几乎群胚及其子结构

Mihai IVAN

摘要。本文旨在介绍几乎群胚子结构的主要构造，并讨论其基本性质。关于这些新代数构造的定义和性质，将群胚中相应的已知结果推广到了几乎群胚。 [1]

arXiv:2602.04897v1 [math.GR] 3 Feb 2026

1 引言

从代数的角度看，群胚这一概念最早由 H. Brandt 在 1926年 的一篇论文中提出 [4]。在这一框架下，Brandt 意义上的群胚可以看作群的一种推广，其中只有某些乘法是可行的，并且包含多个单位元。关于 Brandt 群胚的基本结果，参见（[3, 9]）。

C. Ehresmann 在 [6]中将 Brandt 群胚加以推广。这种新型群胚被称为 Ehresmann 意义上的群胚。此外，C. Ehresmann 还为 Ehresmann群组增添了更多结构（拓扑结构、可微结构以及代数结构），从而将其引入拓扑和微分几何，作为一种工具。自 20世纪50年代 Ehresmann 引入拓扑群胚和可微群胚以来，许多数学家从不同角度对其进行了研究（[8, 28, 30]）。

拓扑群组和李群组的概念是基于 Ehresmann 意义下的群胚定义的。关于拓扑群组、李群组、拓扑群组丛和李群胚丛的基本结果，请参阅（[10, 18, 19]）。

对 Brandt 群胚、Ehresmann群组、拓扑群组、李群组和李代数丛的研究，源于它们在数学和工程学众多分支中的应用，具体包括：代数、分析、几何学（[2, 29]）；范畴论、拓扑、表示论、代数拓扑（[6, 12]）；微分几何、非线性动力学、量子力学（[7, 13, 15]）；使用李群组和李代数丛研究具有哈密顿形式的某些动力系统以及分数阶动力系统（[14, 21, 22, 23, 24, 26, 27]）。

群胚概念的另一种处理方式是结构群组。该概念通过添加另一种代数结构而获得，使得群胚的复合与所添加代数结构的运算相容。最重要的结构群类型如下：群-群组（[5, 10]）和向量空间-群组（[1, 20]）。

群概念的一个有趣推广是几乎群胚。近期，Mihai IVAN 于2023年引入了几乎群胚概念（[25]）。需要特别指出的是，几乎群胚类包含于群胚类中。换言之，几乎群胚范畴是群胚范畴的子范畴。

本文的组织结构如下。第 2 节介绍 Brandt 群胚的基本定义及相关结果。第 3 节从代数角度给出几乎群胚的定义，并讨论其主要性质。第 4 节介绍几乎群胚中的一些子结构，并证明它们的若干性质，这些性质推广了群论中的一些著名结果。

[1] *AMS classification:* 20L05, 20M10 18B40.*Key words:* 群胚、几乎群胚、几乎子群胚。

2 关于 Brandt 群胚的一些基本概念

本节介绍群这一概念的一种新推广，即：几乎群胚概念（[25]）。本文从纯代数角度给出几乎群胚的定义。

定义 2.1 ([29]) 一个（Brandt）群胚 $\mathcal{G}$ 在 G_0 上是指一对非空集合（$\mathcal{G}$，$\mathcal{G}_0$），其中 $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}$ 赋予两个满射 α，β ： $\mathcal{G} \to \mathcal{G}_0$，一个部分二元运算$\mu$ ： $\mathcal{G}_{(2)} \to \mathcal{G}$，（$x$，$y$） $\rightarrowtail$ μ（x，y）：$= xy$，其中

$\mathcal{G}_{(2)} = \{(x, y) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} | \beta(x) = \alpha(y)\}$ 以及一个单射 ι ： $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$，$x \rightarrowtail \iota(x) := x^{-1}$ 满足以下性质：

（1）（结合律）$(xy)z = x(yz)$，其含义是，如果等式的一边有定义，则另一边也有定义，且二者相等；（2）（恒等元）$\alpha(x)\ x$），（x，$\beta(x)$）$\in \mathcal{G}_{(2)}$ 以及 $\alpha(x)x = x\beta(x) = x$；（3）（逆元）$(x^{-1},\ x)$，$(x,\ x^{-1}) \in \mathcal{G}_{(2)}$ 以及 $x^{-1}x = \beta(x)\quad xx^{-1} = \alpha(x)$。

$\mathcal{G}_{(2)}$ 中的元素称为 $\mathcal{G}$. 的可复合对。元素 $\alpha(x)$（分别为 $\beta(x)$）是 $x \in \mathcal{G}$. 的左单位元（分别为右单位元）。 $\mathcal{G}$ 的子集 $\mathcal{G}_0 = \alpha(\mathcal{G}) = \beta(\mathcal{G})$ 称为 $\mathcal{G}$.的单位集。

以 $\mathcal{G}_0$ 为底集的群胚 $\mathcal{G}$，其结构函数为 α（源）、β（目标）、μ（部分乘法）和 ι（求逆），记作（$\mathcal{G}$，α，β，μ，ι，$\mathcal{G}_0$）或（$\mathcal{G}$，$\mathcal{G}_0$）。

每当 在给定群胚（$\mathcal{G}$，$\mathcal{G}_0$）中写出乘积时，我们都假定该乘积有定义。

以 e 为单位元的群 $\mathcal{G}$ 就是一个以 $\{e\}$为底集的群胚，反之，每个只有一个单位元的群胚都是群。

若（$\mathcal{G}$，$\mathcal{G}_0$）是一个群胚且 $u \in \mathcal{G}_0$，则 $\mathcal{G}(u) := \alpha^{-1}(u) \cap \beta^{-1}(u)$ 在将 μ 限制于 $\mathcal{G}(u)$ 后构成一个群，称为 $\mathcal{G}$的 u 处各向同性群。

在群胚 $(\mathcal{G}, \mathcal{G}_0)$ 中，映射 $(\alpha, \beta) : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}_0 \times G_0$ 定义如下：
$(\alpha, \beta)(x) := (\alpha(x)\ \beta(x))$，$(\forall) x \in \mathcal{G}$称为 $\mathcal{G}$. 的锚映射。如果群胚的锚映射是满射，则称该群胚为传递的。

在下面的命题中，我们总结群胚结构函数的一些可直接由定义得到的性质。

命题 2。**1** [9]）对于任意群胚$(\mathcal{G}, \alpha, \beta, \mu, \iota, \mathcal{G}_0)$，以下断言成立：
(i) $\alpha(u) = \beta(u) = \iota(u) = u$，且 $u \cdot u = u$ 对所有 $u \in \mathcal{G}_0$ 均成立；*(ii)* $\alpha(xy) = \alpha(x)$，且 $\beta(xy) = \beta(y)$；*(∀)* $(x, y) \in \mathcal{G}_{(2)}$；*(iii)* $\alpha \circ \iota = \beta$，$\beta \circ \iota = \alpha$ 且 $\iota \circ \iota = Id_{\mathcal{G}}$；*(iv)* $(x, y) \in \mathcal{G}_{(2)} \implies (y^{-1}, x^{-1}) \in \mathcal{G}_{(2)}$，且 $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$；*(vi)* 对每个 $u \in \mathcal{G}_0$，集合 $\mathcal{G}(u) = \alpha^{-1}(u) \cap \beta^{-1}(u) = \{x \in \mathcal{G} \mid \alpha(x) = \beta(x) = u\}$ 在将 μ 限制到 $\mathcal{G}(u)$ 后构成一个群，称为 $\mathcal{G}$ 在 u 处的各向同性群；*(vii)* 对每个 $x \in \mathcal{G}$，各向同性群 $\mathcal{G}(\alpha(x))$ 和 $\mathcal{G}(\beta(x))$ 同构；*(viii)* 若 $(\mathcal{G}, \mathcal{G}_0)$ 是传递的，则各向同性群 $\mathcal{G}(u)$ $u \in \mathcal{G}_0$ 同构。

例 2.1 ([11]) 设 R^* 为非零实数集，且 $a, b \in \mathrm{R}^*$ 满足 $ab = 1$。考虑集合 $\mathcal{G} = \mathrm{R}^* \times \mathrm{R}^* := \mathrm{R}^{*2}$ 以及 $\mathcal{G}_0 = \{(a, ax) \in \mathcal{G} \mid (\forall) x \in \mathrm{R}^*\}$. 。容易看出，$y = ax$ 当且仅当 $x = by$ 对所有 $(x, y) \in \mathcal{G}$. 成立。于是 $(\mathcal{G}, \alpha, \beta, \odot, \iota, \mathcal{G}_0)$ 是一个群胚，其中集合$\mathcal{G}_{(2)}$ 及其结构函数定义如下：

$\alpha : \mathcal{G} \to \mathcal{G}_0,\ \alpha(x, y) = (x, ax)$；$\mathcal{G}_{(2)} = \{((x, y), (z, u)) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mid z = by\}$；
$(x, y)\ \odot (by, u) := (x, u)$，$(\forall)\ x, y, u \in$ 实数集* 且 $\iota(x, y) := (by, ax)$，$(\forall)\ x, y \in$ 实数集*. 很容易验证，定义 2.1 的条件 (1) – (3) 成立。首先，我们考虑 $(x, y), (z, u), (v, w) \in \mathcal{G}$. 乘积 $(x, y) \cdot (z, u) \cdot (v, w)$ 有定义，当且仅当 $z = by$ 且 $v = bu$. 我们有：

(1) $((x,y)\odot(by,u))\oplus(bu,w)=((x,u)\odot(bu,w)=(x,w)=(x,y)\odot((by,u)\oplus(bu,w))$; (2) $\alpha(x,y)\odot(x,y))=(x,ax)\odot(x,y)=(x,t)\odot(bt,y)=(x,y)$ 且 $(x,y)\odot\beta(x,y)=(x,y)\odot(by,y)=(x,y)$; (3) $(x,y)\odot\iota(x,y)=(x,y)\odot(by,ax)=(x,ax)=\alpha(x,y)$ 且 $\iota(x,y)\odot(x,y)=(by,ax)\odot(x,y)=(by,t)\odot(bt,y)=(by,y)=\beta(x,y)$。这个群胚记作 $\mathrm{R}^{*2}(a,b)$。因此，对于每个满足关系 $ab=1$ 的有序对 $(a,b)\in\mathrm{R}^{*2}$，都可以通过这种方式得到一个群胚的例子。

定义 2.2 几乎群胚 $\mathcal{G}_0$ 的非空子集 H 称为 $\mathcal{G}$ 的子群胚，如果它在乘法（有定义时）和求逆下封闭，即满足以下条件：(ii) $(\forall)$ x 使得 $H\Rightarrow$ $x^{-1}\in H.$，使得 xy 有定义，则有 $xy\in H$；( ) ( )

注意，由定义 2.2 的条件 (ii)，我们可以推 deduce 出 $\alpha(h)\in H$ 和 $\beta(h)\in H$，$(\forall)$ $h\in H$. 如果 $\alpha(H)=\beta(H)=\mathcal{G}_0$，则 H 称为宽子群胚。

定义 2.3 (i) 设 $(\mathcal{G},\alpha,\beta,\mu,\iota,\mathcal{G}_0)$ 和 $(\mathcal{G}',\alpha',\beta',\mu',\iota',\mathcal{G}_0')$ 是两个群胚。称这两个群胚之间的态射为映射对 (f,f_0)，其中 $f:\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}'$ 且 $f_0:\mathcal{G}_0\mapsto\mathcal{G}_0'$，并满足以下两个条件：

(i) $f(\mu(x,\ y))=\mu'(f(x)\ f(y))$，$(\forall)$ $(x,\ y)\in\mathcal{G}_{(2)}$；$(ii)$ $\alpha'\circ f=f_0\circ\alpha$ 以及 $\beta'\circ f=f_0\circ\beta$.$(ii)$ 群胚的一个态射（f，f_0）称为群胚同构，如果 f 和 f_0 都是双射。

注 2.1 关于 Brandt 群胚和 Ehresmann群组的基本概念已在一系列论文中得到定义和研究，例如：子结构、正规子群胚、商群胚、群胚态射和强态射，以及从已有群胚构造新群胚的若干方法（[2, 3, 10, 20] 群胚理论中的一个特殊领域专门研究有限群胚。有限群胚的一个著名例子是对称群胚 $\mathcal{S}_n$([16, 17])。这个群胚在有限群胚的研究中发挥着重要作用，因为根据 Cayley 定理，每个次数为 n 的有限群胚都同构于 $\mathcal{S}_n$. ([2, 9]) 的某个子群胚；

3 几乎群胚：定义与基本性质

本节介绍群概念的一种新推广，即几乎群胚([25])。并从纯代数的角度给出几乎群胚的定义。

定义3.1 *([25])* 实数集上的几乎群胚 G 在 G_0 **(按 Brandt 的定义)** 是由两个非空集合组成的对 (G,G_0)，其中 $G_0\subseteq G$, 配备一个满射 $\theta:G\to G_0$、一个部分二元运算 $m:G_{(2)}\to G,(x,y)\longmapsto m(x,y):=x\cdot y$, 满足

$G_{(2)}:=\{(x,y)\in G\times G|\theta(x)=\theta(y)\}$ 以及一个映射 $\iota:G\to G$，$x\longmapsto\iota(x):=x^{-1}$，满足以下性质：(AG1)（结合律）$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$，其含义是：如果两个乘积 $(x\cdot y)\cdot z$ 和$x\cdot(y\cdot z)$ 中有一个有定义，则另一个也有定义，且二者相等；(AG2)（单位元）：对于每个 $x\in G\Rightarrow(\theta(x)\ x)$，$(x,\theta(x))\in G_{(2)}$ 且有$\theta(x)\cdot x=x\cdot\theta(x)=x$；(AG3)（逆元）：对于每个 $x\in G\Rightarrow(x,x^{-1})$，$(x^{-1},x)\in G_{(2)}$ 且有 $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=\theta(x)$）。

如果 G 是定义在 G_0 上的几乎群胚，我们有时会用 $x\cdot y$ 或 xy 表示 $m(x,\ y)$。此外，集合$G_{(2)}$ 称为 G.的可复合对集

在 G_0 上、具有结构函数 θ （单位映射）、m （乘法）和ι（求逆）的几乎群胚 G，记作（G,θ,m,ι,G_0）或（G, G_0）。. G_0 称为 G.的单位集。每当我们在给定的几乎群胚中写出一个乘积时，都假定该乘积是有定义的。

根据定义3.1，若 $x,y,z\in G$,则:
(i) 乘积 $x\cdot y\cdot z$ 和 $(x\cdot y)\cdot z$ 有定义 $\Leftrightarrow \quad \theta(x)=\theta(y)=\theta(z)$。
$(ii)\quad \theta(x)\in G_0$ 是 x 的单位元，$x^{-1}\in G$ 是 x.的逆元

An 几乎群胚 (G,θ,m,ι,G_0) 可以表示为以下图的形式 :

$$\begin{array}{ccccc} G\times G\supset G_{(2)} & \xrightarrow{m} & G & \xrightarrow{\iota} & G \\ & & \downarrow\theta & & \\ & & G_0 & & \end{array} \tag{1}$$

T几乎群胚的基本性质由以下两个命题给出 .

命题3.1 *([25])* 若(G,θ,m,ι,G_0) 是一个几乎群胚，则:
$(i)\,\theta(u)=u,(\forall)u\in G_0.(ii)\quad u\cdot u=u$ 和 $\iota(u)=u,(\forall)u\in G_0.(iii)\ \theta(x\cdot y)=\theta(x)$,
$(\forall)(x,y)\in G_{(2)}.(iv)\ \theta(x^{-1})=\theta(x)$ 和 $\theta(\theta(x))=\theta(x),(\forall)x\in G.(v)$ 如果 $(x,y),(y,z)$
$\in G_{(2)}\ \Rightarrow (x\cdot y,z),(x,y\cdot z)\in G_{(2)}$ 和 $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$。

命题3.2 如果(G,θ,m,ι,G_0) 是一个几乎群胚，则:
(i)（单位元的唯一性）：(1) $(x,y)\in G_{(2)}$ 和
$x\cdot y=y\ \Rightarrow\ x=\theta(y)$**; (2)** $(x,y)\in G_{(2)}$ **和**
$x\cdot y=x\ \Rightarrow\ y=\theta(x)$。**$(ii)$（逆元的唯一性）：如果** (x,y)
$\in G_{(2)}$**,** $x\cdot y=\theta(x)$ **和** $y\cdot x=\theta(x)\Rightarrow\ y=x^{-1}$.
(iii) **（消去律）**若 $(x,y_1),(x,y_2),(y_1,z),(y_2,z)\in G_{(2)}$,则:
(1) $x\cdot y_1=x\cdot y_2\ \Rightarrow\ y_1=y_2$; *(2)* 若对于 iv，当 $(x,y)\in G_{(2)}$ 时，则 $(y^{-1},$
$x^{-1})\in G_{(2)}$ 和 $(x\cdot y)^{-1}=y^{-1}\cdot x^{-1}$.*(v)* $(x^{-1})^{-1}=x,(\forall)x\in G.$*(vi)* $x^{-1}\cdot(x\cdot y)$
$=y$ 和 $(x\cdot y)\cdot y^{-1}=x$，对所有 $(x,y)\in G_{(2)}$.

证明。 *(i)*(1)。由 $(x,y)\in G_{(2)}$ 可得 $\theta(x)=\theta(y)$。我们有:
$x\cdot y=y\mid\cdot y^{-1}\ \Rightarrow (x\cdot y)\cdot y^{-1}=y\cdot y^{-1}\ (AG1)\Rightarrow\quad x\cdot(y\cdot y^{-1})=y\cdot y^{-1}\ (AG3)$
$\Rightarrow x\cdot\theta(y)=\theta(y)\ \Rightarrow\ x\cdot\theta(x)=\theta(y)\ (AG2)\Rightarrow\quad x=\theta(y)$。因此，断言（1）成立。类似地，我们证明断言（2）成立 .

(ii) 由 $(x,y)\in G_{(2)}$ 可得 $\theta(x)=\theta(y)$。依次有:
$y=\theta(y)\cdot y=\theta(x)\cdot y=(x^{-1}\cdot x)\cdot y\overset{(AG1)}{=}x^{-1}\cdot(x\cdot y)=x^{-1}\cdot\theta(x)=x^{-1}\cdot\theta(x^{-1})=x^{-1}$.
(iii) 例如，我们先证明左消去律。由（x，y_1）、（x，$y_2\in G_{(2)}$可得θ（x）$=\theta$（y_1）$=\theta$（y_2）。我们依次得到:
$x\cdot y_1=x\cdot y_2\mid\cdot x^{-1}\ \Rightarrow\ x^{-1}\cdot(x\cdot y_1)=x^{-1}\cdot(x\cdot y_2)\ (AG1)\Rightarrow(x^{-1}\cdot x)\cdot y_1=(x^{-1}\cdot x)\cdot y_2)$
$\Rightarrow\ \theta(x)\cdot y_1=\theta(x)\cdot y_2\ \Rightarrow\ \theta(y_1)\cdot y_1=\theta(y_2)\cdot y_2\ (AG2)\Rightarrow\quad y_1=y_2$.
*(iv)*令 $(\theta\ y=\theta\ x=\theta\ x^{-1}.\qquad \theta\ y^{-1}=\theta\ x^{-1},\qquad y^{-1}\ x^{-1}\in G_{(2)}.\qquad \theta\ y^{-1}\cdot x^{-1}$ $=$ ，）$\in G_{(2)}$.于是 θ（）$=\theta$（）根据断言（iii）和（iv），我们有 θ（y^{-1}）（）（）（）由于（）（），因此（，）此外，（）$\perp$ $\theta\ y^{-1}=\theta\ y=\theta\ x.\qquad \theta\ y^{-1}\cdot x^{-1}=\theta\ x=\theta\ x\cdot y,\qquad y^{-1}\cdot x^{-1}\ x\cdot y\in G_{(2)}.$（）（）（）由（）（）（）可得（，）同理，我们得到（$x\cdot y$，$y^{-1}\cdot x^{-1}$）$\in G_{(2)}$.

利用（**AG1**），（**AG2**）和（**AG3**），我们依次得到:$(x\cdot y)\cdot(y^{-1}\cdot x^{-1})=x\cdot(y\cdot y^{-1})$
$\cdot x^{-1}=x\cdot\theta(y)\cdot x^{-1}=(x\cdot\theta(x))\cdot x^{-1}=x\cdot x^{-1}=\theta(x)$。

因此，我们有:
(a) $(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = \theta(x)$。同样,
我们证明: (b) $(y^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot (x \cdot y)$
$= \theta(x)$。
由 (a) 和 (b) $y^{-1} \cdot x^{-1}$ 可知， $x \cdot y$是逆元，即 $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$.
(v) 由 $x^{-1} \cdot x = \theta(x) = \theta(x^{-1})$、 $x \cdot x^{-1} = \theta(x^{-1})$ 以及逆元的唯一性可知， x 是 x^{-1}的逆元，即 $(x^{-1})^{-1} = x$.

(vi) 这两个等式可通过直接计算验证。例如，对于 $(x, y) \in G_{(2)}$ ，我们有 $\theta(x) = \theta(y)$。乘积 $x^{-1} \cdot (x \cdot y)$ 有定义，因为 $\theta(x^{-1}) = \theta(x) = \theta(x \cdot y)$。于是$x^{-1} \cdot (x \cdot y) = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = \theta(x) \cdot y = \theta(y)$
$\cdot y = y$. □

推论 3.1 若$(G, \theta, m, \iota, G_0)$ 是一个几乎群胚，则:
(i) $\theta(\theta(x)) = \theta(x)$，$(\forall) x \in G$.$(ii)$ 若 $x, y \in G$，则: $x \cdot y$ 有定义 $\Leftrightarrow$ $y \cdot x$
有定义。(iii) $(\forall)$ $a \in G \Rightarrow$ 乘积 $a^2 := a \cdot a$, $a^3 := a^2 \cdot a$ 有定义。

证明。(i) 对于每个 $x \in G$，我们有 $\theta(\theta(x)) \overset{AG3)}{=} \theta(x \cdot x^{-1}) \overset{(3 \cdot 1 (iii))}{=} \theta(x)$。
$(ii) - (iii)$ 这些陈述由定义和命题*3.1*推出。 □

命题 3.3 设 $(G, \theta, m, \iota, G_0)$ 是一个几乎群胚。 G 的结构函数具有以下性质:

$\theta \circ \iota = \theta$ 和 $\iota \circ \iota = Id_G$.

证明。第一个关系是命题3.1中等式 (iv) 的推论。事实上， $\theta(x^{-1}) = \theta(\iota(x)) = (\theta \circ \iota)(x)$。但是，$\theta(x^{-1})$
$= \theta(x)$。因此，$(\theta \circ \iota)(x) = \theta(x)$，$(\forall) x \in G$. 此外，我们有 $(\iota \circ \iota)(x) = \iota(\iota(x)) = \iota(x^{-1}) = (x^{-1})^{-1} = x$. 于是
$\iota \circ \iota = Id_G$，因为 $(\iota \circ \iota)(x) = Id_G(x)$，$(\forall) x \in G$.□

命题 3.4 设 $(G, \theta, m, \iota, G_0)$ 是一个几乎群胚。对每个 $u \in G_0$，集合 $G(u) := \theta^{-1}(u) = \{x \in G | \theta(x)$
$= u\}$ 是一个群。

证明。由命题3.1(i)，我们有 $\theta(u) = u$. 则 $u \in G(u)$。若 $x, y \in G(u)$，则$\theta(x) = \theta(y) = u$ ，因此乘积 $x \cdot y$ 有定义。根据命题3.1(iii)，可知$\theta(x \cdot y) = \theta(x) = u$，于是 $x \cdot y \in G(u)$。此外，若 $x \in G(u)$，则乘积 $x \cdot u$ 和 $u \cdot x$ 有定义，且 $x \cdot u = x \cdot \theta(x) x = x$ 以及 $u \cdot x = \theta(x) \cdot x = x$，也就是说， u 是 $G(u)$的单位元。最后，令 $x \in G(u)$。于是根据命题3.1(iv)， $\theta(x^{-1}) = \theta(x) = u$. 。因此 $x^{-1} \in G(u) \subset G$且 $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = u$. 。所以我们得出结论： $G(u)$在限制部分乘法 m at $(G(u) \times G(u)) \cap G_{(2)}$ 的作用下构成一个群，其单位元为 u 。□
$G(u)$关于 $u \in G_0$ 的群称为 G 在 u.处的各向同性群

注 3.1 每个几乎群胚（G, θ, m, ι, G_0）都是群胚，其结构函数α （源）和 β （目标）相等于 θ. 显然，一般而言，并非每个群胚都是几乎群胚。

定义 3.2 若一个几乎群胚 G 之上 G_0 满足：对所有 $u \in G_0$.，各向同性群$G(u)$都是阿贝尔群，则称其为阿贝尔或交换的

例 3.1 （i）一个以 e 为单位元的群 G ，相对于结构函数$\theta(x) := e,$,$(\forall) x \in G$; $G_{(2)} = G \times G$, $m(x, y) := xy, (\forall) x, y \in G$和$\iota$: $G \mapsto G$, $\iota(x) := x^{-1}, (\forall) x \in G$.，是一个在 $\{e\}$ 之上的几乎群胚

(ii) 非空集合 G_0 可以视为 G_0 上的几乎群胚，称为与 G_0. 关联的零近群胚 。为此，我们取 $\theta = \iota = Id_{G_0}$ 和 $u \cdot u = u$, $(\forall) u \in G_0$.

例3.2 令 $G=$**实数集**$\times$**实数集** $=$**实数集**^{2} 且 $G_0=$**实数集**$\times\{0\}$. 那么 $(G,\theta,\oplus,\iota,G_0)$ 是一个几乎群胚，其中集合 $G_{(2)}$ 及其结构函数定义如下:
$\theta:G=$**实数集**$^2\to G_0$, $(a,b)\rightarrowtail\theta(a,b):=(a,0)$;
$G_{(2)}=\{((a,b),(c,d))\in G\times G\mid\theta(a,b)=\theta(c,d)\}=\{((a,b),(c,d))\in G\times G\mid a=c\}$; $(a,b)\oplus(a,d):=(a,b+d)$, $(\forall)$ $a,b,d\in$实数集 and $\iota(a,b):=(a,-b)$, $(\forall)$ $a,b\in$实数集.

很容易验证，定义3.1的条件（$\mathbf{AG1}$）$-\mathbf{AG3}$）成立。首先，我们考虑x， y， $z\in G$，其中 $x=(a_1,\ b_1)$ $y=(a_2,\ b_2)$ $z=(a_3,\ b_3)$。乘积 $x\cdot y\cdot z$有定义，当且仅当 $a_1=a_2=a_3$. 我们有:

(1) $(x\oplus y)\oplus z=((a_1,b_1)\oplus(a_1,b_2))\oplus(a_1,b_3)=(a_1,b_1+b_2)\oplus(a_1,b_3)=(a_1,b_1+b_2+b_3)=x\oplus(y\oplus z)$; (2) $x\oplus\theta(x)=(a_1,b_1)\oplus\theta(a_1,b_1))=(a_1,b_1)\oplus(a_1,0)=(a_1,b_1+0)=x=\theta(x)\oplus x$; (3) $x\oplus\iota(x)=(a_1,b_1)\oplus\iota(a_1,b_1))=(a_1,b_1)\oplus(a_1,-b_1)=(a_1,0)=\theta(x)=\iota(x)\oplus x$.

例3.3 ([25]) 对于 $a,\ k\in$**实数集**，考虑矩阵 $A(a,\ k)=\begin{pmatrix}a&ka\\0&1\end{pmatrix}$. 令 $G=\{A(a,\ k)\mid a,\ k\in\mathbb{R},\ a\neq0\}$ 且 $G_0=\{A(1,\ k)\mid k\in\mathbb{R}\}$. 那么 $(G,\ \theta,\ \odot,\ \iota,\ G_0)$ 是一个几乎群胚。

结构函数 θ 和 ι 定义如下:

$$\theta:G\to G_0, A(a,k)\rightarrowtail\theta(A(a,k)):=A(1,k)=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix};$$

$$\iota:G\to G, A(a,k)\rightarrowtail\iota(A(a,k)):=A(a^{-1},k)=\begin{pmatrix}a^{-1}&k\\0&1\end{pmatrix}.$$

可复合对的集合 $G_{(2)}$ 如下:

$$\begin{aligned}G_{(2)}&=\{(A(a_1,k_1),A(a_2,k_2))\in G\times G\mid\theta(A(a_1,k_1))=\theta(A(a_2,k_2))\}\\&=\{(A(a_1,k_1),A(a_2,k_2))\in G\times G\mid k_1=k_2\}.\end{aligned}$$

乘积 $\odot$定义如下: $A(a_1,\ k_1)\odot A(a_2,\ k_1):=A(a_1a_2,\ k_1)$, 即:

$$\begin{pmatrix}a_1&k_1a_1\\0&1\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}a_2&k_1a_2\\0&1\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}a_1a_2&k_1a_1a_2\\0&1\end{pmatrix},(\forall)\ k_1\in\mathbf{R},a_1a_2\neq0.$$

容易验证，定义3.1的条件（$AG1$）$-$（$AG3$）成立。为此，我们考虑A， B， $C\in G$，其中 $A=A(a,\ k)$ $B=A(a_1,\ k_1)$ $C=A(a_2,\ k_2)$。当且仅当 $k=k_1=k_2$. 时，乘积 $A\odot B\odot C$ 有定义。我们有:

$(AG1)$ $(associativity)$ $A\odot B)\odot C=(A(a,k)\odot A(a_1,k))\odot A(a_2,k)=A(aa_1,k)\odot A(a_2,k)=A(aa_1a_2,k)=A\odot(B\odot C)$; $(AG2)$ $(units)$ $A\odot\theta(A)=A(a,k)\odot\theta(A(a,k))=A(a,k)\odot A(1,k)=A(a,k)=A=\theta(A)\odot A$; $(AG3)$ $(inverses)$ $A\odot\iota(A)=A(a,k)\odot\iota(A(a,k))=A(a,k))\odot A(a^{-1},k)=A(1,k)=\theta(A(a,k))=\theta(A)=\iota(A)\odot A$.

例3.4 ([11]) 令 $B_2=\{0,1\}$ 为一个由两个元素组成的集合。考虑模 n的整数群（$\mathbf{Z}_n,+$），其中 $\mathbf{Z}_n=\{c_1=0,c_2=1,\dots,c_{n-1}=n-2,c_n=n-1\}$. 现在我们在集合 G 上定义一个几乎群胚结构: $=B_2\times\mathbf{Z}_n$. 令 $G_0=\{(a,c_1)|a\in B_2\}$. 那么 $(G,\theta,\oplus,\iota,G_0)$ 是 G_0上的一个几乎群胚，其中可复合对的集合 $G_{(2)}$ 及其结构函数定义如下:
$\theta:\ G=B_2\times\mathbf{Z}_n\to G_0,(a,c_j)\rightarrowtail\theta(a,c_j):=(a,c_1)$;$G_{(2)}=\{((a,c_j),(b,c_k))\in G^2\mid\theta(a,c_j)=\theta(b,c_k)\}=\{((a,c_j),(b,c_k))\in G^2\mid a=b\}$; $(a,c_j)\oplus(a,c_k):=(a,c_j+c_k)$, $(\forall)$ $a\in B_2$, $c_j,c_k\in\mathbf{Z}_n$ 以及$\iota(a,c_j):=(a,-c_j)$, $(\forall)$ $a\in B_2$, $c_j\in\mathbf{Z}_n$. 容易验证，定义4.1中的条件(AG1) $-$ AG3)成立。

首先，我们考虑 x，y，$z \in G$，其中 $x=(a_1,\ c_i)$ $y=(a_2,\ c_j)$ $z=(a_3,\ c_k)$。乘积 $x\oplus y\oplus z$有定义当且仅当 $a_1=a_2=a_3$. 我们有：
(1) $(x\oplus y)\oplus z=((a_1,c_i)\oplus(a_1,c_j))\oplus(a_1,c_k)\ =(a_1,c_i+c_j)\oplus(a_1,c_k)\ =(a_1,c_i+c_j+c_k)\ =x\oplus(y\oplus z)$; (2) $x\oplus\theta(x)\ =(a_1,c_i)\ \oplus\theta(a_1,c_i))\ =(a_1,c_i)\ \oplus(a_1,c_1)\ =(a_1,c_i+0)\ =x=\theta(x)\ \oplus x$; (3) $x\oplus\iota(x)\ =(a_1,c_i)\ \oplus\iota(a_1,c_i))\ =(a_1,c_i)\ \oplus(a_1,-c_i)\ =(a_1,0)\ =\theta(x)\ =\iota(x)\ \oplus x$.我们得出，$G=B_2\times \mathsf{Z}_n$ 是定义在 $G_0=\{(0,c_1)、(1,c_1)\}$. 上的一个几乎群胚。注意，(G,G_0)是一个阶为 $2n$.的有限几乎群胚

注3.2 在论文 [11], 中介绍了三种构造新的几乎群胚的重要方法，即两个几乎群胚的不交并、两个几乎群胚的直积，以及两个几乎群胚的半直积

定义3.3 *(i)* 设(G,θ,m,ι,G_0)和$(G',\theta',m',\iota',G_0')$是两个几乎群胚。从$(G,G_0)$到$(G',G_0')$的一个几乎群胚态射或几乎群胚态射是由映射构成的一对(f,f_0)，其中 $f:\ G\mapsto G'$ 且 $f_0:G_0\mapsto G_0'$，并满足以下条件：

(1) $f(m(x,y))\ =m'(f(x)\ f(y))\quad \forall(x,y)\ \in G_{(2)}$; (2) $\theta'\circ f=f_0\circ\theta$.*(ii)* 一个几乎群胚态射$(f,f_0):(G,G_0)\ \mapsto(G',G_0')$，若 f和 f_0是双射，则称其为近群胚同构。

例3.5 设 $G=B_2\times \mathsf{Z}_n$ 为例3.4中给出的几乎群胚。考虑群（$\mathsf{Z}_n,+$）。它是一个几乎群胚。定义映射 $f:\ B_2\times \mathsf{Z}_n\ \to \mathsf{Z}_n$，使得 $f((a,c_j)):=c_j$ 对所有$a\in B_2$ 以及 $c_j\in \mathsf{Z}_n$ 成立。此映射是一个几乎群胚态射。事实上，对于所有(a,c_j)、$(a,c_k)\in B_2\times \mathsf{Z}_n$，我们有 $f((a,c_j)\ \oplus(a,c_k))\ =f((a,c_j+c_k))\ =c_j+c_k$，并且 $f((a,c_j))+f((a,c_k))\ =c_j+c_k$。因此，$f((a,c_j))\ \oplus(a,c_k))\ =f((a,c_j))\ +f((a,c_k))$。

注3.3 集合上的对偶群胚。设 X 为一个非空集合。那么，$\Gamma=X\times X$ 关于以下运算规则构成一个群胚：$\alpha(x,y)\ =(x,x)\ \beta(x,y)\ =(y,y)$；元素$(x,y)$和$(y',z)$在 $\Gamma\ \Leftrightarrow\ y'=y$ 中可复合，且取$(x,y)\cdot(y,z)\ =(x,z)$，而(x,y)的逆元定义为$(x,y)^{-1}=(y,x)$。这个群胚称为与 X 相关联的对偶群胚，记作 $\mathcal{PG}(X)$。其单位空间为 $\mathcal{PG}_0(X)\ =\{(x,x)\ \mid x\in X\}$. 。群胚$(\mathcal{PG}(X)\ \mathcal{PG}_0(X))$不是几乎群胚，因为对于 $x\neq y.$，有 $\alpha(x,y)\ =(x,x)\ \neq\beta(x,y)\ =(y,y)$。

注3.4 感兴趣的读者可在论文 [25]中找到更多关于几乎群胚态射的结果。

4 几乎群胚中定义的最重要子结构

定义4.1 设(G,θ,m,ι,G_0)是一个几乎群胚。非空子集对(H,H_0)，其中 $H\subseteq G$ 且 $H_0\subseteq G_0$，称为 G的几乎子群胚，如果：
(1.1) $\theta(H)=H_0$; (1.2) H 对乘法和求逆封闭，即：
(1.2.1) $(\forall)\ x,y\in H$使得$(x,y)\ \in G_{(2)}\Longrightarrow\ x\cdot y\in H$; (1.2.2) $(\forall)$ $x\in H\Longrightarrow x^{-1}\in H.$

定义4.2 设(H,H_0)是几乎群胚(G,G_0)的一个几乎子群胚。
(i) $(H,\ H_0)$ 称为 $(G,\ G_0)$ 的宽几乎子群胚，如果 $H_0=G_0$，即 H 和 G 具有相同的单位元。

(ii) (H,H_0) 是 (G,G_0) 的一个宽几乎子群胚，称为正规几乎子群胚，如果对于所有 $g\ \in\ G$ 以及所有满足乘积 $g\cdot h\cdot g^{-1}$ 有定义的 $h\ \in\ H$，都有$g\cdot h\cdot g^{-1}\in H.$

例4.1 (i) 群 $(G,\{e\})$ 的每个子群（分别地，正规子群）都是几乎群胚 $(G,\{e\})$ 的宽几乎子群胚（分别地，正规几乎子群胚）。
(ii) 若$(G,\ G_0)$是一个几乎群胚，那么 G_0 **是** G的宽几乎子群胚。我们将验证定义4.1中的条件(1.1)和(1.2)成立。
(1.1) 显然，$\theta(G_0)=G_0$.
(1.2) 设 $u,\ v\in G_0$ 使得$(u,\ v)\in G_{(2)}$. 那么 $\theta(u)=\theta(v)$，由此可得 $u=v$，因为 $u,\ v\in G_0$. 因此，乘积 $u\cdot v$ 有定义当且仅当 $u=v$. 根据命题3.1(i)和(ii)，我们有 $u\cdot u=u$. 因此 $u\cdot u\in G_0$. 此外，由 $u\cdot u=u$ 可推出 $u^{-1}=u$和 $u^{-1}\in G_0$.

(iii) G_0 **是几乎群胚**$(G,\ G_0)$的正规几乎子群胚。为此，我们考虑 $g\in G$ 和 $u\in G_0$，使得$g\cdot u\cdot g^{-1}$ 在 G. 中有定义。那么 $\theta(g)=\theta(u)=u$，因为 $u\in G_0$. 但是，$\theta(g\cdot u\cdot g^{-1})=\theta(g)=u$. 因此，$g\cdot u\cdot g^{-1}\in G_0$.

命题4.1 *([25])* 设(G,G_0) 是一个几乎群胚。那么：
(i) 各向同性群 $G(u)\ u\in G_0$ 是 G.(ii) 的几乎子群胚。集合 $Is(G)=\cup_{u\in G_0}G(u)$ $\subset G$ 是 G.的正规几乎子群胚。

称对$(Is(G)\ G_0)$为 G.的**各向同性几乎子群胚**

若(G,θ,m,ι,G_0)是一个几乎群胚，且$(H,H_0),(K,K_0)$是 G, 的几乎子群胚，我们定义集合：

$$H\coprod K:=H\cup K\quad\text{when}\quad H\cap K=\emptyset. \tag{2}$$

集合 $H\coprod K$ 称为几乎子群胚 H 和 K.的不交并
一般而言，若 $\{(H_i,H_{0,i})\mid i\in I\}$ 是一个几乎子群胚族，且满足 $H_i\cap H_j=\emptyset,(\forall)i,j\in I,$ $i\neq j,$，则集合 $H=\cup_{i\in I}H_i$ 称为几乎子群胚 $H_i,i\in I$ 的不交并，记作 $\coprod_{i\in I}H_i$.

命题4.2 设(G,G_0) 是一个几乎群胚。
(i) 如果(H,H_0)、(K,K_0) 是 G的几乎子群胚，那么 $H\coprod K$ 是 G的几乎子群胚，其单位集为 $H_0\cup K_0$。

(ii) 如果 $\{(H_i,H_{0,i})\mid i\in I\}$ 是 G的一个不相交的几乎子群胚族，那么 $\coprod_{i\in I}H_i$是 G.的几乎子群胚

证明。(i) 显然，$\theta(H\cup K)=\theta(H)\cup\theta(K)=H_0\cup K_0$，因为 $\theta(H)=H_0,\theta(K)=K_0$且 $H\cap K=\emptyset$. 如果 $x,y\in H\cup K$，那么 $x,y\in H$或 $x,y\in K$. 如果$(x,y)\in G_{(2)}$，那么$(\exists)xy$，由此可得 $xy\in H$ 或 $xy\in K$，因为 H 和 K 是 G. 的几乎子群胚。因此$xy\in H\cup K$. 。因此，定义4.1中的条件(1.2.1)得到满足。

此外，如果 $x\in H\cup K$，那么 $x\in H$或 $x\in K$. 。于是$x^{-1}\in H$或 $x^{-1}\in K$，且 $x\in H\cup K$.。因此，定义4.1中的条件 (1.2.2) 成立。我们得出，$H\coprod K$ 是 G.的几乎子群胚
(ii) 记 $H:=\coprod_{i\in I}H_i$. 在这种情况下，当且仅当两个元素 $x,y\in H$ 属于同一个几乎子群胚时，它们才可以复合 H_i. 。采用与命题 (i) 证明中相同的推理，我们证明 $\coprod_{i\in I}H_i$ 是 G. 的一个几乎子群胚。其单位集$H_0:=\cup_{i\in I}H_{i,0}$，其中 $H_{i,0}$ 是 H_i. □的单位集

推论 4.1 设 (G, G_0) 是一个几乎群胚。若 $\{(H_i, H_{0,i}) \mid i \in I\}$ 是 G 的一个不相交的几乎子群胚族，且满足 $\cup_{i\in I} H_{i,0} = G_0$，则 $(\coprod_{i\in I} H_i, G_0)$ 是 G.的一个宽几乎子群胚

证明。 该推论直接由宽几乎群胚的定义和命题4.2(ii)得出。□

如果 $(G, \theta, m, \iota, G_0)$ 是一个几乎群胚，并且 $a \in G$，我们定义以下集合:

$$C(a) := \{g \in G(\theta(a)) \mid g \cdot a = a \cdot g, \ (\forall) g \in G(\theta(a))\}. \tag{3}$$

$$Z(G) := \{a \in Is(G) \mid x \cdot a = a \cdot x, (\forall) x \in G \text{ such that } \theta(x) = \theta(a)\}. \tag{4}$$

$C(a)$，分别称为 $Z(G)$，的中心化子，其中 a 在 G，分别称为 G.的中心

命题 4.3 设 (G, G_0) 是一个几乎群胚。那么:
(i) $C(a)$ 的中心化子 $a \in G$ 是 G. 的几乎子群胚
(ii) $Z(G) = \cup_{u\in G_0} Z(G(u)) \subset G$.
(iii) $Z(G)$ 的中心是 G 的正规几乎子群胚 $Is(G)$。

证明。 (i) 注意到 $\theta(a) \in C(a) \subset G(\theta(a))$，因为对于所有 $g \in G(\theta(a))$， $g \cdot \theta(a) = \theta(a) \cdot g$。令 $x, y \in C(a)$。那么 $x, y \in G(\theta(a))$ $g \cdot x = x \cdot g$并且 $g \cdot y = y \cdot g$.。由于 $G(\theta(a))$ 是一个群，因此有 $(\exists)$ $g \cdot (x \cdot y)$ 和 $(x \cdot y) \cdot g$. 我们有
$g \cdot (x \cdot y) = (g \cdot x) \cdot y = (x \cdot g) \cdot y = x \cdot (g \cdot y) = (x \cdot y) \cdot g$.因此， $x \cdot y \in C(a)$。另外，如果 $x \in C(a)$，那么很容易证明
$g \cdot x = x \cdot g \iff g \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot g$.
因此， $x^{-1} \in C(a)$。所以， $C(a)$ 是 G. 的几乎子群胚
(ii) 显然， $G_0 \subseteq Z(G) \subseteq Is(G)$。
(iii) 集合 $Z(G) = \cup_{u\in G_0} Z(G(u)) \subset G$ 是 $Is(G)$ 的正规几乎子群胚。令 x、$y \in Z(G)$，并假设 $(\exists) x \cdot y$. 那么， $x \in Z(G(u))$ 且 $y \in Z(G(v)$ 对某些 u、$v \in G_0$. 成立。此外， $\theta(x) = u$，且 $\theta(y) = v$，现在由于 $\theta(x) = \theta(y)$，可推出 $u = v$.因此， $y \in G(u)$，从而 $x \cdot y \in Z(g(u)) \subset Z(G)$。另外，如果 $x \in Z(G)$，那么对于某个 $u \in G_0$， $x \in Z(G(u))$，并且由于 $Z(G(u))$ 是 $G(u)$ 的子群胚，故 $x^{-1} \in Z(G(u)) \subset Z(G)$。因此， $Z(G)$ 是一个宽几乎子群胚。

此外，设 $g \in Is(G)$ 与 $h \in Z(G)$ 使得 $\theta(h) = \theta(g)$。则对某个$u \in G_0$ 有 $g \in G(u)$，且 $\theta(g) = u$. 于是 $\theta(h) = u$ 且 $h \in Z(G(u))$。由于 $(\exists)$ $g \cdot h \cdot g^{-1}$，我们有$g \cdot h \cdot g^{-1} = (g \cdot h) \cdot g^{-1}) = (h \cdot g \cdot g^{-1} = h \cdot (g \cdot g^{-1})$ $= h \cdot \theta(g) = h \cdot \theta(h) = h \in Z(G)$。因此，$Z(G)$ 是 $Is(G)$. □的正规几乎子群胚

若 $(G, \theta, m, \iota, G_0)$ 是一个几乎群胚，且 $(H, H_0), (K, K_0)$ 是 G, 的几乎子群胚，则我们定义集合:

$$HK := \{h \cdot k \mid \theta(h) = \theta(k), \ h \in H, k \in K\}. \tag{5}$$

以下命题将关于群的若干初等结果推广到几乎群胚的情形。

命题 4.4 设(G, G_0) 是一个几乎群胚。若(H, H_0) 和(K, K_0) 是宽几乎子群胚，且 $HK = KH$，则 HK 是 G. 的宽几乎子群胚

证明。 注意到 $G_0 \subseteq HK$，因为 $\theta(g) = \theta(g) \cdot \theta(g) \in HK$ 对每个 $g \in G$. 均成立。因此，$HK \neq \emptyset$. 由此可得 $\theta(HK) = G_0$. 假设 $HK = KH$. 令 h_1、$h_2 \in H$ 以及 k_1、$k_2 \in K$. 。如果

x_1、 $x_2 \in HK$，那么 $x_1 = h_1k_1$ 且 $x_2 = h_2k_2$，使得 $\theta(h_1) = \theta(k_1)$ 以及 $\theta(h_2) = \theta(k_2)$。如果 $(\exists)x_1x_2$，那么
$x_1x_2 = (h_1k_1)(h_2k_2) = h_1(k_1h_2)k_2 = h_1(h'k')k_2 = (h_1h')(k'k_2) = h_3k_3 \in HK$，使得$\theta(h_1h') = \theta(k'k_2)$。因此，定义*4.1*中的条件（*1.2.1*）成立。最后，若$x \in HK$，则 $x = hk$ 满足 $h \in H$、 $k \in K$ 且 $\theta(h) = \theta(k)$。于是 $x^{-1} = (hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH = HK.$ 。因此，定义*4.1*中的条件（*1.2.2*）成立。我们得出结论， HK 是一个宽几乎子群胚。□

命题 4.5 设(G, G_0) 是一个几乎群胚，且$H_{i\in I}$ 是 $G.$ 的几乎子群胚族。那么：(i) 若 $\cap_{i\in I}H_i \neq \emptyset$，则 $\cap_{i\in I}H_i$ 是 $G.$的几乎子群胚(ii) 若对每个 $i \in I$， H_i 都是宽（分别为正规）几乎子群胚，则 $\cap_{i\in I}H_i$ 是 $G.$的宽（分别为正规）几乎子群胚

现在，假设 S 是几乎群胚 $(G,\ G_0)$ 的子集。考虑所有包含 $S.$ 的 G 的几乎子群胚所成的族。这个族非空，因为它显然包含群胚 G 本身。根据命题 4.5，这个族中所有几乎子群胚的交集也是 G 的几乎子群胚，并且显然包含 $S.$ 。因此，它是包含 $S.$ 的 G 的最小几乎子群胚。我们将它记为 $< S >$，并称其为由 $S.$生成的几乎子群胚

如果 $x_i \in G,\ \ i = \overline{1, n,}$ 那么：乘积

容易验证如下结论 $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ 在 $G \Leftrightarrow \theta(x_j) = \theta(x_{j+1})\ (\forall)\ j = \overline{1, n-1}$ 中有定义.

命题 4.6 设 S 是几乎群胚$(G, G_0$ 的非空集合，那么由 S 生成的几乎子群胚 $< S >$ 由所有形如 $x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\ldots x_n^{\varepsilon_n}$ 的乘积构成，其中 $\underline{x_i \in} S,\ \varepsilon_i = \pm 1,\ i = \overline{1, n}$ 对每个 $n \in \mathbf{N}^*.$

特别地，由 $S = \{a\} \subset G$ 生成的几乎子群胚为：

$$< a >= \{a^n \mid (\forall)\ n \in \mathbf{Z}\},\ \text{where}\ \ a^0 = \theta(a),\ \ a^n = a^{n-1} \cdot a,\ \ a^{-n} = (a^{-1})^n,\ n \in \mathbf{N}^* \quad (6)$$

它称为由 $a \in G.$生成的循环几乎子群胚

注 4.1 设 $(G, G_0$ 是一个几乎群胚，且 $a \in G.$ 。则：
$(i) < a > \subset G(\theta(a))$，且 $< a >$ 是各向同性群 $G(\theta(a))$ 的子群。(ii) 若 $(\exists)\ n \in \mathbf{N}\ \ n \geq 2$ 使得 $a^n = \theta(a)$，那么 $< a >$ 是阶为 n 的循环子群，且 $< a >= \{\theta(a)\ a,\ a^2,\ \ldots\ldots,\ a^{n-1}\}.$

例 4.2 与 $\mathsf{Z}_6.$ 相关的几乎群胚。考虑模 6 整数群 $(\mathsf{Z}6, +)$，其中 $\mathsf{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$，且子群 $H = \{0, 2, 4\} \subset \mathsf{Z}_6$。设 $G := H \times \mathsf{Z}_6$，且 $G_0 := \{(0,0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0,4), (0, 5)\} \subset G.$。那么 $(G, \theta, \ominus, \iota, G_0)$ 是定义在 G_0 上的几乎群胚，其中可复合对的集合为 $G_{(2)}$，其结构函数定义如下：

$\theta\colon\ G = H \times \mathsf{Z}_6 \ \to\ G_0,\ (a, b)\ \ \rightarrowtail \theta(a, b) := (0, b - a); G_{(2)} = \{((a, b), (c, d))\ \in G^2 \mid \theta(a, b) = \theta(c, d)\} = \{((a, b), (c, d))\ \in G^2 \mid b - a = d - c\};\ (a, b)\ \ominus (c, d) := (a + c, b + c),\ (\forall)\ a, b, c, d \in \mathsf{Z}_6$ 以及$\iota(a, b) := (-a, b - 2a),\ (\forall)\ a, b \in \mathsf{Z}_6.$

容易验证，定义3.1的条件（**AG1)** − **AG3**）成立。为此，令 $x, x_1, x_2 \in G,$其中 $x = (a, b)\ x_1 = (a_1, b_1)\ x_2 = (a_2, b_2)$，且 $a, a_1, a_2 \in H$且$b, b_1, b_2 \in$**实数集**$_6$. 元素 $x \ominus x_1 \ominus x_2$定义为 $\Leftrightarrow\ b - a = b_1 - a_1 = b_2 - a_2$. 我们有：
(1) $(x \ominus x_1) \ominus x_2 = ((a, b) \ominus (a_1, b_1)) \ominus (a_2, b_2) = (a + a_1, b + a_1) \ominus (a_2, b_2) = (a + a_1 + a_2,$ $b_1 + a_1 + a_2) = x \ominus (x_1 \ominus x_2)$; (2) $x \ominus \theta(x) = (a, b) \ominus \theta(a, b) = (a, b) \ominus (0, b - a) = (a, b) = x = \theta(x)$ $\ominus x$; (3) $x \ominus \iota(x) = (a, b) \ominus \iota(a, b)) = (a, b) \ominus (-a, b - 2a) = (0, b - a) = \theta(x) = \iota(x) \ominus x.$

我们得出，$G = H \times \mathbf{Z}_6$ 是一个基于 G_0. 的几乎群胚。注意，$G = \{u_i, p_j \in H \times \mathbf{Z}_6 \mid i = 1, 6, j = 1, 12\}$ 是一个阶为18的有限几乎群胚，其中：$u_1 = (0,0)\ u_2 = (0,1)\ u_3 = (0,2)\ u_4 = (0,3)\ u_5 = (0,4)\ u_6 = (0,5), p_1 = (2,0)\ p_2 = (2,1)\ p_3 = (2,2)\ p_4 = (2,3)\ p_5 = (2, 4)\ p_6 = (2,5), p_7 = (4,0)\ p_8 = (4,1)\ p_9 = (4,2)\ p_{10} = (4, 3)\ p_{11} = (4, 4)\ p_{12} = (4,5)$。

现在，我们给出一些示例，用于填完以下三个表格：$\theta(u_4) = \theta(0, 3) = (0, 3 - 0) = u_4$; $\theta(p_7) = \theta(4, 0) = (0, 0 - 4) = (0, 2) = u_3 \iota(u_6) = \iota(0, 5) = (0, 5 - 2 \cdot 0) = (0,5) = u_6$; $\iota(p_4) = \iota(2, 3) = (-2, 3 - 2 \cdot 2) = (4,5) = p_{12}$; $G(u_3) = \{u_3, p_5, p_7\}$; $G(\theta(p_3)) = G(u_1) = \{u_1, p_3, p_{11}\}. u_6 \ominus p_{10} = (0,5) \ominus (4,3) = (0 + 4, 5 + 4) = (4, 3) = p_{10}$; $p_4 \ominus p_4 = (2,3) \ominus (2,3) = (2 + 2, 3 + 2) = (4, 5) = p_{12}$; $p_8 \ominus p_6 = (4,1) \ominus (2,5) = (4 + 2, 1 + 2) = (0, 3) = u_4$.

元素 $p_1 \ominus p_{10}$ 未定义，因为 $\theta(p_1) = \theta(2,\ 0) = u_5,\ \theta(p_{10}) = \theta(4,\ 3) = (0,\ 3 - 4) = (0,\ 5) = u_6$ 和 $u_5 \neq u_6$.

g	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}
$\theta(g)$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_5	u_6	u_1	u_2	u_3	u_4	u_3	u_4	u_5	u_6	u_1	u_2
$\iota(g)$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_7	p_8	p_5	p_6	p_1	p_2	p_3	p_4

$\ominus$ $G = H \times$上的乘法运算$\mathbf{Z}_6$ 如下表所示：

$\ominus$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}
u_1	u_1								p_3								p_{11}	
u_2		u_2								p_4								p_{12}
u_3			u_3								p_5		p_7					
u_4				u_4								p_6		p_8				
u_5					u_5		p_1								p_9			
u_6						u_6		p_2								p_{10}		
p_1					p_1		p_9								u_5			
p_2						p_2		p_{10}								u_6		
p_3	p_3								p_{11}								u_1	
p_4		p_4								p_{12}								u_2
p_5			p_5								p_7		u_3					
p_6				p_6								p_8		u_4				
p_7			p_7								u_3		p_5					
p_8				p_8								u_4		p_6				
p_9					p_9		u_5								p_1			
p_{10}						p_{10}		u_6								p_2		
p_{11}	p_{11}								u_1								p_3	
p_{12}		p_{12}								u_2								p_4

几乎群胚 G 中 p_1 的中心化子 $C(p_1)$ 为

$C(p_1) = \{g \in G(\theta(p_1) | g \ominus p_1 = p_1 \ominus g\} = \{g \in G(u_5) | g \ominus p_1 = p_1 \ominus g\} = \{u_5, p_1, p_9\} = G(u_5)$。此外，我们有 $C(u_1) = G(u_1)$。最后，很容易观察到， G 的各向同性几乎子群胚 $Is(G)$与中心$Z(G)$满足关系 $Is(G) = Z(G) = G$.

参考文献

[1] H.F. Akiz, 《作为向量空间群胚的基本群胚札记》。《数学与科学学术研究》，安卡拉，第一版，2018年，21-26页。[2] J. Avila、V. Marin、H. Pinedo, 《群胚的同构定理及若干应用》。《国际数学与数学科学杂志》，2020年，1-10页。[3] G. Beier、C. Garcia、W. G. Lautenschlaeger、J. Pedrotti、T. Tamusiunas, 《群胚的拉格朗日定理和西洛定理的推广》。arXiv:2101.07420v1 [math.RA], 19 2021年1月，1-19页。.[4] H. Brandt, 《关于群概念的一种推广》。《数学年刊》，96 (1926年)，360-366页。[5] R. Brown、C.B. Spencer, 《G-群胚、交叉模与拓扑群的基本群胚》。《荷兰皇家科学院学报》，79 (1976年)，296-302页。[6]C. Ehresmann, 《全集》。第一部分 I.1、I.2。《代数拓扑与微分几何》。Dunod，巴黎，1950年。[7] M. Golubitsky、I. Stewart, 《网络非线性动力学：群胚形式体系》。《美国数学会通报》，43(3)(2006年)，305-364页。[8] Gh. Ivan, 《群胚的强态射》。《巴尔干几何与应用杂志》(BJGA)，4 (1)(1999年)，91-102页。https://www.emis.de/journals/BJGA/v04n1/B04-1-IVAN.pdf。[9] Gh. Ivan, 《Brandt 群胚的代数构造》。《“Bab¸s-Bolyai”大学代数研讨会论文集》，克卢日-纳波卡，(2002年)，69-90页。pdf.px-pict.com，www.07-ivan-pdf。[10]Gh. Ivan, 《群胚理论主要研究方向的综合性阐述》，arXiv:2408 00562v1[math GR], (2024年)，1-23页。[11] Gh. Ivan, 《群概念的三种推广：群胚、广义群与几乎群胚》，arXiv:25 10 27652v1[math GR], (2025年)，1-15页。DOI.org/10.48550/arxiv 25 10 27 652。[12] Gh. Ivan、M. Ivan, 《一般欧拉陀螺系统及其 Lax 表示》。《国际几何、度量与数学物理杂志》，8, 5 (2011年)，937–944页。DOI:10.1142/S0219887811003543。[13] Gh. Ivan、M. Ivan、D. Opri¸s, 《李代数丛的分数阶欧拉-拉格朗日方程与分数阶 Wong 方程》。第四届国际数学与数理物理学术讨论会论文集，布加勒斯特-2006，73-80页。[14] Gh. Ivan、D. Opri¸s、M. Ivan, 《与欧拉陀螺系统相关的随机分数阶方程》。《国际几何、度量与数学物理杂志》，10, 1(2013年)，1220018（10页）。DOI:10.1142/S02198878.12200186。[15] Gh. Ivan、M. Ivan、C. Pop, 《三维度量泊松 Volterra 系统的数值积分与同步》。《数学问题与工程》，2011年，文章编号 723629（11页）。DOI:10.1155/2011/723629。[16] M. Ivan, 《论对称群胚》。《Arghiriade 研讨班》32，蒂米什瓦拉，西蒂米什瓦拉大学，数学系，2002年，1-23页。[17] M. Ivan, 《有限集的对称群胚的一般性质》，《克拉约瓦大学数学与计算机科学系列年刊》，30 (2003年)，第2期， $109 - 119.$ 。https://aucmcs.ro/index.php。

[18] M. Ivan, 《李群胚丛》。《几何与拓扑最新进展》。克卢日大学出版社，2004年，211–219页。www.Bundles-of-Lie-groupoids.pdf[19] M. Ivan, 《拓扑群胚丛》。《研究与论文集》。数学系列，巴克乌大学，15 (2005年)， $43-54$. www.ub.ro/pubs/scssm。[20] M. Ivan, 《向量空间-群组》。《欧洲纯粹与应用数学杂志》，6(4) (2013年)，469-484页。www.eyup.+1a- Ivan.pdf。[21] M. Ivan, 《分数阶洛伦兹-哈密顿系统中的混沌控制》。《分数阶微分与积分》，6, 1 (2016年)，111–119页。DOI:10.7153/fdc-06-07。[22] M. Ivan、Gh. Ivan, 《具有两个参数的分数阶欧拉陀螺系统》。《现代工程研究国际期刊》，8(4)(2018年)，10-22页。[23] M. Ivan, 《分数阶拉格朗日系统的动力学分析》。《现代工程研究国际期刊》，12(2022年)，第8期，23-31页。[24] M. Ivan, 《具有两个控制量的分数阶沃尔泰拉模型的稳定性分析》。《应用数学国际期刊》，36(6) (2023年)，801-814页。DOI.org/10,12732/ijam.v36i6.5。[25] M.Ivan, 《几乎群胚与态射》。《拟群及相关系统》，33 (2023年)，23-36页。https://doi.org/10.56415/qrs.v33.03。[26]M.Ivan, 《带有一个控制量的二维分数阶沃尔泰拉格》。《动力系统与应用进展》，19 (2024年)，第1期，59-74页。http://www.ripublication.com/adsa.htm。[27]M. Ivan、Gh. Ivan、D. Opri̧s, 《伪正交群 $SO(2,1)$ 上刚体的分数阶方程》。《国际几何、度量与数学物理杂志》，6(7)(2009年)，1181-1192页。DOI:10.1142/S0219887809004168。[28]K. Mackenzie, 《微分几何中的李群胚与李代数丛》。《伦敦数学学会讲义丛书》，124，剑桥大学出版社，1987年。[29] A. Weinstein, 《群胚：统一内对称与外对称》。《美国数学学会通报》，43 (1996年)，744-752页。[30] J. Westman, 《代数、拓扑与分析中的群胚理论》。加州大学欧文分校，1971年。

作者地址

蒂米什瓦拉西部大学。几何与拓扑研讨会。教师培训系。蒂米什瓦拉。罗马尼亚。V. Pˆarvan大道4号，邮编300223，蒂米什瓦拉，罗马尼亚 电子邮箱：mihai.ivan@e-uvt.ro