [17] 他们将其简称为特征分布。

请注意，这一陈述与命题 2.7 的相似之处。我们还有以下与命题3.8 平行的结果。

命题 3.10。 设(τ,ω) 是一个双元组。(τ,ω) 的类为奇类，当且仅当，

$$\operatorname{Ker}\omega = \mathcal{K}_{(\tau,\omega)} \oplus \langle R_0 \rangle \ ,$$

其中， R_0 是对(τ,ω)的任意 ***Reeb*** 向量场。类(τ,ω) 为偶类，当且仅当，

$$\operatorname{Ker}\omega = \mathcal{K}_{(\tau,\omega)} \ .$$

证明。 对于偶类，结论可由定理 2.13直接得出。若该类为奇类，则显然 $\mathcal{K}_{(\tau,\omega)} \oplus \langle R_0 \rangle$ 属于 $\operatorname{Ker}\omega$，对任意 Reeb 向量场 R_0均成立。此外，若该对的类为 $2r+1$，则分布 $\mathcal{K}_{(\tau,\omega)} \oplus \langle R_0 \rangle$ 的维数为 $(m-2r-1)+1 = m-2r$，且由于 ω 的秩为 $2r$，$\dim(\operatorname{Ker}\omega) = m-2r$。由于维数相同，它们必定相等。 □

3.3 扩展 3-形式

本节将引入与一个双元组相关联的微分 3-形式，并说明它与扩展特征分布以及给定双元组的类之间的关系。

定义 3.11。 与一个双元组相关联的扩展 3-形式为 ***3***-形式 $\tau\wedge\omega$。

引理 3.12。 设 $\tau_x \neq 0$。那么 $\tau_x \wedge \omega_x = 0$ 当且仅当 $\operatorname{cl}(\tau_x,\omega_x) \leq 2$。

证明。 这是引理 2.15 和 2.17的推论。 □

鉴于此，为避免平凡情形，以下我们只考虑类为 ≥ 3 的对 $(\tau,\ \omega)$，因此流形的维数为 ≥ 3。

命题 3.13。 设 (τ,ω) 是一个双元组，满足 τ处处非零，$\operatorname{cl}(\tau,\omega) \geq 3$。扩展*3*-形式的核是扩展特征分布：

$$\operatorname{Ker}(\tau\wedge\omega) = \mathcal{X}_{(\tau,\omega)} \ .$$

证明。 首先注意到， $X \in \operatorname{Ker}(\tau\wedge\omega)$ 当且仅当

$$(\iota_X\tau)\omega = \tau\wedge(\iota_X\omega) \ .$$

根据扩展特征分布的定义，显然 $X \in \mathcal{X}_{(\tau,\omega)}$ 蕴含$X \in \operatorname{Ker}(\tau\wedge\omega)$。反过来，设 X是一个向量场，使得 $(\iota_X\tau)\ \omega = \tau\wedge(\iota_X\omega)$。然后，在该表达式两边左楔乘 τ，得到

$$(\iota_X\tau)\,\tau\wedge\omega = 0 \ .$$

由于根据前一个引理，$\tau\wedge\omega \neq 0$，$\iota_X\tau = 0$，因此 $\tau\wedge(\iota_X\omega) = 0$。于是，$\iota_X\omega = f\tau$对某个函数 f成立，所以 $X \in \mathcal{X}_{(\tau,\omega)}$。 □

给定一个 p-形式 $\alpha \in \Omega^p(M)$，如果映射 $v_x \in \mathrm{T}_xM \mapsto \iota_{v_x}\alpha_x \in \bigwedge^{p-1}\mathrm{T}_x^*M$ 对每个$x \in M$都是单射，那么该形式称为殆多重辛形式 [3]。此外，如果该形式是闭的，则称为多重辛。前面的结果使我们能够根据类来刻画由 1-形式与 2-形式的楔积构造的哪些 3-形式是近多重辛的。

推论 3.14。 设(τ,ω) 是 M 上一个由 *1*-形式和 *2*-形式组成的对。以下命题等价。

(i) 扩展3-形式 $\tau\wedge\omega$ 是近多重辛的。(ii) τ 处处非零，且扩展特征分布 $\mathcal{X}_{(\tau,\omega)}$ 为零。(iii) M 是奇数维的，并且配对 (τ,ω) 的类等于该维数。

证明。 前两个陈述的等价性由前一个命题得出。第二个和第三个陈述的等价性由引理 3.7 得出，因为它表明特征分布必为零，因此类必须等于流形的维数；若类为偶数，则扩展特征分布的维数为 1。

□

4 一些重要例子

迄今为止介绍的双元组框架涵盖了许多重要的几何结构。本文回顾其中的一些，并特别关注相关几何结构的性质。

4.1 接触结构

流形上的一个接触形式 M，其维数为 $2n+1$，是一个 1-形式 η，满足

- $\eta\wedge(\mathrm{d}\eta)^n$ 是 M上的体积形式，也就是说，它处处非零。

根据 命题 2.16，这意味着对 $(\eta,\mathrm{d}\eta)$ 是一个 $2n+1$ 类双元组 .

于是，特征分布 $\mathcal{K}_{(\eta,\mathrm{d}\eta)}=\mathrm{Ker}\,\eta\cap\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}\eta$ 为零，扩展特征分布也为零。由命题 2.10 可得直和分解 $\mathrm{T}^*M=(\mathrm{Ker}\ \eta)^\circ\oplus(\mathrm{Ker}\ \mathrm{d}\eta)^\circ$ 以及 $\mathrm{T}M=\mathrm{Ker}\ \eta\oplus\mathrm{Ker}\ \mathrm{d}\eta$。此外，由命题 3.2，特征张量场定义了一个同构 $B\colon\mathrm{T}M\to\mathrm{T}^*M$，其给出方式为 $B(X)=\iota_X\mathrm{d}\eta+(\iota_X\eta)\eta$。由于类为奇数，存在唯一确定的 Reeb 向量场 R，其定义为 $R=\widehat{B}^{-1}(\eta)$。推论 3.14 表明，扩展 3-形式 $\eta\wedge\mathrm{d}\eta$ 是一个 3 次殆多重辛形式（只要 $\dim M\geq 3$）。

4.2 余辛结构与预余辛结构

设 M 是一个维数为 $2n+1$ 的流形。 M 上的 余辛结构 是一对 $(\tau,\ \omega)$，其中 $\tau\in\Omega^1(M)$ 和 $\omega\in\Omega^2(M)$ 满足：

- 两个形式都是闭的，即 $\mathrm{d}\tau=0$ 和 $\mathrm{d}\omega=0$，并且
- $\tau\wedge\omega^n$ 是 M 上的体积形式，即处处非零。

第二个条件等价于这对 (τ,ω) 属于 $2n+1$ 类。与前面一样，我们有直和分解 $\mathrm{T}^*M=(\mathrm{Ker}\ \tau)^\circ\oplus(\mathrm{Ker}\ \omega)^\circ$ 以及 $\mathrm{T}M=\mathrm{Ker}\ \tau\oplus\mathrm{Ker}\ \omega$。同样，映射 $B(X)=\iota_X\omega+(\iota_X\tau)\tau$ 是一个同构，并且存在唯一确定的 Reeb 向量场 $R=\widehat{B}^{-1}(\tau)$。由于 τ 和 ω 都是闭的，3-形式 $\tau\wedge\omega\in\Omega^3(M)$ 也是闭的，因此它是一个多重辛形式（只要 $\dim M\geq 3$），根据推论 3.14。

需要注意的是，尽管这些性质中的大多数与接触结构共有，但这两种结构并不相同。它们的差异例如体现在局部表达式上；具体而言，它们具有不同的达布标准形。在接触情形中，达布坐标的存在是1-形式与其外微分之间关系的结果；而对于余辛结构，达布坐标的存在则源于闭性条件。

通过放宽第二个条件，可以得到一个更一般的几何框架。 M 上的预余辛结构 是由一个 1-形式和一个 2-形式构成的对（τ，ω），满足

- 两种形式都是闭的，即 $\mathrm{d}\tau = 0$ 和 $\mathrm{d}\omega = 0$，并且
- (τ, ω)的类为常数，且 τ 处处非零。

这些形式闭性的一个直接推论是其关联分布的可积性： ω的核、特征分布以及扩展特征分布。

文献中通常要求预余辛结构的类为奇数，以获得某些达布坐标或保证 Reeb 向量场的存在，此外还有其他原因 [6, 18]。例如，根据定理 2.13，这一条件可以表述为要求 $\mathcal{K}_{(\tau,\omega)}$ 严格包含于 $\operatorname{Ker}\omega$。若 ω 的秩为 $2r$，则这等价于

$$\omega^{r+1} = 0\,, \qquad \tau \wedge \omega^r \neq 0\,.$$

若类为奇数，则存在 Reeb 向量场（定理 2.13）。此外，在这种情况下有$\mathcal{X}_{(\tau,\omega)} = \mathcal{K}_{(\tau,\omega)}$。

当 $\operatorname{Ker}\,\omega \subseteq \operatorname{Ker}\,\tau$时，类为偶数。若 $\operatorname{rank}\omega = 2r$，则这等价于

$$\omega^r \neq 0\,, \qquad \tau \wedge \omega^r = 0\,,$$

根据命题 2.20。在这种情况下，不存在 Reeb 向量场，而存在刘维尔向量场（定理 2.13）。

例 4.1。 设 $M = \mathbb{R}^4$ 带有坐标 $(x,\ y,\ z,\ t)$，并考虑以下微分形式

$$\tau = \mathrm{d}t\,, \qquad \omega_1 = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\,, \qquad \omega_2 = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}t\,.$$

所有形式都是闭的且处处非零，并且有 $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 0$，因此两个 2-形式的秩均为 2。由于

$$\tau \wedge \omega_1 \neq 0\,, \qquad \tau \wedge \omega_2 = 0\,,$$

两对 $(\tau,\ \omega_1)$ 和 $(\tau,\ \omega_2)$ 分别是类为 3 和 2 的预余辛结构。第一对的 Reeb 向量场为

$$R = \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_1\,,$$

其中 $\Gamma_1 \in \mathcal{K}_{(\tau,\omega_1)} = \left\langle y\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial z} \right\rangle$。第二对的刘维尔向量场为

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_2\,,$$

其中 $\Gamma_2 \in \mathcal{K}_{(\tau,\omega_2)} = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z} \right\rangle$ △

4.3 辛结构与预辛结构

流形 M 上的辛形式是一个 2-形式 $\omega \in \Omega^2(M)$，满足

- 它是闭的：$\mathrm{d}\omega = 0$，并且
- 它是非退化的。

非退化等价于 $\operatorname{Ker}\omega$ 为零，因此也等价于 ω 的秩等于流形的维数。它还等价于 ω^n 是体积形式。任何辛流形的维数都是偶数。

辛形式可以理解为一个双元组 $(0,\ \omega)$（其中 0 表示恒为零的 1-形式）。这个双元组的类显然是 $2n$，根据命题 2.20

等价于 $\omega^n \neq 0$ 一个体积形式。在这种情况下，由特征张量 $\widehat{}$诱导的态射是同构 $B = \widehat{\omega}$。这个双元组唯一的刘维尔向量场是零向量场。

若 ω 是恰当的，也就是说，若存在一个 1-形式 θ 使得 $\omega = \mathrm{d}\theta$，那么我们也可以考虑双元组 (θ, ω)。这个双元组的类仍然是 $2n$，因为特征分布是平凡的。在这种情况下，我们有 $\mathrm{T}^*M = (\mathrm{Ker}\ \omega) \circ \supset (\mathrm{Ker}\ \theta)^\circ$。根据命题 3.2，映射 $\widehat{B}(X) = \iota_X\omega + (\iota_X\theta)\theta$ 是一个同构，由此得到 $\Delta = \widehat{B}^{-1}(\theta)$。注意，我们还有 $\widehat{\omega}^{-1}(\theta) = \Delta$。通过将 $\widehat{B}$ 改写为以下形式，可以验证它是一个同构：

$$\widehat{B}(X) = \iota_X\omega + (\iota_X\theta)\iota_\Delta\omega = \iota_{X+(\iota_X\theta)\Delta}\omega\,,$$

然后验证 $X + (\iota_X\theta)\Delta = 0$ 当且仅当 $X = 0$。根据命题 3.8，扩展特征分布 $\mathcal{X}_{(\theta,\omega)}$ 由刘维尔向量场 $\Delta \in \mathfrak{X}(M)$张成。回想一下，根据命题 3.13，若 $\dim\ M \geq 3$ 且 θ 处处非零，则 $\mathcal{X}_{(\theta,\omega)} = \mathrm{Ker}(\theta \wedge \omega)$。

放宽非退化条件后，我们可以得到更一般的几何结构。流形 M 上的预辛结构是一个 2-形式 ω，满足

- ω 是闭的，并且
- ω 的秩是常数。

在这种情况下，我们仍可以考虑双元组 $(0,\ \omega)$，其类为 ω的秩，因此是一个偶数。这一对的刘维尔向量场是 $\mathrm{Ker}\,\omega$的截面。

当 ω 是恰当的，即 $\omega = \mathrm{d}\theta$时，对 $(\theta,\ \omega)$不一定具有常类。即使其类是常数，也可能是奇数或偶数。

4.4 哈密顿系统

一个哈密顿系统是一个三元组（M、ω、H），其中，M是一个流形，$\omega \in \Omega^2(M)$ 是一个辛形式，而 H 是一个函数。哈密顿系统在分析力学、辛几何和动力系统理论中极为重要。然而，在某些应用中，人们需要考虑 ω 仅为预辛形式的情形，因此得到一个预辛哈密顿系统。

在这一背景下，通常需要寻找哈密顿向量场，即满足以下条件的向量场：

$$\iota_X\omega = \mathrm{d}H\,.$$

在前几节的框架下，哈密顿向量场正是对（$\mathrm{d}H$、ω）的刘维尔向量场。如果 ω 是辛的，则哈密顿向量场是该对唯一的刘维尔向量场。

当 ω 退化时，哈密顿向量场可能不存在，也可能不唯一。这一问题在数学物理中具有重要意义，因此人们已经发展出处理该问题的方法，最早始于狄拉克–伯格曼约束理论。许多作者研究了它的几何 aspects（例如，参见 [4, 15]）。

让我们进一步分析这个问题。求得哈密顿向量场的第一步，是尝试求解线性方程

$$\iota_{X_x}\omega_x = \mathrm{d}_xH\,,$$

该方程有解，当且仅当

$$\mathrm{d}_xH \in \mathrm{Im}\,\widehat{\omega}_x\,.$$

根据定理2.13，这等价于说，点 H 处的对 $(d\omega,\ x)$ 具有偶类。因此，用约束系统的语言来说，可以这样理解：初级约束子流形是 $(\mathrm{d}H, \omega)$ 的类为偶类的点的集合。这可以作为约束算法的起点，但我们不在此深入讨论。

4.5 局部共形辛流形

有时，人们将 M 上的一个 2-形式 $\omega \in \Omega^2(M)$ 称为殆辛形式，它仅仅是

- 非退化。

这意味着，为使其成为辛形式而要求的闭性条件已被舍弃。尽管如此，更有意思的是，只需乘以一个函数就能实现辛性的情形 [5]。若存在函数 ω，使得 共形辛，则称 2-形式 f 满足 $\mathrm{e}^f\omega$ 是一个辛形式。换言之：

- $\mathrm{d}(e^f\omega) = 0$ 且
- ω 是非退化的。

如果在每个点附近都能找到这个共形因子，则称 2-形式是局部共形辛的。

2-形式 ω 是局部共形辛的，当且仅当存在一个闭的1-形式 θ（即所谓的***Lee***形式），使得

$$\mathrm{d}\omega = -\theta \wedge \omega\,.$$

此外，若 θ 是恰当的，则该 2-形式是整体共形辛的。

由于 $\omega^n \neq 0$，对 (θ, ω) 是类 $2n$ 的双元组。这意味着存在唯一的刘维尔向量场 Δ，使得$\widehat{\ }\ \iota_\Delta\omega = \theta$。同样，在这种情况下，映射 $B(X)$ $=$ $\iota_X\omega + \iota_X\theta\ \theta$ $\widehat{\omega}\ X\ = \iota_X\omega$ $\Delta = \widehat{\omega}^{-1}\ \theta\ = \widehat{B}^{-1}\ \theta$ ( ) 和 ( ) 均为同构，并且 ( ) ( )。最后注意，$\mathrm{d}\omega$ 是该双元组的扩展 3-形式的相反数。

5 预接触形式

本节系统地探讨预接触形式的概念。流形上的 1-形式 η 定义了一个对（η，$\mathrm{d}\eta$），因此可以应用第 2 节和3 节中给出的结果。特别地，对 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{(\eta,\mathrm{d}\eta)} = \operatorname{Ker}\eta \cap \operatorname{Ker}\mathrm{d}\eta$的特征分布就是 η的特征分布，而它的类 cl(η，$\mathrm{d}\eta$) 就是 η的类，正如我们在注 2.6中所指出的。

5.1 预接触形式

定义 5.1。 流形上的 1-形式 η 若满足以下条件，则称为预接触形式

- η 处处非零，并且
- 对（η，$\mathrm{d}\eta$）具有常类。

一个预接触流形 是一个对 (M，η)，其中 M 是一个流形，η 是定义在 M上的预接触形式。

接下来，我们应用第 2 节和第 3 节的结果，得到预接触形式概念的不同刻画。首先，改写推论 2.21，得到如下结果。

命题 5.2. 设 η 是一个 *1*-形式。

(i) η 是一个类 $2r+1$ 预接触形式，当且仅当，

$$\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^r \neq 0\,, \qquad (\mathrm{d}\eta)^{r+1} = 0\,.$$

(ii) η 是类为 $2r+2$ 的预接触形式，当且仅当，

$$\eta \neq 0\,, \qquad \eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^{r+1} = 0\,, \qquad (\mathrm{d}\eta)^{r+1} \neq 0\,.$$

这里给出的定义与文献中其他定义略有不同。一方面，它比 [7, 10, 22] 中的定义更一般，因为后者仅考虑奇类预接触形式。另一方面，在 [17], 中，研究的是预接触分布而非预接触形式；不过，预接触形式仍以处处非零且满足

$$\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^r \neq 0\,, \qquad \eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^{r+1} = 0\,.$$

然而请注意，这个预接触形式的定义不足以确保 $\mathrm{d}\eta$ 的秩为常数，因为类的奇偶性可能在不同的点发生变化，正如下面的例子所示。

例5.3。 考虑带有坐标 $(x,\ y,\ s)$ 的流形 $M = \mathbb{R}^3$，其上赋有处处非零的 1-形式

$$\eta = \mathrm{d}s - sx\,\mathrm{d}x.$$

直接计算可得

$$\mathrm{d}\eta = x\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}s\,, \qquad \eta \wedge \mathrm{d}\eta = 0\,.$$

因此：

- 其中 $x = 0$：$\mathrm{d}\eta$ 的秩为 0，且 η 的类为 1。
- 其中：$\mathrm{d}\eta$ 的秩为 2，且 η 的类为 2。

△

存在刻画预接触形式局部表达式的达布定理，证明请参见 [14, 23]。

定理5.4 （达布定理，奇类）。
设 $\eta \in \Omega^1(M)$ 是一个类为 $2r+1$ 的处处非零 1-形式。那么，对于所有 $x \in M$，存在局部坐标 q^1、…、q^r、p_1、…、p_r、s、u_1、…、u_z（其中 $2r+z+1=m$），使得

$$\eta = \mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{r} p_i\,\mathrm{d}q^i\,.$$

在达布坐标中，特征分布和 Reeb 向量场表示为

$$\mathcal{K} = \left\langle \left\{ \frac{\partial}{\partial u_a} \right\}_{a=1,\dots,z} \right\rangle \qquad \text{and} \qquad R = \frac{\partial}{\partial s} + \Gamma\,, \quad \text{with} \quad \Gamma \in \mathcal{K}\,.$$

定理5.5 （达布定理，偶类）。
设 $\eta \in \Omega^1(M)$ 是一个类为 $2r+2$ 的处处非零 1-形式。那么，对于所有 $x \in M$，都存在局部坐标 $q^1, \dots, q^{r+1}, p_1, \dots, p_{r+1}, u_1, \dots, u_z$（其中 $2r+2+z=m$），使得p_1 处处非零，并且

$$\eta = \sum_{i=1}^{r+1} p_i \mathrm{d}q^i\,.$$

在达 布坐标中， η 的特征分布和刘维尔向量场 rea d

$$\mathcal{K} = \left\langle \left\{ \frac{\partial}{\partial u_a} \right\}_{a=1,\dots,z} \right\rangle \qquad \text{and} \qquad \Delta = p_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \Gamma\,, \quad \text{with} \quad \Gamma \in \mathcal{K}\,.$$

接下来我们研究扩展特征分布。

命题 5.6。 如果（M、 η）是预接触流形，那么$\mathrm{d}\eta$的核、特征分布和扩展特征分布都是对合的。

证明。 $\mathrm{d}\eta$ 的核是对合的，因为$\mathrm{d}\eta$ 是一个闭形式。

对于特征分布，如果 $X, Y \in \mathcal{K} = \mathrm{Ker}\ \eta \cap \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}\eta$，则

$$\iota_{[X,Y]}\eta = \mathscr{L}_X(\iota_Y\eta) - \iota_Y\mathscr{L}_X\eta = -\iota_Y\iota_X\mathrm{d}\eta = 0\,, \qquad \iota_{[X,Y]}\mathrm{d}\eta = \mathscr{L}_X(\iota_Y\mathrm{d}\eta) - \iota_Y\mathscr{L}_X\mathrm{d}\eta = 0\,,$$

这就证明了它是对合的。

最后，对于扩展特征分布，我们讨论两种可能的情况。若类为奇数，则扩展特征分布等于特征分布。若类为偶数，则扩展特征分布为 $\mathcal{X} = \mathcal{K} \oplus \langle\Delta_0\rangle$，其中 Δ_0 是任意刘维尔向量场。因此，我们只需验证对于任意$\Gamma \in \mathcal{K}$， $[\Delta_0, \Gamma] \in \mathcal{X}$ 。我们有

$$\iota_{[\Delta_0,\Gamma]}\mathrm{d}\eta = -\iota_\Gamma\mathrm{d}\eta = 0\,,$$

并且由于在这种情况下$\mathrm{Ker}\ \mathrm{d}\eta \subset \mathrm{Ker}\,\eta$，我们得出该分布是对合的。 □

注 5.7。 在前面的证明中，我们确实已经表明，对于偶类的预接触流形， $[\Delta, \Gamma] \subset \mathcal{K}$ 对于任意刘维尔向量场 Δ 和 $\Gamma \in \mathcal{K}$。△

如果 $(M,\ \eta)$ 是类为 ≥ 3 的预接触流形，那么 $\mathrm{Ker}\ (\eta \wedge \mathrm{d}\eta)$ 也是对合的，因为 $\mathrm{Ker}(\eta \wedge \mathrm{d}\eta) = \mathcal{X}_{(\eta,\mathrm{d}\eta)}$。

例 5.8。 这里我们给出一个偶类预接触结构的例子，该结构源于在接触力学框架下对奇异拉格朗日函数的研究 [19]。

考虑流形 $M = \mathrm{T}^*(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}$，其坐标为 $(x,\ y,\ z;\ p_x,\ p_y,\ p_z;\ s)$，以及 1-形式

$$\eta = \mathrm{d}s - p_x\mathrm{d}x + \gamma s\mathrm{d}y - p_z\mathrm{d}z\,,$$

其中 $\gamma \in \mathbb{R}$ 是一个非零常数。我们有

$$\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}p_x + \gamma\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}p_z\,,$$

并且容易验证

$$\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}\eta = \left\langle \frac{\partial}{\partial p_y} \right\rangle \subset \mathrm{Ker}\,\eta\,,$$

因此 $\mathcal{K} = \mathrm{Ker}\,\eta \cap \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}\eta = \left\langle \frac{\partial}{\partial p_y} \right\rangle$。这意味着该类为 6。由于该类是偶数，因此存在刘维尔向量场。具体而言，它们为

$$\Delta = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial y} + p_x\frac{\partial}{\partial p_x} + f\frac{\partial}{\partial p_y} + p_z\frac{\partial}{\partial p_z} + s\frac{\partial}{\partial s}\,,$$

其中 f 是任意函数。

△

5.2 接触与预接触哈密顿系统

一个接触哈密顿系统是一个三元组 (M, η, H)，其中 (M, η) 是一个接触流形，且$H \in \mathscr{C}^\infty(M)$ 是该系统的哈密顿函数。这在 M 上产生一个动力学，由接触哈密顿向量场 $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ 给出，它由以下任一等价条件定义：

(1) $\iota_{X_H}\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}H - (\mathscr{L}_R H)\eta \quad$ and $\quad \iota_{X_H}\eta = -H,$

(2) $\mathscr{L}_{X_H}\eta = -(\mathscr{L}_R H)\eta \quad$ and $\quad \iota_{X_H}\eta = -H$,
(3) $\widehat{B}(X_H) = \mathrm{d}H - (\mathscr{L}_R H + H)\eta$,

其中 $R \in \mathfrak{X}(M)$ 是由接触形式定义的（唯一）Reeb 向量场。

显然，这些表述并不适合用于定义预接触流形上的哈密顿动力学，因为 Reeb 向量场可能不存在，也可能不唯一。我们在一篇近期论文 [19],中得到了接触哈密顿方程的两种等价表述，它们无需借助 Reeb 向量场即可写出：向量场 X 在 M 上是 H 的接触哈密顿向量场，当且仅当

$$(\iota_X \mathrm{d}\eta)\wedge\eta = (\mathrm{d}H)\wedge\eta \qquad \text{and} \qquad \iota_X\eta = -H\,, \tag{4}$$

或者，等价地，

$$\iota_X(\eta\wedge\mathrm{d}\eta) = -H\mathrm{d}\eta + \mathrm{d}H\wedge\eta\,. \tag{5}$$

注 5.9。方程（4）和（5）等价，当 $\eta\wedge\mathrm{d}\eta \neq 0$时。换言之，当 η 处处非零且 η 的类是 ≥ 3时，它们等价。否则，还需在方程（5）中加入条件 $\iota_X\eta = -H$ 。△

我们希望将这些概念推广到预接触形式的情形。

定义 5.10. 给定一个预接触形式 η 和一个函数 H: $M \to \mathbb{R}$，我们称三元组 (M,η,H) 为一个预接触哈密顿系统。

给定一个预接触哈密顿系统 (M,η,H)，预接触哈密顿向量场是满足方程 ($X \in \mathfrak{X}(M)$ 的向量场。。

注意，若 η 属于奇类，因此存在 Reeb 向量场，那么用任意 Reeb 向量场 $R \in \mathfrak{X}(M)$ 对方程 (4) 的第一个条件进行缩并，可得

$$\iota_X\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}H - (\mathscr{L}_R H)\eta\,,$$

这正是定义接触哈密顿向量场的通常方式（本节开头的条件 (1)）。由于在预接触情形下 Reeb 向量场未必唯一，这也意味着，要使解 X_x 在点 $x \in M$ 处存在，必要条件是

$$\mathscr{L}_R H(x) = \mathscr{L}_{R'} H(x)\,,$$

对于任意两个 Reeb 向量场 R, R'。根据命题 3.4，这等价于

$$\mathscr{L}_\Gamma H(x) = 0\,,$$

对每个 $\Gamma \in \mathcal{K} = \mathrm{Ker}\ \eta \cap \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}\eta$。

类似地，如果 η 具有偶类，则用任意刘维尔向量场 $\Delta \in \mathfrak{X}(M$收缩方程 (4) 的第一式，我们得到必要条件

$$\mathscr{L}_\Delta H(x) = H(x)\,.$$

同样，这意味着对于任意 $\Gamma \in \mathcal{K} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}\eta$， $\mathscr{L}_\Gamma H(x) = 0$ 。

最后，我们指出以下结果，该结果为本文下一节提供了动机。回想一下，由 η 的核所张成的余维 1 分布，与由 $g\eta$的核所张成的分布相同，其中 $g \in \mathscr{C}^\infty$（M）为任意处处非零函数。此外，众所周知，接触哈密顿系统（M、 η、 H）的接触哈密顿方程，与由接触哈密顿系统（M、 $g\eta$、 gH）定义的方程相同，其中 $g \in \mathscr{C}^\infty$（M）为任意处处非零函数 [2, 8]。对于预接触哈密顿系统，我们有以下结果。

命题 *5.11.* 设 (M,η,H) 为一个预接触哈密顿系统。由预接触系统 $(M,g\eta,H)$ 定义的方程 *(4)*（其中 $g\in\mathscr{C}^\infty(M)$ 为处处非零函数且 $H\in\mathscr{C}^\infty(M)$）当且仅当 $H=gH$ 时，与由 (M,η,H) 定义的方程相同。

证明。 首先假设 $H=gH$处处非零。于是，$(M,g\eta,gH)$ 的预接触哈密顿方程为

$$(\iota_X\mathrm{d}(g\eta))\wedge g\eta=\mathrm{d}(gH)\wedge(g\eta)\,,\qquad \iota_X(g\eta)=-gH\,.$$

第二个方程利用 g 处处非零这一点，推出 $\iota_X\eta=-H$。现在只需验证 (4) 的第一个条件也成立。为此，注意到

$$(\iota_X\mathrm{d}(g\eta))\wedge g\eta=(\mathrm{d}(gH))\wedge(g\eta)\quad\Longrightarrow\quad((\iota_X\mathrm{d}g)\eta-(\iota_X\eta)\mathrm{d}g+g\iota_X\mathrm{d}\eta)\wedge g\eta=(H\mathrm{d}g+g\mathrm{d}H)\wedge g\eta$$

并利用 $\iota_X\eta=-H$，我们得到

$$(gH)\mathrm{d}g\wedge\eta+g^2(\iota_X\mathrm{d}\eta\wedge\eta)=(gH)\mathrm{d}g\wedge\eta+g^2(\mathrm{d}H\wedge\eta)\,,$$

由于 g 处处非零，这意味着 $\iota_X(\mathrm{d}\eta)\wedge\eta=\mathrm{d}H\wedge\eta$，正如我们所要证明的。

反过来，假设 $(M,g\eta,H)$ 定义的预接触哈密顿方程与 (M,η,H) 相同。那么，对于 $(M,g\eta,H)$，我们有 $\iota_X(g\eta)=-H$。利用 g 是处处非零的 $\sim\iota_X\eta=-H/g$. 然而，由于这两个系统定义了相同的接触哈密顿方程，我们还可得出 $\iota_X\eta=-H$。因此， $H=gH$，这正是我们想要证明的。

□

这个命题促使我们研究预接触形式 η 经过共形变换后的影响，尤其是这种变换如何影响其类。这正是下一节要讨论的主题。

6 奇偶性的共形变换

设 η 是流形 M 上的预接触形式。若用处处非零函数$f\in\mathscr{C}^\infty(M)$ 对其重新缩放，仍有 Ker η =Ker $(f\eta)$ 。 尽管如此，由此得到的预接触结构 $(M,f\eta)$ 可能与原结构表现得大不相同。与 η 相关联的一些几何结构，例如 Reeb 向量场与 Liouville 向量场，会以非平凡的方式依赖于 η ，因此会受到此类共形变换的影响。事实上，正如下文将要说明的，甚至预接触形式的类的奇偶性也可能发生变化。

事实上，分析预接触形式 $f\eta$ 的性质，归根结底是要理解这一对

$$(f\eta,\mathrm{d}(f\eta))=(f\eta,\mathrm{d}f\wedge\eta+f\mathrm{d}\eta)\,,$$

而且显 然，附加项 $\mathrm{d}f\wedge\eta$ 可能会显著改变底层结构 e.

与其乘以一个处处非零函数，不如将这个乘数写成某个函数的指数函数 e^f ，这样更为方便。此外，为了获得更全面的视角，我们将考虑一对形式 $(\tau,\ \omega)$，其中 τ 处处非零；受前述评论的启发，我们将研究这一对

$$\left(e^f\tau,e^f(\mathrm{d}f\wedge\tau+\omega)\right)\,.$$

注 6.1. 给定一对 (τ,ω)，可以考虑一种更简单的共形变换，形式为 $(g\tau,g\omega)$，其中 g处处非零。若 (τ,ω) 具有常类，则 $(g\tau,g\omega)$ 也具有相同的常类，因为它们的特征分布相同。这两对的 Reeb 向量场或刘维尔向量场之间的关系也显而易见：若 Δ 是 (τ,ω) 的刘维尔向量场，那么它也是 $(g\tau,g\omega)$ 的刘维尔向量场；若 R是 (τ,ω) 的 Reeb 向量场，那么 R/g就是 $(g\tau,g\omega)$ 的 Reeb 向量场。然而，这些并非预接触结构中自然的共形变换。△

引理 6.2. 设 $\tau\in\Omega^1(M)$ 是 M 上的一个1-形式，$f\in\mathscr{C}^\infty(M)$ 是一个函数。那么，对于每个 $n\geq 1$，

$$(e^f(\mathrm{d}f\wedge\tau+\omega))^n=e^{nf}(n\,\mathrm{d}f\wedge\tau\wedge\omega^{n-1}+\omega^n)\,.$$

证明。 我们用归纳法证明这一点。对于情形 $n=1$，这是显然的。现在，假设对 $n-1$ 结论成立，则归纳步骤为

$$\begin{aligned}(e^f(\mathrm{d}f\wedge\tau+\omega))^n&=(e^f(\mathrm{d}f\wedge\tau+\omega))^{n-1}\wedge(e^f(\mathrm{d}f\wedge\tau+\omega))\\&=e^{(n-1)f}((n-1)\mathrm{d}f\wedge\tau\wedge\omega^{n-2}+\omega^{n-1})\wedge e^f(\mathrm{d}f\wedge\tau+\omega)\\&=e^{nf}(n\,\mathrm{d}f\wedge\tau\wedge\omega^{n-1}+\omega^n)\,,\end{aligned}$$

由此即可证明结论。 □

利用这个引理，我们得到

$$(e^f\tau)\wedge(e^f(\mathrm{d}f\wedge\tau+\omega))^n=e^{(n+1)f}(\tau\wedge\omega^n)\,,\tag{6}$$

对所有 n 均成立。

注 6.3。 根据推论 2.21，若一对 $(\tau,\ \omega)$ 在某个点处具有类 $2r+1$ 或 $2r+2$，则一对 $(e^f\tau,\ e^f(\mathrm{d}f\wedge\tau+\omega))$ 在同一点处也具有类 $2r+1$ 或 $2r+2$。这个类要么保持不变，要么变化一级，即从 $2r+1$ 变为 $2r+2$，或从 $2r+2$ 变为 $2r+1$。此外，即使 $(\tau,\ \omega)$ 具有常类，其共形缩放也未必如此，因为 $e^f(\mathrm{d}f\wedge\tau+\omega)$ 的秩可能不是常数，如下一个例子所示。 △

例 6.4。 考虑带有坐标 $(x,\ y,\ z,\ t)$ 的 $M=\mathbb{R}^4$，并且

$$\omega=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\,,\qquad\tau=\mathrm{d}z\,,\qquad f=\frac{1}{2}t^2\,.$$

那么，$e^f(\mathrm{d}f\wedge\tau+\omega)=e^f(t\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$，显然，当 $t\neq 0$ 时，该 2-形式的秩为 4；当 $t=0$ 时，秩为 2。显然，对 $(e^f\tau,\ e^f(\mathrm{d}f\wedge\tau+\omega))$ 的类在 $t\neq 0$ 时为 4，在 $t=0$ 时为 3。△

给定 η 上的一个预接触形式 M，我们可以考虑 $z\eta$ 上的形式 $M\times\mathbb{R}^\times$，其中 z 是非零实数乘法群的典范坐标 $\mathbb{R}^\times$，并且我们考虑将 $\eta\in\Omega^1(M)$ 拉回到 $M\times\mathbb{R}^\times$上的情形。这个过程称为预接触形式的预辛化（更多详情见 [17] ）。下面给出如下结果：

命题 6.5. 设 η 是 M 上的一个类为 $2r+1$ 或 $2r+2$的预接触形式。那么，形式$z\eta\in\Omega^1(M\times\mathbb{R}^\times)$是一个类为 $2r+2$的预接触形式。

证明。 为证明这一点，我们可以使用之前给出的一些结果。将 1-形式 η 拉回到 $M\times\mathbb{R}^\times$ 上时，特征分布的秩增加 1，因为 $\frac{\partial}{\partial z}$ 属于拉回后的 1-形式及其微分的核。因此，特征分布的余维，即其类，保持不变。1-形式 $z\eta\in\Omega^1(M\times\mathbb{R}^\times)$ 必然是偶类，因为向量场 $z\frac{\partial}{\partial z}$ 是刘维尔向量场。事实上，我们有

$$\iota_{z\frac{\partial}{\partial z}}\mathrm{d}(z\eta)=\iota_{z\frac{\partial}{\partial z}}(\mathrm{d}z\wedge\eta+z\mathrm{d}\eta)=z\eta\,.$$

注意，向量场 $z\frac{\partial}{\partial z}$ 也是 $\mathbb{R}^\times$作用的基本向量场，而 $1\in\mathbb{R}$则自然定义在 $M\times\mathbb{R}^\times$上。

□

6.1 偶奇性的改变

接下来的命题利用前面的结果，刻画哪些函数会改变偶类双元组 $(\tau,\ \omega)$ 的类的奇偶性。

命题 6.6. 设(τ,ω) 是一个类为 $2r+2$ 的双元组，其中 τ 处处非零，且 $f\in\mathscr{C}^\infty(M)$ 是一个函数。那么，$(e^f\tau, e^f(\mathrm{d}f\wedge\tau+\omega))$ 是一个类为 $2r+1$ 的双元组，当且仅当，对于所有刘维尔向量场，我们有

$$\mathscr{L}_\Delta f=-1\,.$$

证明. 我们先假设 $(e^f\tau, e^f(\mathrm{d}f\wedge\tau+\omega))$ 是一个类为 $2r+1$ 的双元组。记$\widetilde{\omega}\coloneqq \mathrm{d}f\wedge\tau+\omega$。由于双元组 (τ,ω) 属于偶类，因此必定存在刘维尔向量场$\Delta\in\mathfrak{X}(M)$。若用任意一个刘维尔向量场 Δ 对 $(e^f\widetilde{\omega})^{r+1}$ 进行缩并，其中 Δ 属于 (τ,ω)，则得到

$$\begin{aligned}\iota_\Delta(e^f\widetilde{\omega})^{r+1}&=e^{(r+1)f}\left((r+1)\,\iota_\Delta(\mathrm{d}f\wedge\tau\wedge\omega^r)+\iota_\Delta\omega^{r+1}\right)\\&=e^{(r+1)f}\left(((r+1)\mathscr{L}_\Delta f)\,\tau\wedge\omega^r+(r+1)\,\tau\wedge\omega^r\right)\\&=\left(e^{(r+1)f}(r+1)(\mathscr{L}_\Delta f+1)\right)\tau\wedge\omega^r\,.\end{aligned}\tag{7}$$

其中在第一个等式中我们用到了引理6.2 。现在，由于 (τ,ω) 的类为 $2r+2$，而 $(e^f\tau, e^f\widetilde{\omega})$ 的类为 $2r+1$，根据命题 2.16 和 2.20，可得 $(e^f\widetilde{\omega})^{r+1}=0$ 且$\tau\wedge\omega^r\neq 0$。因此，由方程 (7) 可知，对于双元组 (τ,ω) 的所有刘维尔向量场 Δ，都有 $\mathscr{L}_\Delta f+1=0$，正如我们所要证明的那样。

为证明逆命题，首先回顾一下，(τ,ω) 的所有刘维尔向量场 $\Delta\in\mathfrak{X}(M)$ 均可写为 $\Delta=\Delta_0+\Gamma$，其中 $\Delta_0\in\mathfrak{X}(M)$ 是一个特定的刘维尔向量，且 $\Gamma\in\mathrm{Ker}\ \omega$（参见命题3.5）。因此，若假设对每个刘维尔向量场都成立，则有

$$\iota_{\Delta_0}\mathrm{d}f+1=0\qquad\text{and}\qquad\iota_{\Delta_0+\Gamma}\mathrm{d}f+1=\iota_{\Delta_0}\mathrm{d}f+\iota_\Gamma\mathrm{d}f+1=0\,,$$

这意味着对于所有 $\Gamma\in\mathrm{Ker}\,\omega$，都有 $\iota_\Gamma\mathrm{d}f=0$。利用这一点以及 $\mathrm{Ker}\ \omega\subset\mathrm{Ker}\ \tau$（这是因为该类为偶类），容易验证 $\iota_\Gamma(e^f\widetilde{\omega})=0$，并且 $\iota_\Delta(e^f\widetilde{\omega})=e^f((\iota_\Delta\mathrm{d}f)\tau+\tau)=0$。因此，我们有 $\mathcal{X}_{(\tau,\omega)}=\mathcal{K}_{(\tau,\omega)}\oplus\langle\Delta_0\rangle\subseteq\mathrm{Ker}\,(e^f\tau)\cap\mathrm{Ker}\,(e^f\widetilde{\omega})$，但由于修改后的对的类至多只能增加或减少 1，我们必然有

$$\mathcal{X}_{(\tau,\omega)}=\mathcal{K}_{(\tau,\omega)}\oplus\langle\Delta_0\rangle=\mathrm{Ker}\,(e^f\tau)\cap\mathrm{Ker}\,(e^f\widetilde{\omega})\,,$$

这就是共形变换后的对（$e^f\tau$，$e^f\widetilde{\omega}$）的特征分布；因此其类为 $2r+1$。

□

例6.7。 偶类对（τ，ω）的奇偶性未必总能通过某个函数改变。考虑 $M=\mathbb{R}^4$, $\tau=\mathrm{d}z$ and $\omega=\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}z-y\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z+x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$。那么

$$\mathrm{Ker}\,\tau=\left\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle,\qquad\mathrm{Ker}\,\omega=\left\langle\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial y}-x\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle.$$

由于 $\omega\subset\mathrm{Ker}\ \tau$，根据定理 2.13，该类为偶数，且等于 2。该对的任意刘维尔向量场均可表示为 $\Delta=\frac{\partial}{\partial t}+\Gamma$，其中 $\Gamma\in\mathrm{Ker}\ \omega$。因此，要寻找满足以下条件的函数 $f\in\mathscr{C}^\infty(M)$，使其对所有刘维尔向量场均成立，等价于求解以下线性偏微分方程组：$\mathscr{L}_\Delta f=-1$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-1\,,\qquad\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial t}=0\,,\qquad\frac{\partial f}{\partial y}-x\frac{\partial f}{\partial t}=0\,,$$

该方程组无解。 △

下一个结果给出了存在改变奇偶性的函数的充分条件。

命题 6.8。 设(τ,ω) 是一个 $2r+2$ 类双元组，且 τ 处处非零。假设：

- $\mathcal{K}_{(\tau,\omega)} = \operatorname{Ker}\omega$ 是一个可积分布，并且
- 对于 Δ 上的每个刘维尔向量场(τ,ω) 以及 $\Gamma\in\operatorname{Ker}\omega$，都有 $[\Delta,\Gamma]\subset\operatorname{Ker}\omega$。

于是，对任意点，其周围都存在一个邻域 V 以及一个处处非零函数 $g\in\mathscr{C}^\infty(V)$，使得对$(g\tau,\mathrm{d}g\wedge\tau+g\omega)$ 在 V 上具有常类 $2r+1$。

证明。 设 M 是一个维数为 m 的流形。根据假设，$\operatorname{Ker}\omega$ 定义了一个维数为 $\mu=m-2r-2$ 的可积分布。根据 Frobenius定理，在任意点 $x\in M$ 处，都存在局部坐标 $(x^1,\dots,x^\mu,x^{\mu+1},\dots,x^m)$，使得 $\operatorname{Ker}\omega=\langle\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\rangle$。

设 Δ_0 是双元组 $(\tau,\ \omega)$ 的一个特定刘维尔向量场。条件 $[\Delta_0,\Gamma]\in\operatorname{Ker}\omega$ 对所有 $\Gamma\in\operatorname{Ker}\omega$ 都成立，这意味着

$$\Delta_0=\sum_{i=1}^{\mu}a_i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{j=\mu+1}^{m}b_j(x^{\mu+1},\dots,x^m)\frac{\partial}{\partial x^j}\,.$$

根据命题 6.6，我们需要找到一个函数 f，使得 $\mathscr{L}_\Delta f=-1$ 对每个刘维尔向量场 Δ都成立。这意味着 $\mathscr{L}_\Gamma f=0$ 对所有 $\Gamma\in\operatorname{Ker}\omega$都成立，而在这些坐标下，这等价于 f仅为 $x^{\mu+1}$、……、x^m的函数。因此，我们需要找到一个函数 $f(x^{\mu+1}$、……、 $x^m)$，使得

$$\sum_{j=\mu+1}^{m}b_j(x^{\mu+1},\dots,x^m)\frac{\partial f(x^{\mu+1},\dots,x^m)}{\partial x^j}=-1\,.$$

这是一个一阶非齐次线性偏微分方程。现在， $\Delta_{00}=\sum_{j=\mu+1}^{m}b_j(x^{\mu+1}$、……、 $x^m)\frac{\partial}{\partial x^j}$是一个刘维尔向量场，且根据定义处处不为零。因此，存在一组坐标使其可化为标准形式，记为 $\Delta_{00}=\partial/\partial z$。于是该偏微分方程变为 $\frac{\partial f}{\partial z}=-1$，这证明了 f 的局部存在性。 □

条件 $[\Gamma,\Gamma']\in\operatorname{Ker}\omega$ 对所有 Γ，$\Gamma'\in\operatorname{Ker}\omega$ 均成立，等价于

$$\iota_\Gamma\iota_{\Gamma'}\mathrm{d}\omega=0\,,$$

对所有 Γ，$\Gamma'\in\operatorname{Ker}\omega$ 均成立。

注意，对于一个偶类双元组（τ，ω），条件 $[\Delta,\Gamma]\in\operatorname{Ker}\omega$ 对所有刘维尔向量场 Δ 以及所有 $\Gamma\in\operatorname{Ker}\omega$ 均成立

$$\iota_{[\Delta,\Gamma]}\omega=\mathscr{L}_\Delta(\iota_\Gamma\omega)-\iota_\Gamma(\mathscr{L}_\Delta\omega)=-\iota_\Gamma(\iota_\Delta\mathrm{d}\omega+\mathrm{d}\tau)=\iota_\Delta\iota_\Gamma\mathrm{d}\omega-\iota_\Gamma\mathrm{d}\tau=0\,.$$

若命题 6.8的第一个条件满足，那么只需对某个特定的刘维尔向量场 Δ_0检验此条件即可。事实上，由于所有其他刘维尔向量场都可写成$\Delta=\Delta_0+\Gamma'$，其中 $\Gamma'\in\operatorname{Ker}\omega$，若有 $\iota_{[\Delta_0,\Gamma]}\omega=0$，则

$$\iota_{[\Delta,\Gamma]}\omega=\iota_{\Delta_0+\Gamma'}\iota_\Gamma\mathrm{d}\omega-\iota_\Gamma\mathrm{d}\tau=\iota_{\Delta_0}\iota_\Gamma\mathrm{d}\omega-\iota_\Gamma\mathrm{d}\tau+\iota_{\Gamma'}\iota_\Gamma\mathrm{d}\omega=\iota_{\Gamma'}\iota_\Gamma\mathrm{d}\omega=0\,.$$

对于偶类预接触对（η，$\mathrm{d}\eta$）这一特殊情形，上一命题的假设总是满足的，见命题 5.6 和备注 5.7。因此我们有：

推论 6.9. 设 $\eta\in\Omega^1(M)$是 $2r$上的处处非零常类1-形式。那么，对于任意点 $x\in M$，存在 x 的一个邻域 V 以及一个处处非零函数 $g\in\mathscr{C}^\infty(V)$，使得

$$\eta'=g\,\eta|_V$$

是常类 $2r-1$。

请参见 [14] ，了解这一结果的另一种证明。

还要注意，若一对（τ， ω）的类为 τ ，且处处非零，并且该类为偶数且等于流形的维数，那么刘维尔向量场是唯一的，$\operatorname{Ker}\omega$ 是平凡的，因此命题6.8 的条件显然成立。

E例 6.10。在 [7] 对接触拉格朗日量 $L = vs$ 的研究中，得到了 1-形式

$$\eta = \mathrm{d}s - s\,\mathrm{d}q\,,$$

定义在 $M = \mathrm{T}\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上，其坐标为（q， v， s）。值得注意的是，它不具有 Reeb 向量场。

事实上，很容易看出 η 的类为 2，因为

$$\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}s \qquad \text{and} \qquad \eta \wedge \mathrm{d}\eta = 0\,.$$

因此，它存在刘维尔向量场。它们为 $\Delta = \frac{\partial}{\partial q} + b\frac{\partial}{\partial v} + s\frac{\partial}{\partial s}$，其中 $b \in \mathscr{C}^\infty(M)$ 是任意函数。

根据命题 6.6，使 1-形式 $e^f\eta$ 具有类 1 的函数 f 满足 $\mathscr{L}_\Delta f = -1$，即

$$\frac{\partial f}{\partial q} + s\frac{\partial f}{\partial s} + 1 = 0 \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = 0\,.$$

例如，取 $f = -q$。那么，1-形式

$$e^{-q}\,\eta = e^{-q}\,\mathrm{d}s - e^{-q}s\,\mathrm{d}q$$

具有类 1。事实上，我们很容易就能求得它的达布坐标（见命题 5.4）：

$$e^{-q}\eta = \mathrm{d}(e^{-q}s)\,.$$

△

6.2 奇奇性的保持

我们可以得到类似的结果，以刻画保持双元组 $(\tau,\ \omega)$ 奇奇性的函数。

命题 6.11。设 (τ,ω) 是一个类为 $2r+1$ 的双元组，$f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ 是一个函数。那么，若且唯若对于双元组 (τ,ω)的所有 ***Reeb***向量场$R \in \mathfrak{X}(M)$，该函数满足以下条件，双元组 $(e^f\tau, e^f(\mathrm{d}f\wedge\tau+\omega))$ 的类为 $2r+1$

$$(\iota_R\mathrm{d}f)\,\tau\wedge\omega^r = \mathrm{d}f\wedge\omega^r\,. \tag{8}$$

证明。记 $\widetilde{\omega} :=\mathrm{d}f\wedge\tau+\omega$。首先，假设 $(e^f\tau, e^f\widetilde{\omega})$ 是一个类 $2r+1$ 的双元组。那么，它必然满足 $(e^f\widetilde{\omega})^{r+1} = 0$，根据命题 2.16。现在，利用引理 6.2，我们有

$$(e^f\widetilde{\omega})^{r+1} = e^{(r+1)f}((r+1)\,\mathrm{d}f\wedge\tau\wedge\omega^r + \omega^{r+1}) = e^{(r+1)f}((r+1)\,\mathrm{d}f\wedge\tau\wedge\omega^r)\,,$$

其中，在最后一个等式中我们用到了 $\omega^{r+1} = 0$，它由 (τ,ω) 属于类 $2r+1$ 得出。必然有，

$$\mathrm{d}f\wedge\tau\wedge\omega^r = 0\,.$$

并且，如果我们用双元组 (τ,ω) 的任意 Reeb 向量场 $R \in \mathfrak{X}(M)$ 收缩这最后一个表达式，便得到

$$\iota_R(\mathrm{d}f\wedge\tau\wedge\omega^r) = (\iota_R\mathrm{d}f)\tau\wedge\omega^r - \mathrm{d}f\wedge\omega^r = 0\,,$$

这就证明了第一个蕴含。

逆命题可由方程 (6) 和命题2.16直接得出，因为

$$(e^f\tau)\wedge(e^f\widetilde{\omega})^r = e^{(r+1)f}(\tau\wedge\omega^r)\neq 0\,,$$

and

$$(e^f(\mathrm{d}f\wedge\tau+\omega))^{r+1} = e^{(r+1)f}((r+1)\,\mathrm{d}f\wedge\tau\wedge\omega^r+\omega^{r+1}) = e^{(r+1)f}((r+1)\,\mathrm{d}f\wedge\tau\wedge\omega^r)\,,$$

等于 0，因为

$$\mathrm{d}f\wedge\tau\wedge\omega^r = -\tau\wedge\mathrm{d}f\wedge\omega^r = -(\iota_R\mathrm{d}f)\,\tau\wedge\tau\wedge\omega^r = 0\,,$$

其中最后一个等号用到了假设。 □

众所周知，如果 (M,η) 是一个接触流形，且 $\dim M = 2n+1$，那么对于任意处处非零函数 $g\in\mathscr{C}^\infty(M)$，$(M,g\eta)$ 仍然是一个接触流形。由于 (M,η) 是接触流形当且仅当 η 的类为 $2n+1$，我们得到以下推论：

推论 6.12. 设 (M,η) 是一个接触流形，且 维数 $M=2n+1$，令 R 为其 *Reeb* 向量场。那么，等式

$$(\mathscr{L}_Rf)\eta\wedge(\mathrm{d}\eta)^n = \mathrm{d}f\wedge(\mathrm{d}\eta)^n$$

对任意函数 $f\in\mathscr{C}^\infty(M)$ 均成立。

也可以通过将 $(2n+2)$-形式 $\mathrm{d}f\wedge\eta\wedge(\mathrm{d}\eta)^n=0$ 与 Reeb 向量场作缩并来证明此推论。

命题 6.13. 设 (τ,ω) 是一个 $2r+1$ 类双元组，且 $f\in\mathscr{C}^\infty(M)$。那么，对 $(e^f\tau, e^f(\mathrm{d}f\wedge\tau+\omega))$ 是一个 $2r+1$ 类双元组，当且仅当，

$$\mathscr{L}_\Gamma f = 0\,,$$

对每个 $\Gamma\in\mathcal{K}_{(\tau,\omega)}=\mathrm{Ker}\,\tau\cap\mathrm{Ker}\,\omega$ 均成立。

证明。注意，我们可以将方程（8）改写为

$$((\iota_R\mathrm{d}f)\tau-\mathrm{d}f)\wedge\omega^r = 0\,.$$

由于我们假设 ω 的秩为 $2r$，因此 $\omega^r\neq 0$，由命题 2.20和定理2.13 可知，这等价于

$$((\iota_R\mathrm{d}f)\tau-\mathrm{d}f)\in(\mathrm{Ker}\,\omega)^\circ\,,$$

对于双元组 (τ,ω) 的所有 Reeb 向量场 $R\in\mathfrak{X}(M)$。

根据湮灭子的定义，这等价于

$$(\iota_R\mathrm{d}f)(\iota_\Gamma\tau)-\iota_\Gamma\mathrm{d}f = ((\iota_\Gamma\tau)R-\Gamma)(f) = 0\,,$$

对于所有 $\Gamma\in\mathrm{Ker}\,\omega$ 以及所有 Reeb 向量场 $R\in\mathfrak{X}(M)$。最后，注意到

$$(\iota_\Gamma\tau)R-\Gamma\in\mathcal{K}_{(\tau,\omega)} = \mathrm{Ker}\,\tau\cap\mathrm{Ker}\,\omega\,,$$

而且显然，$X\in\mathcal{K}_{(\tau,\omega)}$ 中的每个元素都可以写成 $(\iota_\Gamma\tau)R-\Gamma$ 的形式，其中$\Gamma=-X$。

□

作为该命题和 Frobenius 定理的直接推论，我们可以陈述以下结果，它与命题 6.8 类似。

命题 6.14。 设(τ,ω) 是一个类为 $2r+1$ 的双元组。若特征分布$\mathcal{K}_{(\tau,\omega)}=\mathrm{Ker}\,\tau\cap\mathrm{Ker}\,\omega$ 是对合的，则对于任意点 $x\in M$，存在一个 x 的邻域V以及一个处处非零函数 $g\in\mathscr{C}^\infty(V)$，使得对 $(g\tau,\mathrm{d}g\wedge\tau+g\omega)$ 在 V 上具有常类 $2r+1$。

结论与展望

本文详细分析了由微分1-形式和2-形式构成的对 $(\tau,\ \omega)$ 的几何性质。我们为这类对引入了类的定义，将1-形式的通常类概念加以推广。为避免类发生变化时产生的退化情形，我们的研究大多局限于常类的对。我们说明了类的奇偶性如何刻画某些特殊向量场（如 Reeb 向量场或 Liouville向量场）的存在性。事实证明，这些对象对于理解与一对 $(\tau,\ \omega)$ 相关的几何结构至关重要，例如特征张量、扩展特征分布和扩展3-形式。

为展示这一方法的统一能力，我们说明了若干标准几何结构如何自然地纳入这一框架。具体而言，我们重新获得了接触结构、（预）辛结构和（预）余辛结构的性质，以及局部共形辛流形和哈密顿系统的性质。

我们应用这些结果阐明了预接触形式的概念，并定义了与此类结构相关的哈密顿动力学。最后，我们研究了共形变换如何保持或改变对 (τ,ω) 的类的奇偶性。我们根据相关的特征分布和 Liouville向量场刻画了这些变化。

我们计划将这一通用框架应用于奇异拉格朗日量的研究，包括作用量依赖系统和非自治系统。详细分析类不恒定的不同情形，以及这可能如何改变相关几何对象的行为，也将很有意义。

致谢

AMM 感谢罗维拉-威尔吉利大学通过 2025PMF-PIPF-14 项目提供的博士前研究人员合同资助。
AMM 和 XRG 感谢西班牙科学与创新部通过 AEI 的 RED2022-134301-T 项目提供的部分经费支持。

参考文献

[1]A. Bravetti. 接触几何与热力学。《国际现代物理几何方法杂志》，16(supp01):1940003，2018年。10.1142/S0219887819400036。[2] A. Bravetti, M. de Le´on, J. Marrero, and E. Padr´on. 接触哈密顿系统的不变测度：带接触面包的辛三明治。《J. Phys. A: Math. Theor.》，53(45):455205，2020年。10.1088/1751-8121/abbaaa。[3] F. Cantrijn, L. A. Ibort, and M. de Le´on. 关于多辛流形的几何。《J. Austral. Math. Soc. Ser. A》，66(3):303–330，1999年。10.1017/S1446788700036636。[4]J. F. Cari˜nena. 奇异拉格朗日量理论。《Fortschr. Phys.》，38(9):641–679，1990年。10.1002/prop.2190380902。[5] J. F. Cari˜nena and P. Guha. Lichnerowicz–Witten微分、对称性与局部共形辛结构。《J. Geom. Phys.》，210:105418，2025年。10.1016/j.geomphys.2025.105418。[6] D. Chinea, M. de Le´on, and J. C. Marrero. 含时拉格朗日量的约束算法。《数学物理杂志》，35(7):3410–3447，1994年。10.1063/1.530476。[7] M. de Le´on, J. Gaset, X. Gr`acia, M. C. Mu˜noz-Lecanda, and X. Rivas. 含时接触力学。《Monatsh. Math.》，201:1149–1183，2023年。10.1007/s00605-022-01767-1。[8] M. de Le´on, J. Gaset, and M. Lainz. 逆问题与等价接触系统。《J. Geom. Phys.》，176:104500，2022年。10.1016/j.geomphys.2022.104500。

[9] M. de Le´on and M. Lainz Valc´azar. 接触哈密顿系统。《数学物理杂志》，60(10)，2019年10月。10.1063/1.5096475。[10] M. de Le´on and M. Lainz-Valc´azar. 奇异拉格朗日量与预接触哈密顿系统。《国际现代物理几何方法杂志》，16(10):1950158，2019年。10.1142/S0219887819501585。[11] J. Dieudonn´e. ´《分析要义》，第3卷。Gauthier–Villars，巴黎，1980年。´。[12] J. Gaset, X. Gr`acia, M. C. Mu˜noz-Lecanda, X. Rivas, and N. Rom´an-Roy. 非保守场论的 A k-接触拉格朗日表述。《数学物理报告》，87(3):347–368，2021年。10.1016/S0034-4877(21)00041-0。[13] H. Geiges. 接触几何与拓扑简史。《数学论述》，19(1):25–53，2001年。10.1016/S0723-0869(01)80014-1。[14] C. Godbillon. 微分几何与分析力学。Hermann，巴黎，1969年。´。´。´。´。[15] M. J. Gotay, J. M. Nester, and G. Hinds. 预辛流形与狄拉克–伯格曼约束理论。《数学物理杂志》，19(11):2388–2399，1978年11月。10.1063/1.523597。[16] S. Goto. 对偶平坦空间中向量场的接触几何描述及其在电路模型和非平衡统计力学中的应用。《数学物理杂志》，57(10)，2016年10月。10.1063/1.4964751。[17] K. Grabowska and J. Grabowski. 约化：预接触与预辛。《纯粹与应用数学年刊》，202:2803–2839，2023年。10.1007/s10231-023-01341-y。[18] X. Gr`acia, J. de Lucas, X. Rivas, and N. Rom´an-Roy. 关于由闭形式诱导的几何结构的达布定理。《西班牙皇家精确、物理与自然科学学院评论 A辑：数学》，118(131):1–35，2024年。10.1007/s13398-024-01632-w。[19] X. Gr`acia, ´Angel Mart´ínez-Mu˜noz, X. Rivas, and N. Rom´an-Roy. 连接接触系统拉格朗日形式体系与哈密顿形式体系的演化算子。2511.13401，2025年。[20] G. Herglotz. 接触变换。格丁根大学讲义，1930年。¨。¨。[21] Herglotz, Gustav.《特殊连续介质力学》，第54–88页。施普林格，维也纳，1985年。10.1007/978-3-7091-9510-9 5。[22] M. Lainz. 接触哈密顿系统。博士论文，数学科学研究所（西班牙国家研究委员会），2022年。可通过 ICMAT 获取。´。[23] P. Libermann and C. Marle.《辛几何与解析力学》，数学及其应用丛书第35卷。施普林格，多德雷赫特，第一版，1987年。10.1007/978-94-009-3807-6。[24]M. C. Mu˜noz-Lecanda and N. Rom´an-Roy.《力学几何》。世界科技出版公司，2025年。10.1142/q0490。[25]H. Ramirez, B. Maschke, and D. Sbarbaro. 勒让德子流形上的输入输出接触系统的部分稳定化。《IEEE自动控制汇刊》，62(3):1431–1437，2017年。10.1109/TAC.2016.2572403。[26] A. Tortorella. 接触流形积分余等向子流形的刚性。《数学物理快报》，108，2018年3月。10.1007/s11005-017-1005-4。[27]L. Vitagliano. 狄拉克–雅可比丛。《辛几何杂志》，16(2):485–561，2018年。10.4310/JSG.2018.v16.n2.a4。