CAL-TH-2026-006
DESY-26-015

从 OPE 解耦出发的代数几何引导法

Monica Jinwoo Kang, [1, *] Craig Lawrie, [2, †] 和 Jaewon Song[3, 4, ‡]

[1] *Mitchell Institute for Fundamental Physics and Astronomy, Texas A&M University, College Station, TX 77843, U.S.A.* [2] *Deutsches Elektronen-Synchrotron DESY, Notkestrasse 85, 22607 Hamburg, Germany* [3] *Department of Physics, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Daejeon 34141, Republic of Korea*

[4] *Walter Burke Institute for Theoretical Physics, California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125, U.S.A.*

我们猜想，四维 $\mathcal{N}=2$ 超共形场论（SCFT）的算符乘积展开中的解耦关系，由一个代数几何对象编码：一个双滤过仿射概形。我们展示了该概形如何重现麦克唐纳指标（进而重现舒尔指标）以及希格斯支。尽管相关概形通常允许连续形变，但我们发现，几何极值原理能够唯一确定这些模参数，从而为四维 $\mathcal{N}=2$ SCFT 的分类提供一条可能的几何路径。

arXiv:2602.04946v1 [hep-th] 4 Feb 2026

引言

现代量子场论（QFT）的一个核心主题是，存在许多超出传统拉格朗日描述 [1, 2] 范围、且难以通过微扰加以理解的自洽量子场论。因此，我们希望寻找一种更稳健的原理来刻画量子场论。其中一种原理是算符乘积的解耦或截断，它会极大地限制可能的场论数据。这种机制出现在多种情形中，例如二维极小模型 [3], 、三维伊辛模型 [4, 5], 以及四维 $\mathcal{N}=2$ 超共形场论（SCFT）[6–8]。这种现象无需拉格朗日描述，本质上是非微扰的。

一般而言，局域共形场论由所有共形初级算符的标度维数和三点 OPE 系数决定，这些数据称为共形数据。人们认为，这种描述对于一个理论而言包含了大量冗余信息。例如，共形自举纲领提供的证据表明，具有 $\mathbb{Z}_2$ 全局对称性且恰有两个相关标量算符、其 $\mathbb{Z}_2$荷相反的三维共形场论必定是三维伊辛模型。 $\mathbb{Z}_2$ 意味着发生了 OPE 解耦：$\mathbb{Z}_2$奇标量从两个 $\mathbb{Z}_2$偶标量的 OPE 中解耦。此外，极端泛函方法[9]可用于恢复共形数据。

基于这些观察，我们提出以下问题：能否利用这种解耦现象，更一般地定义局域量子场论？在我们最近的工作中， [10], 我们对这个问题给出了肯定的回答，至少对于确定四维 $\mathcal{N}=2$ 超共形场论中的一个受保护子扇区是如此。最清晰的例子是（A_1， A_{2n}）阿盖尔斯–道格拉斯理论 [1], ，其中应力张量的（$n+1$）次乘积中发生了OPE解耦 [6, 7], ，从而产生一个代数几何对象：

$$T^{n+1}\sim 0 \quad \rightsquigarrow \quad R=\mathbb{C}[x]/(x^{n+1})\,. \tag{1}$$

$X=$ 谱 R 是一个胖点，作为簇它是平凡的，但作为概形却并非如此，并保留了幂零结构由 OPE解耦决定。Macdonald 指标用于计数四分之一 BPS 算符 [11, 12], ，可通过计算一个相关几何对象——弧空间 $J_\infty X$——的希尔伯特级数得到，从而为指标 [10, 13, 14]提供代数几何解释。

按照四维 $\mathcal{N}=2$超共形场论中的OPE解耦由代数概形刻画这一思路，自然可以反过来提出问题：一个概形必须满足哪些条件，才能刻画OPE解耦？理解这些条件将为以纯代数几何的方式定义和分类（通常是非拉格朗日的）四维$\mathcal{N}=2$ 超共形场论铺平道路。

我们发现，一个关键条件源自极值原理，而我们针对 $(A_{k-1},\ A_{N-1})$ Argyres–Douglas 理论 [1, 15, 16] 确定了这一原理。尽管给定的双滤过仿射概形通常存在连续形变，但我们发现，这个模空间中的一般点所对应的谱无法解释为某个四维超共形场论的谱。值得注意的是，只有在唯一的极值点处——其特征是相关喷射概形的拓扑发生变化——该谱才与某个已知物理理论的谱一致。我们将这种极值性解释为一种物理一致性条件，它从更大的几何数据空间中筛选出可行的超共形场论。具体而言，我们提出如下命题。

命题。对于一个“极值”双滤过仿射概形 X，其坐标环为 $R=\mathbb{C}[X]$，我们可以将其与一个四维$\mathcal{N}=2$ 超共形场论关联起来，其麦克唐纳指标为

$$I_{Mac}(q,T)=\mathrm{HS}_{q,q,T}\left(\mathrm{gr}(J_\infty(R))\right)\,, \tag{2}$$

希格斯支为

$$\mathcal{M}_H=(X)_{red}=\mathrm{Spec}(R)_{red}\,. \tag{3}$$

几何的选择源于 OPE 解耦结构，而双过滤结构则由超共形对称性所启发。极端性条件提供了一种确定物理上可实现理论的方法。我们将在以下各节中对上述术语给出精确定义。

弧空间与希尔伯特级数

本节介绍数学预备知识，以支持我们的提议：双滤环，即双滤仿射概形的坐标环，既是希格斯分支模空间的概形论增强，也是麦克唐纳指标的生成对象。我们通常仅用 R 表示双滤环，而将双滤结构隐含不表。

首先，双滤环是一个环 R，连同一列子群

$$F^{p,q}R \subseteq R \quad \text{for} \quad p,q \in \mathbb{Z}\,. \tag{4}$$

这些子群必须满足三个条件：

1. $F^{p,q}R \subseteq F^{p',q'}R \quad \text{if } p \le p', q \le q'$,
2. $\bigcup_{p,q} F^{p,q}R = R$,
3. $F^{p,q}R \cdot F^{p',q'}R \subseteq F^{p+p',q+q'}R$.

对于 $\ell \ge 1$ 整数，ℓ-滤环满足这些条件的显然推广。

有一种简单的方法可以定义双滤。考虑双分次多项式环

$$S = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_m] = \bigoplus_{p,q} S_{p,q}\,, \tag{5}$$

其中，双重分次由以下双次数指定：$\deg(x_j) = (a_j,\ b_j)$。设 I 是 S中的一个（不一定是双齐次）理想。那么，环 $R = S/I$ 不一定是双重分次的，因为该理想可以在 S中混合不同双次数的单项式。然而，它继承了 S上的双重分次所赋予的双滤：

$$F^{p,q}R = \pi\left(\bigoplus_{p'\le p, q'\le q} S_{p',q'}\right)\,, \tag{6}$$

其中 $\pi(\cdot)$ 是 R 中 $\cdot$ 的像。

给定这样一个多项式环 $R = S/I$，它将我们的几何定义为 $X = \operatorname{Spec}(R)$，我们可以如下构造第 n 阶喷射概形（的坐标环） $J_nR = \mathbb{C}[J_nX]$: [17]。记 $I = (f_1,\ \cdots,\ f_r)$。接着，我们将 x_j，从而将 f_i，形式地展开为关于辅助变量 t 的幂级数：

$$x_j = \sum_{\alpha=0}^{n} x_j^{(\alpha)} t^\alpha\,, \quad f_i \mod t^{n+1} = \sum_{\alpha=0}^{n} f_i^{(\alpha)} t^\alpha\,. \tag{7}$$

我们可以考虑 $S_n = \mathbb{C}[x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \cdots, x_m^{(n)}]$，它具有自然的三分次，由 $\deg(x_j^{(\alpha)}) = (\alpha,\ a_j,\ b_j)$ 给出。然后，我们可以定义理想

$$I_n = \left(f_1^{(0)}, \cdots, f_1^{(n)}, \cdots, f_r^{(0)}, \cdots, f_r^{(n)}\right)\,. \tag{8}$$

因此，$J_nR = S_n/I_n$ 是三滤的，我们可以定义这个三滤弧空间为直极限 $J_\infty R = \varinjlim_n J_nR$，它是弧空间 $J_\infty X$ 的坐标环。更多详情请参见[18]。

最后，给定一个双滤环，可以按如下方式定义与之关联的双分次环。设 $F^{p,\,q}R$ 是环 R 上的一个双滤。于是我们可以定义

$$\mathrm{gr}^{p,q}(R) = \frac{F^{p,q}R}{F^{p-1,q}R + F^{p,q-1}R}\,, \tag{9}$$

于是我们得到一个双分次环

$$\mathrm{gr}(R) = \bigoplus_{p,q} \mathrm{gr}^{p,q}(R)\,. \tag{10}$$

类似地，我们有与之关联的三重分次环 $\mathrm{gr}(J_n(R))$，并且存在一个带有逸度 p、q 和 T 的希尔伯特级数，对应三个分次：

$$\mathrm{HS}_{p,q,T}(\mathrm{gr}(J_nR))\,. \tag{11}$$

将其特化到 $p = q$ 后，我们声称，当适当选择 X（或 R）时，这会给出麦克唐纳指标。

最后需要指出，尽管弧空间（的坐标环）形式上由无限多个生成元和关系构成，但我们可以证明，对于任意 ℓ，

$$\begin{aligned}&\mathrm{HS}_{q,q,T}(\mathrm{gr}(J_\infty R))\\ &\qquad = \mathrm{HS}_{q,q,T}(\mathrm{gr}(J_{\ell-d}R)) \mod q^{\ell+1}\,,\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $d = \min(a_1, \cdots, a_m)$。因此，通过截断到一个具有有限个生成元和关系的喷射环，我们可以将希尔伯特级数确定到 q 的任意阶。

提案：(A_{k-1}, A_{N-1}) 理论

我们已阐述 [10] 的提案：对于给定的四维 $\mathcal{N} = 2$ 超共形场论，可以存在一个双滤环 R，使希格斯支概形化，并且该四维理论的麦克唐纳指标与 R 的弧空间的希尔伯特级数相匹配，如方程（2）所示。[1] 本节中，我们为双滤多项式环 R 给出一个几何条件，使得概形 X 能够实现对于 $\gcd(k, N) = 1$ 的 (A_{k-1}, A_{N-1}) Argyres–Douglas 理论的这一提案。

取一对互素整数（$k \ge 2,\ N \ge 2$），并考虑分次多项式环

$$S = \mathbb{C}[x_2, \cdots, x_k]\,, \quad \deg(x_d) = d\,, \tag{13}$$

[1] 为简洁起见，我们常将 (2) 的右侧称为“弧空间的希尔伯特级数”，并默认读者了解其中的双滤、关联分次构造及分级约定。

其中分次结构由次数赋值确定。我们将这个次数称为 q-次数。此外，令 $P(x_2,\ \cdots,\ x_k)$ 表示一个 q-次数多项式。根据 P，我们可以确定属于环 S 的雅可比理想：

$$I_P = (\partial_{x_2} P, \cdots, \partial_{x_k} P)\,. \tag{14}$$

我们希望考察由 $R = S/I_P$ 定义的概形的弧空间，并将喷射构造中引入的额外次数称为 p-次数。

出于稍后将明了的原因，我们关注是否存在一个 (q, p)-次数为 $(k+N+2, 1)$ 的上同调关系（关系之间的关系）。令 $f_{d,p}$ 表示如方程 (7) 中那样，取喷射展开中 $\partial_{x_d} P$ 的 t^p 系数所得的关系。那么，存在一个具有指定次数的极小上同调关系，当且仅当存在一组非零的 $g_{a,b}$，使得

$$\sum_{d=2}^{k} (g_{d,1} f_{d,0} + g_{d,0} f_{d,1}) = 0\,, \tag{15}$$

其中 (q,p)-次数由下式给出

$$\deg(g_{a,b}) = (k+N+2-a, b)\,. \tag{16}$$

将方程 (15) 按单项式基展开，可将其写成如下形式：$Mg = 0$ 其中 M 称为上同调关系矩阵。我们提出，对于给定的 (k, N)，存在唯一的理想 I_P，使得该上同调关系条件可解（即 M 的秩下降 1），并且 $R = S/I_P$ 是完全交。我们将这样的理想称为 I_P^{AD}。

现在，我们通过以下双次数赋值在 S 上引入双重分次

$$\deg(x_d) = (d, d-1)\,. \tag{17}$$

第一个次数是 q次数，第二个次数我们称为 T次数。我们提出，$R_{\mathrm{AD}} \equiv S/I_P^{\mathrm{AD}}$的弧空间的希尔伯特级数与（$A_{k-1}$，$A_{N-1}$）理论的麦克唐纳指标相同：

$$\mathrm{HS}_{q,q,T}\left(\mathrm{gr}(J_\infty R_{\mathrm{AD}})\right) = I_{\mathrm{Mac}}^{(A_{k-1},A_{N-1})}(q,T)\,. \tag{18}$$

此外，$\mathrm{Spec}(R_{\mathrm{AD}})_{\mathrm{red}}$ 是一个点，这就是此类（A_{k-1}，A_{N-1}）理论的希格斯支。

我们可以通过研究这些阿盖尔斯–道格拉斯理论已知的舒尔指标，来阐明对双滤环 R 的条件。$(A_{k-1}$，$A_{N-1})$阿盖尔斯–道格拉斯理论的舒尔指标 $I_{\mathrm{S}}(q)$，即麦克唐纳指标的$T \to 1$ 极限，为 [19–21]:

$$I_S = \mathrm{PE}\left[\frac{q^2 + \cdots + q^k - q^{N+1} - \cdots - q^{k+N-1}}{(1-q)(1-q^{k+N})}\right]. \tag{19}$$

假设这个舒尔指标是通过 R 的弧空间的希尔伯特级数重现的：

$$\mathrm{HS}_{q,q}(J_\infty R) = I_{\mathrm{S}}(q)\,. \tag{20}$$

多重指数中的分子表明，我们应考虑一个环 R，它具有 $k-1$ 个生成元，以及次数分别为 2，$\cdots$，k 和 $N+1$，$\cdots$，$k+N-1$ 的关系。希尔伯特级数由弧空间$J_\infty R$的极小自由分解的贝蒂数得出。通过比较舒尔指标展开式的前几项（截至并包括 $O(q^{k+N+3})$ 阶），我们确定了与物理理论相匹配所需的**充要**几何条件：

$$\begin{gathered} R \text{ is a complete intersection}\,, \\ \beta_{2,(k+N+1,1)}(J_1 R) = \beta_{2,(k+N+2,1)}(J_1 R) = 1\,. \end{gathered} \tag{21}$$

我们提出，这就是贝蒂数的定义性极值性条件。贝蒂数 $\beta_{2,\ (q,p)}$ 统计双次数为（q，p）的极小上同调关系的数量；贝蒂数所需的 p次数可以由 R 是一个完全交这一事实中提取出来。第一个要求（$\beta_{2,\ (k+N+1,1)} = 1$）当且仅当 R是一个由雅可比理想作商得到的完全交时满足。第二个要求（$\beta_{2,\ (k+N+2,1)} = 1$）当且仅当存在如方程（15）中的唯一极小上同调关系时满足。[2] 这些约束共同消除了概形的连续形变，从而唯一确定映射到物理理论的理想 I_P。

一般而言，由 OPE解耦产生的几何具有一个参数模空间。其中包含各种奇异轨迹，在这些轨迹上，上同调关系矩阵的秩会下降。我们发现，在这些轨迹的交点处存在一个**唯一点**，在该点，贝蒂数恰好由方程（21）给出，同时保持该几何的完全交性质。

ARGYRES–DOUGLAS 示例

现在，我们利用上一节提出的几何条件，确定能够刻画各种（A_{k-1}，A_{N-1}）Argyres–Douglas 理论的麦克唐纳指标和希格斯支的双滤过环。

（A_1，A_{N-1}）理论 理论 最简单、最直接的一类理论是（A_1，A_{2n}）理论。我们预计只有一个次数为二的生成元 x_2，以及一个次数为 $2n+2$ 的关系。因此，

$$R = \mathbb{C}[x_2] \,/\, \left(x_2^{n+1}\right)\,, \tag{22}$$

是唯一的可能性。这可以显然地写成一个次数为 $n+3$ 的多项式模去其雅可比理想所得的商。此外，很容易看出

[2] 一般而言，还必须验证这一显式上同调关系是最小的，因而确实会对贝蒂数作出贡献。幸运的是，分次结构意味着，如果这一上同调关系存在，它不可能由次数更低的上同调关系生成。

方程 (21) 中关于贝蒂数的条件对于这样的一个 R自动满足。经过大量检验 [10, 13, 14, 22] ，方程 (22) 中环的弧空间的希尔伯特级数会重现该四维超共形场论的麦克唐纳指标。

(A_2, A_{N-1}) 理论 当 $\gcd(3, N) = 1$ 时，(A_2, A_{N-1}) 理论是首批出现方程（ 21 ）中的几何条件施加非平凡约束的情形。为说明这一点，我们详细考察 (A_2, A_9) 理论。生成元和关系的次数可由舒尔指标确定，这表明我们应考虑一个环

$$R = \mathbb{C}[x_2, x_3] \,/\, (a x_2^6 + b x_2^3 x_3^2 + c x_3^4, d x_2^4 x_3 + e x_2 x_3^3)\,, \quad (23)$$

要求 $J_1(R)$ 中存在一个次数为 (14, 1) 的非平凡上同调关系，这一条件要求 $be - 8dc = 0$；结合缩放和归一化后，该条件使我们能够将任何此类解写成关于多项式所对应的雅可比理想的商

$$P(x_2, x_3) = \beta x_2^7 + x_3^2 x_2^4 + x_3^4 x_2\,, \quad (24)$$

对于某个自由参数 β。条件 $\beta_{2,(15,1)}$ =1 进一步约束剩余系数，使其满足

$$21\beta - 1 = 0\,. \quad (25)$$

由此，我们得到 (A_2, A_9) 阿盖尔斯–道格拉斯理论的理想 I_P^{AD}。值得注意的是，仅凭极少的条件便完全确定了 R，并且恰好将舒尔指标复现为弧空间的希尔伯特级数。我们已验证它们一致至 $O(q^{30})$。

对于任意满足 $\gcd(3, N) = 1$ 的 (A_2, A_{N-1})，都可以进行类似的分析。我们已在表 I 中列出 $N \le 23$ 的解。对于 $N \le 7$ ，麦克唐纳指标的展开式已在[21], 中给出，我们也已验证这些表达式与弧空间的希尔伯特级数相符。事实上，希尔伯特级数的计算可以轻松扩展到远高于文献中已给出的阶数，我们将这些结果留作预测。我们已验证舒尔指标与希尔伯特级数的舒尔极限相符。附录中收录了其中一些希尔伯特级数。

(A_3, A_{N-1}) 理论 现在我们来考察一些 (A_3, A_{N-1}) 系列，其中 $\gcd(4, N) = 1$。我们所考虑的雅可比理想 I_P，由属于环 P 的 q 次 $N+5$ 多项式 P 得到

$$S = \mathbb{C}[x_2, x_3, x_4] \quad \text{where} \quad \deg(x_d) = d\,. \quad (26)$$

理想 I_P 在通过以下方式对 P 进行平移后保持不变

$$x_2 \to a x_2\,, \quad x_3 \to b x_3\,, \quad x_4 \to c x_4 + d x_2^2\,, \quad (27)$$

我们从 (A_3, A_4) 超共形场论出发。利用方程 (27) 中的平移，多项式 P 可以表示为

理论多项式 $P(x_2, x_3, \cdots)$
(A_2, A_3) $x_2^4 + x_2 x_3^2$
(A_2, A_4) $x_2^3 x_3 + x_3^3$
(A_2, A_6) $x_2^4 x_3 + x_2 x_3^3$
(A_2, A_7) $\frac{1}{30} x_2^6 + x_2^3 x_3^2 + x_3^4$
(A_2, A_9) $\frac{1}{21} x_2^7 + x_2^4 x_3^2 + x_2 x_3^4$
(A_2, A_{10}) $x_2^6 x_3 + x_2^3 x_3^3 + \frac{3}{50} x_3^5$
(A_2, A_{12}) $\frac{3}{35} x_2^7 x_3 + x_2^4 x_3^3 + x_2 x_3^5$
(A_2, A_{13}) $\frac{5}{72} x_2^9 + x_2^6 x_3^2 + x_2^3 x_3^4 + \frac{2}{25} x_3^6$
(A_2, A_{15}) $\frac{8}{7875} x_2^{10} + \frac{4}{35} x_2^7 x_3^2 + x_2^4 x_3^4 + x_2 x_3^6$
(A_2, A_{16}) $-\frac{1}{8} x_2^9 x_3 + x_2^6 x_3^3 + x_2^3 x_3^5 + \frac{2}{21} x_3^7$
(A_2, A_{18}) $\frac{8}{3087} x_2^{10} x_3 + \frac{20}{147} x_2^7 x_3^3 + x_2^4 x_3^5 + x_2 x_3^7$
(A_2, A_{19}) $\frac{1}{396} x_2^{12} + \frac{1}{6} x_2^9 x_3^2 + x_2^6 x_3^4 + x_2^3 x_3^6 + \frac{3}{28} x_3^8$
(A_2, A_{21}) $\frac{3}{249704} x_2^{13} + \frac{3}{686} x_2^{10} x_3^2 + \frac{15}{98} x_2^7 x_3^4 + x_2^4 x_3^6 + x_2 x_3^8$
(A_2, A_{22}) $\frac{125}{19404} x_2^{12} x_3 + \frac{25}{126} x_2^9 x_3^3 + x_2^6 x_3^5 + x_2^3 x_3^7 + \frac{7}{60} x_3^9$
(A_3, A_4) $\frac{1}{10} x_2^5 + x_2^2 x_3^2 + x_2 x_4^2 + x_3^2 x_4$
(A_3, A_6) $\frac{9}{2} x_2^4 x_4 + x_2^3 x_3^2 + x_2 x_3^2 x_4 + \frac{1}{108} x_3^4 + x_4^3$
(A_3, A_8) $\frac{x_2^5 x_4}{120} + \frac{x_2^4 x_3^2}{72} + \frac{x_2^2 x_3^2 x_4}{3} + \frac{x_2 x_3^4}{18} + x_2 x_4^3 + x_3^2 x_4^2$
(A_3, A_{10}) $\frac{x_2^8}{47029248} + \frac{x_2^5 x_3^2}{7776} + \frac{x_2^4 x_4^2}{1296} + \frac{x_3^3 x_4}{54} + \frac{x_2^2 x_3^4}{18}$ $+ x_2 x_3^2 x_4^2 + x_3^4 x_4 + x_4^4$
(A_4, A_5) $\frac{617768595}{5} x_2^6 + 184899 x_2^4 x_4 + 10368 x_2^3 x_3^2 + x_2^2 x_3 x_5$ $+ 861 x_2^2 x_4^2 + x_2 x_3^2 x_4 + x_2 x_5^2 + x_3^4 + x_3 x_4 x_5 + x_4^3$

表 I. (A_{k-1}, A_{N-1}) 理论的多项式。$P(x_2, x_3, ...)$ 是次数为 $k + N + 1$的 x_d 齐次多项式，其中 x_d的次数为 d。系数由要求 $\beta_{2,(k+N+2,1)}(J_1 R) = 1$ 来确定。

单个系数 β:

$$P = \beta x_2^5 + x_2^2 x_3^2 + x_2 x_4^2 + x_3^2 x_4\,. \quad (28)$$

显然，在环 $J_\infty(S \,/\, I_P)$ 中，只有当.....时才存在一个次数为 (11，1) 的 $(q,\ p)$-上同调关系。

$$10\beta - 1 = 0\,. \quad (29)$$

因此，我们确定了理想 I_P^{AD}，并可以比较 $R = S \,/\, I_P^{\mathrm{AD}}$ 的弧空间的希尔伯特级数，发现它与 $(A_3,\ A_4)$ 超共形场论的指标相符。

接下来，我们可以考虑 (A_3, A_6) 理论。我们可以利用方程 (27) 中的平移来将多项式写成

$$\beta_1 x_2^6 + \beta_2 x_2^4 x_4 + \beta_3 x_3^4 + x_2^3 x_3^2 + x_2 x_3^2 x_4 + x_4^3\,. \quad (30)$$

事实证明，上同调关系存在时，解有多个分支。然而，我们发现存在一个唯一的解（在平移和重新参数化意义下），其中 R 是一个完全交，其形式为

$$\beta_1 = 0\,, \quad \beta_2 = \frac{9}{2}\,, \quad \beta_3 = \frac{1}{108}\,. \quad (31)$$

这些条件定义了理想 I_P^{AD}，使得 $S \,/\, I_P^{\mathrm{AD}}$ 的弧空间的希尔伯特级数在舒尔极限下重现 (A_3, A_6) 理论的舒尔指标。

高秩情形下的计算成本更高，因为这需要计算一个大型上同调关系矩阵的行列式簇。我们在表 I 中总结了一些显式结果。

顶点算子代数与零关系

正如引言中所述，刻画四维 $\mathcal{N}=2$ 超共形场论的希格斯支和麦克唐纳指标的双滤过环，预期可从四分之一 BPS 算符的算符乘积展开中的解耦现象推导而来。在超共形场论/顶点算子代数对应 [23], 下，这种解耦关系对应于相关顶点算子代数中的一个零关系。因此，我们在公式 (21) 中提出的关于这些环的几何条件，应当能够用顶点算子代数中的零关系来诠释。本节将讨论这一联系。

对于本文所考虑的许多 Argyres–Douglas 理论，VOA 已（部分）为人所知，因此原则上我们可以理解双滤环。[3]

例如，$(n+1)$ 个应力-$\widehat{}$张量超多重态 $\mathcal{C}_{0(0,0)}$ 的 OPE 通常根据对称性原理会包含一个 $\widehat{\mathcal{C}}_{n(\frac{n}{2},\frac{n}{2})}$ 超多重态。[4]对于 (A_1, A_{2n}) Argyres–Douglas 理论，这个多重态不会出现在 OPE [6, 7] 中。用相关 VOA 的语言来说，它是 Virasoro 最小模型 $\sim M(2, 2n+3)$，其中 $\mathcal{C}_{0(0,0)}$ 多重态映射到 L_{-2} 强生成元，而 OPE 中缺少 $\mathcal{C}_{n(\frac{n}{2},\frac{n}{2})}$ 多重态则与一个零关系有关：

$$\left((L_{-2})^{n+1}+\cdots\right)\big|\Omega,c\big\rangle\,, \tag{32}$$

其中 Ω 是真空态，而 c 是中心荷。这个零关系与方程 (22) 中的环之间的联系显而易见。

对于 $k>2$，情况变得更加复杂。W-代数 $W(k,\ k+N)$ 中零向量的显式表达式通常是未知的；当 $\gcd(k,\ N)=1$ [19, 26] 时，该代数是 $(A_{k-1},\ A_{N-1})$ 对应的 VOA。

对于 $k=3$，文献 [7] 已确定了中心荷取某些值时的首要零关系。在这些情况下，存在两个强生成元 L_{-2} 和 W_{-3}。对于对应于 $(A_2,\ A_3)$ 理论的$c=-114/7$，零关系为 [7]:

$$\begin{aligned}&\left(W_{-3}L_{-2}+\cdots\right)\big|\Omega,c\big\rangle\,,\\ &\left((L_{-2})^3-\frac{39}{7}(W_{-3})^2+\cdots\right)\big|\Omega,c\big\rangle\,,\end{aligned} \tag{33}$$

其中 $|\Omega\ c\rangle$ 是真空态，而 $\cdots$ 包含涉及后裔态的项。在映射 $L_{-2}\to x_2$ 和 $W_{-3}\to x_3$ 下，我们得到表 I 中给出的理想。

对于 $N=5,\ 7$，表 I 中的理想也可由 $W(3,\ 3+N)$ 代数的零关系得到，如 [7] 所示。对于 $N>7$，相关的零关系尚未确定；因此我们猜想，表 I 中的理想再现了这些零关系。

更一般地，我们提出，$W(k,\ k+N)$ 顶点算子代数（其强生成元为 W_{-2}、W_{-3}、$\cdots$、W_{-k}）具有如下形式的零关系

$$\left(\partial_{x_d}P(x_2,\cdots,x_k)|_{x_j\to W_{-j}}+\cdots\right)\big|\Omega,c\big\rangle\,, \tag{34}$$

对于 $d=2,\ \cdots,\ k$。这里，P是一个关于 q次数为 $k+N+1$ 的多项式，使得 $\mathbb{C}[x_2,\cdots,x_k]\,/\,I_P$满足方程 (21)。也就是说，零关系中出现的数值系数由方程 (21) 中的简单几何条件确定。我们将此作为本工作的一个一般性预测。

讨论

我们已提出证据表明，对于一类特定的四维 $\mathcal{N}=2$ 超共形场论，麦克唐纳指标和希格斯支完全由一个满足极值性条件的双滤过仿射概形决定；这一条件体现为相关喷射概形中存在特定的协同子。该结果提出了一种用于识别物理理论的新几何范式。关于这种对应关系的适用范围，自然会产生两个问题：

- 双滤过仿射概形是否决定了完整的顶点算子代数，从而决定四分之一 BPS 扇区的全部共形数据?

- 这个概形是否能唯一刻画整个超共形场论？也就是说，除边缘形变和整体结构外，这个几何数据是否完全确定了四维理论？[5]

在这封信中，我们聚焦于希格斯支仅为一个点的 4d $\mathcal{N}=2$超共形场论。然而，对于具有非平凡希格斯支的Argyres–Douglas理论，也已找到满足方程(2)中提议的双滤过仿射概形 [10, 13, 27]。一个关键的未决问题是确定此处发现的极值原理是否具有普适性。我们猜想，这些更一般的概形同样由一个显式的极值原理所决定：具体而言，具有非平凡希格斯支的物理理论对应于概形模空间中的唯一奇异点，在这些点处喷射概形的拓扑发生不连续变化。验证这一点将确立“几何极值性”作为 $\mathcal{N}=2$ 超共形场论景观的一条稳健选择规则。

[3] 事实上，文献 [24]，曾猜想，对于这类 $(A_{k-1},\ A_{N-1})$ 理论，Zhu 的 C_2-代数（即 VOA 的一种截断）由一个固定次数多项式定义的雅可比代数给出。然而，文中并未给出系数。[4] 我们沿用 [25] 的记法来表示四维超共形代数的超多重态。

[5]目前尚无已知例子表明，两个不同的 $\mathcal{N}=2$ 超共形场论（除边缘形变和整体结构外）会导出相同的关联顶点算子代数。

我们感谢Tomoyuki Arakawa、Pieter Bomans、Jacques Distler、Grant Elliot、Heeyeon Kim和Lorenzo Mansi的有益讨论。C.L.与J.S.感谢德克萨斯农工大学的款待。M.J.K.得到德克萨斯农工大学提供的新教师启动研究基金的支持。C.L.感谢DESY（汉堡，德国）的支持，该机构为亥姆霍兹联合会HGF的成员；C.L.亦感谢德国研究联合会在德国卓越战略——EXC 2121“量子宇宙”——390833306以及合作研究中心——SFB 1624“高阶结构、模空间与可积性”——506632645框架下的支持。J.S.的工作得到韩国国家研究基金会（NRF）项目RS-2023-00208602与RS-2024-00405629的支持，并得到KAIST-KIAS合作项目、加州理工学院沃尔特·伯克理论物理研究所以及美国能源部（资助编号DE-SC0011632）的支持。

* monicak@tamu.edu
† craig.lawrie1729@gmail.com ‡ jaewon.song@kaist.ac.kr

[1] P. C. Argyres 和 M. R. Douglas, 《SU 3 **448**, ( ) 超对称规范理论中的新现象》, Nucl. Phys. B ( ), arXiv:hep-th/。[2] D. Gaiotto, 《 $\mathcal{N}$ = 2 对偶》, JHEP 08, 034, arXiv:0904.2715 [hep-th]。[3] A. A. Belavin、A. M. Polyakov 和 A. B. Zamolodchikov, 《二维量子场论中的无限维共形对称性》, Nucl. Phys. B 241, 333 (1984)。[4] S. El-Showk、M. F. Paulos、D. Poland、S. Rychkov、D. Simmons-Duffin 和 A. Vichi, 《利用共形自举求解三维伊辛模型 II：c 极小化与精确临界指数》, J. Stat. Phys. 157, 869 (2014), arXiv:1403.4545 [hep-th]。[5] C.-H. Chang、V. Dommes、R. S. Erramilli、A. Homrich、P. Kravchuk、A. Liu、M. S. Mitchell、D. Poland 和 D. Simmons-Duffin, 《三维伊辛模型应力张量的自举》, JHEP 03, 136, arXiv:2411.15300 [hep-th]。[6] P. Liendo、I. Ramirez 和 J. Seo, 《 $\mathcal{N}$ = 2 超共形理论中的应力张量算符乘积展开》, JHEP 02, 019, arXiv:1509.00033 [hep-th]。[7] P. Agarwal、S. Lee 和 J. Song, 《四维 $\mathcal{N}$ = 2 超共形场论中消失的算符乘积展开系数》, JHEP 06, 102, arXiv:1812.04743 [hep-th]。[8] J. Song, 《秩一四维/五维超共形场论中消失的短多重态》, JHEP 03, 211, arXiv:2109.05588 [hep-th]。[9] S. El-Showk 和 M. F. Paulos, 《使用极值泛函方法自举共形场论》, Phys. Rev. Lett. **111**, 241601 2013 1211 2810 ( ), [ ] arXiv: . hep-th。[10] M. J. Kang、C. Lawrie 和 J. Song, 《来自一点的指标》, (2025), arXiv:2507.12510 [hep-th]。[11] A. Gadde、L. Rastelli、S. S. Razamat 和 W. Yan, 《由 q 变形二维杨–米尔斯理论得到的四维超共形指标》, Phys. Rev. Lett. 106, 241602 (2011), arXiv:1104.3850 [hep-th]。[12] A. Gadde、L. Rastelli、S. S. Razamat 和 W. Yan, 《规范理论与麦克唐纳多项式》, Commun. Math. Phys. 319, 147 (2013), arXiv:1110.3740 [hep-th]。[13] G. Andrews、A. Banerjee、C. Bhargava、R. K. Singh 和 R. Tao, 《阿盖尔斯–道格拉斯理论、麦克唐纳指标与朱代数的弧空间》, (2025 2507 06294), [ ] arXiv: . hep-th . [14] C. Bhargava、M. Buican 和 H. Jiang, 《从强耦合到自由场的精确算符映射：超越 Seiberg–Witten 理论》, Phys. Rev. Lett. 132, 031602 (2024), arXiv:2306.05507 [hep-th]。[15] P. C. Argyres、M. R. Plesser、N. Seiberg 和 E. Witten, 《四维新的超共形场论》, Nucl. Phys. B 461, 71 (1996), arXiv:hep-th/9511154。[16] D. Xie, 《一般阿盖尔斯–道格拉斯理论》, JHEP 01, 100, arXiv:1204.2270 [hep-th]。[17] 小约翰·F·纳什, 《奇点的弧结构》(1995), 第 31–38 页 (1996), 载于《庆祝小约翰·F·纳什》。[18] T. Arakawa 和 A. Moreau, 《弧空间与顶点代数——专著》(2024)。[19] C. Cordova 和 S.-H. Shao, 《舒尔指标、BPS 粒子与阿盖尔斯–道格拉斯理论》, JHEP 01, 040, arXiv:1506.00265 [hep-th]。[20] J. Song, 《由二维拓扑量子场论得到广义阿盖尔斯–道格拉斯理论的超共形指标》, JHEP 02, 045, arXiv:1509.06730 [hep-th]。[21] J. Song、D. Xie 和 W. Yan, 《来自 M 5 **12**, -膜的阿盖尔斯–道格拉斯理论顶点算子代数》, JHEP arXiv: . hep-th . 123, 1706 01607 [ ] [22] Y. Bai、E. Gorsky 和 O. Kivinen, 《二次理想与 Rogers–Ramanujan递推》, The Ramanujan Journal 52, 67 (2020)。[23] C. Beem、M. Lemos、P. Liendo、W. Peelaers、L. Rastelli 和 B. C. van Rees, 《四维无穷手征对称性》, Commun. Math. Phys. 336, 1359 (2015), arXiv:1312.5344 [hep-th]。[24] D. Xie 和 W. Yan, 《阿盖尔斯–道格拉斯理论的舒尔扇区与 W-代数》, SciPost Phys. 10, 080 (2021), arXiv:1904.09094 [hep-th]。[25] F. A. Dolan 和 H. Osborn, 《关于四维超共形对称性中的短表示与半短表示》, Annals Phys. 307, 41 (2003), arXiv:hep-th/0209056。[26] M. Buican 和 T. Nishinaka, 《关于阿盖尔斯–道格拉斯理论的超共形指标》, J. Phys. A 49, 015401 (2016), arXiv:1505.05884 [hep-th]。[27] M. J. Kang、C. Lawrie 和 J. Song, *in preparation* (2026)。[28] E. W. Mayr 和 A. R. Meyer, 《交换半群与多项式理想的字问题复杂度》, Adv. in Math. 46, 305 (1982)。[29] O. Foda 和 R.-D. Zhu, 《麦克唐纳指标的闭式费米子表达式》, JHEP 06, 157, arXiv:1912.01896 [hep-th]。[30] H. Kim、H. Kim 和 J. Song, 《来自三维拓扑量子场论的麦克唐纳指标》(2025), arXiv:2511.11186 [hep-th]。

附录：作为希尔伯特级数的麦克唐纳指标

本附录汇总了方程 (2) 右侧各种希尔伯特级数展开式。我们列出的希尔伯特级数阶数由 Macaulay2 确定，在现代笔记本电脑上单核运行时间约为一分钟。[6] 此处列出与$(A_2,\ A_{N-1})$ 理论相关的希尔伯特级数，适用于$N=4$、5、7、8、10、11。各个情形中的双滤过环均列于表 I。

我们从 (A_2, A_3) 理论开始，其弧空间的希尔伯特级数为：

$$\begin{aligned}\mathrm{HS}_{q,q,T}(\mathrm{gr}(J_\infty R)) &= 1+q^2T+q^3(T^2+T)+q^4(2T^2+T)+q^5(2T^2+T)+q^6(2T^3+3T^2+T)\\ &+q^7(3T^3+3T^2+T)+q^8(T^4+5T^3+4T^2+T)+q^9(2T^4+7T^3+4T^2+T)\\ &+q^{10}(5T^4+9T^3+5T^2+T)+q^{11}(8T^4+11T^3+5T^2+T)\\ &+q^{12}(2T^5+13T^4+14T^3+6T^2+T)+q^{13}(4T^5+17T^4+16T^3+6T^2+T)+\cdots .\end{aligned} \tag{35}$$

这一计算直到并包括 q^{13} 项，都可以通过截断至 $J_{11}R$ 来确定。(A_2, A_3) 的麦克唐纳指标已从 W_3-代数的角度在 [7, 29] 中确定。另见 [30]。其闭式表达式为

$$I_{\mathrm{Mac}}(q,T)=\sum_{n_1,n_2,n_3,n_4\geq 0}\frac{q^{(n_1+n_2+n_3)^2+(n_2+n_3)^2+n_3^2+n_4^2+(n_1+2n_2+3n_3)n_4+n_1+2n_2+3n_3+2n_4}}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}(q)_{n_3}(q)_{n_4}}T^{n_1+2n_2+3n_3+2n_4}. \tag{36}$$

我们可以看到，该表达式的幂级数展开与方程（35）中给出的希尔伯特级数相匹配。我们将证明表 I 中环的弧空间的希尔伯特级数的闭式表达式如方程（36）所示，留作一个开放问题。

对于 (A_2, A_4) 理论，我们考虑截断至 $J_{11}R$，以得到展开式：

$$\begin{aligned}\mathrm{HS}_{q,q,T}(\mathrm{gr}(J_\infty R)) &= 1+q^2T+q^3(T^2+T)+q^4(2T^2+T)+q^5(T^3+2T^2+T)+q^6(3T^3+3T^2+T)\\ &+q^7(4T^3+3T^2+T)+q^8(3T^4+6T^3+4T^2+T)+q^9(5T^4+8T^3+4T^2+T)\\ &+q^{10}(T^5+9T^4+10T^3+5T^2+T)+q^{11}(3T^5+13T^4+12T^3+5T^2+T)\\ &+q^{12}(8T^5+19T^4+15T^3+6T^2+T)+q^{13}(14T^5+24T^4+17T^3+6T^2+T)+\cdots .\end{aligned} \tag{37}$$

这与 W_3 代数在 $c=-23$ 处的精细特征表达式相匹配，该表达式在 [7] 中给出，直到并包括 q^9 项。

对于 $(A_2,\ A_6)$，我们使用 $J_{13}R$ 进行计算，得到希尔伯特级数的展开如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{HS}_{q,q,T}(\mathrm{gr}(J_\infty R)) &= 1+q^2T+q^3(T^2+T)+q^4(2T^2+T)+q^5(T^3+2T^2+T)+q^6(T^4+3T^3+3T^2+T)\\ &+q^7(2T^4+4T^3+3T^2+T)+q^8(5T^4+6T^3+4T^2+T)+q^9(2T^5+7T^4+8T^3+4T^2+T)\\ &+q^{10}(6T^5+11T^4+10T^3+5T^2+T)+q^{11}(T^6+10T^5+15T^4+12T^3+5T^2+T)\\ &+q^{12}(6T^6+17T^5+21T^4+15T^3+6T^2+T)+q^{13}(11T^6+25T^5+26T^4+17T^3+6T^2+T)\\ &+q^{14}(2T^7+21T^6+36T^5+34T^4+20T^3+7T^2+T)\\ &+q^{15}(7T^7+34T^6+49T^5+41T^4+23T^3+7T^2+T)+\cdots .\end{aligned} \tag{38}$$

再次，这与 W_3 代数在 $c=-186/5$ 处的精细特征表达式一致，该表达式在 [7] 中给出，最高到 q^9 项（含该项）。

[6] 由于确定 Gr¨obner 基 [28]，涉及双指数复杂度，计算下一个阶的希尔伯特级数所需时间会迅速增长。不过，我们使用的算法尚未优化，因此仍有很大的提速空间。

接下来，我们转向 (A_2, A_7) 超共形场论。在这种情况下，我们使用 $J_{14}R$，并得到以下希尔伯特级数展开:

$$\begin{aligned}\mathrm{HS}_{q,q,T}(\mathrm{gr}(J_\infty R)) &= 1 + q^2T + q^3(T^2+T) + q^4(2T^2+T) + q^5(T^3+2T^2+T) + q^6(T^4+3T^3+3T^2+T)\\ &+ q^7(2T^4+4T^3+3T^2+T) + q^8(T^5+5T^4+6T^3+4T^2+T) + q^9(3T^5+7T^4+8T^3+4T^2+T)\\ &+ q^{10}(7T^5+11T^4+10T^3+5T^2+T) + q^{11}(3T^6+11T^5+15T^4+12T^3+5T^2+T)\\ &+ q^{12}(9T^6+18T^5+21T^4+15T^3+6T^2+T) + q^{13}(T^7+15T^6+26T^5+26T^4+17T^3+6T^2+T)\\ &+ q^{14}(7T^7+26T^6+37T^5+34T^4+20T^3+7T^2+T)\\ &+ q^{15}(15T^7+40T^6+50T^5+41T^4+23T^3+7T^2+T)\\ &+ q^{16}(3T^8+29T^7+59T^6+66T^5+51T^4+26T^3+8T^2+T) + \cdots .\end{aligned} \tag{39}$$

[7],中的麦克唐纳指标（给出到并包括 q^9 项）与该希尔伯特级数相符。

最后，我们转而讨论 (A_2, A_9) 和 (A_2, A_{10}) 理论。对于这些理论，由于相关顶点算子代数中的零关系难以推导，麦克唐纳指标尚未被明确写出。对于这些情形，我们比较了希尔伯特级数在 $T \to 1$ 极限下的结果与舒尔指标。对于 (A_2, A_9)，弧空间的希尔伯特级数为

$$\begin{aligned}\mathrm{HS}_{q,q,T}(\mathrm{gr}(J_\infty(R))) &= 1 + q^2T + q^3(T^2+T) + q^4(2T^2+T) + q^5(T^3+2T^2+T) + q^6(T^4+3T^3+3T^2+T)\\ &+ q^7(2T^4+4T^3+3T^2+T) + q^8(T^5+5T^4+6T^3+4T^2+T) + q^9(T^6+3T^5+7T^4+8T^3+4T^2+T)\\ &+ q^{10}(2T^6+7T^5+11T^4+10T^3+5T^2+T) + q^{11}(5T^6+11T^5+15T^4+12T^3+5T^2+T)\\ &+ q^{12}(2T^7+11T^6+18T^5+21T^4+15T^3+6T^2+T) + q^{13}(6T^7+17T^6+26T^5+26T^4+17T^3+6T^2+T)\\ &+ q^{14}(T^8+14T^7+28T^6+37T^5+34T^4+20T^3+7T^2+T)\\ &+ q^{15}(6T^8+24T^7+42T^6+50T^5+41T^4+23T^3+7T^2+T)\\ &+ q^{16}(16T^8+40T^7+61T^6+66T^5+51T^4+26T^3+8T^2+T)\\ &+ q^{17}(2T^9+29T^8+62T^7+84T^6+84T^5+60T^4+29T^3+8T^2+T)\\ &+ q^{18}(12T^9+52T^8+93T^7+116T^6+107T^5+72T^4+33T^3+9T^2+T) + \cdots .\end{aligned} \tag{40}$$

由于 [10], 中尚未从弧空间希尔伯特级数的角度研究 (A_2, A_9) 的舒尔指标，我们在此写出希尔伯特级数舒尔极限的前几个系数。它们为

$$(1, 0, 1, 2, 3, 4, 8, 10, 17, 24, 36, 49, 74, 99, 142, 194, 269, 359, 495, 654)\,. \tag{41}$$

正如我们的讨论所预期的，这些系数与 (A_2, A_9) 的舒尔指标闭式表达式一致，直到并包括 q^{19} 项。

最后，对于 $(A_2,\ A_{10})$，弧空间的相关希尔伯特级数为

$$\begin{aligned}\mathrm{HS}_{q,q,T}(\mathrm{gr}(J_\infty(R))) &= 1 + q^2T + q^3(T^2+T) + q^4(2T^2+T) + q^5(T^3+2T^2+T) + q^6(T^4+3T^3+3T^2+T)\\ &+ q^7(2T^4+4T^3+3T^2+T) + q^8(T^5+5T^4+6T^3+4T^2+T) + q^9(T^6+3T^5+7T^4+8T^3+4T^2+T)\\ &+ q^{10}(2T^6+7T^5+11T^4+10T^3+5T^2+T) + q^{11}(T^7+5T^6+11T^5+15T^4+12T^3+5T^2+T)\\ &+ q^{12}(T^8+2T^7+11T^6+18T^5+21T^4+15T^3+6T^2+T)\\ &+ q^{13}(T^8+6T^7+17T^6+26T^5+26T^4+17T^3+6T^2+T)\\ &+ q^{14}(T^9+3T^8+14T^7+28T^6+37T^5+34T^4+20T^3+7T^2+T)\\ &+ q^{15}(T^{10}+2T^9+7T^8+24T^7+42T^6+50T^5+41T^4+23T^3+7T^2+T)\\ &+ q^{16}(T^{10}+4T^9+17T^8+40T^7+61T^6+66T^5+51T^4+26T^3+8T^2+T)\\ &+ q^{17}(T^{11}+2T^{10}+8T^9+30T^8+62T^7+84T^6+84T^5+60T^4+29T^3+8T^2+T)\\ &+ q^{18}(T^{12}+2T^{11}+5T^{10}+17T^9+53T^8+93T^7+116T^6+107T^5+72T^4+33T^3+9T^2+T)\\ &+ q^{19}(T^{12}+4T^{11}+10T^{10}+32T^9+84T^8+132T^7+151T^6+132T^5+83T^4+36T^3+9T^2+T) + \cdots ,\end{aligned} \tag{42}$$

我们提出，该级数与 $(A_2,\ A_{10})$ 阿盖尔斯–道格拉斯超共形场论的麦克唐纳指标的低阶项相同。此外，我们还列出希尔伯特级数在舒尔极限 $T \to 1$ 下的首批系数（截至并包括 q^{20}）：

$$(1, 0, 1, 2, 3, 4, 8, 10, 17, 24, 36, 50, 75, 100, 145, 198, 275, 370, 510, 676, 916)\,. \tag{43}$$

这与 已知的 $(A_2,\ A_{10})$ 舒尔指标闭式表达式的展开相符 .