arXiv:2602.04978v1 [math.NT] 4 Feb 2026

整体霍奇$_z$-进理论中的曲线与向量丛

SIYAN DANIEL LI-HUERTA

Abstract. 我们研究函数域 F上 Fargues–Fontaine 曲线的整体类比。我们证明了关于其 G-丛模空间 Bun$_{G,F}$的若干基础结果，它是全局 Kottwitz 集 $B(F,G)$的几何化。例如，Bun$_{G,F}$ 在函数域上扮演 Igusa 叠的角色。我们利用 Bun$_{G,F}$，借助范畴化局部 Langlands，重新表述 F 上 G 的全局 Langlands 猜想，从而细化 Arinkin–Gaitsgory–Kazhdan–Raskin–Rozenblyum–Varshavsky 与 Zhu 的猜想。最后，我们在 G 为交换的情形下验证了这一猜想。在此过程中，我们证明了亚完美空间上光滑真概形的 GAGA 定理，该结果本身亦具有独立意义。

Contents

引言 1
1. 全局 Hartl–Pink 曲线上的向量丛 8 2.G-丛 16 3. Shtuka 与纤维积猜想 21 4. 几何推论 26 5. 层论推论 33 6. 与朗兹对偶的关系 41 附录 A. 次完美胚空间上的 GAGA 48 附录 B. ℓ-adic 实现中的 Berkovich动机 60 附录 C. 全局刚性内形式，作者：Peter Dillery 66 参考文献 71

Introduction

本文标题旨在向 Fargues–Fontaine[24] 的奠基性工作致敬。他们从一个剩余域为 $\mathbb{F}_q$ 的非阿基米德局部域 F_v （以及一个在 $\mathbb{F}_q$ 上的辅助代数闭非阿基米德域 K ）出发，构造了一个具有非凡性质的 adic 空间$X_{F_v,\ K}$。自被引入以来，*Fargues– Fontaine* 曲线 $X_{F_v,\ K}$ 一直在F_v上的算术几何中发挥基础性作用。例如，Fargues–Scholze [25] 的工作表明，其 G-丛的模空间 Bun$_{G,\ F_v}$ 对于 F_v上的 G 的朗兹对应而言至关重要。

当 F_v 是函数域 $\mathbb{F}_q((z))$ 时，Fargues–Fontaine 曲线早已出现在 Hartl–Pink 的工作中 [37], ，因此我们也称它为 *Hartl–Pink* 曲线。它可以描述如下。积 Spa $F_v \times$ Spa K 在 $\mathbb{F}_q$ 上作为 adic 空间存在（事实上，它同构于 K 上的去心开单位圆盘），而绝对

q-Frobenius 自同构 Frob_K 在 K 上自由且完全不连续地作用于 $\mathrm{Spa}\, F_v \times \mathrm{Spa}\, K$。因此我们可以构造商 adic 空间

$$X_{F_v,K} \coloneqq (\mathrm{Spa}\, F_v \times \mathrm{Spa}\, K)/\,\mathrm{Frob}_K\,. \tag{†}$$

本文的目标是研究上述构造的一个整体类似物。

G全局 Hartl–Pink 曲线上的丛。令 F 为常数域为 $\mathbb{F}_q$的全局函数域。通过将概形视为 adic 空间，可以尝试通过直接复制（†）并试图构造一个全局 *Hartl–Pink* 曲线来定义

$$\text{“}(\mathrm{Spec}\, F \times \mathrm{Spa}\, K)/\,\mathrm{Frob}_K\text{”}. \tag{‡}$$

然而，会出现两个障碍：
1) 目前尚不清楚如何以良好的方式解释“$\mathrm{Spec}\, F \times \mathrm{Spa}\, K$”。2) 在对“$\mathrm{Spec}\, F \times \mathrm{Spa}\, K$”的任何合理解释中，$\mathrm{Frob}_K$ 将不再自由且全不连续地作用。

我们主要关注（‡）上的 G-丛，因此可以通过下降来规避 2)。要规避 1)，令 C 表示与 F 相关联的 $\mathbb{F}_q$ 上的几何连通光滑完备曲线。于是 $\mathrm{Spec}\ F = \varprojlim_U U$，其中 U 遍历 C 的稠密开子概形，因此从形式上我们预期

$$\text{“}\mathrm{Spec}\, F \times \mathrm{Spa}\, K\text{”} = \text{“}\varprojlim_U U \times \mathrm{Spa}\, K\text{”}.$$

现在，$U \times \mathrm{Spa}\, K$ 确实有了良好的诠释：这个积作为一个 adic 空间存在，而且实际上同构于 K 上 U 的解析化 U_K^{an}。此外，这种诠释在族中也适用良好，由此得到如下结果：

定义。设 G 是定义在 F 上的连通分裂[1] 约化群。对于所有定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的仿射刚性完美空间 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$，
a) 记 $\mathrm{Bun}_{G,U}(S)$ 为 U_S^{an} 上的 G-丛 $\mathscr{G}$ 所构成的群胚，并配备一个同构 $\phi\colon \mathscr{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frob}_S^* \mathscr{G}$。b) 记 $\mathrm{Bun}_{G,F}(S)$ 为群胚 $\varinjlim_U \mathrm{Bun}_{G,U}(S)$。

注。
1) 可以从 $\mathrm{Bun}_{G,F}$ 恢复 $\mathrm{Bun}_{G,U}$；见引理 2.6。因此我们将交替使用 $\mathrm{Bun}_{G,U}$ 和 $\mathrm{Bun}_{G,F}$。2) 有趣的是，虽然我们并未定义全局 *Hartl–Pink* 曲线，但仍然可以定义其 G-丛的模空间 $\mathrm{Bun}_{G,F}$。这让人想起局部 Hartl–Pink 曲线$X_{F_v,K}$ 的情形，它们依赖于辅助对象 K。

Bun 的几何$_{G,\ F}$。我们从 $\mathrm{Bun}_{G,\ U}$的以下基本性质开始。

定理 A。$\mathrm{Bun}_{G,\ U}$ 是 $\mathbb{F}_q$上的一个小型 *Artin v*-栈。它在$\overline{\ }\mathbb{F}_q$上是 ℓ-上同调光滑的，并且其带有 $\overline{\mathbb{F}}_\ell$系数的对偶化复形同构于 $\mathbb{F}_\ell$。

定理 A 与 Fargues–Scholze [25, 定理 IV.1。19]以及 Hamann– Imai [34, 命题 3。18] 在局部情形下的结果相呼应。

为了陈述下一个定理，我们先介绍局部化映射，它在本文中始终发挥着重要作用。记 Z 为 $C \smallsetminus U$ 的闭补集。

[1]在引言中，为了简便起见，我们处理分裂的 G。然而，对于 F上的一般连通约化群 G，一切结论同样成立；在本文正文中，我们将在这一一般性下开展工作。

对于 Z 中的所有 z，存在一个自然映射 Spa $F_z \to U$，因此沿着这些映射限制 G-丛，并利用表示式（†），我们得到一个 v-叠映射

$$\mathrm{loc}_Z : \mathrm{Bun}_{G,U} \to \prod_{z\in Z} \mathrm{Bun}_{G,F_z}.$$

回顾一下，局部模空间 $\mathrm{Bun}_{G,\,F_z}$ 有一个开子栈 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,\,F_z}$ [25, 定理 III.4.5], ，它是曲线上相应 G-丛半稳定的轨迹 $X_{F_z,\,K}$。通过取其在 loc_Z 下的原像，我们定义一个全局半稳定轨迹$\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,\,U}$。虽然 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,\,U}$是根据其局部对应物 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,\,F_z}$定义的，但我们证明它具有以下内在描述。

定理 B。 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,\,F}$ 是$\mathrm{Bun}_{G,\,F}$的一个开子栈，并且有一个同构

$$\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,F} \cong \coprod_{b\in B(F,G)_{\mathrm{basic}}} */\underline{G_b(F)},$$

其中 $B(F,G)$ 表示全局 Kottwitz 集 [49]， $B(F,G)_{\mathrm{basic}}$ 表示其基本元素子集，而 G_b 是与 b相关联的 G 的内扭曲。

定理 B 对应于 Fargues–Scholze [25, 定理 III.4.5] 在局部情形中的一个结果。这是这样一种思想的一种体现：$\mathrm{Bun}_{G,\,F_z}$ 是局部 Kottwitz 集 $B(F_z,\ G)$ 的几何化，但这种体现还有其他形式。例如，Ansch¨utz [3, 定理 10] 证明，$\mathrm{Bun}_{G,\,F_z}|$ 的底层拓扑空间 $|$与 $B(F_z,\ G)$ 自然双射。

同样，我们将 $\mathrm{Bun}_{G,\,F}$ 视为全局 Kottwitz 集的几何化。不过，出于下一小节中解释的原因，我们不 认为一般情况下 $|\mathrm{Bun}_{G,\,F}|$ 与 $B(F,\ G)$ 之间存在自然双射。尽管如此，我们仍证明了 $\mathrm{Bun}_{G,\,F}$的 $\mathbb{F}_q$-点的如下描述。

定理 C。 $\mathrm{Bun}_{G,\,F}(\mathbb{F}_q)$ 自然等价于如下群胚商

$$G(F\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}}_q)/G(F\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}}_q),$$

其作用由$\mathrm{Frob}_{\mathbb{F}_q}$-共轭给出。因此，$\mathrm{Bun}_{G,F}(\mathbb{F}_q)$ 中的同构类集合自然地与 $B(F,G)$ 构成双射。

定理 C 是对 Ansch¨utz [4, 定理 5.3] 在局部情形下一个结果的映照。实际上，我们证明了定理 C 的一个推广，它完整描述了 $\mathrm{Bun}_{G,F}$的约化；参见定理 2.10。更一般的定理 2.10 是对 Gleason–Ivanov–Zillinger [32, 定理 7.14.(1)] 在局部情形下一个结果的映照。

与 shtuka 的关系。 事实证明，$\mathrm{Bun}_{G,U}$ 在函数域上扮演*Igusa* 叠[72]的角色。Igusa 叠刻画了 Shimura 簇的几何，因此我们回顾一下后者的函数域类比。设 I 为一个有限集，并且$\widehat{\ }$对所有 i属于 I，令 V_i 为朗兰兹对偶群 G的一个表示。记 V为 $\widehat{G}^I$的表示 $\boxtimes_{i\in I}V_i$。与 I 和 V 相关联，有一个由 V [69] 界定的全局 *shtuka* 模空间 $\mathrm{Sht}^I_{G,V}$ ；它是一个分离且局部有限型的 Deligne–Mumford 叠，定义在 C^I上。

也存在 $\mathrm{Sht}^I_{G,V}$ 的一个局部版本。设 $\{I_z\}_{z\in Z}$ 为 I 的一个划分，并对 Z 中的所有 z，记 V_z 为 $\widehat{G}^{I_z}$的表示 $\boxtimes_{i\in I_z}V_i$。与 I_z 和 V_z 相关联，存在由 V_z [67] 界定的局部 *Shtuka* 的模空间 $\mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,V_z}$，它是 $(\mathrm{Spd}\ \mathcal{O}_z)^{I_z}$ 上的一个小 v-叠。

我们证明 Scholze 的 纤维积猜想 [72, 猜想 1.1], 的如下函数域类比，这是 Igusa 叠的定义性特征：

定理 D. 存在一个小 v-叠之间的自然笛卡尔方

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Sht}^{I}_{G,V})^{\Diamond}|_{\prod_{z\in Z}(\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_z)^{I_z}_{\overline{\mathbb{F}}_q}} & \xrightarrow{\pi_{\mathrm{HT}}} & \prod_{z\in Z}\left(\mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,V_z}\right)_{\overline{\mathbb{F}}_q} \\ \downarrow & & \downarrow \mathrm{BL} \\ \mathrm{Bun}_{G,U} & \xrightarrow{\mathrm{loc}_Z} & \prod_{z\in Z}\mathrm{Bun}_{G,F_z}, \end{array}$$

其中，BL 表示Beauville–Laszlo映射 $(\mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,\,V_z})^{\mathbb{F}_q}\to\mathrm{Bun}_{G,\,F_z}$[25,p.–98], 的积，且 π_{HT} 是霍奇–泰特周期映射的一个函数域类比。

实际上，我们证明了定理 D 的一个推广，允许层结构；见定理 3.10。此前，Hartl–Viehmann [38] 研究了函数域类比的 Rapoport–Zink 空间的周期映射 π_{HT} 的一个版本。

注。

1) 定理 D 表明 $\mathrm{Bun}_{G,\,U}$ 编码了*Igusa*簇的函数域类比；见命题 4.10。由于与 Kottwitz 集中的非基本元素相关联的 Igusa 簇一般可能具有正维数，这说明我们为何不预期 $|\mathrm{Bun}_{G,\,F}|$ 与 $B(F,\ G)$ 之间存在自然双射。

2) Gleason–Ivanov–Zillinger [32, 定理 7.14.(2)] 证明了 $\mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,V_z}$ 的 $\mathbb{F}_q$-点的一种自然描述。将这一描述与定理 C 以及前述 Ansch¨utz [4, 定理 5.3], 的结果结合起来，定理 D 立即推出：对于具有任意（尤其是相交）腿的全局 shtuka 模空间，*Langlands–Rapoport*猜想 成立。这推广了 Arasteh Rad–Hartl [6, 定理 3.21], 的结果；他们证明了腿两两不相交时的情形。

与朗兰兹的关系。 在局部情形中，Bun_{G,F_z} 在 F_z 上的 G 的朗兰兹对应中发挥着核心作用。例如，设 Λ 是 $\mathbb{Q}_\ell$、$\mathbb{Z}_\ell$ 或 $\mathbb{F}_\ell$ 之一，并将 $D(\mathrm{Bun}_{G,F_z},\Lambda)$ 记为相应的 $\overline{\ell}$-étale 层的导出范畴。与 I_z 和 V_z 相关联，Fargues–Scholze [25] 构造了一个*Hecke*算子

$$T_{V_z}: D(\mathrm{Bun}_{G,F_z},\Lambda)\to D(\mathrm{Bun}_{G,F_z},\Lambda),$$

他们用其定义了 G 上 F_z朗兰兹对应的自守到Galois方向，直到半单化为止。

利用定理 D，我们证明对该对象应用 Hecke算子

$$\mathrm{loc}_{Z,!}\Lambda\in D\left(\prod_{z\in Z}\mathrm{Bun}_{G,F_z},\Lambda\right)=\bigotimes_{z\in Z}D(\mathrm{Bun}_{G,F_z},\Lambda)$$

可以恢复无限层级上全局 shtuka 的模空间的上同调。记

$$\pi_{\infty Z}:(\mathrm{Sht}^{I}_{G,V,\infty Z})_{\overline{\mathbb{F}}_q}\to U^{I}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$$

对于在 Z 处具有无穷水平的全局 shtuka 的模空间，它带有 $G(F_Z):=\prod_{z\in Z}G(F_z)$ 的作用，并记 $\mathcal{S}_V$ 为其交叉上同调层。Eteve–Gaitsgory–Genestier–Lafforgue 即将发表的工作将赋予$\pi_{\infty Z,!}\mathcal{S}_V$ 在导出范畴层面上韦伊群 W^I_U 的表示结构。

[2]严格来说，当 $\Lambda\neq\mathbb{F}_\ell$ 我们使用（动机层的）基变换时 [65, 66]；见 5.1。

定理 E. 在限制到 $\prod_{z\in Z} W_{F_z}^{I_z}$ 之后，我们有一个自然同构

$$\pi_{\infty Z,!}\mathcal{S}_V \cong i_1^*(T_V(\mathrm{loc}_{Z,!}\Lambda)),$$

其中 i_1 表示自然开嵌入 $*/G(F_z)\hookrightarrow \mathrm{Bun}_{G,F_z}$的积，而 T_V是 $\bigotimes_{z\in Z} D(\mathrm{Bun}_{G,F_z},\Lambda)$ 的自函子 $\bigotimes_{z\in Z} T_{V_z}$。

注。
1）若仅关心取上同调群之后的定理 E，则只需使用 Xue [71] 的工作，而无需使用 Eteve–Gaitsgory– Genestier–Lafforgue 即将发表的工作。例如，下一条注即属此种情形。2）可以利用定理 E 恢复[54]中的全部表示论结果；参见注 5.13.2）。

鉴于定理 E，自然会问应如何在朗兰兹对应的伽罗瓦侧解释 $\mathrm{loc}_{Z,!}\Lambda$。记 $\mathrm{LS}_{\widehat{G},F_z}$ 为在 Λ [16, 25, 73] 上的 W_{F_z} 的连续$^\wedge G$值表示的模空间，它是 Λ 上的有限型代数栈。当 Λ 中 $\pi_0(Z(G)_F)$ 的阶可逆时，Fargues–Scholze[25, 猜想 X.3.5] 猜想存在范畴的典范等价

$$\mathbb{L}_{\psi_z} : D(\mathrm{Bun}_{G,F_z},\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}\, D^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}_{\widehat{G},F_z})_{\mathrm{Nilp}},$$

其中 $\mathrm{Ind}\ D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}_{\widehat{G},F_z})_{\mathrm{Nilp}}$ 是 $\mathrm{LS}_{\widehat{G},F_z}$上的具有幂零奇异支撑的归纳相干层的导出范畴，并且 $\mathbb{L}_{\psi_z}$ 取决于 G 的一个极大幂零子群 N以及一个一般连续特征标 ψ_z： $N(F_z)\to\Lambda^\times$。

以下猜想由 Scholze 提出。设 ψ： $N(\mathbb{A})\to\Lambda^\times$ 是一个在 $N(F)$ 上平凡的一般连续特征标，并且对所有 z属于 Z，取 $\psi_z=\psi|_{N(F_z)}$。
猜想 F. 假设 ***Fargues–Scholze*** 猜想成立，则 $\bigotimes_{z\in Z}\mathbb{L}_{\psi_z}$ 给出

$$\bigotimes_{z\in Z} D(\mathrm{Bun}_{G,F_z},\Lambda) \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{z\in Z} \mathrm{Ind}\, D^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}_{\widehat{G},F_z})_{\mathrm{Nilp}} = \mathrm{Ind}\, D^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{coh}}\big(\prod_{z\in Z}\mathrm{LS}_{\widehat{G},F_z}\big)_{\mathrm{Nilp}}.$$

在此等价下，局部化$\mathrm{loc}_{Z,!}\Lambda$对应于 限制$_{Z,*}(^{\omega_{\mathrm{LS}_{\widehat{G},U}}})$，其中 $\mathrm{LS}_{\widehat{G},U}$表示$^\wedge$在 Λ [73] 上的 W_U 的连续 G-值表示的模空间，并且

$$\mathrm{res}_Z : \mathrm{LS}_{\widehat{G},U}\to\prod_{z\in Z}\mathrm{LS}_{\widehat{G},F_z}$$

表示限制映射。

注。
1) 对于 $U=C$ 和 $\Lambda=\overline{\mathbb{Q}}_\ell$，猜想 F 可具体化为要求存在自然同构 $C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O})\ \mathbb{Q}_\ell)\cong\Gamma(\mathrm{LS}_{\widehat{G},C},{}^{\omega_{\mathrm{LS}_{\widehat{G},C}}})$; 见例 6.11。此前，Arinkin–Gaitsgory–Kazhdan–Raskin–Rozenblyum–Varshavsky [8]曾猜想这一点，而最近 Gaitsgory–Raskin [29] 证明了其弱形式。更一般地，我们利用定理 E 证明，猜想 F 蕴含 Zhu [73, 猜想 4.49] 在限制到 $\prod_{z\in Z} W_{F_z}^{I_z}$ 之后的一个猜想；见命题 6.12。

2) 鉴于前面的注，我们将猜想 F 视为允许在 Z 中的位发生分歧时，关于 G 在 F 上的 朗兰兹猜想。这实现了 Fargues–Scholze [26, §7] 的一项建议：全局 Langlands 猜想应当研究一种对象，它编码了 G_b 上的自守形式，适用于 B 中的所有 b （F， G）。

在数域的情形下，Fargues [23, 节 7] 已经强调了研究类似对象 $\pi_{\mathrm{HT},\,!}\Lambda$ 的重要性，尽管出现在 B 中的 b （$\mathbb{Q}$，G）受到更多限制。关于 $\pi_{\mathrm{HT},\,!}\underline{\Lambda}$ 的更详细研究将见于 Caraiani–Hamann–Zhang 即将发表的工作。

3）猜想 F 与将朗兰兹解释为 4维拓扑量子场论的同构这一观点非常契合。特别是，它与近期将相对朗兰兹解释为边界理论 [9]的识别这一观点非常契合；我们将在未来的工作中对此进行研究。

4）关于适用于全局 *Kaletha* 集 [20] 而非 $B(F,\ G)$ 的 $\mathrm{Bun}_{G,\,F}$ 版本，请参见由 Peter Dillery 撰写的附录 C。该版本建立在 Fargues 的工作之上；Fargues [22]将 $\mathrm{Bun}_{G,\,F_z}$ 调整为适用于局部 *Kaletha* 集 [19]。

最后，我们证明交换情形下的猜想 F：

定理 G。 当 G 为一个（不一定分裂的）环面时，猜想 *F* 成立。

证明概要。 我们从定理 A 的一部分开始。我们证明 $\mathrm{Bun}_{G,\,U}$ 和 $\mathrm{Bun}_{G,\,F}$ 是小 v-叠：在 U 上局部选择一个 Frobenius分裂，并分析 U_S^{an}的仿射刚性空间图表，从而将问题归结为 Scholze–Weinstein [67, 引理17.1.8]关于完美胚空间上向量丛的 v-下降结果。

接下来，我们转向定理 D。$(\mathrm{Sht}^{I}_{G,\,V})^{\Diamond}$ 的 S-点涉及代数曲线 C_R 上的 G-丛，而通过在解析拓扑中进行粘合，可以证明定理 D 中纤维积的S-点涉及解析化C_S^{an}上的 G-丛。为协调这两者，我们在附录 A 中证明以下 GAGA 结果：

定理 H。 设 $S=\mathrm{Spa}(R,R^+)$ 是一个亚完美拟完美空间，且 X 是一个定义在 R 上的光滑真概形。那么解析化函子

$$\{vector\ bundles\ on\ X\}\to\{vector\ bundles\ on\ X_S^{\mathrm{an}}\}$$

是范畴等价。

注。 在本文定稿期间，Wang [70, 定理 4.3.1] 沿着非常相似的思路独立证明了定理 H；显然，这一结果本身也有独立的意义。例如，作为一项应用，我们证明 Higgs丛的代数栈与其解析化相一致，从而回答了 Heuer–Xu [40,注 8.1.2]提出的问题；参见定理 A.20。Wang 也独立证明了这一点。

定理 H 提供了大量控制。除了证明定理 D 之外，我们还用它如下证明定理 C。$\mathrm{Bun}_{G,U}$ 的一个 $\mathbb{F}_q$-点涉及 $U^{\mathrm{an}}{}_{\mathrm{Spa}\,\mathbb{F}_q((t^{1/q^\infty}))}$上的一个 G-丛 $\mathscr{G}$，并配备了关于该图表的下降数据

$$U^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Spa}\,\overline{\mathbb{F}}_q((t^{1/q^\infty}))\times_{\overline{\mathbb{F}}_q}\mathrm{Spa}\,\overline{\mathbb{F}}_q((t^{1/q^\infty}))\times_{\overline{\mathbb{F}}_q}\mathrm{Spa}\,\overline{\mathbb{F}}_q((t^{1/q^\infty}))}$$
$$\rightrightarrows U^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Spa}\,\overline{\mathbb{F}}_q((t^{1/q^\infty}))\times_{\overline{\mathbb{F}}_q}\mathrm{Spa}\,\overline{\mathbb{F}}_q((t^{1/q^\infty}))}\ \rightrightarrows U^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Spa}\,\overline{\mathbb{F}}_q((t^{1/q^\infty}))}.$$

Gleason–Ivanov–Zillinger 的一个结果 [32, 定理 3.15] 表明，$\mathscr{G}$沿 $\mathrm{Spa}\,F_z\to U$ 的限制唯一地来自 F_z 上的一个 G-丛。后者全都是平凡的，因此我们可以在解析拓扑中进行粘合，并假设 $U=C$。最后，我们可以应用定理 H 和 D. Kim 的一个结果 [48, 定理 4.9] ，得出 $\mathscr{G}$唯一地来自 $C_{\mathbb{F}_q}$ 上的一个 G-丛。

现在我们转向定理 B。通过证明 pro-étale $\mathscr{O}_U$-局部系统的描述，类似于 Kedlaya–Liu 对 pro-étale$\mathbb{Q}_p$-局部系统的描述 [47, 定理 8.5。12]，我们证明 $\mathrm{Bun}_{G,\,F}$ 有一个自然的开子栈，与

—

$*/\underline{G(F)}$ 同构。从这里出发，经过扭曲并应用定理 C，我们证明 $\mathrm{Bun}_{G,\ F}$ 有一个开子栈，与定理 B 中的不交并同构。为了证明这就是整个 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,\ F}$，我们使用 Beauville–Laszlo 均匀化 [25, 命题 III.3。1] ，将 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,\ F_z}$ 中的几何点提升到 $\mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,\ V_z}$ ，其中某个 V_z。结合定理 D，可得到 $\mathrm{Sht}^{I}_{G,\ V}$的几何点；随后利用 $\mathrm{Sht}^{I}_{G,\ V}$的标准非空判据得出结论。类似地，我们利用 Beauville–Laszlo 均匀化和定理 D 提供的图表，完成定理 A 的证明。

理想情况下，定理 E 可以直接由定理 D 推出。对于$\Lambda = \mathbb{F}_\ell$，可以成功地利用 ´ 的 étale 层理论来实现这一点；但对于一般的 Λ ，则必须比较 [65] 的动机层理论与代数簇上的经典 ´étaleℓ-进层理论。我们在附录 B 中开发了一些工具，以便进行这些比较。

最后，我们利用 Langlands [52] 关于环面猜想的工作 T ，证明 $\mathrm{LS}^{L_T,\ U}$的一个显式描述，从而证明定理 G。

概要。在第 1 节中，我们研究全局 Hartl–Pink 曲线上的向量丛。在第 2 节中，我们利用 G-丛的坦纳卡描述，将第 1 节的结果转化为定理 A 的一部分、定理 B 的一部分以及定理 C。在第 3 节中，我们引入 shtuka 并证明定理 D。在第 4 节中，我们利用定理 D 完成定理 A 和定理 B 的证明，并解释其与 Igusa簇的关系。在第 5 节中，我们陈述 Eteve–Gaitsgory–Genestier–Lafforgue 的一项即将发表的结果，并证明定理 E。最后，在第 6 节中，我们讨论猜想 F 并证明定理 G。

在附录 A 中，我们证明本文中反复用到的定理 H。在附录 B 中，我们证明关于 [65, 66]，（超收敛）动机层的基本结果，这些结果将在 §5 和 §6 中使用。最后，在由 Peter Dillery 撰写的附录 C 中，我们考虑 $\mathrm{Bun}_{G,\ F}$ 的一个适用于全局 Kaletha 集的版本。

记号。 除附录 A 外，除非另有说明，所有环和代数栈均为经典的（即非导出的）。

非阿基米德域是指一个拓扑域，它关于某个秩一非阿基米德赋值完备。对于任意环同态 $A \to B$，记 $A^{\sim}$为 A在 B中的像的整闭包。对于任意概形 X 以及其上的仿射群G （定义在 X上），记 $\mathrm{Rep}_X G$ 为 G 在 X上的向量丛中的表示范畴。

我们通过全忠实函子将概形视为 adic 空间：对所有环 A，该函子将 $\mathrm{Spec}\, A$映到 $\mathrm{Spa}(A,\ \mathbb{Z}^{\sim})$，其中 A 赋予离散拓扑 [62,p。 64]。对于任意定义在 $\mathrm{Spa}\,\mathbb{Z}_p$上的 adic 空间 X ，记 $X^{\diamond}$ 为如 [67, 引理 18.11]所述的、定义在 $\mathbb{F}_p$ 上的相应小 v-层。

除非另有说明，所有积都取在 $\mathbb{F}_q$ 上。对于任意预栈 X 上的

$$\{\text{上的仿射概形 } \mathbb{F}_q\},$$

记 $\mathrm{Frob}_X\colon X \to X$ 为其绝对 q-Frobenius 自同态，并记 X^{perf} 为其极限完美化。我们的归纳概形的过渡态射要求为闭嵌入。记 Perf 为 $\mathbb{F}_p$ 上仿射完美空间的范畴；对于任意 $\mathbb{F}_q$ 上的小 v-叠 X ，记 $\mathrm{Frob}_X\colon X \to X$ 为其绝对q-Frobenius 自同态。

我们将导出范畴视为稳定的 ∞-范畴，并将导出范畴之间的所有函子视为导出函子。用 Sym 表示由可呈示的闭对称幺半稳定 ∞-范畴组成的 ∞-范畴。

对于任意环 A，用 $D(A)$ 表示 A-模的导出范畴，并用$D_{\mathrm{perf}}(A) \subseteq D(A)$ 表示完美对象构成的全子范畴。对于任意导出代数栈 X，用 $D_{\mathrm{qcoh}}(X)$ 表示其拟凝聚层的导出范畴，并用 $D_{\mathrm{perf}}(X) \subseteq D(X)$ 表示完美对象构成的全子范畴。用 X^{cl} 表示 X 的底层经典代数栈。

对于任意拓扑空间 X，按照命题 1.7] 中的方式，将其对应的凝聚集记为 X [61,。

致谢。 感谢 Peter Scholze 为本项目提出的许多宝贵建议；例如，他提出了猜想 F，以及定理 H 的证明策略。我们还要感谢 Peter Dillery，他建议应存在 (†) 的一个整体类比，在本项目早期与我们合作，并提供了附录 C。我们对 Laurent Fargues 和朱新文的学术贡献心怀感激，这一点应当显而易见。最后，感谢 Arnaud Eteve、Ian Gleason、Linus Hamann、Pol van Hoften、Alexander Petrov、Juan Esteban Rodr´ıguez Camargo、杨子全和云志伟参与有益的讨论。

在完成这项工作期间，作者获得了美国国家科学基金会资助项目 #DMS2303195 和马克斯·普朗克数学研究所的部分支持。感谢 MPIM 提供的热情接待和优良工作条件。

1. Vector bundles on the global Hartl–Pink curve

本节介绍并研究全局 Hartl–Pink 曲线上的向量丛。它们通过解析化来定义，因此我们首先从 adic 空间的角度讨论解析化。例如，我们证明解析化上的向量丛满足 v-下降。整个讨论适用于任意 $\mathbb{F}_q$上的光滑概形。

接着，我们专门讨论 U 上的光滑曲线 $\mathbb{F}_q$，这是本文关注的主要情形。我们证明了 pro-´etale $\mathcal{O}_U$-局部系统可用全局 Hartl–Pink 曲线上的向量丛来描述，这与 Kedlaya– Liu 对 pro-´etale$\mathbb{Q}_p$-局部系统的描述类似。最后，我们证明了定理 C 的向量丛版本。

1.1. 在 adic 空间范畴中，解析化有如下解释。

定义。 设 X 是一个概形。设 S 是一个 X上的 adic 空间，且 Y 是一个 X上的概形。若纤维积 $Y \times_X S$ 在 adic 空间范畴中存在，则记为 Y_S^{an}。

将 X 和 Y 替换为仿射开覆盖后，Spec-整体截面的伴随关系表明， Y_S^{an}等于 [42, (3.8)]意义下的“纤维积” $Y \times_X S$ 。

1.2. 我们将使用以下对 [54, 引理 4.4], 的推广，它描述了解析化的点函子，而无需在解析拓扑中进行层化。设 D 是一个诺特环。设 S 是一个在 D上的 adic 空间，且 Y是一个在 D上的拟射影概形。

引理。 对于所有在 S上的 *adic* 空间 $\mathrm{Spa}(A, A^+)$，在 S上的态射 $\mathrm{Spa}(A, A^+) \to Y_{\mathrm{an}S}$ 等价于在 D上的态射 $\mathrm{Spec}\, A \to Y$。

证明。 由于 D 是诺特的，且 Y 在 D上是拟射影的，因此存在有限个齐次多项式 f_1、……、f_l 和 g_1、……、g_m，它们属于 $D[T_0, \ldots, T_d]$，使得 Y是 $\mathbb{P}^d_D$中的轨迹：对于所有 $1 \leq a \leq l$，$f_a(T_0$、……、$T_d)$均为零；并且对于所有 $1 \leq b \leq m$，$g_b(T_0$、……、$T_d)$处处不为零。

根据 Y一个S的泛性质，在 S上的态射 Spa(A, A^+) $\to Y$一个S与在 D上的态射 Spa(A, A^+) $\to Y$等价。Spec-整体截面伴随表明，后者等价于以下数据：Spa(A, A^+)上的一个线丛 $\mathscr{L}$，配备生成 $\mathscr{L}$的截面 s_0、……、 s_d，使得对于所有 $1 \leq a \leq l$， f_a(s_0、……、 s_d)为零，并且对于所有 $1 \leq b \leq m$， g_b(s_0、……、 s_d)处处不为零。最后，[46,定理 1.4。2] 表明，这些数据等价于在 D上的态射 Spec $A \to Y$。□

1.3. 以下引理使我们能够计算解析化的整体截面。

引理。设 $Y = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ 是非阿基米德域 K 上的光滑仿射完备赋值空间，设 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ 是Spa K上的仿射完备 *sousperfectoid* 赋值空间，并将 $(K, K^\circ) \to (A, A^+)$到$(R, R^+)$的基变换记为$(A\widehat{\otimes}_K R, (A^+\widehat{\otimes}_{K^\circ} R^+)^\sim)$。那么，$\mathrm{Spa}(A\widehat{\otimes}_K R, (A^+\widehat{\otimes}_{K^\circ} R^+)^\sim)$ 是一个 *sousperfectoid* 赋值空间。

证明。由于 Y在 K上光滑， [43, (2.2.8)] 表明存在 $\{Y_i\}_{i=1}^m$ 的一个有限有理开覆盖，其中各成员是 K上的闭单位多圆盘的有限 ´étale 覆盖的有理开子空间。对所有 $1 \leq i \leq m$，记 $Y_i = \mathrm{Spa}(A_i, A_i^+)$。于是$A_i\widehat{\otimes}_K R$是有限 ´étale 代数在 $R\langle T_1, \ldots, T_d\rangle$上的有理局部化，因此 [67,命题 6.3.3] 表明 $A_i\widehat{\otimes}_K R$ 是 sousperfectoid，故如 [36, 定义 4.1]所述具有强层性。

将 $(A_i\widehat{\otimes}_K R, (A_i^+\widehat{\otimes}_{K^\circ} R^+)^\sim)$ 记作 $(K, K^\circ) \to (A_i, A_i^+)$ 在 (R, R^+) 上的基变换。那么，$\{\mathrm{Spa}(A_i\widehat{\otimes}_K R, (A_i^+\widehat{\otimes}_{K^\circ} R^+)^\sim)\}_{i=1}^m$是一个有限有理开覆盖

$$\mathrm{Spa}(A\widehat{\otimes}_K R, (A^+\widehat{\otimes}_{K^\circ} R^+)^\sim),$$

其对应的 ˇCech复形由对与 $\{Y_i\}_{i=1}^m$相关联的 ˇCech复形应用 $-\widehat{\otimes}_K R$ 得到。由于 A 是层化的，后者的零次上同调为 A，其他次数均为 0。 $-\widehat{\otimes}_K R$ 的正合性意味着，与 $\{\mathrm{Spa}(A_i\widehat{\otimes}_K R, (A_i^+\widehat{\otimes}_{K^\circ} R^+)^\sim)\}_{i=1}^m$ 相关联的 ˇCech复形的零次上同调为 $A\widehat{\otimes}_K R$，其他次数均为 0，因此由 [36, 推论 4.5][3]可得结论。□

1.4. 我们将按如下方式对光滑簇进行解析化。设 $Y = \mathrm{Spec}\ K[T_1, \ldots, T_d]/I$ 是非阿基米德域 K 上的光滑仿射概形，且 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ 是 Spa K 上的仿射拟完美空间。对所有 K 的伪一致化元 ϖ ，记 $B_{S,\varpi}$ 为拓扑环 $R\langle \varpi T_1, \ldots\ldots, \varpi T_d\rangle/I$，并记 $B_{S,\varpi}^+$ 为 $B_{S,\varpi}$ 中 $R^+\langle \varpi T_1, \ldots\ldots, \varpi T_d\rangle$ 的像的整闭包。

命题。前赋值空间 $Y_{S,\varpi} := \mathrm{Spa}(B_{S,\varpi}, B_{S,\varpi}^+)$ 是一个 *sousperfectoid* 赋值空间。此外， Y_S^{an} 等于 $\varinjlim_{\varpi} Y_{S,\varpi}$，其中 ϖ 遍历 K 的伪一致化元，且过渡态射均为开嵌入。因此， $Y_{\mathrm{an}S}$ 存在且为 *sousperfectoid*。

证明。记 A为 $K\langle \varpi T_1, \ldots, \varpi T_d\rangle/I$，并记 A^+ 为 A 中 $K^\circ\langle \varpi T_1, \ldots, \varpi T_d\rangle$的像的整闭包。由于 Y在 K上光滑，仿射赋值空间 Spa(A, A^+) 在 K上光滑。因此，由引理1.3以及 $(B_{S,\varpi}, B_{S,\varpi}^+)$ 是 $(K, K^\circ) \to (A, A^+)$ 到 (R, R^+) 的基变换，可得第一条结论。第二条结论由 Y_S^{an} 的泛性质得出。□

[3]虽然 [36]在 $\mathbb{Q}_p$上成立，但 [36,推论 4.5]的证明并未用到这一假设。

1.5. 接下来，我们专门讨论 $\mathbb{F}_q$ 上的光滑簇。设 $Y = \mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_q[T_1, \dots, T_d]/I$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的光滑仿射概形，并设 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的仿射完美空间。R 的任意伪一致化元 ϖ 都诱导一个态射

$$S \to \mathrm{Spa}\, \mathbb{F}_q(\!(\varpi^{1/q^\infty})\!).$$

将命题 1.4 应用于 $Y_{\mathbb{F}_q((\varpi^{1/q^\infty}))}$，我们看到 Y_S^{an}存在且等于$\bigcup_\varpi Y_{S,\varpi}$，其中 ϖ 遍历 R 的伪一致化元。

为了证明 Y 的解析化上的向量丛满足 v-下降，我们使用 Frob 构造以下自然的完美覆盖。注意，$(\mathrm{Frob}_Y)_S^{\mathrm{an}}$将$Y_{S,\varpi^{1/q}}$ 映射到 $Y_{S,\varpi}$。记 $B^+_{S\langle\varpi^{1/q^i}\rangle^{\mathrm{perf}}}$为 $\varinjlim_i B^+_{S\langle\varpi^{1/q^i}\rangle}$ 的 ϖ-adic 完备化，其中 i遍历非负整数，过渡映射由 $(\mathrm{Frob}_Y)_S^{\mathrm{an}*}$给出。记 $B^{\mathrm{perf}}_{S\langle\varpi\rangle}$ 为 $B^+_{S\langle\varpi\rangle^{\mathrm{perf}}}[\frac{1}{\varpi}]$。最后，若极限存在，则记为 $(Y_{\mathrm{an}S})^{\mathrm{perf}}$，它是在一致解析adic空间范畴中的极限 $\varprojlim_i Y_{\mathrm{an}S}$，其中过渡映射由 $(\mathrm{Frob}_Y)_S^{\mathrm{an}}$给出。

命题。前赋值空间 $Y\mathit{perf}_{S,\varpi} := \mathit{Spa}(B^{\mathrm{perf}}_{S\langle\varpi\rangle}, B^{\mathrm{perf}}{}^+_{S\langle\varpi\rangle})$ 是仿射完美胚空间。此外，$Y\mathit{perf}_{S,\varpi}$ 等于一致解析*adic*空间范畴中的纤维积 $Y_{S,\varpi} \times_{Y_S^{\mathrm{an}}} (Y\mathit{an}_S)^{\mathrm{perf}}$，因此 $(Y_S^{\mathrm{an}})^{\mathrm{perf}} = \bigcup_\varpi Y\mathit{perf}_{S,\varpi}$ 存在且是完美胚空间。最后，拓扑 $B_{S,\varpi}$-模之间的映射 $B_{S,\varpi} \to B^{\mathrm{perf}}_{S\langle\varpi\rangle}$ 分裂。

证明。对于第一个结论，注意 $(B^{\mathrm{perf}}_{S\langle\varpi\rangle}, B^+_{S\langle\varpi\rangle^{\mathrm{perf}}})$ 是下列对象的余极限

$$\{(B_{S,\varpi^{1/q^i}}, B^+_{S,\varpi^{1/q^i}})\}_i$$

在一致Tate-Huber对范畴中。因此，[63, 命题 3.5] 表明，只需验证 $B^{\mathrm{perf}}_{S\langle\varpi\rangle}$ 是完美的。由于 S 是完美胚空间，Frob_S 诱导出同构 $Y_{S,\varpi} \xrightarrow{\sim} Y_{S,\varpi^{1/q}}$。将此同构与 $(\mathrm{Frob}_Y)_S^{\mathrm{an}}$: $Y_{S,\varpi^{1/q}} \to Y_{S,\varpi}$ 合成，得到绝对 q-Frobenius 自同态，这说明 $B^{\mathrm{perf}}_{S\langle\varpi\rangle}$ 确实是完美的。

对于第二个陈述，上述结果表明，$Y_{\mathrm{perf}\,S,\varpi}$ 等于一致解析adic空间范畴中的极限 $\varprojlim_i Y_{S,\varpi^{1/q^i}}$。$Y_S^{\mathrm{an}}$的泛性质意味着该方块

$$\begin{array}{ccc} Y_{S,\varpi^{1/q}} & \xrightarrow{(\mathrm{Frob}_Y)_S^{\mathrm{an}}} & Y_{S,\varpi} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_S^{\mathrm{an}} & \xrightarrow{(\mathrm{Frob}_Y)_S^{\mathrm{an}}} & Y_S^{\mathrm{an}} \end{array}$$

是笛卡尔的，因此在一致解析adic空间范畴中取 $\varprojlim_i$ 即可得到所需结果。

对于第三个陈述，Y的光滑性意味着$\mathrm{Frob}_{Y,*}\, \mathbb{F}_q[T_1, \dots, T_d]/I$是一个有限投射 $\mathbb{F}_q[T_1, \dots, T_d]/I$-模 [12, 引理1.1.1][4]。由于 Y也是仿射的，[12, 命题1.1.6]表明 Y 是Frobenius分裂。

[4]虽然 [12] 适用于代数闭域，但 [12, 引理 1.1.1] 和 [12, 命题 1.1.6] 的证明并未使用这一假设。

注意该方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_q[T_1,\dots,T_d]/I & \xrightarrow{\mathrm{Frob}_Y^*} & \mathrm{Frob}_{Y,*}\,\mathbb{F}_q[T_1,\dots,T_d]/I \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_{S,\varpi} & \xrightarrow{(\mathrm{Frob}_Y)_S^{\mathrm{an},*}} & B_{S,\varpi^{1/q}} \end{array}$$

是环范畴中的一个推出。因此，将$-\otimes_{\mathbb{F}_q[T_1,\dots,T_d]/I} B_{S,\ \varpi}$应用于$\mathbb{F}_q[T_1,\dots,T_d]/I$-模的上箭头分裂，可得到下箭头的拓扑$B_{S,\ \varpi}$-模分裂。最后，取 $\{B_{S,\varpi^{1/q^i}}\}_i$的完备余极限，可得到$B_{S,\ \varpi}\to B^{\mathrm{perf}}_{S\ \varpi}$, 的拓扑$B_{S,\ \varpi}$-模分裂。□

1.6. 现在我们证明解析化（的开子空间）上向量丛的 v-下降。设 Y 是一个定义在 $\mathbb{F}_q$上的光滑概形，且 V_S 是Y_S^{an}的一个开子空间。对于所有在 S上的仿射完美空间 S' ，记 $V_{S'}$ 为 V_S 的原像。

定理。 由以下内容给出的Perf_S 上的范畴预层

$$S'\mapsto\{vector\ bundles\ on\ V_{S'}\}$$

满足 v-下降。

证明。 将 Y 和 V_S 替换为开覆盖后，我们可以假设

$$Y=\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q[T_1,\dots,T_d]/I$$

是仿射的，且 $V_S=\mathrm{Spa}(A,A^+)$ 是仿射刚性空间。设 $S'\to S$ 是一个仿射纤维完美空间 v 覆盖。由于 $Y_S^{\mathrm{an}}=\bigcup_\varpi Y_{S,\varpi}$，我们看到，对于 R 的某个伪一致化元 ϖ， V_S 属于 $Y_{S,\varpi}$。记 V_S^{perf} 为 V_S 在 $Y_{\mathrm{perf}\,S,\varpi}$ 中的原像。

设 $\mathscr{E}'$ 是 $V_{S'}$ 上带有相对于以下对象的下降数据 α 的向量丛

$$V_{S'\times_S S'\times_S S'}\rightrightarrows V_{S'\times_S S'}\rightrightarrows V_{S'}.$$

根据命题 1.5，拉回得到 $V_{\mathrm{perf}\,S'}$ 上的向量丛 $\widetilde{\mathscr{E}}'$，其带有相对于这些 adic 空间的交换下降数据 $\widetilde{\alpha}$

$$V^{\mathrm{perf}}_{S'\times_S S'\times_S S'}\rightrightarrows V^{\mathrm{perf}}_{S'\times_S S'}\rightrightarrows V^{\mathrm{perf}}_{S'}$$

以及 β' 相对于仿射前 adic 空间

$$V^{\mathrm{perf}}_{S'}\times_{V_{S'}}V^{\mathrm{perf}}_{S'}\times_{V_{S'}}V^{\mathrm{perf}}_{S',\varpi}\rightrightarrows V^{\mathrm{perf}}_{S'}\times_{V_{S'}}V^{\mathrm{perf}}_{S'}\rightrightarrows V^{\mathrm{perf}}_{S'}.$$

命题 1.5 表明 $V^{\mathrm{perf}}{}_{(-)}$ 是完美胚，因此 [67, 引理 17.1.8] 使我们能够将 $(\widetilde{\mathscr{E}}',\widetilde{\alpha})$ 和 $(\beta,\widetilde{\alpha})$ 下降为 $\widetilde{\mathscr{E}}$在 $V_{\mathrm{perf}\,S}$ 上的一个向量丛，其下降数据为 β，且相对于仿射前 adic 空间

$$V^{\mathrm{perf}}_{S}\times_{V_S}V^{\mathrm{perf}}_{S}\times_{V_S}V^{\mathrm{perf}}_{S}\rightrightarrows V^{\mathrm{perf}}_{S}\times_{V_S}V^{\mathrm{perf}}_{S}\rightrightarrows V^{\mathrm{perf}}_{S}.$$

最后，命题 1.5 表明，拓扑 $B_{S,\varpi}$-模之间的映射 $B_{S,\varpi}\to B^{\mathrm{perf}}_{B\ \varpi}$, 可分裂，因此拓扑 A-模之间的映射 $A\to A\widehat{\otimes}_{B_{S,\varpi}}B^{\mathrm{perf}}_{B\ \varpi}$, 也可分裂。˜因此， [68, 标签08XA] 和 [68, 标签08XD] 使我们能够将 $(\mathscr{E},\beta)$ 下降为 V_S 上的一个向量丛 $\mathscr{E}$，如所愿。□

1.7. 解析化的整体截面的 Frobenius不变量如下所述。记 A 为 Y 的整体截面，并赋予其离散拓扑。

命题。 自然映射 $A(S)\to\Gamma(Y_{\mathrm{an}S},\mathscr{O}_{Y^{\mathrm{an}S}})^{\mathrm{Frob}_S^*=1}$ 是一个同构。

证明。 将 Y 替换为一个开覆盖后，我们可以假设

$$Y=\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q[T_1,\dots,T_d]/I$$

是仿射的。令 $\{e_m\}_m$ 为 A 的一个由单项式的像组成的 $\mathbb{F}_q$-基。对于 R的所有伪一致化元 ϖ，这诱导出一个识别 $\bigoplus_m R\cdot e_m\xrightarrow{\sim}B_{S,\varpi}$，其将 T_i 映至 ϖT_i，对所有 $1\le i\le d$ 均如此。在此识别下，$\mathrm{Frob}_S^*\colon B_{\varpi,S}\xrightarrow{\sim}B_{\varpi^q,S}$ 逐坐标作用，因此 $\bigoplus_m R^{\mathrm{Frob}_S^*=1}\cdot e_m\xrightarrow{\sim}B_{S,\varpi}^{\mathrm{Frob}_S^*=1}$。现在，[47, 推论 3.1.4][5]推出 $\mathrm{Cont}(|S|,\mathbb{F}_q)\xrightarrow{\sim}R^{\mathrm{Frob}_S^*=1}$，因此 $|S|$ 的拟紧性表明

$$\underline{A}(S)=\mathrm{Cont}(|S|,A)=\mathrm{Cont}\left(|S|,\bigoplus\mathbb{F}_q\cdot e_m\right)\xrightarrow{\sim}\bigoplus R^{\mathrm{Frob}_S^*=1}\cdot e_m.$$

最后，注意到 Y_S^{an}的整体截面由$\bigcap_\varpi B_{S,\ \varpi}$给出，其中 ϖ 遍历 R的伪一致化元。因此取$\bigcap_\varpi$ 即可得到所述结论。□

1.8. 最后，我们专门讨论 $\mathbb{F}_q$上的光滑曲线，这是本文主要关注的情形。设 C 是 $\mathbb{F}_q$ 上的几何连通光滑完备曲线。记其函数域为 F，阿代尔环为 $\mathbb{A}$。设 U 是 C的稠密开子概形，并记其整阿代尔环为 $\mathbb{O}_U$。当 U等于 C时，我们在记号中省略它。

对于 C的所有闭点 v，记其剩余域为 $\mathbb{F}_v$，固定一个 $\mathbb{F}_q$上的嵌入$\mathbb{F}_v\to\mathbb{F}_q$，记 v 处的完备局部环为 $\mathcal{O}_v$，并记 $\mathcal{O}_v$的分式域为 F_v。设 A_v 是 $\{\mathcal{O}_v,F_v\}$之一。通过将 [25, 命题 II.1.1]应用于 Spa $\mathbb{F}_v\times S$，我们得知 Spa $A_v\times S$是一个次完美胚赋值空间。

我们如下定义全局和局部 ***Hartl–Pink*** 曲线上的向量丛。

定义。
a) 记 $\mathrm{Bun}_U(S)$ 为由配备同构 $\phi\colon\mathscr{E}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Frob}_S^*\mathscr{E}$ 的 $\mathscr{E}$在 U_S^{an}上的向量丛构成的范畴。b) 记 $\mathrm{Bun}_F(S)$ 为范畴 $\varinjlim_{U}\mathrm{Bun}_U(S)$，其中 U遍历 C的稠密开子概形。
c) 记 $\mathrm{Bun}_{A_v}(S)$ 为由配备同构 $\phi\colon\mathscr{E}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Frob}_S^*\mathscr{E}$ 的 $\mathscr{E}$在 Spa $A_v\times S$ 上的向量丛构成的范畴。

定理 1.6 表明 Bun_U 满足 v-下降。命题 1.7 蕴含 b) 中的过渡态射是忠实的，因此 Bun_F 也满足 v- 下降。

1.9. 通常，F_v 的局部 Hartl–Pink 曲线使用 $q^{\deg v}$-Frobenius 而非 q-Frobenius 来定义。现在我们来联系这两种定义。按照定义 I.2.2]，记 X_{S,F_v} 为 F_v 上的相对 Fargues–Fontaine 曲线。

命题。 范畴预层 Bun_{A_v} 满足 *v*-下降，且其到 $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_v}$ 的基变换自然同构于

$$S\mapsto\left\{\begin{array}{c}\textit{vector bundles }\mathscr{E}\textit{ on }\operatorname{Spa}A_v\times_{\mathbb{F}_v}S\textit{ equipped}\\ \textit{with an isomorphism }\phi:\mathscr{E}\xrightarrow{\sim}(\mathrm{Frob}_S^{\deg v})^*\mathscr{E}\end{array}\right\}.$$

[5]虽然 [47, 推论 3.1.4] 是针对 $q=p$陈述的，但证明原封不动地适用于一般的 q。

因此，Bun_{F_v} 到$\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_v}$ 的基变换自然同构于

$$S \mapsto \{vector\ bundles\ on\ X_{S,F_v}\}.$$

证明。 对于第一个陈述，令 $S' \to S$ 为一个仿射纤维完美空间 v 覆盖。那么 Spa $\mathbb{F}_v \times S' \to$ Spa $\mathbb{F}_v \times S$ 也是一个仿射纤维完美空间 v 覆盖，因此第一个陈述由 [67, 命题 19.5.3]得出。第二个陈述可通过仿照 [54, 引理 5.12]的证明来得出。最后，第三个陈述由

$$X_{S,F_v} = (\operatorname{Spa} F_v \times_{\mathbb{F}_v} S)/\operatorname{Frob}_S^{\deg v}. \qquad \square$$

1.10. 多亏了阿廷–施赖尔–维特，$\mathrm{Bun}_{\mathcal{O}_v}$ 具有如下描述。

命题。 范畴预层 $\mathrm{Bun}_{\mathcal{O}_v}$ 自然同构于

$$S \mapsto \{pro\text{-}étale\ \underline{\mathcal{O}_v}\text{-}local\ systems\ on\ S\}.$$

证明。 将 $(-)[\![\pi]\!]$ 替换为 $-\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_v[\![\pi]\!]$ 后，其中 π 表示$\mathcal{O}_v$的赋值参数，证明过程与 [54, 命题 3.7] 和 [54, 定理 3.12]中的相同。□

1.11. 全局和局部 Hartl–Pink 曲线上的向量丛之间的以下关系在本文中起着重要作用。记 Z 为 $C \smallsetminus U$的闭补集。对于 U上的所有闭点 u，我们有一个 adic 空间的自然态射 Spa $\mathcal{O}_u \to U$；对于 Z中的所有 z，我们有一个 adic 空间的自然态射 Spa $F_z \to U$。因此，拉回给出态射

$$\mathrm{loc}_u : \mathrm{Bun}_U \to \mathrm{Bun}_{\mathcal{O}_u} \text{ and } \mathrm{loc}_z : \mathrm{Bun}_U \to \mathrm{Bun}_{F_z}.$$

定义。
a) 记

$$\mathrm{loc} : \mathrm{Bun}_U \to \prod_u \mathrm{Bun}_{\mathcal{O}_u} \times \prod_z \mathrm{Bun}_{F_z}$$

为由 $\{\mathrm{loc}_u\}_u$ 和 $\{\mathrm{loc}_z\}_z$诱导的态射，其中 u遍历 U的闭点，而 z 遍历 Z。

b) 记 $\mathrm{Bun}_{\mathbb{A}}$ 为范畴预层 $\varinjlim_U \prod_u \mathrm{Bun}_{\mathcal{O}_u} \times \prod_z \mathrm{Bun}_{F_z}$，其中 U 遍历 C 的稠密开子概形。

c) 记 $\mathrm{loc} : \mathrm{Bun}_F \to \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}}$ 为由对 a) 取 $\varinjlim_U$ 得到的态射。

命题 1.9 蕴含 $\mathrm{Bun}_{\mathbb{A}}$ 满足 v-下降。

1.12. 我们将使用以下引理，将问题化约到 $\operatorname{Pic} U = 1$ 的情形。由于 U 是戴德金概形，$\operatorname{Pic} U = 1$ 当且仅当 U 上的所有向量丛都是平凡的。由于 U 是光滑曲线，这意味着 U 是仿射的。

引理。 存在 C 的一个开覆盖 $\{C_1, C_2\}$，满足 $\operatorname{Pic} C_1 = \operatorname{Pic} C_2 = 1$，因此存在 U 的一个开覆盖 $\{U_1, U_2\}$，满足 $\operatorname{Pic} U_1 = \operatorname{Pic} U_2 = 1$。

证明。 $\mathbb{F}_q$有限，因此 Pic C有限生成。设 $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_g$是 Pic C的生成元，并设 C_1 是 C 的一个稠密开子概形，使得对所有 $1 \le i \le g$，$\mathscr{L}_i|_{C_1}$都是平凡的。由类群的切除定理可知 $\operatorname{Pic} C_1 = 1$。由于 $C \smallsetminus C_1$ 有限，弱逼近表明消失阶映射 $F^\times \to \mathbb{Z}^{\oplus(C \smallsetminus C_1)}$ 是满射，因此对所有 $1 \le i \le g$，存在一个支撑在 C_1 上的除子 D_i，使得 $\mathscr{L}_i \cong \mathscr{O}_C(D_i)$。取 $C_2 = C \smallsetminus \bigcup_{i=1}^g \operatorname{supp} D_i$后，再次由类群的切除定理可知 $\operatorname{Pic} C_2 = 1$。最后，通过类群的切除定理，$U_1 = U \cap C_1$和 $U_2 = U \cap C_2$也满足类似的结论。□

1.13. 我们将使用以下关于 S 上系数取自$\mathscr{O}_U$的局部系统的概念，它在 S和 U中都是局部的。对于 QCoh(U)中的任意 $\mathscr{E}$，记 $\mathscr{E}$为由 $\mathscr{E}$诱导的 site $*_{\text{pro-ét}}$ 上的常值 QCoh($\underline{U}$)-值层。

定义。 一个*pro-´étale* $\mathscr{O}_U$-局部系统于 S是网站 $S_{\text{pro-ét}}$上的一个 $\mathscr{O}_U$-模，它在 $S_{\text{pro-ét}}$ 上局部具有形式 $\mathscr{E}$，其中 $\mathscr{E}$ 是 U上的一个向量丛。

当 Pic $U = 1$时，请注意，这与 pro-´étale A-局部系统的概念一致，其中 A 表示赋予离散拓扑的 U 的整体截面。

1.14. 现在我们证明一个关于 pro-´étale $\mathscr{O}_U$-局部系统的描述，该描述以全局 Hartl–Pink 曲线上的向量丛来表述；这是 Kedlaya–Liu 定理 [47,Theorem 8.5.12] 的全局对应版本。

若 Bun$_{F_v}$(S) 中的一个对象在命题 1.9 给出的识别下，其像在 Bun$_{F_v}$(Spa $\mathbb{F}_v \times S$) 中具有斜率为零的 Harder–Narasimhan 多边形（如 [25, 第 74] 页所示），则称该对象具有斜率为零。请注意，当 S 在 $\mathbb{F}_v$之上时，这与通常的概念一致。此外，对于 Bun$_{G,\mathcal{O}_v}$(S) 中任意的 $(\mathscr{E}, \phi)$，其在 Bun$_{G,F_v}$(S) 中的像都具有斜率为零。

定理。 我们有一个范畴的正合张量等价

$$\{\textit{pro-étale } \underline{\mathscr{O}_U}\textit{-local systems on } S\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \textit{objects in } \mathrm{Bun}_U(S) \textit{ whose image in} \\ \mathrm{Bun}_{F_z}(S) \textit{ has slope zero for all } z \textit{ in } Z \end{array} \right\}$$

given by $\mathbb{L} \mapsto (\mathbb{L} \otimes_{\underline{\mathscr{O}_U}} \mathscr{O}_{U_S^{\mathrm{an}}}, \mathbb{L} \otimes_{\underline{\mathscr{O}_U}} (\mathrm{Frob}_S^{-1})^*)$.

证明。 将 U 替换为引理 1.12 中的开覆盖 $\{U_1, U_2\}$ 后，我们可以假设 Pic $U = 1$。注意，上述函子保持张量积和对偶。因此，取内部 Hom 可将完全忠实性归结为证明：对于 S 上所有的 A-局部系统 $\mathbb{L}$，映射

$$\mathrm{Hom}_{\underline{A}}(\underline{A}, \mathbb{L}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{U_S^{\mathrm{an}}}}((\mathscr{O}_{U_S^{\mathrm{an}}}, (\mathrm{Frob}_S^{-1})^*), (\mathbb{L} \otimes_{\underline{A}} \mathscr{O}_{U_S^{\mathrm{an}}}, \mathbb{L} \otimes_{\underline{A}} (\mathrm{Frob}_S^{-1})^*))$$

是一个双射。将 S 替换为一个 pro-´etale 覆盖并应用定理 1.6 后，我们可以假设 $\mathbb{L} = A$。于是结论由命题 1.7 得出。

为证明本质满射性，设 $(\mathscr{E}, \phi)$ 是 Bun$_U$(S) 中的一个对象。由完全忠实性和 pro-´etale 下降，只需证明存在一个仿射完美胚 pro-´etale 覆盖 $S' \to S$，使得 $(\mathscr{E}, \phi)|_{S'}$ 是平凡的。由于对所有 $z \in Z$，loc$_z$($\mathscr{E}, \phi$) 的斜率均为零，定理 II.2.19] 给出一个仿射完美胚 pro-´etale 覆盖$S' = \mathrm{Spa}(R', R'^+) \to S$，使得对所有 $z \in Z$，基变换 loc$_z$($\mathscr{E}, \phi$) $|_{S'}$ 是平凡的。现在，$\{U_{S'}^{\mathrm{an}}\} \cup \{\mathrm{Spa}\ \mathcal{O}_z \times S'\}_z$ 是 $C_{S'}^{\mathrm{an}}$ 的一个开覆盖，因此我们可以将 $(\mathscr{E}, \phi)|_{S'}$与 Bun$_{\mathcal{O}_z}$($S'$) 中的平凡对象粘合（对所有 $z \in Z$），从而得到 Bun$_C$(S') 中的一个对象 $(\mathscr{E}', \phi')$。定理 A.19 表明，$(\mathscr{E}', \phi')$ 是 $C_{R'}$ 上一个配备同构 ϕ'^{alg}：$\mathscr{E}'$alg $\xrightarrow{\sim}$ Frob$_{R'}^*$ $\mathscr{E}'$alg 的向量丛$\mathscr{E}'$alg 的解析化。将 Spec R' 替换为一个开闭覆盖后，[50, 第 I.3 段的引理表明，存在 C 上的某个向量丛 $\mathscr{E}$alg，使得 $(\mathscr{E}'$alg ϕ'alg) 同构于 ($\mathscr{E}$alg$|_{R'}$, id$_{\mathscr{E}\mathrm{alg}}$ $\otimes_{\mathbb{F}_q}$(Frob$_{R'}^{-1})^*$)。最后，Pic $U = 1$ 蕴含 $\mathscr{E}$alg$|_U$ 是平凡的。□

1.15. 设 B 为一个赋予离散拓扑的完美 $\mathbb{F}_q$-代数。我们通过证明在许多情形下，U_B上的向量丛等价于“$U_{\mathrm{Spd}\, B}$”上的向量丛来结束本节。

"$U_{\mathrm{Spd}\,B}$"是什么意思? 注意，Spa $B((t^{1/q^\infty}))\to$Spd B是满射的，并且在类完美空间中可表，因此我们有一个由完美胚构成的自然图表

$$(\star)\qquad \begin{aligned}&\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)\times_{\mathrm{Spd}\,B}\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)\times_{\mathrm{Spd}\,B}\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)\\ &\rightrightarrows \mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)\times_{\mathrm{Spd}\,B}\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)\rightrightarrows \mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!).\end{aligned}$$

定理。 假设每个Spec B 的连通分支都是赋值环。那么，解析化会从

$$\{vector\ bundles\ on\ U_B\}$$

到 $U^{\mathrm{an}}{}_{\mathrm{Spa}\ B((t^{1/q^\infty}))}$上的向量丛，并且相对于具有下降数据的

$$(\star\star)\qquad \begin{aligned}&U^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)\times_{\mathrm{Spd}\,B}\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)\times_{\mathrm{Spd}\,B}\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)}\\ &\rightrightarrows U^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)\times_{\mathrm{Spd}\,B}\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)}\rightrightarrows U^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)}.\end{aligned}$$

证明。 为证明完全忠实性，设 $\mathscr{E}_1$和 $\mathscr{E}_2$是 U_B上的向量丛，将相应的、定义在 $U^{\mathrm{an}}{}_{\mathrm{Spa}\ B((t^{1/q^\infty}))}$上且相对于 $(\star\star)$ 具有下降数据的向量丛记为 $(\mathscr{E}_1',\ \alpha_1)$ 和 $(\mathscr{E}_2',\ \alpha_2)$，并设 $f'\colon\mathscr{E}_1'\to\mathscr{E}_2'$是一个与下降数据相容的向量丛态射。将 U 替换为一个开覆盖后，我们可以假设 $U=$Spec A是仿射的。记 $A=\mathbb{F}_q[T_1,\dots,T_d]/I$。对于 $\mathbb{F}_q$上的所有仿射完美空间 $S=$Spa$(R,\ R^+)$，引理1.3表明

$$U_{S,1}\coloneqq\mathrm{Spa}(R\langle T_1,\dots,T_d\rangle/I,(R^+\langle T_1,\dots,T_d\rangle)^\sim)$$

是 U_S^{an}的一个开子空间。对于所有在 S 上的仿射完美空间 S'，注意到 $U_{S'}^{\mathrm{an}}$中 $U_{S,\ 1}$ 的原像等于$U_{S',\ 1}$，因此将 $(\star\star)$ 限制到$U_{\mathrm{Spa}\,B((t^{1/q^\infty})),\ 1}$ 得到

$$\begin{aligned}&U_{\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)\times_{\mathrm{Spd}\,B}\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)\times_{\mathrm{Spd}\,B}\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!),1}\\ &\rightrightarrows U_{\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)\times_{\mathrm{Spd}\,B}\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!),1}\rightrightarrows U_{\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!),1}.\end{aligned}$$

由于 I 是有限生成的，对于所有正整数 m，我们有

$$B(\!(t_1^{1/q^\infty},\dots,t_m^{1/q^\infty})\!)\langle T_1,\dots,T_d\rangle/I=\big(B[T_1,\dots,T_d]/I\big)(\!(t_1^{1/q^\infty},\dots,t_m^{1/q^\infty})\!),$$

因此取整体截面得到

$$(A\otimes_{\mathbb{F}_q}B)(\!(t_1^{1/q^\infty},t_2^{1/q^\infty},t_3^{1/q^\infty})\!)\Leftarrow(A\otimes_{\mathbb{F}_q}B)(\!(t_1^{1/q^\infty},t_2^{1/q^\infty})\!)\leftarrow(A\otimes_{\mathbb{F}_q}B)(\!(t_1^{1/q^\infty})\!).$$

因此， [48, 定理 4.9] 表明，将 f' 限制到$U_{\mathrm{Spa}\,B((t^{1/q^\infty})),\ 1}$可唯一地由 U_B 上向量丛的一个态射 $f\colon\ \mathscr{E}_1\to\mathscr{E}_2$ 导出。由于 U_S^{an} 上向量丛的态射由其到$U_{S,\ 1}$ 的限制所确定，这就得到了所需结果。

对于本质满射性，设 $\mathscr{E}'$是 U^{an}Spa $_B((t^{1/q^\infty}))$ 上的一个向量丛，并带有关于 $(\star\star)$ 的下降数据 α。对于所有 z 属于 Z 的情形，拉回得到 Spa $F_z\times$Spa $B((t^{1/q^\infty}))$ 上的一个向量丛 $\mathscr{E}_z'$，并带有关于 Spa $F_z\times(-)$ 在 $(\star)$ 上的取值的下降数据 α_z；对 $\mathbb{F}_v\otimes_{\mathbb{F}_q}B$ 应用 [32, 定理 3.15] 和 [32, 注 3.14]，可知 $(\mathscr{E}_z',\alpha_z)$ 唯一地来自 Spec $F_z\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}B$ 上的一个向量丛 $\mathscr{E}_z$。将 Spec B 替换为一个开闭覆盖后， [45, 定理 6.1] 表明 $\mathscr{E}_z$ 是平凡的。现在，$\{U^{\mathrm{an}}_{(-)}\}\cup\{$Spa $\mathcal{O}_z\times(-)\}_z$是 $C^{\mathrm{an}}_{(-)}$的一个开覆盖，因此我们可以将 $(\mathscr{E}',\alpha)$ 与 Spa $\mathcal{O}_z\times$Spa $B((t^{1/q^\infty}))$ 上带有下降数据的平凡向量丛粘合起来

关于 $\mathrm{Spa}\,\mathcal{O}_z \times (-)$ 在 $(\star)$ 上的取值。这给出 $C^{\mathrm{an}}{}_{\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)}$ 上的一个向量丛 $\widetilde{\mathscr{E}'}$，并带有关于

$$C^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)\times_{\mathrm{Spd}\,B}\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)\times_{\mathrm{Spd}\,B}\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)} \rightrightarrows C^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)\times_{\mathrm{Spd}\,B}\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)} \rightrightarrows C^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Spa}\,B(\!(t^{1/q^\infty})\!)}.$$

定理 A.19 表明，这对应于 $C_{B(\!(t_1^{1/q^\infty})\!)}$ 上的一个向量丛 $\widehat{\mathscr{E}'}_{\mathrm{alg}}$，并且对所有正整数 n，都有一个下降数据 $\widehat{\alpha}_n$，其相对于

$$(\star\star\star) \qquad C_{B[\![t_1^{1/q^\infty},t_2^{1/q^\infty},t_3^{1/q^\infty}]\!]\langle t_1^n/t_2t_3,t_2^n/t_1t_3,t_3^n/t_1t_2\rangle[1/t_1t_2t_3]} \rightrightarrows C_{B[\![t_1^{1/q^\infty},t_2^{1/q^\infty}]\!]\langle t_1^n/t_2,t_2^n/t_1\rangle[1/t_1t_2]} \rightrightarrows C_{B(\!(t_1^{1/q^\infty})\!)}.$$

设 $\{C_1, C_2\}$ 为 C 的一个仿射开覆盖。对 $\{1,2\}$ 中的所有 i，用 A_i 表示 C_i 的整体截面，并注意 A_i 在 $\mathbb{F}_q$ 上是自由的。因此，将 $(\star\star\star)$ 限制到 $(C_i)_{B(\!(t_1^{1/q^\infty})\!)}$，取整体截面，再取 $\lim_{\longleftarrow n}$，便得到

$$A_i \otimes_{\mathbb{F}_q} B(\!(t_1^{1/q^\infty}, t_2^{1/q^\infty}, t_3^{1/q^\infty})\!) \Lleftarrow A_i \otimes_{\mathbb{F}_q} B(\!(t_1^{1/q^\infty}, t_2^{1/q^\infty})\!) \Leftarrow A_i \otimes_{\mathbb{F}_q} B(\!(t_1^{1/q^\infty})\!).$$

因此，[48, 定理 4.9] 表明，$(\widetilde{\mathscr{E}'}, \widehat{\alpha})$ 到 $(C_i)_{(-),\widehat{1}}$ 的限制唯一地来自 $(C_i)_B$ 上的一个向量丛 $\mathscr{E}_i$。现在，$\{(C_1)_{(-),\widehat{1}}, (C_2)_{(-),1}\}$ 是 $C^{\mathrm{an}}_{(-)}$ 的一个开覆盖，而 $\{(C_1)_B, (C_2)_B\}$ 是 C_B 的一个开覆盖，因此 $(\widetilde{\mathscr{E}'}, \widehat{\alpha})$ 唯一地来自 C_B 上的一个向量丛 $\mathscr{E}$。最后，将 $\mathscr{E}$ 限制到 U_B。□

2. G-BUNDLES

本节介绍全局 Hartl–Pink 曲线上的 G-丛。定义其模叠 $\mathrm{Bun}_{G,\,F}$ 之后，我们定义它到局部模叠之积 $\mathrm{Bun}_{G,\,F_z}$的局部化映射；该映射在本文中发挥着重要作用。例如，我们利用局部化映射定义 $\mathrm{Bun}_{G,\,F}$中的全局半单轨迹 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,\,F}$。利用第 1 节的结果，我们证明定理 A 的一部分、定理 B 的一部分（不过，定理 B 的正式陈述将推迟至第 4 节），以及定理 C。

2.1. 设 G 是如定义 2.18] 中所述的、定义在 C 上的抛物型群概形。对于任意闭点 v，我们也用 G 表示它在 U、F、$\mathcal{O}_v$ 或 F_v 上的基变换。

下面给出 G-挠子的标准坦纳卡描述。设 Y 是 C 上的次完美胚空间，且 $\mathscr{G}$ 是 Y 上的一个 ´etale G-挠子。对于所有 $V \in \mathrm{Rep}_C G$，记 $\mathscr{G}(V)$ 为局部自由的 $\mathcal{O}_{Y,\,\text{ét}}$-模 $\mathscr{G} \times^G (V \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_{Y,\,\text{ét}})$。根据定理 8.2.22 (d)], 它唯一地来自 Y 上的向量丛 $\mathscr{G}(V)$。

命题。上述内容在以下两者之间诱导出范畴等价：
a) *´étale G-torsor*，定义在 Y 上；***b)*** 到 Y} 上向量丛的
正合张量函子 $\mathrm{Rep}_C G \to${。
此外，当 $Y = \mathrm{Spa}(T, T^+)$ 是仿射刚性空间时，定义在 Y 上的所有 *´étale G-torsor* 都可由 *adic* 空间表示，并且上述两者自然等价于
c) 定义在 $\mathrm{Spec}\,T$ 上的 *´étale G-torsor*；***d)*** 到有限投射 T-模 } 的
正合张量函子 $\mathrm{Rep}_C G \to${。

证明。根据 [13, 引理 3.1], $\mathcal{O}_G$ 是 $\mathrm{Rep}_C G$ 中对象的一个滤过余极限。因此，结论可由 [55, 命题 6.10] 的证明得出。□

2.2. 现在我们定义全局和局部 Hartl–Pink 曲线上的 G-丛栈。令 A_v 为 $\{\mathcal{O}_v, F_v\}$之一。

定义。
a) 用 $\mathrm{Bun}_{G,U}(S)$ 表示 G-挠子的群胚：这些挠子定义在 U_S^{an}上，并配有一个同构 $\phi\colon \mathscr{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frob}_S^* \mathscr{G}$。b) 用 $\mathrm{Bun}_{G,F}(S)$ 表示群胚 $\varinjlim_U \mathrm{Bun}_{G,U}(S)$，其中 U 遍历 C 的稠密开子概形。c) 用 $\mathrm{Bun}_{G,A_v}(S)$ 表示定义在 Spa $A_v \times S$ 上的 G-挠子的群胚，并配有一个同构 $\phi\colon \mathscr{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frob}_S^* \mathscr{G}$。

由命题 2.1，定理 1.6 表明 $\mathrm{Bun}_{G,U}$ 是一个 v-栈。命题 1.7 表明，b) 中的过渡态射是忠实的，因此 $\mathrm{Bun}_{G,F}$ 也是一个 v-栈。最后，命题 1.9 表明 Bun_{G,A_v} 是一个 v-栈，而 [25, 命题 III.1.3] 的证明表明，所有这些 v-栈都是小的。

2.3. 例。 我们断言，$\mathrm{Bun}_{G,C}$ 自然同构于与群胚相关联的 $\mathbb{F}_q$ 上的常值叠

$$(\heartsuit) \qquad \coprod_{\alpha \in \ker^1(F,G)} G_\alpha(F)\backslash G_\alpha(\mathbb{A})/G(\mathbb{O}),$$

其中，$\ker^1(F,G)$表示局部化映射的核

$$(\mathrm{loc}_v)_v : H^1(F,G) \to \prod_v H^1(F_v, G),$$

而 G_α over F 表示与 α相关联的 G 的内扭曲。为说明这一点，记$\mathcal{B}_G$ 为 $\mathbb{F}_q$ 上的光滑代数栈，其对象是 C上的 G-丛。定理 A.19 将 $\mathrm{Bun}_{G,C}$ 的 S-点与代数栈$(\mathcal{B}_G)^{\mathrm{Frob}_{\mathcal{B}_G}}$的 Spec R-点等同起来，其中$(\mathcal{B}_G)^{\mathrm{Frob}_{\mathcal{B}_G}}$是 $\mathrm{Frob}_{\mathcal{B}_G}$不动点的代数栈。根据 [69, 引理 3.3 b)], ，后者自然同构于与群胚 $\mathcal{B}_G(\mathbb{F}_q)$相关联的 $\mathbb{F}_q$ 上的常值叠，而 [51, 注记 12.2]将 $\mathcal{B}_G(\mathbb{F}_q)$与(♡)等同起来。由于其自同构群是有限的，结论由自然等价$(\mathrm{Spec}\ R)_{\text{fét}} \xrightarrow{\sim} S_{\text{fét}}$得出。

2.4. 以类似于命题 1.9 的方式，Fargues–Fontaine 曲线上G-丛之栈中的平凡轨迹如下下降到我们的设定。记 Bun^1_{G,F_v} 为 $\mathrm{Bun}_{G,F_v}(S)$ 的子栈，其 S-点由如下对象组成：对 S的所有几何点 s ，其在 $\mathrm{Bun}_{G,F_v}(s)$ 中的像是平凡的。考虑对应于所有 S 的平凡对象的态射 $*\to \mathrm{Bun}_{G,F_v}$，它通过态射 $*\to \mathrm{Bun}^1_{G,F_v}$分解。可以将 $G(F_v)$与 $* \times_{\mathrm{Bun}^1_{G,F_v}} *$ 作为群 v-层等同，从而下降给出态射 $*/G(F_v) \to \mathrm{Bun}^1_{G,F_v}$。

命题。 子栈 $\mathrm{Bun}^1_{G,F_v} \subseteq \mathrm{Bun}_{G,F_v}$ 是开的，且 $*/G(F_v) \to \mathrm{Bun}^1_{G,F_v}$是一个同构。此外，$\mathrm{Bun}_{G,\mathcal{O}_v}$ 自然同构于 $*/G(\mathcal{O}_v)$。最后，Bun_{G,F_v} 到 $\mathbb{F}_v$ 的基变换自然同构于 *Fargues–Fontaine* 曲线上G-丛的栈（对 F_v ，如 [25,定义 III.1.3]中所述）。

证明。 将 $(-)[\![\pi]\!]$ 替换为 $-\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_v[\![\pi]\!]$后，其中 π表示$\mathcal{O}_v$的赋值参数，第一条结论由 [25, 定理 III.2.4], 的证明得出，第二条结论由 [54, 命题 3.8] 和 [54, 定理 3.12] 的证明得出。第三条结论由命题 1.9 得出。□

2.5. 下列局部化映射在本文中起着重要作用。对于 U 中的所有闭点 u 以及 Z中的所有闭点 z ，拉回给出态射

$$\mathrm{loc}_u : \mathrm{Bun}_{G,U} \to \mathrm{Bun}_{G,\mathcal{O}_u} \text{ and } \mathrm{loc}_z : \mathrm{Bun}_{G,U} \to \mathrm{Bun}_{G,F_z} .$$

定义。
a) 记

$$\mathrm{loc} : \mathrm{Bun}_{G,U} \to \prod_u \mathrm{Bun}_{G,\mathcal{O}_u} \times \prod_z \mathrm{Bun}_{G,F_z}$$

为由 $\{\mathrm{loc}_u\}_u$ and $\{\mathrm{loc}_z\}_z$ 诱导的态射，其中 u 遍历 U 的闭点，而 z 遍历 Z。b) 记 $\mathrm{Bun}_{G,\mathbb{A}}$ 为预栈 $\lim_{\longrightarrow U} \prod_u \mathrm{Bun}_{G,\mathcal{O}_u} \times \prod_z \mathrm{Bun}_{G,F_z}$ on $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$，其中 U 遍历 C 的稠密开子概形。c) 记 $\mathrm{loc} : \mathrm{Bun}_{G,F} \to \mathrm{Bun}_{G,\mathbb{A}}$ 为通过取 a) 的 $\lim_{\longrightarrow U}$ 得到的态射。

命题 2.4 表明，b) 中的过渡态射是忠实的，因此 $\mathrm{Bun}_{G,\mathbb{A}}$ 是一个小 v-叠。

2.6. 研究 $\mathrm{Bun}_{G,U}$ 时，有以下改变 U 的机制。

引理。对于 U 的所有稠密开子概形 U'，方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bun}_{G,U} & \xrightarrow{\mathrm{loc}} & \prod_u \mathrm{Bun}_{G,\mathcal{O}_u} \times \prod_z \mathrm{Bun}_{G,F_z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Bun}_{G,U'} & \xrightarrow{\mathrm{loc}} & \prod_{u'} \mathrm{Bun}_{G,\mathcal{O}_{u'}} \times \prod_{z'} \mathrm{Bun}_{G,F_{z'}} \end{array}$$

是笛卡尔的，其中 u 遍历 U' 的闭点， z' 遍历 $C \smallsetminus U'$。类似地，方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bun}_{G,U} & \xrightarrow{\mathrm{loc}} & \prod_u \mathrm{Bun}_{G,\mathcal{O}_u} \times \prod_z \mathrm{Bun}_{G,F_z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Bun}_{G,F} & \xrightarrow{\mathrm{loc}} & \mathrm{Bun}_{G,\mathbb{A}} \end{array}$$

是笛卡尔的。

证明。注意， $\{U'^{\mathrm{an}_S}\} \cup \{\mathrm{Spa}\ \mathcal{O}_c \times S\}_c$ 是 $U^{\mathrm{an}S}$ 的开覆盖，其中 c 遍历 $U \smallsetminus U'$。因此，第一个结论由粘合得出，第二个结论由对第一个结论取 $\lim_{\longrightarrow U'}$ 得出。□

2.7. 我们使用 局部 Hartl– Pink 曲线上的 G-丛栈中的半稳定轨迹，按如下方式定义一个整体类比。记 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,F_v}(S)$ 为 $\mathrm{Bun}_{G,F_v}(S)$ 中那些对象构成的全子范畴：它们在由命题 2.4 给出的识别下，在 $\mathrm{Bun}_{G,F_v}(\mathrm{Spa}\ \mathbb{F}_v \times S)$ 中的像属于 [25, Section III.4.2] 中的半稳定轨迹。于是 [25, Theorem III.4.5] 蕴含 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,F_v}$ 是 Bun_{G,F_v} 的开子栈，并且 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,F_v}$ 到 $\mathbb{F}_v$ 的基变换等于 [25,Section III.4.2] 中的半稳定轨迹。

定义。

a) 用 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,U}$ 表示 $\mathrm{Bun}\prod_u \mathrm{Bun}_{G,\mathcal{O}_u}\times\prod_z \mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,F_z}$ 在 $\mathrm{Bun}_{G,U}$ 中的局部化原像。
b) 用 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,F}$ 表示 $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$上的预栈 $\varinjlim_U \mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,U}$。

如定义 2.2.b) 所述，$\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,\,F}$ 是一个小 v-栈。由于 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,\,U}\subseteq \mathrm{Bun}_{G,\,U}$是一个开子栈，我们看到 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,\,F}\subseteq\mathrm{Bun}_{G,\,F}$ 也是一个开子栈。命题 2.4 表明 $\mathrm{Bun}_{G,\,\mathcal{O}_v}\to\mathrm{Bun}_{G,\,F_v}$经由 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,\,F_v}$分解，因此对于 U 的所有稠密开子概形 U'，引理 2.6 蕴含 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,\,U'}$在 $\mathrm{Bun}_{G,\,U}$ 中的原像等于 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,\,U}$。

2.8. 全局 Hartl–Pink 曲线上的 G-丛也具有如下意义下的平凡轨迹。记 $\mathrm{Bun}^{1}_{G,\,U}$ 为 $\mathrm{Bun}_{G,\,U}$ 的子栈，其 S-点由这样的对象组成：对于 S 的所有几何点 s，它在 $\mathrm{Bun}_{G,\,U}(s)$ 中的像都是平凡的。考虑态射 $*\to\mathrm{Bun}_{G,\,U}$，它对应于对所有 S 都取平凡对象，并且分解为态射 $*\to\mathrm{Bun}^{1}_{G,\,U}$。命题 1.7 将$G(A)$ 与 $*\times_{\mathrm{Bun}^{1}_{G,\,U}}*$ 识别为群 v-层，因此下降给出一个态射

$$*/\underline{G(A)}\to\mathrm{Bun}^{1}_{G,U}\,.$$

定理。子栈 $\mathrm{Bun}^{1}_{G,\,U}\subseteq\mathrm{Bun}_{G,\,U}$ 是开子空间，且 $*/G(A)\to\underline{\mathrm{Bun}^{1}_{G,\,U}}$ 是一个同构。

证明。设 $(\mathscr{G},\ \phi)$ 是 $\mathrm{Bun}_{G,\,U}(S)$ 中的一个对象。我们断言

$$\big\{\bar{s}\in|S|\mid\text{the image of }(\mathscr{G},\phi)\text{ in }\mathrm{Bun}_{G,U}(\bar{s})\text{ is trivial}\big\}$$

是 $|S|$的一个开子集。为此，将 S 替换为一个 pro-´etale 覆盖后，我们可以假设 S 是严格全不连通的。注意，上述子集包含于

$$\big\{\bar{s}\in|S|\mid\text{the image of }(\mathscr{G},\phi)\text{ in }\mathrm{Bun}_{G,F_z}(\bar{s})\text{ is trivial for all }z\text{ in }Z\big\},$$

这是由 [25, 定理 III.2.4]得到的 $|S|$ 的一个开子集。因此，将 S 替换为一个开子空间后，我们可以假设，对于所有 z 属于 Z 且 S 的几何点 s，$(\mathscr{G},\ \phi)$ 在 $\mathrm{Bun}_{G,\,F_z}(s)$ 中的像都是平凡的。对于所有 V 属于 $\mathrm{Rep}_C G$，这意味着 $(\mathscr{G}(V)\ \phi(V))$ 在 $\mathrm{Bun}_{F_z}(S)$ 中的像对所有 z 属于 Z 都具有斜率为零，因此定理 1.14 表明，$(\mathscr{G},\ \phi)$ 对应于一个正合张量函子

$$\mathrm{Rep}_C G\to\{\text{pro-étale }\underline{\mathscr{O}_U}\text{-local systems on }S\}.$$

令 $\{U_1,U_2\}$ 为引理 1.12 中 U 的开覆盖。对于 $\{1,2\}$ 中的所有 i，记 A_i 为 U_i 的整体截面，记 A_{12} 为 $U_1\cap U_2$ 的整体截面。由于 $\mathrm{Pic}\,U_i=1$，秩为 n $\mathscr{O}_{U_i}$ 的局部系统等价于 $\mathrm{GL}_n(A_i)$-扭子。因此，由 [25, 引理 III.2.6]可知，S 上的 $\mathscr{O}_{U_i}$-局部系统是平凡的，所以 $(\mathscr{G},\phi)$ 对应于两个正合张量函子

$$\Big\{\mathrm{Rep}_C G\to\{\text{finite free }\underline{A_i}(S)\text{-modules}\}\Big\}_i$$

以及它们经后复合后之间的一个同构

$$\{\text{finite free }\underline{A_i}(S)\text{-modules}\}\to\{\text{finite free }\underline{A_{12}}(S)\text{-modules}\}.$$

由于 A_i 是离散的，我们有 $\mathrm{Spec}\ A_i(\underline{S})=\mathrm{SpecCont}(\pi_0(|S|)\ A_i)=\pi_0(|S|)\times U_i$。因此，命题 2.1 和粘合表明，$(\mathscr{G},\phi)$ 对应于 $\pi_0(|S|)\times U$ 上的一个 ´etale G-扭子 $\mathscr{F}$。

对于所有 $s\,\mathrm{in}\ |S|$，注意到 $|s|\times U\xrightarrow{\sim}\varprojlim_N(N\times U)$，其中 N遍历 s 在 $\pi_0(|S|)$ 中的像的紧邻域，且过渡态射是仿射的。

因此，如果 $\mathscr{F}|_{|s|\times U}$ 是平凡的，那么对于 s 在 $\pi_0(|S|)$ 中的像的某个紧邻域 N， $\mathscr{F}|_{N\times U}$ 也是平凡的。于是，$(\mathscr{G},\ \phi)$ 在 $\mathrm{Bun}_{G,\ U}(N)$ 中的像是$\widetilde{}$平凡的，其中 N 表示 N 在 S 中的原像。随着 s 变化，即得所述结论。 −

该论断推出第一个陈述。对于第二个陈述，由上文可知， $*\to\mathrm{Bun}^{1}_{G,\ U}$ 是一个 pro-´étale 覆盖，因此通过下降即可得到所需结果。□

2.9. 回顾一下关于 Kottwitz 集的一些记号。在本小节中，我们在 Spd $\mathbb{F}_q$上工作。设 K 是 $\{F, F_v\}$¯之一，按照第 10.2], 小节中的记法，用 $B(K,G)$表示 Kottwitz 集，并按照定义 10.2]中的记法，用 $B(K,G)_{\mathrm{basic}}$ 表示其中基本元素构成的子集。对于 $B(K,G)$中的任意 b ，按照第 2.6]小节中的记法，用 G_b 表示相应的定义在 K 上的连通约化群。记 $\mathrm{loc}_v\colon B(F,G)\to B(F_v,G)$ 为局部化映射，如 [49, (10.7)], 所示，并回顾一下， $B(F,G)$自然同构于 $G(F\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_q)$中的 $\mathrm{Frob}^{\mathbb{F}_q}$-共轭类集合，见定理 12.2]。

与局部情形 [25, 推论 III.4.3], 类似，在全局情形中，我们可以通过如下扭曲，在平凡轨迹与其他基本轨迹之间转换。设 b是 $G(U_{\mathbb{F}_q})$ 中的一个元素，其在 $B(F,G)$ 中的像是基本的。记 $\mathrm{Bun}^{b}_{G,\ U}$为 $\mathrm{Bun}_{G,\ U}$ 的子栈，其中 S-点由满足以下条件的对象组成：对于 S 的所有几何点$\bar{s}$，其在 $\mathrm{Bun}_{G,\ U}(\bar{s})$ 中的像都同构于 $(G,\ (\mathrm{Frob}_S^{-1})^*\circ b)$。在 $U_{\mathbb{F}_q}$ 上通过 ad b进行扭曲得到一个在 U 上的抛物型群概形 G_b，并且由于 b是基本的， [33, (5.2)]表明 G_b 的一般纤维与上述概念一致。

命题。这诱导出一个自然同构 $\mathrm{Bun}_{G,\ U}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Bun}_{G_b,\ U}$ ，使得 $\mathrm{Bun}^{b}_{G,\ U}$ 的像等于 $\mathrm{Bun}^{1}_{G_b,\ U}$。

证明。对于 $\mathrm{Bun}_{G,\ U}(S)$ 中的所有对象 $(\mathscr{G},\ \phi)$，我们有一个自然同构

$$\underline{\mathrm{Isom}}(\mathscr{G},G)\xrightarrow{\sim}\underline{\mathrm{Isom}}(\mathrm{Frob}_S^*\mathscr{G},\mathrm{Frob}_S^*G)=\mathrm{Frob}_S^*\,\underline{\mathrm{Isom}}(\mathscr{G},G),$$

其中，左箭头表示先与 ϕ^{-1} 预合成：$\mathrm{Frob}_S^*\mathscr{G}\xrightarrow{\sim}\mathscr{G}$，再与 $(\mathrm{Frob}_S^{-1})^*\circ b$： $G\xrightarrow{\sim}\mathrm{Frob}_S^*G$ 后合成。由于 $(G_b)_{U_{\mathbb{F}_q}}=G_{U_{\mathbb{F}_q}}$ ，且我们在 Spd $\mathbb{F}_q$ 上工作，因此 $\mathrm{Isom}(-,G)$ 诱导所需的同构 $\mathrm{Bun}_{G,\ U}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Bun}_{G_b,\ U}$。□

2.10. 对任意小 v-叠 X，记 X^{red} 为其约化，即对所有完美 $\mathbb{F}_p$-代数 B [31,，由 Spec $B\mapsto\mathrm{Hom}(\mathrm{Spd}\ B,\ X)$ 给出的完美 v-栈（命题 3.7]）。我们通过证明以下定理 C 的一般化来作结。

定理。完美 ν-栈 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{red}}_{G,\ U}$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上是以下对象的 ν-层化：

$$(*)\qquad \mathrm{Spec}\,B\mapsto\left\{\begin{array}{l}G\text{-}torsors\ \mathscr{G}\ \ on\ U_B\ \ equipped\ with\\ an\ \ isomorphism\ \phi:\mathscr{G}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Frob}_B^*\mathscr{G}\end{array}\right\}.$$

此外，当 $\mathrm{Spec}\,B$ 的每个连通分支都是赋值环时，无需进行层 -需要进行.....化。

证明。利用 [11, 引理 6.2] 并取完美化，我们看到，第二个陈述中的 Spec B 构成了 {仿射完美概形}上 v-拓扑的一个基。因此，只需证明 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{red}}_{G,\ U}$ 在此类 Spec B 上的限制自然等价于(∗)。由于 Spa $B((t^{1/q^\infty}))\to$ Spd B 在类完美空间中是满射且可表示的，这可由命题 2.1 和定理1.15推出。□

3. Shtukas and the fiber product conjecture

本节的目标是证明定理 D。首先，我们回顾全局 shtuka 的代数栈，并证明其关联的 v-栈具有简单的形式。接下来，我们回顾局部 Shtuka 的 v-栈。最后，我们定义霍奇–泰特周期映射的函数域类比，并证明定理 D。

3.1. 现在先介绍一些关于 G 在 F上的更多记号。取 F的一个可分闭包 $\overline{F}$，并记 F的相应绝对韦伊群为 W_F。于是，全局类域论给出一个同构 $F^\times\backslash\mathbb{A}^\times \xrightarrow{\sim} W_F^{\mathrm{ab}}$，它将一致化子映到几何弗罗贝尼乌斯。令 T 为 G 在 F上的一个极大子环面，令 $B \subseteq G_F$ 为一个包含 T_F 的博雷尔子群，并记 $X_*^+(T)$ 为 T_F 的支配余特征集。记 $\pi_1(G)$为 T_F 的余特征群除以由余根生成的子群。

3.2. 回顾全局 shtuka 的栈。令 I 为一个有限集，并令 $\mu_\bullet = (\mu_i)_{i\in I}$属于 $X_*^+(T)^I$。对于所有 I中的 i，记 C在 μ_i的定义域中的正规化为 C_i。对于所有在 $\mathbb{F}_q$ 上的仿射概形 Spec B 以及态射

$$x : \operatorname{Spec} B \to C_i$$

在 $\mathbb{F}_q$上，记 $\Gamma_x \subseteq C_B$ 为相应态射 Spec $B \to C$ 在 $\mathbb{F}_q$上的图。令 N 为 C 的有限闭子概形，并记 N_i 为 N 在 C_i 中的原像。

定义。记 $\mathrm{Sht}^I_{G,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i\smallsetminus N_i}$ 为 $\{$上的预栈，其对象定义在 $\mathbb{F}_q\}$ 上的仿射概形中；其 Spec B-点参数化由以下数据组成：

i) 对所有 i，一个态射 x_i: Spec $B \to C_i \smallsetminus N_i$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上；
ii) 一个定义在 C_B 上的 G-丛 $\mathscr{G}$；iii) 一个 G-丛的同构

$$\phi : \mathscr{G}|_{C_B\smallsetminus\sum_{i\in I}\Gamma_{x_i}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frob}_B^*\,\mathscr{G}|_{C_B\smallsetminus\sum_{i\in I}\Gamma_{x_i}}$$

其沿 $\{\Gamma_{x_i}\}_{i\in I}$ 的相对位置受 $\mu_\bullet$ 控制，

iv) 一个 G-丛的同构 ψ: $\mathscr{G}|_{N_B} \xrightarrow{\sim} G$，使得下图

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G}|_{N_B} & \xrightarrow{(\phi)_N} & \mathrm{Frob}_B^*\,\mathscr{G}|_{N_B} \\ \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ G & \xrightarrow{(\mathrm{Frob}_B^*)^{-1}} & \mathrm{Frob}_B^*\,G \end{array}$$

交换。

记 $\mathrm{Sht}^I_{,G\ ,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i\smallsetminus N_i}$ 为 $\mathrm{Sht}^I_{G,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i\smallsetminus N_i}$ 的开子栈，其 Spec B-点由满足以下条件的 $(\{x_i\}_{i\in I}, \mathscr{G}, \phi, \psi)$ 构成：同构 ϕ 沿 $\{\Gamma_{x_i}\}_{i\in I}$ 的相对位置等于 $\mu_\bullet$。

回顾一下，$\mathrm{Sht}^I_{G,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i\smallsetminus N_i}$ 是一个 Deligne–Mumford 叠，它在 $\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N_i$ [54, 上分离且局部有限型（见命题 5.6], ）；其开子栈 $\mathrm{Sht}^{I,G}_{,\mu_\bullet,N}{}^{\circ}|_{\prod_{i\in I} C_i\smallsetminus N_i}$ 在 $\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N_i$ 上光滑。

对于所有 C 的有限闭子概形 $N' \supseteq N$，记 $K_N^{N'}$ 为 $G(\mathscr{O}_{N'}) \to G(\mathscr{O}_N)$ 的核。回忆一下，$\mathrm{Sht}^I_{G,\ \mu_\bullet,\ N'}|_{\prod_{i\in I} C_i\smallsetminus N_i'} \to \mathrm{Sht}^I_{G,\ \mu_\bullet,\ N}|_{\prod_{i\in I} C_i\smallsetminus N_i'}$是有限伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为 $K_N^{N'}$ [54,命题 5.5]。

3.3. 为方便起见，我们将全局 shtuka 的 Harder–Narasimhan 分层打包为一个参数 t，如下所示。根据 [5, 命题 2.2(b)], , 存在一个 SL_h-丛 $\mathscr{V}$，定义在 C 上，并且存在一个群概形的闭嵌入 $\iota\colon G^{\mathrm{ad}} \to \mathrm{Aut}(\mathscr{V})$，其为定义在 C 上的群概形之间的闭嵌入，使得 $\mathrm{Aut}(\mathscr{V})/\underline{G^{\mathrm{ad}}}$ 满足 [5, (2.1)]。令 t 为一个正整数。

定义。记 $\mathrm{Sht}_G^{I,\leq t}{}_{,,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N_i}$ 为.....的开子栈

$$\mathrm{Sht}^I_{G,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N_i}$$

其 Spec B-点由满足以下条件的 $(\{x_i\}_{i\in I}, \mathscr{G}, \phi, \psi)$ 组成： C_B 上的 SL_h-扭子 $\iota_*(\mathscr{G}$伴随$)$ 的 Harder–Narasimhan 多边形被 $t2\rho^\vee$界定，其中 $2\rho^\vee$ 表示 SL_h中所有正余根之和。

回顾一下，当 $\deg N$ 足够大时，根据命题 5.6], $\mathrm{Sht}_G^{I,\leq t}{}_{,,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N_i}$ 是 $\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N_i$ [54, 上拟射影概形的不交并。

3.4. 现在我们将全局 shtuka 的模空间转化为一个 v-栈。

定义。记 $(\mathrm{Sht}^I_{G,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N_i})^\diamondsuit$ 和 $(\mathrm{Sht}_G^{I,\leq t}{}_{,,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N_i})^\diamondsuit$ 为 $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$ 上的预栈，其 S-点分别由下式给出

$$(\mathrm{Sht}^I_{G,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N_i})(R) \text{ and } (\mathrm{Sht}^{I,\leq t}_{G,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N_i})(R),$$

。

3.5. **命题**。

1) 当$\deg N$ 足够大时，*adic* 空间$\mathrm{Sht}_G^{I,\leq t}{}_{,,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N_i}$ 在 $\mathbb{F}_q$上的$(\mathrm{Sht}_G^{I,\leq t}{}_{,,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N_i})^\diamondsuit$ 等于$(-)^\diamondsuit$。

2) 对于任意递增族 $\{N_a\}_{a\geq 1}$，其中的元素是 C 的有限闭子概形，且当 $a\to\infty$时$\deg N_a \to \infty$ 趋于无穷，态射

$$\varprojlim_{a\geq 1}(\mathrm{Sht}^I_{G,\mu_\bullet,N_a}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus (N_a)_i})^\diamondsuit \to \varprojlim_{a\geq 1}\Big(\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus (N_a)_i\Big)^\diamondsuit$$

是分离的、在局部空间钻石中可表示的，并且局部有限维数。trg *3)* 预栈$(\mathrm{Sht}^I_{G,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N_i})^\diamondsuit$ 是一个小 *v*-叠，

$$(\mathrm{Sht}^{I,\leq t}_{G,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N_i})^\diamondsuit \subseteq (\mathrm{Sht}^I_{G,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N_i})^\diamondsuit$$

是一个开子栈，并且对于 C 的所有有限闭子概形 $N'\supseteq N$，

$$(\mathrm{Sht}^I_{G,\mu_\bullet,N'}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N'_i})^\diamondsuit \to (\mathrm{Sht}^I_{G,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N'_i})^\diamondsuit$$

是群为 $K_N^{N'}$ 的有限伽罗瓦覆盖。

证明。第 1) 部分由引理 1.2 和 3.3 得出。对于第 2) 部分，由第 1) 部分可知，对于所有正整数 t，态射

$$\varprojlim_{a\geq 1}(\mathrm{Sht}^{I,\leq t}_{G,\mu_\bullet,N_a}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus (N_a)_i})^\diamondsuit \to \varprojlim_{a\geq 1}\Big(\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus (N_a)_i\Big)^\diamondsuit$$

是分离的、在局部空间钻石中可表的，且局部有限维。回忆一下，$\mathrm{Sht}^I_{G,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N_i}$ 是递增并 $\bigcup_{t\geq 1}\mathrm{Sht}_G^{I,\leq t}{}_{,,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N_i}$。由于 $\mathrm{Sht}_G^{I,\leq t}{}_{,,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N'_i}$ 在 $\mathrm{Sht}^I_{G,\mu_\bullet,N'}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N'_i}$ 中的原像等于

$$\mathrm{Sht}^{I,\leq t}_{G,\mu_\bullet,N'}|_{\prod_{i\in I} C_i \smallsetminus N'_i}$$

并且 $(-)^\diamondsuit$ 保留开嵌入，取 $\bigcup_{t\geq 1}$ 即可得到所需结果。

对于第 3) 部分，设 v 是 $C\smallsetminus N'$的一个闭点，且 t 是一个正整数。对于所有正整数 m，结合自然等价 $(\mathrm{Spec}\,R)_{\text{fét}}\xrightarrow{\sim}S_{\text{fét}}$ 与 3.2 可知，$(\mathrm{Sht}_G^{I,\leq t}{}_{,,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus(N+v)_i})^{\lozenge}$ 的 S-点参数化了 S 上的 K_N^{N+mv}-丛S'，并附带一个K_N^{N+mv}-等变态射

$$S'\to(\mathrm{Sht}^{I,\leq t}_{G,\mu_\bullet,N+mv}|_{\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus(N+v)_i})^{\lozenge}.$$

令 m 足够大，1) 表明 $(\mathrm{Sht}_G^{I,\leq t}{}_{,,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus(N+v)_i})^{\lozenge}$ 是一个小 v-叠，态射

$$(\mathrm{Sht}^{I,\leq t}_{G,\mu_\bullet,N'}|_{\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus(N'+v)_i})^{\lozenge}\to(\mathrm{Sht}^{I,\leq t}_{G,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus(N'+v)_i})^{\lozenge}$$

是群为 $K_N^{N'}$ 的有限伽罗瓦覆盖，并且改变 t可得到开嵌入。因此，取$\bigcup_{t\geq 1}$ 后，将其限制到 $\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus(N+v)_i$，即可得到所需结论。最后，由于 $\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus N_i$可由形如 $\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus(N+v)_i$的开子空间覆盖，取$\bigcup_v$ 即可得到所需结果。□

3.6. 反过来，我们可以从其关联的 v-栈中恢复全局 shtuka 的模空间（差一个完美化）：

推论。
1）当 N 足够大时，$(\mathrm{Sht}_G^{I,\leq t}{}_{,,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus N_i})^{\lozenge,\mathrm{red}}$ 与 $\mathbb{F}_q$ 上的完美概形 $(\mathrm{Sht}_G^{I,\leq t}{}_{,,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus N_i})^{\mathrm{perf}}$ 自然同构。*2*）完美 *v*-栈 $(\mathrm{Sht}^I_{G,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus N_i})^{\lozenge,\mathrm{red}}$ 自然同构于

$$(\mathrm{Sht}^I_{G,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus N_i})^{\mathrm{perf}}.$$

证明。对于第 1）部分，命题 3.5.1）表明，$(\mathrm{Sht}_G^{I,\leq t}{}_{,,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus N_i})^{\lozenge}$ 等于 $\lozenge$ adic 空间 $(\mathrm{Sht}_G^{I,\leq t}{}_{,,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus N_i})^{\mathrm{perf}}$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上的 $-$。[6] 因此，由 [31, 定理 2.32] 可得所需结果。

对于第 2) 部分，设 v 是 C 的一个闭点。对于所有完美的 $\mathbb{F}_p$-代数 B，函子 Spd 诱导出一个自然等价 $(\mathrm{Spec}\ B)_{\text{fét}}\xrightarrow{\sim}(\mathrm{Spd}\,B)_{\text{fét}}$ [48, 推论 5.4], 因此命题 3.5.3) 表明，对于所有正整数 m，$(\mathrm{Sht}_G^{I,\leq t}{}_{,,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus(N+v)_i})^{\lozenge,\mathrm{red}}$ 的 $\mathrm{Spec}\,B$-点参数化了定义在 $\mathrm{Spec}\,B$ 上、带有 K_N^{N+mv}-等变态射的 $\mathrm{Spec}\,B'$ 上的 K_N^{N+mv}-丛

$$\mathrm{Spec}\,B'\to(\mathrm{Sht}^{I,\leq t}_{G,\mu_\bullet,N+mv}|_{\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus(N+v)_i})^{\lozenge,\mathrm{red}}.$$

令 m 充分大，由第 1) 部分和 3.2 可知，$(\mathrm{Sht}_G^{I,\leq t}{}_{,,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus(N+v)_i})^{\lozenge,\mathrm{red}}$ 自然同构于 $(\mathrm{Sht}_G^{I,\leq t}{}_{,,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus(N+v)_i})^{\mathrm{perf}}$。最后，取 $\bigcup_v\bigcup_{t\geq 1}$ 即得所需结果。□

3.7. 接下来，我们回顾局部 Shtuka 的模空间。对于 C 上的所有闭点 v，固定 F_v 的一个可分闭包 F_v，并将相应的 F_v 的绝对韦伊群记为 W_{F_v}。将 F_v 的完备化记为 $\mathbb{C}_v$。固定一个在 $F\to F_v$ 上方的嵌入 $F\to F_v$，它诱导一个同态 $W_{F_v}\to W_F$。

令 $\{I_z\}_z$ 为 I的一个划分，其中 z 遍历 Z。对于所有属于 Z的 z，记 μ_z 为 $\mu_\bullet$到 $X_*^+(T)^{I_z}$的投影；对于所有属于 I_z的 i，记 z_i为由 $F\to F_z$诱导的、位于 z上方的 C_i的闭点。对于所有仿射完美空间 $S=\mathrm{Spa}(R,R^+)$

[6]需要提醒的是，当 $\mathrm{Spec}\,B$ 遍历完美概形 $(\mathrm{Sht}_G^{I,\leq t}{}_{,,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus N_i})^{\mathrm{perf}}$ 的仿射开子空间时，这是由 $\mathrm{Spa}\,B$ 粘合而成的。相反，这是由 $\mathrm{Spa}(B,\mathbb{Z}^{\sim})$ 粘合而成的。

在 $\mathbb{F}_z$ 上，对于态射 $x\colon S\to \operatorname{Spa}\mathcal{O}_{z_i}$ 位于 $\mathbb{F}_z$ 上方的情形，记 $\Gamma_x\subseteq \operatorname{Spa}\mathcal{O}_z\times_{\mathbb{F}_z} S$ 为相应态射 $S\to \operatorname{Spa}\mathcal{O}_z$ 位于 $\mathbb{F}_z$ 上方的图。记 $\prod_{i\in I_z}\operatorname{Spa}\mathcal{O}_{z_i}$ 为这些 $\operatorname{Spa}\mathcal{O}_{z_i}$ 位于 $\mathbb{F}_z$ 上方的积，并记 $\prod_{i\in I_z}\operatorname{Spa}F_{z_i}$ 为这些 $\operatorname{Spa}F_{z_i}$ 位于 $\mathbb{F}_z$ 上方的积。令 n_z 为正整数。

定义。[7]
a) 记 $\mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,\mu_z}|_{\prod_{i\in I_z}\operatorname{Spd}\mathcal{O}_{z_i}}$ 为 Perf 上的预栈，其 S-点将由以下数据组成：

i) 对所有 i 属于 I_z，一个态射 $x_i\colon S\to\operatorname{Spa}\mathcal{O}_{z_i}$ over $\mathbb{F}_z$；ii) $\operatorname{Spa}\mathcal{O}_z\times_{\mathbb{F}_z}S$ 上的一个 G-挠子 $\mathscr{G}$；iii) 一个 G-挠子之间的同构

$$\phi:\mathscr{G}|_{\operatorname{Spa}\mathcal{O}_z\times_{\mathbb{F}_z}S\smallsetminus\sum_{i\in I_z}\Gamma_{x_i}}\xrightarrow{\sim}(\mathrm{Frob}_S^{\deg z})^*\mathscr{G}|_{\operatorname{Spa}\mathcal{O}_z\times_{\mathbb{F}_z}S\smallsetminus\sum_{i\in I_z}\Gamma_{x_i}}$$

其沿 $\{\Gamma_{x_i}\}_{i\in I_z}$ 的相对位置被 μ_z 所界定，
b) 记 $\mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,\mu_z,n_z}|_{\prod_{i\in I_z}\operatorname{Spd}F_{z_i}}$ 为 Perf 上的预栈，其 S-点将由一个 $\mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,\mu_z}|_{\prod_{i\in I_z}\operatorname{Spd}F_{z_i}}$ 的 S-点 $(\{x_i\}_{i\in I_z},\mathscr{G},\phi)$ 以及附加以下数据组成：

iv) G-挠子的一个同构 $\psi\colon \mathscr{G}|_{n_z z\times_{\mathbb{F}_z}S}\xrightarrow{\sim}G$ 使得该正方形

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{G}|_{n_z z\times_{\mathbb{F}_z}S} & \xrightarrow{(\phi)_{n_z z}} & (\mathrm{Frob}_S^{\deg z})^*\mathscr{G}|_{n_z z\times_{\mathbb{F}_z}S}\\ \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi}\\ G & \xrightarrow{(\mathrm{Frob}_S^*)^{-\deg z}} & G\end{array}$$

交换。$\circ$
记 $\mathrm{LocSht}^{I_z,G}_{,\mu_z,n_z}|_{\prod_{i\in I_z}\operatorname{Spd}F_{z_i}}$ 为 $\mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,\mu_z,n_z}|_{\prod_{i\in I_z}\operatorname{Spd}F_{z_i}}$ 的开子栈，由满足同构 ϕ 沿 $\{\Gamma_{x_i}\}_{i\in I_z}$ 的相对位置等于 $\mu_\bullet$ 的 $(\{x_i\}_{i\in I_z},\mathscr{G},\phi,\psi)$ 组成。

利用 [67, 命题 19.5.3] 以及 [25, 命题 III.1.3], 的证明，我们看到 $\mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,\mu_z}|_{\prod_{i\in I_z}\operatorname{Spd}\mathcal{O}_{z_i}}$ 与 $\mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,\mu_z,n_z}|_{\prod_{i\in I_z}\operatorname{Spd}F_{z_i}}$ 是小v-叠。

3.8. 在局部和整体情形中，shtuka 以下述方式在 Hartl–Pink 曲线上诱导出丛。回顾一下，选取 $\mathcal{O}_z$ 的一个赋值参数，可以将 $\operatorname{Spa}\mathcal{O}_z\times_{\mathbb{F}_z}S$ 与 S 上的开单位圆盘等同起来。对于其中所有的对象 $(\{x_i\}_{i\in I_z},\ \mathscr{G},\ \phi)$

$$(\mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,\mu_z}|_{\prod_{i\in I_z}\operatorname{Spd}\mathcal{O}_{z_i}})(S),$$

$|S|$ 的拟紧性表明，存在一个以原点为中心的闭圆盘 $D\subseteq\operatorname{Spa}\mathcal{O}_z\times_{\mathbb{F}_z}S$over S，使得 D 对所有属于 I_z 的 i 都包含 Γ_{x_i}。因此，ϕ限制为一个同构 $\mathscr{G}|_{\operatorname{Spa}F_z\times_{\mathbb{F}_z}S\smallsetminus D}\xrightarrow{\sim}(\mathrm{Frob}_S^{\deg z})^*\mathscr{G}|_{\operatorname{Spa}F_z\times_{\mathbb{F}_z}S\smallsetminus D}$。通过 Frobenius 延拓以及命题 2.4，这对应于 $\mathrm{Bun}_{G,\ F_z}(S)$ 中的一个对象，因此这一构造整体上给出了一个态射

$$\mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,\mu_z}|_{\prod_{i\in I_z}\operatorname{Spd}\mathcal{O}_{z_i}}\to\mathrm{Bun}_{G,F_z}.$$

[7]这个定义与 [54], 中的记号并不一致，对此我们深表歉意。这个定义就是 *should* 将称为 LocSht 的定义，因为它参数化局部 Shtuka。[54] 中的定义还对标架（在等源意义下）进行参数化，因此类似于 Rapoport–Zink 空间。

记 $\prod_{i\in I}\mathrm{Spa}\ \mathcal{O}_{z_i}$ 为 $\prod_{z\in Z}\left(\prod_{i\in I_z}\mathrm{Spa}\ \mathcal{O}_{z_i}\right)$，并记 $\prod_{i\in I}^{\circ}\mathrm{Spa}\ \mathcal{O}_{z_i}$ 为其开子空间 $\left(\prod_{i\in I}\mathrm{Spa}\ \mathcal{O}_{z_i}\right)\times_{\prod_{i\in I}C_i}\left(\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus N_i\right)$。构造纤维积

$$\begin{array}{ccc}(\mathrm{Sht}^{I}_{G,\mu_\bullet,N}\mid_{\prod_{i\in I}^{\circ}\mathrm{Spa}\,\mathcal{O}_{z_i}})^{\Diamond} & \longrightarrow & \prod_{i\in I}^{\circ}\mathrm{Spa}\,\mathcal{O}_{z_i}\\ \downarrow & & \downarrow\\ (\mathrm{Sht}^{I}_{G,\mu_\bullet,N}\mid_{\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus N_i})^{\Diamond} & \longrightarrow & \left(\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus N_i\right)^{\Diamond}.\end{array}$$

对所有 z in Z如上进行论证，我们还得到一个态射

$$(\mathrm{Sht}^{I}_{G,\mu_\bullet,N}\mid_{\prod_{i\in I}^{\circ}\mathrm{Spa}\,\mathcal{O}_{z_i}})^{\Diamond}\to\mathrm{Bun}_{G,U}\,.$$

3.9. 现在我们描述全局 shtuka 的霍奇–泰特周期映射的类比。记 n_v 为 v 在 N中的重数，并记 $K_v^{n_v}$为 $G(\mathcal{O}_v)\to G(\mathscr{O}_{n_v v})$ 的核。记 $\mathrm{LocSht}^{I}_{G,\mu_\bullet,N}\mid_{\prod_{i\in I}^{\circ}\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_{z_i}}$为积

$$\prod_{\substack{z\in Z\\ n_z=0}}\mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,\mu_z}\mid_{\prod_{i\in I_z}\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_{z_i}}\times\prod_{\substack{z\in Z\\ n_z\geq 1}}\mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,\mu_z,n_z}\mid_{\prod_{i\in I_z}\mathrm{Spd}\,F_{z_i}},$$

并记 $K_{N\cap U}$为 $G(\mathbb{O}_U)\to G(\mathscr{O}_{N\cap U})$ 的核。

设 $(\{x_i\}_{i\in I},\mathscr{G},\phi,\psi)$ 是 $(\mathrm{Sht}^{I}_{G,\mu_\bullet,N}\mid_{\prod_{i\in I}^{\circ}\mathrm{Spa}\ \mathcal{O}_{z_i}})^{\Diamond}(S)$ 中的一个对象。对于所有 $z$in$Z$，按照引理 5.12] 的证明进行论证可得

$$(\{x_i\}_{i\in I_z},\mathscr{G}|_{\mathrm{Spa}\,\mathcal{O}_z},\phi|_{\mathrm{Spa}\,\mathcal{O}_z})$$

对应于 $(\mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,\ \mu_z}\mid_{\prod_{i\in I_z}\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_{z_i}})(S)$ 中的一个对象。若 n_z 为正，则 $(\psi)^{n_z z}$ 对应于将此对象提升到 $(\mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,\ \mu_z,\ n_z}\mid_{\prod_{i\in I_z}\mathrm{Spd}\,F_{z_i}})(S)$，因此总之我们得到一个态射

$$(\mathrm{Sht}^{I}_{G,\mu_\bullet,N}\mid_{\prod_{i\in I}^{\circ}\mathrm{Spa}\,\mathcal{O}_{z_i}})^{\Diamond}\to\mathrm{LocSht}^{I}_{G,\mu_\bullet,N}\mid_{\prod_{i\in I}^{\circ}\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_{z_i}}$$

在 $\prod_{i\in I}^{\circ}\mathrm{Spd}\ \mathcal{O}_{z_i}$ 上。对于 U 的所有闭点 u，命题 2.4 表明

$$(\mathscr{G}|_{\mathrm{Spa}\,\mathcal{O}_u},\phi|_{\mathrm{Spa}\,\mathcal{O}_u})$$

对应于 $(*/G(\mathcal{O}_u))(S)$ 中的一个对象。若 u 属于 N，则 $(\psi)^{n_u u}$ 对应于将此对象提升到 $(*/K_u^{n_u})(S)$，因此总之我们也得到一个态射

$$(\mathrm{Sht}^{I}_{G,\mu_\bullet,N}\mid_{\prod_{i\in I}^{\circ}\mathrm{Spa}\,\mathcal{O}_{z_i}})^{\Diamond}\to*/\underline{K_{N\cap U}}.$$

3.10. 最后，我们得到定理 D。

定理。 小 v-叠的方形

$$\begin{array}{ccc}(\mathrm{Sht}^{I}_{G,\mu_\bullet,N}\mid_{\prod_{i\in I}^{\circ}\mathrm{Spa}\,\mathcal{O}_{z_i}})^{\Diamond} & \longrightarrow & */\underline{K_{N\cap U}}\times\mathrm{LocSht}^{I}_{G,\mu_\bullet,N}\mid_{\prod_{i\in I}^{\circ}\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_{z_i}}\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathrm{Bun}_{G,U} & \xrightarrow{\ \mathrm{loc}\ } & */\underline{G(\mathbb{O}_U)}\times\prod_{z\in Z}\mathrm{Bun}_{G,F_z}\end{array}$$

是笛卡尔的。

证明。对于所有的 z，设其位于 Z 中，并令 $D_z \subseteq \operatorname{Spa}\mathcal{O}_z \times_{\mathbb{F}_z} S$ 为以原点为中心的闭圆盘；记 $D_z^{\cup}$ 为闭子空间

$$\coprod_{r\in\mathbb{Z}/\deg z} \operatorname{Frob}_S^{-r}(D_z) \subseteq \coprod_{r\in\mathbb{Z}/\deg z} \operatorname{Spa}\mathcal{O}_z \times_{\mathbb{F}_z,r} S \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spa}\mathcal{O}_z \times S,$$

其中 $\operatorname{Spa}\mathcal{O}_z \times_{\mathbb{F}_z,\ r} S$ 表示 $\operatorname{Spa}\ \mathcal{O}_z$ 与

$$S \longrightarrow \operatorname{Spa}\mathbb{F}_z \xrightarrow{\operatorname{Frob}_{\mathbb{F}_z}^r} \operatorname{Spa}\mathbb{F}_z$$

在 $\mathbb{F}_z$ 上，且该同构来自 [54, 引理 5.11]。于是

$$\Big\{U_S^{\mathrm{an}} \smallsetminus \bigcup_{z\in Z} D_z^{\cup}\Big\} \cup \{\operatorname{Spa}\mathcal{O}_z \times S\}_{z\in Z}$$

是 C_S^{an} 的一个开覆盖，因此我们可以将 $\mathrm{Bun}_{G,\ U}(S)$ 中的一个对象与 $(*/K_{N\cap U} \times \underline{\mathrm{LocSht}}^{I}_{G,\ \mu_\bullet,\ N}|_{\prod_{i\in I}^{\circ}\operatorname{Spd}\mathcal{O}_{z_i}})(S)$ 中的一个对象粘合起来，从而得到

i) 一个 S-点 $\{x_i\}_{i\in I}$，属于 $\prod_{i\in I}^{\circ}\operatorname{Spa}\mathcal{O}_{z_i}$；ii) 一个 G-挠子 $\mathscr{G}^{\mathrm{an}}$，定义在 C_S^{an} 上；iii) 一个 G-挠子之间的同构

$$\phi^{\mathrm{an}} : \mathscr{G}|_{C_S^{\mathrm{an}}\smallsetminus\sum_{i\in I}\Gamma_{x_i}} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Frob}_S^{*}\mathscr{G}^{\mathrm{an}}|_{C_S^{\mathrm{an}}\smallsetminus\sum_{i\in I}\Gamma_{x_i}}$$

其沿 $\{\Gamma_{x_i}\}_{i\in I}$ 的相对位置被 $\mu_\bullet$ 所界定，

iv) G-扭子的一个同构 ψ^{an}：$\mathscr{G}$一个$|_{N_S^{\mathrm{an}}} \xrightarrow{\sim} G$ 使得该方块

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G}^{\mathrm{an}}|_{N_S^{\mathrm{an}}} & \xrightarrow{(\phi^{\mathrm{an}})_N} & \operatorname{Frob}_S^{*}\mathscr{G}^{\mathrm{an}}|_{N_S^{\mathrm{an}}} \\ \downarrow{\scriptstyle \psi^{\mathrm{an}}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi^{\mathrm{an}}} \\ G & \xrightarrow{(\operatorname{Frob}_S^{-1})^{*}} & \operatorname{Frob}_S^{*} G \end{array}$$

交换。

最后，命题 2.1 和定理 A.19 表明，上述内容对应于（$\mathrm{Sht}^{I}_{G,\ \mu_\bullet,\ N}|_{\prod_{i\in I}^{\circ}\operatorname{Spa}\mathcal{O}_{z_i}}$）$^{\diamond}$（$S$）中的一个对象。□

4. Geometric consequences

本节中，我们将展示定理 D 的一些成果。首先，通过取约化，我们推导出定理 D 的一个代数类似，并解释这如何推出全局 shtuka 的 Langlands–Rapoport 猜想。接下来，我们利用定理 D 和 Beauville–Laszlo 均匀化所提供的图表来证明定理 A 和定理 B。最后，我们通过解释其与 Igusa簇的关系来结束本节。

4.1. 对所有 $z \in Z$，记 $\prod_{i\in I_z} z_i$ 为 z_i 在 $\mathbb{F}_z$ 上的积。让我们回顾 $\mathrm{Bun}_{G,\ F_z}$ 和 $\mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,\ \mu_z}|_{\prod_{i\in I_z}\operatorname{Spd}\mathcal{O}_{z_i}}$ 的以下代数类似。

定义。a) 记 $\mathscr{I}\mathrm{soc}_{G,\ F_z}$ 为定义在 {上的预栈，其中 $\mathbb{F}_q$} 上的仿射完美概形的 Spec B-点参数化由以下数据组成：Spec $F_z\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}B$ 上的 G-丛 $\mathscr{G}$，以及一个同构 ϕ：$\mathscr{G} \xrightarrow{\sim}\mathrm{Frob}_B^{*}\mathscr{G}$。b) 记 $\mathscr{L}\mathrm{ocSht}^{I_z}_{G,\ \mu_z}|_{\prod_{i\in I_z} z_i}$ 为定义在 {上的预栈，其中 $\mathbb{F}_z$}上的仿射完美概形的 Spec B-点参数化由以下数据组成：

i) 对所有 i in I_z，一个态射 x_i: Spec $B \to z_i$ over $\mathbb{F}_z$；ii) Spec $\mathcal{O}_z \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_z} B$上的一个 G-丛 $\mathscr{G}$；iii) 一个 G-丛的同构 ϕ: $\mathscr{G}|_{\operatorname{Spec} F_z \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_z} B} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Frob}_B^{\deg z})^* \mathscr{G}|_{\operatorname{Spec} F_z \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_z} B}$，其沿 $\{\Gamma_{x_i}\}_{i \in I_z}$ 的相对位置被 μ_z所界定，

注意到，[45, 命题 5.9] 和 [11, 注 4.2] 蕴含 $\mathscr{I}\mathrm{soc}_{G,F_z}$ 和$\mathscr{L}\mathrm{ocSht}^{I_z}_{G,\mu_z}|_{\prod_{i\in I_z} z_i}$ 是完美 v-栈。

4.2. 记 $\prod_{i\in I} z_i$ 为 $\prod_{z\in Z} \left(\prod_{i\in I_z} z_i\right)$。通过取约化，我们得到定理 3.10 的以下代数类似:

定理。假设 N 与 Z 不相交。则存在一个完美 v-栈之间自然的笛卡尔方

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Sht}^I_{G,\mu_\bullet,N}|_{\prod_{i\in I} z_i})^{\mathrm{perf}} & \longrightarrow & */\underline{K_N} \times \prod_{z\in Z} \mathscr{L}\mathrm{ocSht}^{I_z}_{G,\mu_z}|_{\prod_{i\in I_z} z_i} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Bun}^{\mathrm{red}}_{G,U} & \longrightarrow & */\underline{G(\mathbb{O}_U)} \times \prod_{z\in Z} \mathscr{I}\mathrm{soc}_{G,F_z}. \end{array}$$

证明。由于 $(-)^{\mathrm{red}}$ 保持极限，将定理 3.10 的上箭头基变换到 $\prod_{i\in I} z_i$ 并取 $(-)^{\mathrm{red}}$，得到一个完美 v-栈的笛卡尔方。分类叠在 [48, 推论5.4], 下保持不变，左上角由推论 3.6.2) 识别，右上角由 [32, 定理 7.14.(2)], 识别，右下角由 [32, 定理 7.14.(1)] 识别。□

4.3. 注。

1) 将定理 4.2 应用于 $\mathbb{F}_q$，并利用定理 2.10 对 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{red}}_{G,\,U}(\mathbb{F}_q)$ 的描述，我们立即得出适用于任意（特别是腿相交情形）腿的全局 shtuka 模空间的 Langlands–Rapoport猜想。2) 若将 (∗) 的 v-层化作为 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{red}}_{G,\,U}$ 的定义，则可直接利用 Beauville–Laszlo 粘合证明定理 4.2。然而，不借助定理 2.10，就无法清楚解释为何在将 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{red}}_{G,\,U}$ 应用于每个连通分支均为赋值环的 Spec B 时，无需进行层化。

4.4. 接下来，我们回顾一些关于仿射格拉斯曼流形的事实。**在本文余下部分中，我们在 $\mathbb{F}_q$ 上工作**。对于所有 z in Z，按照 [67, 定义 20.2.1].[8]，记 Gr_G 为 Spd $\breve{F}_z$ 上的 B_{dR}-仿射格拉斯曼流形。当 $I_z = \{i\}$ 为单元素集合时，回顾 [67, 第 184] 页中的闭仿射Schubert簇 $\mathrm{Gr}_{G,\mu_z}|_{\mathrm{Spd}\,\breve{F}_{z_i}}$（位于 $\mathrm{Gr}_G|_{\mathrm{Spd}\,\breve{F}_{z_i}}$ 中）以及开仿射Schubert簇 $\mathrm{Gr}^{\circ}_{G,\mu_z}|_{\mathrm{Spd}\,\breve{F}_{z_i}}$（位于 $\mathrm{Gr}_{G,\mu_z}|_{\mathrm{Spd}\,\breve{F}_{z_i}}$ 中）。[67, 命题 23.3.1] 的证明表明，$\mathrm{Gr}_{G,\mu_z}|_{\mathrm{Spd}\,\breve{F}_{z_i}}$ 自然同构于

$$\varprojlim_{m\geq 1} \mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,\mu_z,m}|_{\mathrm{Spd}\,\breve{F}_{z_i}}.$$

[8]虽然 [67] 在 $\mathbb{Q}_p$ 上成立，但 B_{dR}-仿射 Grassmannian 的定义及其基本性质适用于任意非阿基米德局部域。事实上，[25] 中隐含地用到了这一点。

[25,命题 VI.2.3] 的证明推出

$$\mathrm{Gr}_G|_{\mathrm{Spa}\,\mathbb{C}_z} = \bigcup_{\mu_z \in X_*^+(T)} \mathrm{Gr}_{G,\mu_z}|_{\mathrm{Spa}\,\mathbb{C}_z},$$

[25, 命题 III.3.1] 表明，自然态射 $\mathrm{Gr}_G|_{\mathrm{Spa}\,\breve{F}_z} \to \mathrm{Bun}_{G,\ F_z}$在 pro-étale 拓扑下是满射的，而 [25, 定理 IV.1.19]的证明表明

$$\coprod_{\mu_z \in X_*^+(T)} \left(\mathrm{Gr}^{\circ}_{G,\mu_z}|_{\mathrm{Spa}\,\breve{F}_{z_i}}\right)/\underline{G(F_z)} \to \mathrm{Bun}_{G,F_z} \times \mathrm{Spd}\,\breve{F}_z$$

是一个 v-覆盖，且分离、可由局部空间钻石表示，并且在上同调意义下光滑。

4.5. 记 $\mathrm{loc}_Z : \mathrm{Bun}_{G,\ U} \to \prod_{z\in Z} \mathrm{Bun}_{G,\ F_z}$ 为态射 $(\mathrm{loc}_z)_{z\in Z}$，它在 §5 和 §6 中发挥重要作用。它具有以下有限性性质。

命题。当 Z 非空时，$\mathrm{loc}_Z : \mathrm{Bun}_{G,\ U} \to \prod_{z\in Z} \mathrm{Bun}_{G,\ F_z}$ 可紧化、可由局部空间钻石表示，且局部有限维 $\dim.\mathrm{trg}$。因此，$\mathrm{Bun}_{G,\ U}$ 是一个 ***Artin v*-栈**。

当 Z 为空时，例 2.3 表明，$\mathrm{loc}_\varnothing : \mathrm{Bun}_{G,\ C} \to *$ 在局部空间钻石中不可表，而 $\mathrm{Bun}_{G,\ C}$ 仍然是一个 Artin v-栈。

证明。令 m 为正整数。在定理 3.10 中，对 Z中的所有 z，取 $I_z = \{i\}$ 为一个单元素集合，并取 N 为 mZ。然后取 $\varprojlim_{m\geq 1}$，得到一个笛卡尔方

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_{m\geq 1} (\mathrm{Sht}^I_{G,\mu_\bullet,mZ}|_{\prod_{i\in I}\mathrm{Spa}\,\breve{F}_{z_i}})^\diamond & \longrightarrow & \varprojlim_{m\geq 1} \mathrm{LocSht}^I_{G,\mu_\bullet,mZ}|_{\prod_{i\in I}\mathrm{Spd}\,\breve{F}_{z_i}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Bun}_{G,U} & \xrightarrow{\mathrm{loc}_Z} & \prod_{z\in Z} \mathrm{Bun}_{G,F_z}. \end{array}$$

命题 3.5.2) 表明，$\varprojlim_{m\geq 1}(\mathrm{Sht}^I_{G,\ \mu_\bullet,\ mZ}|_{\prod_{i\in I}\mathrm{Spa}\ \breve{F}_{z_i}})^\diamond$ 是一个分离且局部有限维的局部空间钻石。trg，在 $\prod_{i\in I}\mathrm{Spd}\ \breve{F}_{z_i}$上。由 4.4 和 [67, 命题 20.2.3], 可知，$\varprojlim_{m\geq 1}\mathrm{LocSht}^I_{G,\ \mu_\bullet,\ mZ}|_{\prod_{i\in I}\mathrm{Spd}\ \breve{F}_{z_i}}$ 也是一个分离且局部有限维的局部空间钻石。trg，在$\prod_{i\in I}\mathrm{Spd}\ \breve{F}_{z_i}$上，因此上箭头是分离的，并且根据 [63, 命题 13.4 (ii)], , 在局部空间钻石中可表，且局部有限维。trg。

接下来，4.4 表明该态射

$$\coprod_{\mu_\bullet \in X_*^+(T)^I} \varprojlim_{m\geq 1} \mathrm{LocSht}^I_{G,\mu_\bullet,mZ}|_{\prod_{z\in Z}\mathrm{Spa}\,\mathbb{C}_z} \to \prod_{z\in Z} \mathrm{Bun}_{G,F_z}$$

在 pro-étale 拓扑中是满射。因此，根据 [63,命题 10.11 (ii)], , 底部箭头是分离的；根据 [63, 命题 13.4 (iv)] , 它可由局部空间钻石表示，并且局部有限维。trg，正如所需。

最后， [25, 命题 IV.1.8 (i)] 和 [25, 定理 IV.1.19] 表明 $\prod_{z\in Z}\mathrm{Bun}_{G,\ F_z}$是一个 Artin v-栈，因此 $\mathrm{Bun}_{G,\ U}$ [25, 命题 IV.1.8 (iii)]也同样如此。□

4.6. 至此，我们可以完成定理 A 的证明。对于 C 中任意有限集 Q 的闭点，记 $\mathcal{O}_Q$ 为 $\prod_{v\in Q}\mathcal{O}_v$，并记 F_Q 为 $\prod_{v\in Q}F_v$。将 2ρ 在 $X^*(T)$ 中记作所有正根之和，并将 $d_{\mu_\bullet}$ 记作 $\sum_{i\in I}\langle 2\rho,\ \mu_i\rangle$。

命题。 *Artin v-*栈 $\mathrm{Bun}_{G,\ U}$ 在 $\mathrm{Spd}\,\mathbb{F}_q$ 上上同调光滑，且其在 $\mathrm{Spd}\,\mathbb{F}_q$ 上、系数为 $\overline{\mathbb{F}_\ell}$ 的对偶化复形同构于 $\mathbb{F}_\ell$。

证明。 当 Z 为空时，这由例 2.3 立即得出。当 Z 非空时，令所有 z 属于 Z的 $I_z=\{i\}$ 均为单元素集合。然后，4.4 和命题 4.5 证明中的笛卡尔方诱导出一个笛卡尔方

$$\begin{array}{ccc}\Big[\varprojlim_{m\geq 1}(\mathrm{Sht}^{I,\circ}_{G,\mu_\bullet,mZ}|_{\prod_{i\in I}\mathrm{Spa}\breve{F}_{z_i}})^{\Diamond}\Big]\Big/\underline{G(F_Z)} & \longrightarrow & \Big[\prod_{z\in Z}\mathrm{Gr}^{\circ}_{G,\mu_z}|_{\mathrm{Spd}\breve{F}_{z_i}}\Big]\Big/\underline{G(F_Z)}\\ \downarrow g & & \downarrow f\\ \mathrm{Bun}_{G,U}\times\prod_{z\in Z}\mathrm{Spd}\,\breve{F}_{z_i} & \xrightarrow{\mathrm{loc}_Z} & \prod_{z\in Z}\big(\mathrm{Bun}_{G,F_z}\times\mathrm{Spd}\,\breve{F}_{z_i}\big).\end{array}$$

现在，4.4 表明 f 是分离的、在局部空间钻石中可表的，且上同调光滑； [25, 定理 IV.1.19]的证明表明$f^!\mathbb{F}_\ell$ 同构于 $\mathbb{F}_\ell(d_{\mu_\bullet})[2d_{\mu_\bullet}]$。因此， g 和 $g^!\mathbb{F}_\ell$也具有同样的性质。

由于 $\mathrm{Sht}^{I,\ G^\circ,\ \mu_\bullet,\ mZ}|_{\prod_{i\in I}C_i\smallsetminus Z_i}$ 在 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q$ 上光滑，命题 3.5 表明

$$(\circ)\qquad \Big[\varprojlim_{m\geq 1}(\mathrm{Sht}^{I,\circ}_{G,\mu_\bullet,mZ}|_{\prod_{i\in I}\mathrm{Spa}\breve{F}_{z_i}})^{\Diamond}\Big]\Big/\underline{G(F_Z)}$$

存在一个分离的、在局部空间钻石中可表示的、上同调光滑的 v-覆盖，其源自一个局部空间钻石 V，使得 V 在 $\mathrm{Spd}\,\mathbb{F}_q$ 上上同调光滑。此外， [15, 引理 8.3.4] 的证明表明，(∘) 在 $\prod_{i\in I}\mathrm{Spd}\,\breve{F}_{z_i}$ 上、取 $\mathbb{F}_\ell$ 系数的对偶化复形同构于$\mathbb{F}_\ell(d_{\mu_\bullet})[2d_{\mu_\bullet}]$。

接下来，4.4 表明态射

$$\coprod_{\mu_\bullet\in X_*^+(T)^I}\Big[\varprojlim_{m\geq 1}(\mathrm{Sht}^{I,\circ}_{G,\mu_\bullet,mZ}|_{\prod_{i\in I}\mathrm{Spa}\breve{F}_{z_i}})^{\Diamond}\Big]\Big/\underline{G(F_Z)}\to\mathrm{Bun}_{G,U}\times\prod_{z\in Z}\mathrm{Spd}\,\breve{F}_{z_i}$$

是一个 v-覆盖。因此，上述内容表明 $\mathrm{Bun}_{G,\ U}\times\prod_{z\in Z}\mathrm{Spd}\ \breve{F}_{z_i}$ 在 $\prod_{z\in Z}\mathrm{Spd}\ \breve{F}_{z_i}$ 上上同调光滑，并且其在 $\prod_{z\in Z}\mathrm{Spd}\ \breve{F}_{z_i}$ 上、取 $\mathbb{F}_\ell$ 系数的对偶化复形同构于 $\mathbb{F}_\ell$。由 [25, 命题 IV.1.8 (ii)], 可知，$\mathrm{Bun}_{G,\ U}$ 在 $\mathrm{Spd}\,\mathbb{F}_q$ 上上同调光滑；而由 [63, 定理 19.5 (ii)],可知，其在 $\mathrm{Spd}\,\mathbb{F}_q$ 上、取 $\mathbb{F}_\ell$ 系数的对偶化复形同构于 $\mathbb{F}_\ell$。 □

4.7. 对于 shtuka，我们将使用以下（完美）Igusa簇类比。对于所有 z in Z，设 b_z be 是 $B(F_z,G)$ 中的一个元素，并记 $b_\bullet$ 为 $(b_z)_{z\in Z}$。

定义。 记 $\mathrm{Ig}^{b_\bullet}_G$ 为 { 上的仿射概形预栈，其 Spec B-点参数化由以下数据组成：

i) G-扭子 $\mathscr{G}$ 在 U_B上，ii) G-扭子的一个同构 $\phi\colon\mathscr{G}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Frob}_B^*\mathscr{G}$,

iii) 对所有 z属于 Z，存在一个 G-扭子的同构 $\psi_z\colon \mathscr{G}|_{\operatorname{Spec} F_z \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_z} B} \xrightarrow{\sim} G$，使得

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G}|_{\operatorname{Spec} F_z \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_z} B} & \xrightarrow{(\phi^{\deg z})_{F_z}} & (\mathrm{Frob}_B^{\deg z})^* \mathscr{G}|_{\operatorname{Spec} F_z \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_z} B} \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_z} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_z} \\ G & \xrightarrow{(\mathrm{Frob}_B^*)^{-\deg z} \circ b_z} & G \end{array}$$

交换。

对于任意 $\mu_\bullet = (\mu_z)_{z\in Z}$ in $X_*^+(T)^Z$，记 $\mathrm{Ig}^{b,\bullet}_{G,\ \mu_\bullet}$ 为 $\mathrm{Ig}^{b,\bullet}_G$的闭子预叠，其 Spec B-点由满足以下条件的 $(\mathscr{G},\ \phi,\ \{\psi_z\}_{z\in Z})$ 构成：ϕ沿 $\{z_B\}_{z\in Z}$ 的相对位置被 $\mu_\bullet$所界定。

记 d 为 $\{\deg z\}_{z\in Z}$的最小公倍数。于是，定义 4.7.iii) 意味着态射 $\mathrm{Frob}^d \mathrm{Ig}^{b,\bullet}_{G,\ \mu_\bullet} : \mathrm{Ig}^{b,\bullet}_{G,\mu_\bullet} \to (\mathrm{Frob}_{\mathbb{F}_q}^d)^* \mathrm{Ig}^{b,\bullet}_{G,\mu_\bullet}$ 自然等价于将 $(\mathscr{G}, \phi, \{\psi_z\}_{z\in Z})$ 送至 $\mapsto (\mathscr{G}, \phi, \{\psi_z \circ (\phi^{(d/\deg z)})_{F_z}\}_{z\in Z})$ 的同构。特别地，$\mathrm{Ig}^{b,\bullet}_{G,\mu_\bullet}$ 和 $\mathrm{Ig}^{b,\bullet}_G = \varinjlim_{\mu_\bullet \in X_*^+(T)^Z} \mathrm{Ig}^{b,\bullet}_{G,\mu_\bullet}$ 是完美的。

4.8.**命题**。当 Z 非空时，$\mathrm{Ig}^{b,\bullet}_{G,\mu_\bullet}$ 是由概形构成的滤过开并，而这些概形是 $\underline{\mathbb{F}_q}$ 上拟射影概形不交并的余滤极限。特别地，$\mathrm{Ig}^{b,\bullet}_G$ 是一个归纳概形。

当 Z 为空时，例 2.3 表明，$\mathrm{Ig}^{()}_G$ 是与群胚 (♡) 相关联的 $\mathbb{F}_q$ 上的常值叠。特别地，$\mathrm{Ig}^{()}_G$ 不是 一个归纳概形。

证明。根据 Beauville–Laszlo 粘合，$\mathrm{Ig}^{b,\bullet}_G$ 的一个 Spec B-点等价于以下数据：

i') 一个 G-主丛 $\mathscr{G}$，定义在 C_B 上；ii') 一个 G-主丛的同构 $\phi\colon \mathscr{G}|_{U_B} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frob}_B^* \mathscr{G}|_{U_B}$；iii') 对所有 Z 中的 z，一个 G-主丛的同构 $\psi_z\colon \mathscr{G}|_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_z \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_z} B} \xrightarrow{\sim} G$，满足

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G}|_{\operatorname{Spec} F_z \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_z} B} & \xrightarrow{(\phi^{\deg z})_{F_z}} & (\mathrm{Frob}_B^{\deg z})^* \mathscr{G}|_{\operatorname{Spec} F_z \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_z} B} \\ \downarrow{\scriptstyle (\psi_z)_{F_z}} & & \downarrow{\scriptstyle (\psi_z)_{F_z}} \\ G & \xrightarrow{(\mathrm{Frob}_B^*)^{-\deg z} \circ b_z} & G \end{array}$$

可交换。

接下来，记 $\mathcal{B}_{G,\infty Z}$ 为 $\mathbb{F}_q\}$ 上的仿射概形预栈，其 Spec B-点参数化由以下数据组成

i') 一个 G-挠子 $\mathscr{G}$，定义在 C_B上；iii") 对所有 z，其中 Z，一个 G-挠子的同构 $\psi_z\colon \mathscr{G}|_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_z \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_z} B} \xrightarrow{\sim} G$。

回忆一下，$\mathcal{B}_{G,\infty Z}$ 是概形的滤过开并，而这些概形是拟射影概形的不交并的余滤极限 [5, p. 15]。给定$\mathcal{B}_{G,\infty Z}$的一个 Spec B-点 $(\mathscr{G}, \{\psi_z\}_{z\in Z})$，以下附加数据

ii") 一个 G-挠子的同构 $\phi\colon \mathscr{G}|_{U_B} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frob}_B^* \mathscr{G}|_{U_B}$，其沿 $\{z_B\}_{z\in Z}$ 的相对位置由 $\mu_\bullet$ 界定

对应于 Spec B [5, 上的一个射影概形命题 3.12], , 而 iii'）的交换性条件对应于一个闭子概形。因此，将 $(\mathscr{G}, \phi, \{\psi_z\}_{z\in Z}) \mapsto (\mathscr{G}, \{\psi_z\}_{z\in Z})$ 映射到 $\mathrm{Ig}^{b,\bullet}_{G,\mu_\bullet} \to \mathcal{B}_{G,\infty Z}$ 的态射是概形态射且为射影的，由此得到所需结果。□

4.9. 与定义 3.4 类似，现在我们将 Igusa簇转化为 v-叠。

定义。 记 $(\mathrm{Ig}_G^{b\bullet})^\diamond$ 和 $(\mathrm{Ig}_{G,\,\mu_\bullet}^{b\bullet})^\diamond$ 为 $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$ 上的预栈，其 S-点分别由 $\mathrm{Ig}_G^{b\bullet}(R)$ 和 $\mathrm{Ig}_{G,\,\mu_\bullet}^{b\bullet}(R)$ 给出。

当 Z 为空时，例 2.3 表明 $(\mathrm{Ig}_G^{b\bullet})^\diamond$ 是一个小 v-栈。当 Z 非空时，引理 1.2 和命题 4.8 蕴含

$$(\mathrm{Ig}_{G,\mu_\bullet}^{b\bullet})^\diamond \text{ and } (\mathrm{Ig}_G^{b\bullet})^\diamond = \varinjlim_{\mu_\bullet \in X_*^+(T)^Z} (\mathrm{Ig}_{G,\mu_\bullet}^{b\bullet})^\diamond$$

它们是小 v-层。

4.10. 正如定理 3.10 所暗示的，loc_Z 的纤维在以下意义下由 Igusa簇给出。我们得到一个态射 $(\mathrm{Ig}_G^{b\bullet})^\diamond \to \mathrm{Bun}_{G,\,U}$，其将

$$(\mathscr{G}, \phi, \{\psi_z\}_z) \mapsto (\mathscr{G}^{\mathrm{an}}, \phi^{\mathrm{an}}).$$

元素 b_z 诱导一个态射 $b_z\colon * \to \mathrm{Bun}_{G,\,F_z}$，因此随着 z 的变化，我们也得到一个态射 $b_\bullet : * \to \prod_{z\in Z} \mathrm{Bun}_{G,\,F_z}$。

命题。 小 v-叠的平方

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Ig}_G^{b\bullet})^\diamond & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b_\bullet} \\ \mathrm{Bun}_{G,\,U} & \xrightarrow{\mathrm{loc}^{Z}} & \prod_{z\in Z} \mathrm{Bun}_{G,\,F_z} \end{array}$$

是笛卡尔的。

证明。 在定理 3.10 中，对 Z 中的所有 z，令 $I_z = \{i\}$ 为单元素集合，令 N 为 $\varnothing$，并沿着与嵌入 $\mathbb{F}_z \to \mathbb{F}_q$ 相对应的态射 $\mathrm{Spd}\,\mathbb{F}_q \to \prod_{i\in I} z_i \to \prod_{i\in I} \mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_{z_i}$ 对上箭头作基变换。这得到一个笛卡尔方

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Sht}_{G,\mu_\bullet}^I|_{\overline{\mathbb{F}}_q})^\diamond & \longrightarrow & \mathrm{LocSht}_{G,\mu_\bullet}^I|_{\mathrm{Spd}\,\overline{\mathbb{F}}_q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Bun}_{G,U} & \xrightarrow{\mathrm{loc}_Z} & \prod_{z\in Z} \mathrm{Bun}_{G,F_z}. \end{array}$$

注意到，态射 $b_\bullet\colon * \to \prod_{z\in Z} \mathrm{Bun}_{G,\,F_z}$ 自然提升为一个态射

$$b_\bullet : * \to \mathrm{LocSht}_{G,\mu_\bullet}^I|_{\mathrm{Spd}\,\overline{\mathbb{F}}_q},$$

因此，只需证明小 v-叠的方

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Ig}_{G,\mu_\bullet}^{b\bullet})^\diamond & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b_\bullet} \\ (\mathrm{Sht}_{G,\mu_\bullet}^I|_{\overline{\mathbb{F}}_q})^\diamond & \longrightarrow & \mathrm{LocSht}_{G,\mu_\bullet}^I|_{\mathrm{Spd}\,\overline{\mathbb{F}}_q} \end{array}$$

是笛卡尔的。纤维积中的一个 S-点参数化由以下各项组成的数据：i) C_R上的一个 G-扭子 $\mathscr{G}$，

ii) G-扭子的一个同构 $\phi\colon\ \mathscr{G}|_{U_R}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Frob}_R^*\mathscr{G}|_{U_R}$，其沿 $\{z_R\}_{z\in Z}$ 的相对位置被 $\mu_\bullet$所界定，

iii) 对所有 $z\in Z$，存在一个 G-扭子 $\psi_z^{\mathrm{an}}\colon \mathscr{G}|_{\mathrm{Spa}\,\mathcal{O}_z\times_{\mathbb{F}_z}S}\xrightarrow{\sim}G$ 的同构，使得

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{G}|_{\mathrm{Spa}\,F_z\times_{\mathbb{F}_z}S} & \xrightarrow{(\phi^{\deg z})_{F_z}} & (\mathrm{Frob}_S^{\deg z})^*\mathscr{G}|_{\mathrm{Spa}\,F_z\times_{\mathbb{F}_z}S}\\ \downarrow{\scriptstyle \psi_z^{\mathrm{an}}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_z^{\mathrm{an}}}\\ G & \xrightarrow{(\mathrm{Frob}_S^*)^{-\deg z}} & G.\end{array}$$

注意到这一切都与 R^+ 无关，因此我们可以假设 R^+ 等于 R°。由于如定义 1.2] 中的点的积构成 v-拓扑的一个基（例 1.1], ），我们可以假设 S 是点的积。于是推论 1.9] 表明，上述内容对应于 $(\mathrm{Ig}^{b}_{G,\mu_\bullet})^\diamondsuit(S)$ 中的一个对象。□

4.11. 我们来回顾一些关于 Kottwitz 集的其他记号。设 K 是 $\{F,F_v\}$ 之一，记 $\mathbb{X}_K$ 为由下式给出的 W_K-模

$$\mathbb{X}_K:=\begin{cases}\mathbb{Z} & \text{if } K=F_v,\\ \mathrm{Div}(\overline{F})_0 \text{ as in [33, p. 75]} & \text{if } K=F,\end{cases}$$

并记 $\kappa\colon B(K,G)\to(\pi_1(G)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{X}_K)^{W_K}$ 为如第 11.5] 小节中所述的 Kottwitz 映射。回顾一下，κ 限制为一个双射 $B(K,G)_{\mathrm{basic}}\xrightarrow{\sim}(\pi_1(G)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{X}_K)^{W_K}$[49,命题 13.1，命题 15.1]。

回顾定义 2.7 中的全局半稳定轨迹，它是根据其局部对应物定义的。现在我们证明它具有如下内在的描述；这就是定理 B。对所有 b in $B(F,G)_{\mathrm{basic}}$，记 $\mathrm{Bun}^{b}_{G,F}$ 为 $\mathrm{Bun}_{G,F}$ 的子栈，其 S-点由满足以下条件的对象构成：对所有 S的几何点$\bar{s}$，其在 $\mathrm{Bun}_{G,F}(s)$ 中的像都同构于 $(G,(\mathrm{Frob}_S^*)^{-1}\circ b)$。

定理。子栈 $\mathrm{Bun}^{b}_{G,F}\subseteq\mathrm{Bun}_{G,F}$ 是开子栈，且同构于 $*/G_b(F)$。此外，开子栈 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,F}\subseteq\mathrm{Bun}_{G,F}$ 等于 $\coprod_{b\in B(F,G)_{\mathrm{basic}}}\mathrm{Bun}^{b}_{G,F}$。

证明。定理 2.8 蕴含 $\mathrm{Bun}^{1}_{G,F}\subseteq\mathrm{Bun}_{G,F}$ 是开子栈，并且自然同构于 $*/G(F)$。命题 2.9 给出 v-栈的一个同构 $\mathrm{Bun}_{G,F}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Bun}_{G_b,F}$，其像将 $\mathrm{Bun}^{b}_{G,F}$ 映为 $\mathrm{Bun}^{1}_{G_b,F}$，因此将上述结论应用于 G_b，可知 $\mathrm{Bun}^{b}_{G,F}\subseteq\mathrm{Bun}_{G,F}$ 是开子栈，且同构于 $*/G_b(F)$。定理 2.10 将 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{Spd}\ \mathbb{F}_q,\mathrm{Bun}_{G,F})$ 中的同构类与 $B(G,G)$ 对应起来，这表明对于不同的 b，$\mathrm{Bun}^{b}_{G,F}$ 彼此不交。因此，$\coprod_{b\in B(F,G)_{\mathrm{basic}}}\mathrm{Bun}^{b}_{G,F}$是 $\mathrm{Bun}_{G,F}$的一个开子栈，并且显然包含于 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,F}$。

对于反向包含，令 $s=\mathrm{Spa}(K,K^+)$ 为 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,U}$ 的一个几何点，其中 U 是 C 的某个稠密开子概形。于是，[25, 定理 III.4.5] 意味着，对于 Z 中所有的 z，s 在 Bun_{G,F_z} 中的像都属于 $\mathrm{Bun}^{b_z}_{G,F_z}$，其中某个 b_z 属于 $B(F_z,G)_{\mathrm{basic}}$。取 $I_z=\{i\}$ 为单元素集合，并取 μ_z 为 $\kappa(b_z)$ 到 $X_*^+(T)$ 的一个提升。然后，4.4 和 [60, 命题 A.9][9] 的证明表明，s 在 Bun_{G,F_z} 中的像可提升为 $\varprojlim_{m\geq1}\mathrm{LocSht}^{I_z}_{G,\mu_z,mz}|_{\mathrm{Spd}\,F_{z_i}}$ 的一个 $\mathrm{Spa}(K,K^+)$-点。随着 z 变化，命题 4.5 的证明中的笛卡尔方表明，s 可提升为

[9]虽然 [60, 附录 A] 是在 p-进局部域上进行的，并假设余特征为极小，但这并未用于 [60, 命题 A.9] 的证明。

lim←−$_{m\geq 1}$(Sht$^{I}_{G,\ \mu_\bullet,\ mZ}|_{\prod_{i\in I}\operatorname{Spa}F_{z_i}}$)$^{\Diamond}$ 的一个 Spa(K, K^+)-点，这给出 Sht$^{I}_{G,\ \mu_\bullet,\ \varnothing}|_{\prod_{i\in I}C_i}$ 的一个 Spec K-点 ($\mathscr{G}$, ϕ)。

回顾一下，在 C 上的 G-丛的代数栈 $\mathcal{B}_G$ over $\mathbb{F}_q$ 满足 $\pi_0(\mathcal{B}_G)=\pi_1(G)_{W_F}$。由于绝对 q-Frobenius 在拓扑空间上诱导恒等映射，$\mathscr{G}$和 Frob$_K^*\mathscr{G}$在 $\pi_0(\mathcal{B}_G)$中具有相同的像。现在，ϕ 将 Frob$_K^*\mathscr{G}$表示为 $\mathscr{G}$的一个相对位置为 $\sum_{z\in Z}\mu_z$的修改，因此 Frob$_K^*\mathscr{G}$在 $\pi_0(\mathcal{B}_G)$中的像等于 $\mathscr{G}$在 $\pi_0(\mathcal{B}_G)$中的像加上 $\sum_{z\in Z}\mu_z$ 在 $\pi_1(G)$中的像$_{W_F}$。因此，$\sum_{z\in Z}\mu_z$ 在 $\pi_1(G)_{W_F}$ 中的像是平凡的。根据 [49, 命题 15.6], , 这表明存在一个 b ，使得 $B(F,G)_{\text{basic}}$ ，对于所有 z 中的 Z ，$\text{loc}_z(b)=b_z$ ；并且对于 U的所有闭点 u ，$\text{loc}_u(b)=1$ 。

令 U' 为 U 的一个稠密开子概形，使得 b 在 $G(U'_{\mathbb{F}_q})$ 中有一个代表元，并固定这样一个代表元。对所有 $c\in U\smallsetminus U'$，令 $b_c=1$ 如此定义后，我们可以用 U' 替换 U。于是命题 2.9 给出一个同构 Bun$_{G,U}\xrightarrow{\sim}$Bun$_{G_b,U}$，使得对所有 $z\in Z$，s 在 Bun$_{G_b,F_z}$ 中的像都属于 Bun$^1_{G_b,F_z}$。将 G_b 通过 fpqc 下降延拓为 C 上的一个抛物型群概形后，命题 2.4 推出，对于所有 $z\in Z$，Bun$_{G_b,\mathcal{O}_z}\to$Bun$^1_{G_b,F_z}$ 在 pro-´étale 拓扑下是满射。因此，s 在 Bun$_{G_b,F_z}$ 中的像可提升为 Bun$_{G_b,\mathcal{O}_z}$ 的一个 Spa(K,K^+)-点；随着 z 变化，引理 2.6 表明，s 可提升为 Bun$_{G_b,C}$ 的一个 Spa(K,K^+)-点 ($\mathscr{G}_b,\phi_b$)。

命题 2.1 和定理 A.19 表明，($\mathscr{G}_b,\phi_b$) 是 C_K 上一个 G_b-挠子的解析化 $\mathscr{G}_{\text{alg}\,b}$，并配备同构 ϕ_b^{alg}: $\mathscr{G}_{\text{alg}\,b}\xrightarrow{\sim}$Frob$_K^*\mathscr{G}_{\text{alg}\,b}$。将引理 3.3 b)] 应用于 $\mathcal{B}_{G_b}$，可知 ($\mathscr{G}_{\text{alg}\,b}$, ϕ_b^{alg}) 同构于

$$(\overline{\mathscr{G}}_b^{\text{alg}},\ \text{id}_{\overline{\mathscr{G}}_b^{\text{alg}}}\otimes_{\mathbb{F}_q}(\text{Frob}_K^{-1})^*)$$

C 上某个 G_b-挠子$^-\mathscr{G}_{\text{alg}\,b}$。记 ($\mathscr{G}_b^{\text{alg}}$)$_F$ 在下述映射下的像为 b'

$$H^1(F,G_b)\hookrightarrow B(F,G_b)_{\text{basic}}\xrightarrow{\sim}B(F,G)_{\text{basic}},$$

其中，左箭头表示来自 [49, (10.5)], 的单射，右箭头表示来自引理 5.3] 的双射。缩小 U ，使得 b' 在 $G(U_{\mathbb{F}_q})$ 中有一个代表元后，我们看到 s 属于 Bun$^{b'}_{G,U}$，这正是所需。□

5. 层论的推论

本节的目标是证明定理 E，这在很大程度上依赖于附录 B 的内容。我们先简要回顾动机层理论，并解释为何需要它。接着，我们说明一种构造（导出）海克作用的一般机制，并将在 §5 和 §6 中使用该机制。然后，我们陈述 Eteve–Gaitsgory–Genestier–Lafforgue 即将发表的一个结果；即便只是表述定理 E，也离不开这一结果。

至此，我们可以证明定理 E。作为应用，我们说明如何利用定理 E 恢复[54]的所有表示论结果；为此，只需采用 Xue 的工作，而不必依赖 Eteve–Gaitsgory–Genestier–Lafforgue 即将发表的成果。

5.1. 我们首先回顾将要使用的层理论。设 $L/\mathbb{Q}_\ell$ 是包含一个固定的 $\sqrt{q}$的有限扩张。记 $\mathcal{O}_L$ 为 L的整数环，并记$\mathbb{F}_\lambda$ 为 $\mathcal{O}_L$的剩余域。设 Λ 是 $\{L,\mathcal{O}_L,\mathbb{F}_\lambda\}$之一。

回顾 B.3 中的 $\mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$-线性六函子形式体系 $D_{\mathrm{mot}}(-)$ 在

$$\{\text{small v-stacks over } \overline{\mathbb{F}}_q\},$$

并回忆 B.4 中的 Λ-线性六函子形式体系

$$D(-,\Lambda) \coloneqq D_{\mathrm{mot}}(-) \otimes_{D_{\mathrm{mot}}(*)} D(\Lambda).$$

我们使用动机层理论（及其这一基变换），因为它具有 !-推前，并且即使在 $\Lambda \neq \mathbb{F}_\lambda$ 时也能编码“未完备”的层（例如见推论 B.4）。不过，为了便于与代数簇上的经典 étale ℓ-adic 层理论进行比较，我们也将使用定义 B.5、命题 B.7 和 B.8 中的各种三函子形式体系。

如果只对 $\Lambda = \mathbb{F}_\lambda$ 情形感兴趣，则可以改为取

$$D(-,\mathbb{F}_\lambda) \coloneqq D_{\text{ét}}(-,\mathbb{F}_\lambda)$$

并仅使用 étale 层理论 [63]。事实上，由于我们使用的所有层都如 [25, 命题 IV.2.4], 中所述是超收敛的，当 $\Lambda = \mathbb{F}_\lambda$ 时，动机层理论会特化为这一理论；见 B.3。

5.2. 我们将使用以下机制，在自守侧和谱侧构造（导出）自同态代数的作用。设 $(\mathcal{C},\ E)$ 是 [41, 定义 2.1.1], 中的几何设定，并设 $D(-)$ 是作用于 $(\mathcal{C},\ E)$ 上的 Λ-线性三函子形式体系。考虑 $\mathcal{C}$ 中的图表

$$\begin{array}{ccccc} Y_O & \xrightarrow{g_O} & O \times X & \xrightarrow{p_1} & O \\ \downarrow{\scriptstyle j_Y} & & \downarrow{\scriptstyle j_X} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ Y_F & \xrightarrow{g_F} & F \times X & \xrightarrow{p_1} & F \\ & & \downarrow{\scriptstyle p_2} & & \\ & & X, & & \end{array}$$

其中各方块均为笛卡尔方块，且所有态射都是 !-可的。记 $Y_O \to X$ 这个态射为 f，并令 A 为 $D(Y_F)$ 中的一个对象。

引理。 *$D(X)$ 中的对象 $f_! j_Y^* A$ 自然地是 $\mathbb{E}_1$-代数 $\mathrm{End}^{D(F)}(j_!\mathbf{1})$ 上的一个模，其基底为 Λ。*

证明。 由于 $f = p_2 \circ g_F \circ j_Y$，投影公式和真基变换给出

$$\begin{aligned} f_! j_Y^* A &= p_{2,!} g_{F,!} j_{Y,!} j_Y^* A = p_{2,!} g_{F,!}(A \otimes j_{Y,!}\mathbf{1}) = p_{2,!} g_{F,!}(A \otimes j_{Y,!} g_O^* p_1^* \mathbf{1}) \\ &= p_{2,!} g_{F,!}(A \otimes g_F^* p_1^* j_! \mathbf{1}) = p_{2,!}(p_1^* j_! \mathbf{1} \otimes g_{F,!} A). \end{aligned}$$

由于 $j_!\mathbf{1}$ 自然地是基底为 Λ 的 $\mathbb{E}_1$-代数 $\mathrm{End}^{D(F)}(j_!\mathbf{1})$ 上的一个模，对 $f_! j_Y^* A$ 应用函子 $p_{2,!}(p_1^* - \otimes g_{F,!} A)$ 后，同样结论也成立。□

5.3. 对于 U 中的位，我们在 $\mathrm{loc}_{Z,!}\Lambda$ 上有如下（导出）Hecke代数作用。设 Q 是 U 的一个有限非空闭点集，并记

$$\mathrm{loc}_Q : \mathrm{Bun}_{G,U} \to */\underline{G(\mathcal{O}_Q)}$$

为态射 $(\mathrm{loc}_u)_{u\in Q}$。那么引理 2.6 表明，下图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bun}_{G,U} & \xrightarrow{(\mathrm{loc}_Q,\mathrm{loc}_Z)} & */\underline{G(\mathcal{O}_Q)} \times \prod_{z\in Z} \mathrm{Bun}_{G,F_z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ */\underline{G(F_Q)} \times_{\prod_{u\in Q} \mathrm{Bun}_{G,F_u}} \mathrm{Bun}_{G,U\smallsetminus Q} & \longrightarrow & */\underline{G(F_Q)} \times \prod_{z\in Z} \mathrm{Bun}_{G,F_z} \end{array}$$

是笛卡尔的。命题 4.5 表明底部箭头是 !-可的，因此顶部箭头也如此。因此，引理 5.2 和推论 B.4 赋予 $\mathrm{loc}_{Z,\,!}\Lambda$ in$D(\prod_{z\in Z}\mathrm{Bun}_{G,\,F_z},\ \Lambda)$ 一个 $\mathbb{E}_1$- 代数模的结构

$$\mathrm{End}_{G(F_Q)}(\text{c-Ind}_{G(\mathcal{O}_Q)}^{G(F_Q)}\Lambda) = \bigotimes_{u\in Q} \mathrm{End}_{G(F_u)}(\text{c-Ind}_{G(\mathcal{O}_u)}^{G(F_u)}\Lambda)$$

在 Λ 上；提醒读者，当$\Lambda \neq L$时，它可能在非零次数上有上同调。取关于 Q 的余极限可知，$\mathrm{loc}_{Z,\,!}\Lambda$ 自然地是 $\mathbb{E}_1$-代数 $\bigotimes_u \mathrm{End}_{G(F_u)}(\text{c-Ind}^{G(F_u)}{}_{G(\mathcal{O}_u)}\Lambda)$ 上的模，其中 u 遍历U的闭点。

5.4. 让我们回顾一下关于朗兰兹对偶群的一些记号。在本文余下部分，假设 G 在 U 上是约化的。记 W_U 为相对于 F 的 U 的绝对 ~ 韦伊群，记 $\widetilde{F}/F$ 为满足 Gal($\widetilde{F}/F$) 等于 W_U 在 $X_*^+(T)$ 上的作用之像的有限伽罗瓦扩张，并记 $\widetilde{C}$ 为 C 在 $\widetilde{F}$ 中的 ~ $\widetilde{N}$ ~ $\widetilde{U}$ ~ $\widetilde{G}$ ~ 正规化。记 $\widetilde{U}$ 为 U 在 $\widetilde{C}$ 中的原像，并记 $\widetilde{Z}$ 为 $\widetilde{C}\smallsetminus\widetilde{U}$ 的闭补集。记 $\widetilde{G}$ 为 G 在 Λ 上的对偶群，并记 ${}^L\widetilde{G}$ 为 Gal($\widetilde{F}/F$)。类似地，对 C 的所有闭点 v，记 $\widetilde{F}_v/F_v$ 为满足 Gal(F_v/F_v) 等于 $\overline{W_{F_v}}$ 在 $X_*^+(T)$ 上的作用之像的有限伽罗瓦扩张，并记 ${}^L\widetilde{G}_v$ 为 Gal($\widetilde{F}_v/F_v$)。

利用 ${}^L\widetilde{G}$，我们将全局 shtuka 叠重新编号如下。回忆 3.2 中的 Deligne–Mumford 叠 $\mathrm{Sht}^I_{\widetilde{G},\,\mu_\bullet,\,\widetilde{N}|_{\prod_{i\in I}\widetilde{C}_i\smallsetminus\widetilde{N}_i}}$。设 $\dot{V}$是 $\mathrm{Rep}_\Lambda({}^L\widetilde{G})^I$中的一个对象，记 $\widetilde{N}$ 在 $\widetilde{C}$中的原像为 $\widetilde{N}$，并注意到不交并

$$\coprod_{\substack{\mu_\bullet\in X_*^+(T)^I \\ \text{arising in } \dot{V}|_{\hat{T}^I}}} \mathrm{Sht}^I_{G,\mu_\bullet,N}|_{(\widetilde{C}\smallsetminus\widetilde{N})^I}$$

自然下降为 Deligne–Mumford 叠 $\mathrm{Sht}^I_{G,\,\dot{V},\,N}|_{(C\smallsetminus N)^I}$，它在 $(C\smallsetminus N)^I$上是分离且局部有限型的。记 $\pi_N\colon \mathrm{Sht}^I_{G,\,\dot{V},\,N}|_{(C\smallsetminus N)^I}\to(C\smallsetminus N)^I$为结构态射。

5.5. 简言之，将 Sht 记作 $\mathrm{Sht}^I_{G,\,\dot{V},\,N}|_{(C\smallsetminus N)^I_{\overline{\mathbb{F}}_q}}$。利用 3.2、命题 3.5 以及有限´étale 下降，我们可以将命题 B.7 和 B.8 中的 Λ-线性三函子形式体系扩展到 π_N 的轻度叠状设定：Sht $\to(C\smallsetminus N)^I_{\mathbb{F}_q}$。更确切地说，我们 –

有一个自然图表

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Ind} D_{\mathrm{mot}}^{(C\smallsetminus N)^I_{\overline{\mathbb{F}}_q}\backslash\prod_{i\in I}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_{z_i}}\big((\mathrm{Sht}\,|_{\prod_{i\in I}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_{z_i}})^{\diamondsuit}\big) & \xrightarrow{\ \Upsilon\ } & D_{\mathrm{mot}}\big((\mathrm{Sht}\,|_{\prod_{i\in I}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_{z_i}})^{\diamondsuit}\big) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle r_{\ell,(\mathrm{Sht}\,|_{\prod_{i\in I}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_{z_i}})^{\diamondsuit}}} & & \\
\operatorname{Ind} D_{\text{ét}}^{(C\smallsetminus N)^I_{\overline{\mathbb{F}}_q}\backslash\prod_{i\in I}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_{z_i}}\big((\mathrm{Sht}\,|_{\prod_{i\in I}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_{z_i}})^{\diamondsuit},\Lambda\big) & \xleftarrow{\ \rho\ } & D(\mathrm{Sht},\mathbb{Z}_\ell)
\end{array}$$

使得沿 π_N 的!-推前给出一个图表态射，其目标为

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Ind} D_{\mathrm{mot}}^{(C\smallsetminus N)^I_{\overline{\mathbb{F}}_q}\backslash\prod_{i\in I}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_{z_i}}\big(\prod_{i\in I}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_{z_i}\big) & \xrightarrow{\ \Upsilon\ } & D_{\mathrm{mot}}\big(\prod_{i\in I}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_{z_i}\big) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle r_{\ell,\prod_{i\in I}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_{z_i}}} & & \\
\operatorname{Ind} D_{\text{ét}}^{(C\smallsetminus N)^I_{\overline{\mathbb{F}}_q}\backslash\prod_{i\in I}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_{z_i}}\big(\prod_{i\in I}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_{z_i},\Lambda\big) & \xleftarrow{\ \rho\ } & D((C\smallsetminus N)^I,\mathbb{Z}_\ell).
\end{array}$$

5.6. 我们现在陈述 Eteve–Gaitsgory–Genestier–Lafforgue 即将发表的一个结果。粗略地说，它断言全局 shtuka 叠的上同调即使在导出范畴的层面上也满足 Drinfeld 引理的结论。在上同调群的层面上，这一点已由 Xue 的工作所知；见下文备注 5.7。

对于 $\mathbb{F}_q$上的任意分离有限型概形 X，将 $D_{\mathrm{lis}}^{-}(X,\Lambda)\subseteq D_{\mathrm{cons}}(X,\Lambda)$记为光滑对象的全子范畴。由于$\mathrm{Frob}_{U\smallsetminus N}$ 是一个泛同胚，该函子

$$(\mathrm{Frob}_{U\smallsetminus N})^*_{\overline{\mathbb{F}}_q}:D_{\mathrm{cons}}((U\smallsetminus N)_{\overline{\mathbb{F}}_q},\Lambda)\to D_{\mathrm{cons}}((U\smallsetminus N)_{\overline{\mathbb{F}}_q},\Lambda)$$

限制为一个等价$(\mathrm{Frob}_{U\smallsetminus N})^*_{\mathbb{F}_q}:\ D_{\mathrm{lis}}((U\smallsetminus N)^{\mathbb{F}_q},\Lambda)\xrightarrow{\sim}D_{\mathrm{lis}}((U\smallsetminus N)^{\mathbb{F}_q},\Lambda)$。

记 $\mathcal{S}_{\dot V}$为通过几何 Satake 与 $\dot V$ 相关联的 $D_{\mathrm{cons}}(\mathrm{Sht}^I_{G,\,\dot V,\,N}|_{(U\smallsetminus N)^I_{\overline{\mathbb{F}}_q}},\Lambda)$ 中的对象。除非另有说明，所有 Lurie 张量积均取自$D(\Lambda)$。

定理 (Eteve–Gaitsgory–Genestier–Lafforgue)。对象 $\pi_{N,\,!}\mathcal{S}_{\dot V}$ 位于

$$D((U\smallsetminus N)^I_{\overline{\mathbb{F}}_q},\Lambda)$$

全忠实外张量积函子的像中

$$\Big[\operatorname{Ind} D_{\mathrm{lis}}((U\smallsetminus N)_{\overline{\mathbb{F}}_q},\Lambda)\Big]^{\otimes I}\hookrightarrow D((U\smallsetminus N)^I_{\overline{\mathbb{F}}_q},\Lambda)$$

并且自然地提升为 $\Big[\big(\operatorname{Ind} D_{\mathrm{lis}}((U\smallsetminus N)^{\mathbb{F}_q},\Lambda)\big)^{(\mathrm{Frob}_{U\smallsetminus N})^*_{\mathbb{F}_q}}\Big]^{\otimes I}$ 的一个对象。

5.7.注。 Xue 的工作 [71, 定理 3.2.3][10] 已经推出了定理 5.6 的第一个陈述，以及取上同调群[71, 推论 3.2.6] 后的第二个陈述。特别是，如果只关心取上同调群后的下文定理 5.11，就不需要援引定理 5.6。例如，下文的推论 5.12 就是这种情况。

[10]虽然 [71,定理 3.2.3] 假设 G 是分裂的，但其证明并未用到这一点。参见 [71,§4]。

5.8. 对于 U 中的位，我们在全局 shtuka 叠的上同调上有如下（导出）Hecke代数作用。设 Q 是 U 的一个有限闭点集。记

$$\pi_{\infty(Q\cup Z)}:\varprojlim_{m\geq 1}\mathrm{Sht}^{I}_{G,\dot V,m(Q\cup Z)}\big|_{(U\smallsetminus Q)^{I}_{\overline{\mathbb{F}}_q}}\to(U\smallsetminus Q)^{I}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$$

对于结构态射，并回顾 $\varprojlim_{m\geq 1}\mathrm{Sht}^{I}_{G,\dot V,m(Q\cup Z)}\big|_{(U\smallsetminus Q)^{I}_{\overline{\mathbb{F}}_q}}$ 在 $(U\smallsetminus Q)^{I}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ [53, 3.9] 上具有自然的 $\underline{G(F_{Q\cup Z})}$-作用。由于这个方块

$$\begin{array}{ccc}\Big[\varprojlim_{m\geq 1}\mathrm{Sht}^{I}_{G,\dot V,mZ}\big|_{(U\smallsetminus Q)^{I}_{\overline{\mathbb{F}}_q}}\Big]\Big/\underline{G(F_Z)} & \xrightarrow{\pi_{\infty Z}} & */\underline{G(\mathcal{O}_Q)}\times */\underline{G(F_Z)}\times(U\smallsetminus Q)^{I}_{\overline{\mathbb{F}}_q}\\ \downarrow & & \downarrow\\ \Big[\varprojlim_{m\geq 1}\mathrm{Sht}^{I}_{G,\dot V,m(Q\cup Z)}\big|_{(U\smallsetminus Q)^{I}_{\overline{\mathbb{F}}_q}}\Big]\Big/\underline{G(F_{Q\cup Z})} & \xrightarrow{\pi_{\infty(Q\cup Z)}} & */\underline{G(F_Q)}\times */\underline{G(F_Z)}\times(U\smallsetminus Q)^{I}_{\overline{\mathbb{F}}_q}\end{array}$$

是笛卡尔的，应用引理 5.2 并对 Q 取余极限，可赋予

$$\pi_{\infty Z,!}\mathcal{S}_{\dot V}=\varinjlim_{m\geq 1}\pi_{mZ,!}\mathcal{S}_{\dot V}\in D(*/\underline{G(F_Z)},\Lambda)\otimes\Big[\big(\mathrm{Ind}\,D_{\mathrm{lis}}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q},\Lambda)\big)^{(\mathrm{Frob}_U)^{*}_{\overline{\mathbb{F}}_q}}\Big]^{\otimes I}$$

一个 $\mathbb{E}_1$-代数 $\bigotimes_u\mathrm{End}_{G(F_u)}(\text{c-Ind}^{G(F_u)}_{G(\mathcal{O}_u)}\Lambda)$-模结构。

5.9. 我们关于 $\pi_{\infty Z,!}\mathcal{S}_{\dot V}$ 的公式将涉及 Fargues–Scholze 的以下 ***Hecke*算子** 。对于 C 的所有闭点 v，回顾 1.9 中的相对Fargues–Fontaine曲线 X_{S,F_v}。按 [25, 定义 II.1.19], ，记 $\mathrm{Div}^1_v(S)$ 为 X_{S,F_v} 上次数为 1 的有效卡蒂埃除子集合，因此 Div^1_v 是一个小 v-层 [25, p. 52]。对于 $\mathrm{Rep}_\Lambda({}^LG_v)^I$ 中的所有对象 V_v，回顾我们有一个自然函子 [66, p. 18]

$$T_{V_v}:D(\mathrm{Bun}_{G,F_v},\Lambda)\to D(\mathrm{Bun}_{G,F_v},\Lambda)\otimes D(\mathrm{Div}^1_v,\Lambda)^{\otimes I}.$$

对于所有 $z\in Z$，令 $\dot V_z$ 为 $\mathrm{Rep}_\Lambda({}^LG)^{I_z}$ 中的一个对象，并令 $\dot V$ 为 $\mathrm{Rep}_\Lambda({}^LG)^I$ 中的对象$\boxtimes_{z\in Z}\dot V_z$。记 V_z为 $\dot V_z$在 $({}^LG_z)^{I_z}$上的限制，并记 V为 $\dot V$在 $\prod_{z\in Z}({}^LG_z)^{I_z}$上的限制。于是 $\bigotimes_{z\in Z}T_{V_z}$ 给出一个自然函子

$$T_V:\bigotimes_{z\in Z}D(\mathrm{Bun}_{G,F_z},\Lambda)\to\bigotimes_{z\in Z}\Big[D(\mathrm{Bun}_{G,F_z},\Lambda)\otimes D(\mathrm{Div}^1_z,\Lambda)^{\otimes I_z}\Big].$$

回顾 [66, 命题 3.2]，有 $\bigotimes_{z\in Z}D(\mathrm{Bun}_{G,F_z},\Lambda)=D(\prod_{z\in Z}\mathrm{Bun}_{G,F_z},\Lambda)$。

5.10. 我们如下将 $U_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ 上的 ℓ-进层限制到局部Galois表示。记 $\breve F_v$ 为 F_v 的极大非分歧扩张的完备化。固定一个同构 $\overline{\mathbb{F}}_q^{\times}\cong\mathbb{Q}/\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$。对于所有 $z\in Z$，选取 $\mathcal{O}_z$ 的一个赋值参数 π，并选取 F_z 中 π 的 n 次根的一个相容系统 $\{\pi^{1/n}\}_{p\nmid n}$。这些选择诱导出

- 群概形 ID_{F_z} 和 WD_{F_z} 在 Λ上，由 B.10 给出，
- 一个函子 $\Psi_z\colon D(\mathrm{Spa}\ \mathbb{C}_z,\Lambda)\to D(*,\Lambda)\to D$，由 B.11 给出，
- 相容的同一化

$D(\mathrm{Spd}\ \breve F_z,\Lambda)\cong D_{\mathrm{qcoh}}\big((\mathrm{Spec}\ \Lambda)/\mathrm{ID}_{F_z}\big)$ 和 $D(\mathrm{Div}^1_z,\Lambda)\cong D_{\mathrm{qcoh}}\big((\mathrm{Spec}\ \Lambda)/\mathrm{WD}_{F_z}\big)$

使得复合 $D(\mathrm{Spd}\ \breve F_z,\Lambda)\longrightarrow D(\mathrm{Spa}\ \mathbb{C}_z,\Lambda)\xrightarrow{\Psi_z}D(*,\Lambda)$ 对应于沿 $\mathrm{Spec}\ \Lambda\to(\mathrm{Spec}\ \Lambda)/\mathrm{ID}_{F_z}$ 的拉回，由引理 B.10 得出。

此外，Grothendieck 的 ℓ-adic 单值化定理表明，这些选择还会诱导一个函子 $D_{\mathrm{cons}}(U_{\mathbb{F}_q},\Lambda)\to D_{\mathrm{perf}}((\mathrm{Spec}\ \Lambda)/\mathrm{ID}_{F_z})$，它由沿 $\mathrm{Spec}\ F_z\to U_{\mathbb{F}_q}$ 的拉回产生。对其作 Ind 延拓并取 Frobenius-等变对象，得到函子 $D(U_{\mathbb{F}_q},\Lambda)^{(\mathrm{Frob}_U)^*_{\mathbb{F}_q}}\to D_{\mathrm{qcoh}}\big((\mathrm{Spec}\ \Lambda)/\mathrm{WD}_{F_z}\big)$。

5.11. 最后，我们证明定理 E。回顾 2.4 中的自然开嵌入 $i_1:\ *\!/G(F_z)\hookrightarrow \mathrm{Bun}_{G,\ F_z}$，从而对 Z 中的所有 z 取积，便得到一个开嵌入 $i_1:\ *\!/G(F_Z)\hookrightarrow\prod_{z\in Z}\mathrm{Bun}_{G,\ F_z}$。

定理。$\pi_{\infty Z,\ !}\mathcal{S}_{\dot V}$ 的像在

$$D(*\!/\underline{G(F_Z)},\Lambda)\otimes\bigotimes_{z\in Z}D_{\mathrm{qcoh}}\big((\mathrm{Spec}\,\Lambda)/\mathrm{WD}_{F_z}\big)^{\otimes I_z}$$

自然同构于 $i_1^*(T_V(\mathrm{loc}_{Z,\ !}\Lambda))$，作为 $\bigotimes_u\mathrm{End}_{G(F_u)}(\text{c-Ind}^{G(F_u)}_{G(\mathcal{O}_u)}\Lambda)$ 的模。

证明。沿 $\mathrm{Spec}\ \Lambda\to(\mathrm{Spec}\ \Lambda)/\mathrm{WD}_{F_z}$ 拉回之后，我们断言 $\pi_{\infty Z,\ !}\mathcal{S}_{\dot V}$ 与 $i_1^*(T_V(\mathrm{loc}_{Z,\ !}\Lambda))$ 在 $D(*\!/G(F_Z)\Lambda)$ 中的像，作为 $\bigotimes_u\mathrm{End}_{G(F_u)}(\text{c-Ind}^{G(F_u)}_{G(\mathcal{O}_u)}\Lambda)$ 的模自然同构。为看出这一点，首先我们记

$$\mathrm{Sht}:=\Big[\varprojlim_{m\geq 1}\mathrm{Sht}^I_{G,\dot V,mZ}\,|_{(U\smallsetminus Q)^I_{\overline{\mathbb{F}}_q}}\Big]\Big/\underline{G(F_Z)}$$

为方便起见。

接下来，定理 5.6 使我们能够在将 V_z 替换为其限制到对角线后，假设对于所有 z 属于 Z，I_z 都是单元素集合。考虑图表

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathrm{Sht}\,|_{\prod_{z\in Z}\mathrm{Spa}\,\mathbb{C}_z})^{\Diamond} & \longrightarrow & \Big[\prod_{z\in Z}\mathrm{Gr}_{G,V_z}\,|_{\mathrm{Spa}\,\mathbb{C}_z}\Big]\Big/\underline{G(F_Z)} & \longrightarrow & *\!/\underline{G(F_Z)}\times\prod_{z\in Z}\mathrm{Spa}\,\mathbb{C}_z \\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i_1\times\mathrm{id}} \\
 & & \prod_{z\in Z}\mathrm{Hck}_{G,V_z}\,|_{\mathrm{Spa}\,\mathbb{C}_z} & \xrightarrow{h_2} & \prod_{z\in Z}\mathrm{Bun}_{G,F_z}\times\prod_{z\in Z}\mathrm{Spa}\,\mathbb{C}_z \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle h_1} & & \\
\mathrm{Bun}_{G,U} & \xrightarrow{\mathrm{loc}_Z} & \prod_{z\in Z}\mathrm{Bun}_{G,F_z}, & &
\end{array}$$

其中 $\mathrm{Hck}_{G,\ V_z}\,|_{\mathrm{Spa}\,\mathbb{C}_z}$ 表示 $\mathrm{Spa}\ \mathbb{C}_z$ 上的 Hecke 叠，如 [25, 第 16], 页所述；h_1和 h_2 表示 [25, 第 317]页所述的态射。根据 4.4 和定理 3.10，左边的方块是笛卡尔的；根据 [25, 第 97]页，右边的方块是笛卡尔的。注意，顶行中的复合等于将 $\pi^{\Diamond}_{\infty Z}$ 限制到 $\prod_{z\in Z}\mathrm{Spa}\,\mathbb{C}_z$。

真基变换和上述图表表明，$i_1^*(T_V(\mathrm{loc}_{Z,\ !}\Lambda))$ 在 $D(*\!/G(F_Z)\ \Lambda)$ 中的像可作如下描述。对所有 $z\in Z$，记 $\mathcal{S}_{V_z}$ 为通过动机几何 Satake 对应于 V_z 的 $D_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Hck}_{G,\ V_z}\,|_{\mathrm{Spa}\,\mathbb{C}_z})$ 中的对象，见[66, 定理 5.7], ; 并记 $\mathcal{S}_V$为 $\boxtimes_{z\in Z}\mathcal{S}_{V_z}$ 在 $(\mathrm{Sht}\,|_{\prod_{z\in Z}\mathrm{Spa}\ \mathbb{C}_z})^{\Diamond}$ 上的拉回。[66, 第 18] 页的讨论表明，$\pi^{\Diamond}_{\infty Z,\ !}\mathcal{S}_V$ 属于全子范畴

$$D_{\mathrm{mot}}(*\!/\underline{G(F_Z)},\Lambda)\otimes_{D_{\mathrm{mot}}(*)}\bigotimes_{z\in Z}D_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Spa}\,\mathbb{C}_z)\hookrightarrow D_{\mathrm{mot}}\big(*\!/\underline{G(F_Z)}\times\prod_{z\in Z}\mathrm{Spa}\,\mathbb{C}_z\big),$$

其中 $\bigotimes_{z\in Z}$ 位于 $D_{\mathrm{mot}}(*)$ 上，而命题 B.11 表明，应用

$$\bigotimes_{z\in Z}\Psi_z : D_{\mathrm{mot}}(*/\underline{G(F_Z)}) \otimes_{D_{\mathrm{mot}}(*)} \bigotimes_{z\in Z} D_{\mathrm{mot}}(\operatorname{Spa}\mathbb{C}_z) \to D_{\mathrm{mot}}(*/\underline{G(F_Z)}, \Lambda)$$

得到一个对象，其在

$$D_{\mathrm{mot}}(*/\underline{G(F_Z)}) \to D(*/\underline{G(F_Z)}, \Lambda)$$

恰好是 $i_1^*(T_V(\mathbf{loc}_{Z,\ !}\Lambda))$ 在 $D(*/G(F_Z)\ \Lambda)$ 中的像。

我们如下将其提升为扎里斯基可构造版本。注意，$\mathcal{S}_V$ 属于

$$D_{\mathrm{mot}}^{U_{\mathbb{F}_q}^I \setminus \prod_{z\in Z}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_z}\big((\mathrm{Sht}\,|_{\prod_{z\in Z}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_z})^{\Diamond}\big) \subseteq D_{\mathrm{mot}}\big((\mathrm{Sht}\,|_{\prod_{z\in Z}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_z})^{\Diamond}\big),$$

因此 5.5 得到一个对象

$$(\triangle)\qquad \pi_{\infty Z,!}^{\Diamond}\mathcal{S}_V \in D_{\mathrm{mot}}(*/\underline{G(F_Z)}) \otimes_{D_{\mathrm{mot}}(*)} \operatorname{Ind} D_{\mathrm{mot}}^{U_{\mathbb{F}_q}^I \setminus \prod_{z\in Z}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_z}\big(\prod_{z\in Z}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_z\big)$$

其在 Υ 下的像与前面提到的

$$\pi_{\infty Z,!}^{\Diamond}\mathcal{S}_V \in D_{\mathrm{mot}}(*/\underline{G(F_Z)}) \otimes_{D_{\mathrm{mot}}(*)} D_{\mathrm{mot}}\big(\prod_{z\in Z}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_z\big).$$

扎里斯基可构造版本使我们能够与 ℓ-进实现进行比较。更精确地说，[54, 引理6.4] 的证明将$r_{\ell,\ (\mathrm{Sht}\,|_{\prod_{z\in Z}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_z})^{\Diamond}}(\mathcal{S}_V)$与$\rho(\mathcal{S}_{\dot V})$等同，因此5.5将(△)在

$$\begin{aligned} r_{\ell,\prod_{z\in Z}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_z} : D_{\mathrm{mot}}(*/\underline{G(F_Z)}) \otimes_{D_{\mathrm{mot}}(*)} \operatorname{Ind} D_{\mathrm{mot}}^{U_{\mathbb{F}_q}^I \setminus \prod_{z\in Z}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_z}\big(\prod_{z\in Z}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_z\big) \\ \to D(*/\underline{G(F_Z)}, \Lambda) \otimes \operatorname{Ind} D_{\text{ét}}^{U_{\mathbb{F}_q}^I \setminus \prod_{z\in Z}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_z}\big(\prod_{z\in Z}\operatorname{Spa}\mathbb{C}_z, \Lambda\big) \end{aligned}$$

与 $\rho(\pi_{Z\infty,\ !}\mathcal{S}_{\dot V})$等同。定理 5.6表明，$\pi_{Z\infty,\ !}\mathcal{S}_{\dot V}$位于全子范畴

$$D(*/\underline{G(F_Z)}, \Lambda) \otimes D(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \Lambda)^{\otimes I} \hookrightarrow D(*/\underline{G(F_Z)}, \Lambda) \otimes D(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}^I, \Lambda).$$

最后，考虑该图表

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{z\in Z} \operatorname{Ind} D_{\mathrm{mot}}^{U_{\overline{\mathbb{F}}_q}\setminus \operatorname{Spa}\mathbb{C}_z}(\operatorname{Spa}\mathbb{C}_z) & \xrightarrow{\otimes_{z\in Z}\Upsilon} & \bigotimes_{z\in Z} D_{\mathrm{mot}}(\operatorname{Spa}\mathbb{C}_z) \\ \downarrow{\scriptstyle \otimes_{z\in Z} r_{\ell,\operatorname{Spa}\mathbb{C}_z}} & & \\ \bigotimes_{z\in Z} \operatorname{Ind} D_{\text{ét}}^{U_{\overline{\mathbb{F}}_q}\setminus \operatorname{Spa}\mathbb{C}_z}(\operatorname{Spa}\mathbb{C}_z, \Lambda) & \xleftarrow{\otimes_{z\in Z}\rho} & D(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \Lambda)^{\otimes I}, \end{array}$$

其中，上箭头由命题 B.9 和 [65, 命题 10.1],给出等价，左箭头则由命题 B.11 识别为 $\bigotimes_{z\in Z}\Psi_z$。接下来，由外张量积诱导出一个从该图到

该图

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Ind} D_{\mathrm{mot}}^{U_{\overline{\mathbb{F}}_q}^I \setminus \prod_{z\in Z} \operatorname{Spa} \mathbb{C}_z}\big(\prod_{z\in Z} \operatorname{Spa} \mathbb{C}_z\big) & \xrightarrow{\quad\Upsilon\quad} & D_{\mathrm{mot}}\big(\prod_{z\in Z} \operatorname{Spa} \mathbb{C}_z\big) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle r_{\ell,\prod_{z\in Z} \operatorname{Spa} \mathbb{C}_z}} & & \\
\operatorname{Ind} D_{\text{ét}}^{U_{\overline{\mathbb{F}}_q} \setminus \operatorname{Spa} \mathbb{C}_z}\big(\prod_{z\in Z} \operatorname{Spa} \mathbb{C}_z, \Lambda\big) & \xleftarrow{\quad\rho\quad} & D(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}^I, \Lambda).
\end{array}$$

改为在 $\prod_{z\in Z}\mathrm{Spd}\ \breve{F}_z$ 上工作并追踪部分 Frobenius，我们便得到所述结果。□

5.12. 作为定理 5.11 的一个应用，我们可以快速证明，V. Lafforgue 和 Xue 构造的 excursion 算子与 Fargues–Scholze 构造的算子一致。我们最初在 [54, 定理 6.13]中证明了这一点。

回顾例 2.3 中的集合 $\ker^1(F,G)$。对于任意有限集 I、对象 $\dot{V} \in \mathrm{Rep}_\Lambda({}^L G)^I$、态射 $x\colon \mathbf{1} \to \dot{V}|_{\Delta(\widehat{G})}$、态射 $\xi\colon \dot{V}|_{\Delta(\widehat{G})} \to \mathbf{1}$ 以及元素 $\gamma_\bullet \in W_F$，回顾一下 V. Lafforgue 和 Xue 的工作定义了一个 Λ-线性自同态 $S_{I,\dot{V},x,\xi,\gamma_\bullet}$，其作用于 $C_c^\infty(\coprod_{\alpha\in \ker^1(F,G)} G_\alpha(F)\backslash G(\mathbb{A})\ \Lambda)$ [71, 命题 2.2.1]。

记 $\mathfrak{z}(G(F_v)\ \Lambda)$ 为 $G(F_v)$ 在 Λ 上的伯恩斯坦中心，并记 V 为 $\dot{V}$到 $({}^L G_v)^I$的限制。当 $\gamma_\bullet$属于 W_{F_v} 时，回顾 Fargues–Scholze 的工作定义了一个元素 $\mathfrak{z}_{I,\ V,\ x,\ \xi,\ \gamma_\bullet}$，它属于 $\mathfrak{z}(G(F_v)\ \Lambda)$ [25, 定理 VIII.4.1]。

推论。 元素 $\mathfrak{z}_{I,\ V,\ x,\ \xi,\ \gamma_\bullet}$ 通过 $S_{I,\ \dot{V},\ x,\ \xi,\ \gamma_\bullet}$ 作用于 $C_c^\infty(\coprod_{\alpha\in \text{核}^1(F,\ G)} G_\alpha(F)\backslash G(\mathbb{A})\ \Lambda)$。

证明。缩小 U后，我们可以假设 v 属于 Z。对所有 z属于 $Z\smallsetminus v$，令 I_z 为空，从而有 $I_v = I$。余单位 $i_{1,\ !}i_1^* \to \mathrm{id}$ 诱导出一个交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
i_1^* T_{\mathbf{1}} i_{1,!} i_1^* \mathrm{loc}_{Z,!}\Lambda & \xrightarrow{x} & i_1^* T_V i_{1,!} i_1^* \mathrm{loc}_{Z,!}\Lambda & \xrightarrow{\gamma_\bullet} & i_1^* T_V i_{1,!} i_1^* \mathrm{loc}_{Z,!}\Lambda & \xrightarrow{\xi} & i_1^* T_{\mathbf{1}} i_{1,!} i_1^* \mathrm{loc}_{Z,!}\Lambda \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
i_1^* T_{\mathbf{1}} \mathrm{loc}_{Z,!}\Lambda & \xrightarrow{x} & i_1^* T_V \mathrm{loc}_{Z,!}\Lambda & \xrightarrow{\gamma_\bullet} & i_1^* T_V \mathrm{loc}_{Z,!}\Lambda & \xrightarrow{\xi} & i_1^* T_{\mathbf{1}} \mathrm{loc}_{Z,!}\Lambda.
\end{array}$$

由于 $T_{\mathbf{1}}$ 自然同构于恒等函子，左箭头和右箭头都是同构，且各个角都与 $i_1^*\mathrm{loc}_{Z,!}\Lambda$ 等同。利用引理 2.6 并仿照例 2.3 推理，我们看到 $H^0(i_1^*\mathrm{loc}_{Z,!}\Lambda)$ 自然同构于 $C_c^\infty(\coprod_{\alpha\in \text{核}^1(F,G)} G_\alpha(F)\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O}_U)\ \Lambda)$。将 $H^0(-)$ 应用于上述图后，顶箭头按构造等于 $\mathfrak{z}_{I,V,x,\xi,\gamma_\bullet}$ 的作用，而底箭头根据定理 5.11 等于 $S_{I,\dot{V},x,\xi,\gamma_\bullet}$。这表明 $\mathfrak{z}_{I,V,x,\xi,\gamma_\bullet}$ 与 $S_{I,\dot{V},x,\xi,\gamma_\bullet}$ 在 $C_c^\infty(\coprod_{\alpha\in \text{核}^1(F,G)} G_\alpha(F)\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O}_U)\ \Lambda)$ 上的限制相同。最后，取 $\bigcup_Z$ 即得所求结果。□

5.13. 注。

1）推论 5.12 的证明在取上同调群之后仅依赖于定理 5.11。特别是，无需借助定理 5.6；参见备注 5.7。2） [54] 中表示论结果的主要要素是 [54, 定理 6.13]。因此，可以使用推论 5.12 证明 [54]中的所有表示论结果；参见 [54, 定理 6.16]的证明。

6. Relation with Langlands duality

在本节中，我们讨论 $\mathrm{Bun}_{G,F}$ 在朗兰兹对应中所扮演的角色。首先，我们回顾伽罗瓦表示模空间及其归纳相干层的导出范畴，它们是伽罗瓦侧的主要对象。将伽罗瓦表示限制到分解群后，我们得到一个类似于 loc_Z的映射 res_Z；我们研究沿 res_Z对相干对偶化复形 ω的推前。

接下来，我们回顾 Fargues–Scholze 的谱作用，由此可以陈述他们的范畴化朗兰兹猜想。随后我们陈述猜想 F，并说明猜想 F 如何蕴含 Arinkin–Gaitsgory–Kazhdan–Raskin–Rozenblyum–Varshavsky 和 Zhu 的猜想。最后，我们证明当 G 是交换的时，猜想 F 成立；这就是定理 G。

6.1. 我们先回顾将要用到的伽罗瓦表示栈。**在本文其余部分，假设** $\ell \geq 3$。[11] 记 $\mathrm{LS}^{{}^L G,\, U}$ 为定义在 Λ 上的导出代数栈，其参数为连续的、取值于 ${}^L G$ 的表示，其中 W_U

- 如 [73,(3.24)]中所述，当 Z 非空时，或者
- 如 [73,注 3.36] 中所述，当 Z 为空时，

根据我们对 $\sqrt{q}$ 的选择，用 ${}^L G$ [73, 替换 ${}^c G$ ，如1]注 3.1]所述。当 Z 非空时，将其框架版本记为 $\mathrm{LS}^{\square}_{{}^L G,\, U}$ ，如 [73, (3.24)], 中所述； [73, 定理 3.29] 的证明表明，它是有限型导出仿射概形在 Λ上的不交并。

类似地，对于 C的所有闭点 v ，将W_{F_v} 的连续 ${}^L G_v$-值表示所成的代数栈记为 $\mathrm{LS}^{{}^L G,\, F_v}$ ，如 [73, (3.3)], 中所述；并将其框架版本记为 $\mathrm{LS}^{\square}_{{}^L G,\, F_v}$ ，如 [73, (3.3)]中所述。于是， [66, 推论 4.5] 推出，$\mathrm{LS}^{{}^L G,\, F_v}$ 是 Λ到 [66, 定义 4.3],中代数栈的基变换，而 [25, 定理 VIII.1.3] 表明，$\mathrm{LS}^{\square}_{{}^L G,\, F_v}$ 是 Λ上的有限型仿射概形的不交并。

对于 U 的所有闭点 u ，按照 [73, 第 82] 页的记号，记 $\mathrm{LS}^{{}^L G,\mathcal{O}_u} \subseteq \mathrm{LS}^{{}^L G,F_u}$ 为 W_{F_v} 的非分歧 ${}^L G_v$ 值表示所构成的闭子栈。记 $\mathrm{LS}^{\square}_{{}^L G,\mathcal{O}_u}$ 为$\widehat{}$的框架版本，它自然同构于 G。

6.2. 我们将考虑这些栈上的归纳相干层。具体而言，回顾 [64,第 VIII 讲7] 中的Λ-线性归纳相干六函子形式体系 $\mathrm{IndCoh}(-)$,

$$\{\text{derived qcqs schemes almost of finite type over } \Lambda\},$$

其中，我们使用 Gaitsgory–Rozenblyum [30, 第 273] 页中的记号表示相应的函子，而不使用 [56, 定义 A.5.6]中的记号。于是， [41, 定理 3.4.11]将其扩展为一个六函子形式体系，定义在

$$\{\text{derived algebraic stacks over } \Lambda\}.$$

令 D 为 $\{U \neq C, F_v\}$之一。于是，6.1 表明，IndCoh 在 $\mathrm{LS}^{{}^L G,\, D}$ 上的取值自然等价于 $\mathrm{Ind}\, D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}^{{}^L G,\, D})$。

[11]这是因为用于证明 $\mathrm{LS}^{{}^L G,U}$ [73, 的基本性质的德容猜想 [18, 猜想 1.1], , 目前仅在 $\ell \geq 3$ [27] 时已知。

6.3. 限制到下有界对象时，$\mathrm{LS}^{L_G,\ D}$ 上的 ind-完美对象与 ind-凝聚对象并无区别。更准确地说，将 Ind 应用于包含映射 $D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{perf}}(\mathrm{LS}^{L_G,\ D}) \subseteq D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}^{L_G,\ D})$，得到一个全忠实函子

$$\Xi : \mathrm{Ind}\, D^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{perf}}(\mathrm{LS}_{L_{G,D}}) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\, D^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}_{L_{G,D}}).$$

记 $\Psi : \mathrm{Ind}\ D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}^{L_G,\ D}) \to \mathrm{Ind}\ D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{perf}}(\mathrm{LS}^{L_G,\ D})$ 为其右伴随。然后按照命题 [28, Proposition 1.2.4] 的证明进行论证，可知 Ψ 限制为一个等价

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left[\mathrm{Ind}\, D^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}_{L_{G,D}})\right]^{\geq n} \xrightarrow{\sim} \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left[\mathrm{Ind}\, D^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{perf}}(\mathrm{LS}_{L_{G,D}})\right]^{\geq n},$$

借此我们将 $D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}^{L_G,\ D})$ 与其在 Ψ 下的像等同起来。

6.4. 限制诱导出以下各个伽罗瓦表示栈之间的态射。对于 U 的所有闭点 u 以及 Z 中的 z，记作

$$\mathrm{res}_u : \mathrm{LS}_{L_{G,U}} \to \mathrm{LS}_{L_{G,\mathcal{O}_u}} \ \text{ and } \ \mathrm{res}_z : \mathrm{LS}_{L_{G,U}} \to \mathrm{LS}_{L_{G,F_z}}$$

记为相应的、位于 Λ 上的态射。记 $\mathrm{res}_Z : \mathrm{LS}^{L_G,\ U} \to \prod_{z\in Z} \mathrm{LS}^{L_G,\ F_z}$ 为态射 $(\mathrm{res}_z)_{z\in Z}$，其中所有积均取在 Λ 上。根据 6.1，IndCoh 在 $\prod_{z\in Z}\mathrm{LS}^{L_G,\ F_z}$ 上的取值自然等价于

$$\bigotimes_{z\in Z} \mathrm{Ind}\, D^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}_{L_{G,F_z}}).$$

6.5. 对于 U 中的素位，我们在 $\mathrm{res}_{Z,*}(\omega_{\mathrm{LS}_{L_{G,U}}})$ 上有如下（导出的）谱 Hecke代数作用。令 Q 为 U 的一个有限非空闭点集，并记

$$\mathrm{res}_Q : \mathrm{LS}_{L_{G,U}} \to \textstyle\prod_{u\in Q} \mathrm{LS}_{L_{G,\mathcal{O}_u}}$$

为态射 $(\mathrm{res}_u)_{u\in U}$。那么 [73, 引理 3.34] 表明，该方块

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{LS}_{L_{G,U}} & \xrightarrow{(\mathrm{res}_Q,\mathrm{res}_Z)} & \left(\prod_{u\in Q} \mathrm{LS}_{L_{G,\mathcal{O}_u}}\right) \times \left(\prod_{z\in Z} \mathrm{LS}_{L_{G,F_z}}\right) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{LS}_{L_{G,U\smallsetminus Q}} & \longrightarrow & \left(\prod_{u\in Q} \mathrm{LS}_{L_{G,F_u}}\right) \times \left(\prod_{z\in Z} \mathrm{LS}_{L_{G,F_z}}\right)
\end{array}$$

是导出笛卡尔的。此外，6.1 表明下箭头是 $*$-able，因此上箭头也如此。因此，引理 5.2 赋予 $\mathrm{res}_{Z,*}(\omega_{\mathrm{LS}_{L_{G,U}}})$（属于$\bigotimes_{z\in Z}\mathrm{Ind}\ D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}^{L_G,F_z})$）一个 $\mathbb{E}_1$-代数模结构

$$\mathrm{End}_{D_{\mathrm{coh}}(\prod_{u\in Q} \mathrm{LS}_{L_{G,F_u}})}(\mathscr{O}_{\prod_{u\in Q} \mathrm{LS}_{L_{G,\mathcal{O}_u}}}) = \bigotimes_{u\in Q} \mathrm{End}_{D_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}_{L_{G,F_u}})}(\mathscr{O}_{\mathrm{LS}_{L_{G,\mathcal{O}_u}}})$$

在 Λ 上。对 Q 取余极限表明，$\mathrm{res}_{Z,*}(\omega_{\mathrm{LS}_{L_{G,U}}})$ 自然地是 $\mathbb{E}_1$-代数 $\bigotimes_u \mathrm{End}_{D_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}^{L_G,F_u})}(\mathrm{LS}^{L_G,\mathcal{O}_u})$ 上的模，其中 u 遍历 U 的闭点。

6.6. 记 $D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}^{L}{}_{G,F_v})_{\mathrm{Nilp}} \subseteq D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}^{L}{}_{G,F_v})$ 为具有幂零奇异支撑的对象所构成的全子范畴，如 [25, VIII.2.2.2] 所述。出现在范畴化局部朗兰兹猜想中的正是 $\mathrm{Ind}\ D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}^{L}{}_{G,F_v})_{\mathrm{Nilp}}$，因此我们需要验证 $\mathrm{res}_{Z,*}(\mathrm{LS}^{L}{}_{G,U})$ 落在该子范畴中。

命题。 对象 $\mathrm{res}_{Z,\ *}({}^{\omega}\mathrm{LS}_{{}^{L}G,\ U})$ 属于 $\bigotimes_{z\in Z}\mathrm{Ind}\ D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}^{L}{}_{G,\ F_z})$

$$\bigotimes_{z\in Z}\mathrm{Ind}\, D^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}_{{}^{L}G,F_z})_{\mathrm{Nilp}}.$$

证明。 当 Z 为空时，这个条件也为空。当 Z 非空时， [73,定理 3.29] 表明 $\mathrm{LS}^{\square}_{{}^{L}G,\ U}$ 在 Λ上是拟光滑的，因此 [7, 推论 2.2.8][12]表明其对偶化复形 ${}^{\omega}\mathrm{LS}^{\square}_{{}^{L}G,\ U}$ 是某个线丛的平移。由光滑下降，同样的结论对 ${}^{\omega}\mathrm{LS}_{{}^{L}G,\ U}$也成立，因此结论由 6.3 得出。 □

6.7. 局部自守侧与谱侧通过 Fargues–Scholze 的如下谱作用相关。记 Z_G 为 F上的 G 的中心；在本文余下部分，假设 $\pi_0((Z_G)_F)$ 在 Λ 中可逆。于是， [66, 定理 6.1] 和 6.1 表明，存在一个自然的 Λ-线性作用： $D_{\mathrm{perf}}(\mathrm{LS}^{L}{}_{G,F_v})$ 作用于$D(\mathrm{Bun}_{G,F_v},\Lambda)^{\omega}$。记 V_v为与对象 $V_v\in\mathrm{Rep}_{\Lambda}({}^{L}G)^{I}$相关联的 $\mathrm{LS}^{L}{}_{G,F_v}$ 上的向量丛；根据构造， $V_v\in\ D_{\mathrm{perf}}(\mathrm{LS}^{L}{}_{G,F_v})$ 通过 T_{V_v} 作用于$D(\mathrm{Bun}_{G,F_v},\Lambda)^{\omega}$。

通过限制到 $D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{perf}}(\mathrm{LS}^{L}{}_{G,F_v})$ 并应用 Ind，上述内容自然扩展为 $\mathrm{Ind}\ D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{perf}}(\mathrm{LS}^{L}{}_{G,F_v})$ 在 $D(\mathrm{Bun}_{G,F_v},\Lambda)$ 上的 Λ-线性保余极限作用。

6.8. 现在我们利用谱作用来陈述 Fargues–Scholze 的范畴化局部 Langlands 猜想。**在本文其余部分，假设 G 在 F上拟分裂**。 那么我们可以取 B 为 G 在 F上的一个博雷尔子群，并取 T 为 B 在 F上的一个极大子环面。记 B的幺幂根基为 N，并令 $\psi\colon N(\mathbb{A})\to\Lambda^{\times}$ 为一个在 $N(F)$ 上平凡的连续同态，使得对于 C 的所有闭点 v，其对 $N(F_v)$ 的限制 ψ_v 是泛型的。

考虑保余极限函子 $a_{\psi_v}\colon \mathrm{Ind}\ D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{perf}}(\mathrm{LS}^{L}{}_{G,F_v})\to D(\mathrm{Bun}_{G,F_v},\Lambda)$，它通过在 $i_{1,!}\,\text{c-Ind}^{G(F_v)}_{N(F_v)}\psi_v$ 上按 6.7 中的方式作用而定义。将它的右伴随记为

$$c_{\psi_v}: D(\mathrm{Bun}_{G,F_v},\Lambda)\to\mathrm{Ind}\, D^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{perf}}(\mathrm{LS}_{{}^{L}G,F_v}).$$

猜想 ([25, 猜想 X.3.5])。 函子 c_{ψ_v} 限制为一个等价

$$D(\mathrm{Bun}_{G,F_v},\Lambda)^{\omega}\xrightarrow{\sim} D^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}_{{}^{L}G,F_v})_{\mathrm{Nilp}}.$$

因此，应用 Ind 可得一个等价

$$\mathbb{L}_{\psi_v}: D(\mathrm{Bun}_{G,F_v},\Lambda)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ind}\, D^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}_{{}^{L}G,F_v})_{\mathrm{Nilp}}.$$

当 G 是环面时，猜想 6.8 已知成立 [75, 定理 6.4。1]。

[12]虽然 [7] 适用于特征零的代数闭域，但 [7, 推论 2.2.8]的证明并未使用这一假设。

6.9. 为了比较 U 中各素位处（导出）自守 Hecke 代数与谱 Hecke 代数的作用，我们考虑 Zhu 的以下猜想。

猜想 ([73, 猜想 4.11])**.** 设 u 是 U 的一个闭点。

1) 假设 u 满足猜想 *6.8*。则 $\mathbb{L}_{\psi_u}(i_{1,!}\text{c-Ind}^{G(F_u)}_{G(\mathcal{O}_u)}\Lambda) \cong \mathscr{O}_{\mathrm{LS}^{L}_{G,\mathcal{O}_u}}$.

存在一个 $\mathbb{E}_1$-代数在 Λ 上的自然同构

$$\mathrm{End}_{G(F_u)}(\text{c-Ind}^{G(F_u)}_{G(\mathcal{O}_u)}\Lambda) \cong \mathrm{End}_{D_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}^{L}_{G,F_u})}(\mathscr{O}_{\mathrm{LS}^{L}_{G,\mathcal{O}_u}}).$$

注意，猜想 6.9.1) 蕴含猜想 6.9.2) 。[75, 定理 6.4.1] 的证明表明，当 G 是一个环面时，猜想 6.9.1) 已知；关于猜想 6.9.2) 中由此得到的同构的明确描述，参见 [73, 命题 4.13]。

当 Λ 等于 L [74, 定理 5.3 (2)] 时，猜想 6.9.2) 已知。

6.10. 最后，我们得出猜想 F。

猜想。 假设对于 Z 中的所有 z ，猜想 *6.8* 均成立，从而得到一个等价

$$\bigotimes_{z\in Z}\mathbb{L}_{\psi_z} : \bigotimes_{z\in Z} D(\mathrm{Bun}_{G,F_z},\Lambda) \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{z\in Z}\mathrm{Ind}\, D^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}^{L}_{G,F_z})_{\mathrm{Nilp}}.$$

假设对于 U 中的所有闭点 u ，猜想 *6.9.2)* 成立，从而得到一个同构

$$\bigotimes_{u}\mathrm{End}_{G(F_u)}(\text{c-Ind}^{G(F_u)}_{G(\mathcal{O}_u)}\Lambda) \cong \bigotimes_{u}\mathrm{End}_{D_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}^{L}_{G,F_u})}(\mathscr{O}_{\mathrm{LS}^{L}_{G,\mathcal{O}_u}}).$$

那么，$\bigotimes_u \mathrm{End}_{G(F_u)}(\text{c-Ind}^{G(F_u)}_{G(\mathcal{O}_u)}\Lambda)$-模

$$\mathrm{loc}_{Z,!}\Lambda \in \bigotimes_{z\in Z} D(\mathrm{Bun}_{G,F_z},\Lambda)$$

在 $\bigotimes_{z\in Z}\mathbb{L}_{\psi_z}$ 下对应于 $\bigotimes_u \mathrm{End}_{D_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}^{L}_{G,F_u})}(\mathscr{O}_{\mathrm{LS}^{L}_{G,\mathcal{O}_u}})$-模

$$\mathrm{res}_{Z,*}(\omega_{\mathrm{LS}^{L}_{G,U}}) \in \bigotimes_{z\in Z}\mathrm{Ind}\, D^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{LS}^{L}_{G,F_z})_{\mathrm{Nilp}}.$$

6.11. 例。 假设 Z 为空。 那么例 2.3 将 $\mathbf{Bun}_{G,C}$ 识别为与 $\mathbb{F}_q$ 上关联于群胚 (♡) 的常值叠，因此

$$\mathrm{loc}_{\varnothing,!}\Lambda = \bigoplus_{\alpha\in \ker^1(F,G)} \Gamma_c(\underline{G_\alpha(F)\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O})},\Lambda),$$

这里提醒读者，当 $\Lambda \neq L$ [71, 注 0.0.3] 时， $\Gamma_c(G_\alpha(F)\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O})\ \Lambda)$ 可能在非零次数上有上同调。另一方面，根据定义

$$\mathrm{res}_{\varnothing,*}(\omega_{\mathrm{LS}^{L}_{G,C}}) = \Gamma(\mathrm{LS}^{L}_{G,C},\omega_{\mathrm{LS}^{L}_{G,C}}).$$

综上，我们看到，当G 为分裂的、 $\Lambda = L$，且 Z 为空时，猜想 6.10 专化为 [8, 猜想 24.8。6]

6.12. 更一般地，猜想 6.10 蕴含以下关于 G的扩展纯内扭曲之全局 shtuka 叠的上同调公式；这是 Zhu 的一个猜想 [73, 猜想 4.49]。设 b 是 $G(U_{\mathbb{F}_q})$中的一个元素，其在 $B(F,G)$中的像为基本元素，并回顾 2.9 中定义在U上的抛物型群概形 G_b 。利用 fpqc 下降，将 G_b 扩张为定义在 C上的抛物型群概形。由于 G_b是 F上的 G 的内扭曲，我们有相容的同一化 ${}^LG = {}^LG_b$ 和${}^LG_v = {}^LG_{b,\ v}$。记

$$\pi^{G_b}_{\infty Z} : \varprojlim_{m\geq 1} \mathrm{Sht}^I_{G_b,\dot V,mZ}\,|_{(U\smallsetminus Q)^I_{\overline{\mathbb{F}}_q}} \to (U\smallsetminus Q)^I_{\overline{\mathbb{F}}_q}$$

对于结构态射。

回顾开嵌入 $i_b\colon\ *\!/G_b(F_z)\hookrightarrow \mathrm{Bun}_{G,\ F_z}$ [25, 定理 III.4。5], 因此对所有 z 在 Z 中的对象取积可得到一个开嵌入

$$i_b : *\!/G_b(F_Z) \hookrightarrow \prod_{z\in Z} \mathrm{Bun}_{G,F_z}.$$

对于所有 z 在 Z中，令 K_z 为 $G_b(F_z)$ 的一个紧开子群。记 K 为$\prod_{z\in Z} K_z$，并考虑结构态射

$$\pi^{G_b}_K : \Big[\varprojlim_{m\geq 1} \mathrm{Sht}^I_{G_b,\dot V,mZ}\,|_{(U\smallsetminus Q)^I_{\overline{\mathbb{F}}_q}}\Big]\Big/\underline{K} \to (U\smallsetminus Q)^I_{\overline{\mathbb{F}}_q}.$$

记 V 为 $\mathrm{LS}^{L_{G,\ U}}$ 上与 $\mathrm{Rep}_\Lambda({}^LG)^I$ 中对象 V 相关联的向量丛，并记 $\mathbb{D}(-)$ 为 Grothendieck–Serre 对偶。

命题。 假设猜想 *6.10* 成立。则 $\pi^{G_b}_{K,\ !}\,\mathcal{S}_{\dot V}$ 在

$$\bigotimes D_{\mathrm{qcoh}}\big((\mathrm{Spec}\,\Lambda)/\mathrm{WD}_{F_z}\big)^{\otimes I_z}$$

作为 $\bigotimes_u \mathrm{End}_{G(F_u)}(\text{c-Ind}^{G(\tilde F_u)}_{G(\mathcal{O}_u)}\Lambda)$ 的模同构于

$$\Gamma\big(\mathrm{LS}_{{}^LG,U}, \dot V\otimes \mathrm{res}^!_Z(\boxtimes_{z\in Z}\mathbb{D}(\mathbb{L}_{\psi_z}(i_{b,!}\,\text{c-Ind}^{G_b(F_z)}_{K_z})))\big).$$

证明。 由于 b 是基本的，命题 2.9 和定理 5.11 将其识别为

$$\begin{aligned}\pi^{G_b}_{K,!}\mathcal{S}_{\dot V} = (\pi^{G_b}_{\infty Z,!}\mathcal{S}_{\dot V})^K &= \mathrm{Hom}_{G_b(F_Z)}\big(\text{c-Ind}^{G_b(F_Z)}_K\Lambda, \pi^{G_b}_{\infty Z,!}\mathcal{S}_{\dot V}\big)\\ &= \mathrm{Hom}_{G_b(F_Z)}\big(\text{c-Ind}^{G_b(F_Z)}_K\Lambda, i_b^*(T_V(\mathrm{loc}_{Z,!}\Lambda))\big)\\ &= \mathrm{Hom}\big(i_{b,!}\,\text{c-Ind}^{G_b(F_Z)}_K\Lambda, T_V(\mathrm{loc}_{Z,!}\Lambda)\big).\end{aligned}$$

根据猜想 6.10 和投影公式，这同构于

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}\big(\boxtimes_{z\in Z}\mathbb{L}_{\psi_z}(i_{b,!}\,\text{c-Ind}^{G_b(F_z)}_{K_z}\Lambda), V\otimes \mathrm{res}_{Z,*}(\omega_{\mathrm{LS}_{{}^LG,U}})\big)\\ =\ &\mathrm{Hom}\big(\boxtimes_{z\in Z}\mathbb{L}_{\psi_z}(i_{b,!}\,\text{c-Ind}^{G_b(F_z)}_{K_z}\Lambda), \mathrm{res}_{Z,*}(\dot V\otimes\omega_{\mathrm{LS}_{{}^LG,U}})\big).\end{aligned}$$

最后，应用 Grothendieck–Serre 对偶性可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}\big(\mathrm{res}_{Z,!}(\mathbb{D}(\dot V\otimes\omega_{\mathrm{LS}_{{}^LG,U}})), \boxtimes_{z\in Z}\mathbb{D}(\mathbb{L}_{\psi_z}(i_{b,!}\,\text{c-Ind}^{G_b(F_z)}_{K_z}))\big)\\ =\ &\mathrm{Hom}\big(\mathrm{res}_{Z,!}(\dot V^\vee), \boxtimes_{z\in Z}\mathbb{D}(\mathbb{L}_{\psi_z}(i_{b,!}\,\text{c-Ind}^{G_b(F_z)}_{K_z}))\big)\\ =\ &\Gamma\big(\mathrm{LS}_{{}^LG,U}, \dot V\otimes \mathrm{res}^!_Z(\boxtimes_{z\in Z}\mathbb{D}(\mathbb{L}_{\psi_z}(i_{b,!}\,\text{c-Ind}^{G_b(F_z)}_{K_z})))\big).\end{aligned}$$

□

6.13. 注： 当 $b=1$ 时，预期 $\mathbb{L}_{\psi_z}(i_{1,\ !}\,\text{c-Ind}^{G(F_z)}_{K_z}\Lambda)$ 与其 Grothendieck–Serre 对偶 [73, 注 4.27] 同构。

6.14. 本节的目标是在 $G = T$ 是环面时证明猜想 6.10。我们先回顾朗兰兹关于环面猜想的工作。~记 $\underline{W_{\widetilde{F}/F} := W_F/[W_{\widetilde{F}}, W_{\widetilde{F}}]}$ 为 F/F 的相对韦伊群，从而全局类域论给出一个自然的局部行列式群短正合列

$$1 \longrightarrow \widetilde{F}^\times \backslash \mathbb{A}_{\widetilde{F}}^\times \longrightarrow W_{\widetilde{F}/F} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\widetilde{F}/F) \longrightarrow 1.$$

~设 $\mathbb{T}$ 表示局部行列式群 $\left[T(\widetilde{F})\backslash T(\mathbb{A}_{\widetilde{F}})\right]^{\mathrm{Gal}(F/F)}$。于是，群上同调的长正合列给出一个自然的短正合列

$$1 \longrightarrow T(F)\backslash T(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{T} \longrightarrow \ker^1(F, T) \longrightarrow 1$$

的局部行列式群。回顾一下，转移映射诱导出一个同构

$$H_1(W_{\widetilde{F}/F}, X_*(T)) \xrightarrow{\sim} H_1(\widetilde{F}^\times \backslash \mathbb{A}_{\widetilde{F}}^\times, X_*(T))^{\mathrm{Gal}(\widetilde{F}/F)} = \mathbb{T}$$

~ ~[52, p. 233], 并且对于 $F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times$ 的所有 Gal(F/F)-稳定开子群 P，记

$$\Theta(P) \coloneqq \ker\left[H_1(W_{\widetilde{F}/F}, X_*(T)) \to H_1(W_{\widetilde{F}/F}/P, X_*(T))\right].$$

引理。 在识别 $H_1(W_{\widetilde{F}/F}, X_*(T)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}$ 下，子群 $\Theta(P)$ *cor-*~对应于 $P \otimes_{\mathbb{Z}} X_*(T) \subseteq T(F)\backslash T(\mathbb{A}_{\widetilde{F}})$ 在范数映射下的像。

证明。 群同调的五项正合序列将 $\Theta(P)$ 与 $H_1(P,\ X_*(T)) = P \otimes_{\mathbb{Z}} X_*(T)$ 在余限制映射下的像对应起来。将转移映射与余限制映射复合可得到范数映射，正如所要求的那样。□

6.15. 假设 Z 非空。我们将通过以下方式根据分支程度对 $\mathrm{LS}^{L}_{T,\ U}$ 进行分层。设 K 是 $F_{\widetilde{Z}}^\times$ 的一个由 Gal(F/F)-稳定的紧开子群，并记 $\mathrm{LS}^{\square\ L}_{T,\ K}$ 为 {上的仿射概形预层；对于 Λ}，其 Spec A-点由 1-余循环 $W_{\widetilde{F}/F}/\mathbb{O}_{\widetilde{U}}^\times K \to \widehat{T}(A)$ 构成。由于 $W_{\widetilde{F}/F}/\mathbb{O}_{\widetilde{U}}^\times K$ 是有限生成的，$\mathrm{LS}^{\square\ L}_{T,\ K}$ 是 Λ上的有限型仿射概形。记 $\mathrm{LS}^{L}_{T,\ K}$ 为 Λ上的代数栈 $\mathrm{LS}^{\square\ L}_{T,\ K}/\widehat{T}$。

对于任意有限生成阿贝尔群 M，记 Hom$(M, \mathbb{G}_m)$ 为其在 Λ 上的卡蒂埃对偶。注意，Hom$(M, \mathbb{G}_m)$ 是一个在 Λ 上的有限型平坦仿射概形。

命题。 代数栈 $\mathrm{LS}^{L}_{T,K}$ 自然地是一个 *gerbe*，其带化由

$$\underline{\mathrm{Hom}}\big(\mathbb{T}/\mathbb{O}_U^\times \mathrm{Nm}_{\widetilde{F}/F}(K \otimes_{\mathbb{Z}} X_*(T)), \mathbb{G}_m\big)$$

$\widehat{T}_{\text{伽罗瓦群}(\widetilde{F}/F)}$给出。

证明。 记 H^{pre} 为 { 上仿射概形的预层，其 Spec A-点由以下集合论商构成

$$\mathrm{LS}^{\square}_{L\,T,K}(A)/\widehat{T}(A) = H^1\big(W_{\widetilde{F}/F}/\mathbb{O}_{\widetilde{U}}^\times K, \widehat{T}(A)\big),$$

并将 H 记作其 fpqc层化。利用表示 $\mathrm{LS}^{L}_{T,\ K} = \mathrm{LS}^{\square\ L}_{T,\ K}/\widehat{T}$，我们看到，$\mathrm{LS}^{L}_{T,\ K}$ 的惯性栈自然同构于 $\widehat{T}_{\text{伽罗瓦群}(\widetilde{F}/F)} \times \mathrm{LS}^{L}_{T,\ K}$在 $\mathrm{LS}^{L}_{T,\ K}$上的形式。因此，[68, Tag 06QJ]表明，$\mathrm{LS}^{L}_{T,\ K}$ 自然是一个由H带化的 gerbe，其带为 $\widehat{T}_{\text{伽罗瓦群}(\widetilde{F}/F)}$。

由于 $X^*(T)\otimes_{\mathbb{Z}} A^\times = T(A)$，自然映射

$$H^1\big(W_{\widetilde{F}/F}/\mathbb{O}_{\widetilde{U}}^\times K, X^*(T)\otimes_{\mathbb{Z}} A^\times\big)\to \mathrm{Hom}\left(H_1\big(W_{\widetilde{F},F}/\mathbb{O}_{\widetilde{U}}^\times K, X_*(T)\big), A^\times\right)$$

给出一个态射 ι^{pre}：$H^{\mathrm{pre}}\to \mathrm{Hom}(\underline{H_1(W_{\widetilde{F},F}/\mathbb{O}_{\widetilde{U}}^\times K}, X_*(T))\ \mathbb{G}_m)$。当 $A^\times$可整除时，上述映射是一个同构，因此 [75, 引理 4.1.1] 表明，ι^{pre}在 fpqc 层化后成为一个同构 ι：$H\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}(H_1(W_{\widetilde{F},F}/\mathbb{O}_{\widetilde{U}}^\times K, X_*(T))\ \mathbb{G}_m)$。最后，引理 6.14 表明，转移映射给出一个同构

$$H_1\big(W_{\widetilde{F},F}/\mathbb{O}_{\widetilde{U}}^\times K, X_*(T)\big)\xrightarrow{\sim}\mathbb{T}/\mathbb{O}_U^\times \mathrm{Nm}_{\widetilde{F}/F}(K\otimes_{\mathbb{Z}} X_*(T)).\qquad\square$$

6.16. 假设 Z 非空。利用朗兰兹的工作，我们可以证明以下对 $\mathrm{LS}^{L}_{T,U}$ 的显式描述。

定理。导出代数栈 $\mathrm{LS}^{L}_{T,U}$ 是经典的，且等于

$$\bigcup_K \mathrm{LS}^{L}_{T,K},$$

~其中 K遍历 *{style id='3'>Gal(*F/F)-稳定的 *pro-*p开子群（属于 $F_{\widetilde{Z}}^\times$），过渡态射为开闭嵌入。

证明。回顾一下，$\mathrm{LS}^{\square\ \mathrm{cl}}_{L_T,,U}$的 Spec A-点由 1-余循环 φ：$W_U\to\widehat{T}(A)$ 构成；如注 2.54] 所述，它们关于 A 上的 ind-ℓ- 进拓扑是连续的。由于 $\varphi|_{W_{\widetilde{U}}}$ 是同态，且 $T(A)$ 是阿贝尔群，φ可经由 ~ $W_U\to W_{\widetilde{F}/F}/\mathbb{O}_{\widetilde{U}}^\times$分解。由于 $F^\times\backslash\mathbb{A}_{\widetilde{F}}^\times/\mathbb{O}_{\widetilde{U}}^\times$是局部 pro-$p$的，存在 $F_{\widetilde{Z}}^\times$的一个 Gal(F/F)-~稳定 pro-p开子群 K，使得 φ可经由 $W_{\widetilde{F}/F}/\mathbb{O}_{\widetilde{U}}^\times K$分解。由此可知

$$\mathrm{LS}^{\square,\mathrm{cl}}_{L_{T,U}}=\bigcup_K \mathrm{LS}^{\square}_{L_{T,K}},$$

~其中 K遍历 $F_{\widetilde{Z}}^\times$ 中由 Gal(F/F) 稳定的 pro-p 开子群，而 [25, 定理 VIII.1.3]的证明蕴含过渡态射是既开又闭的嵌入。对 T 取商可得到类似的描述

$$\mathrm{LS}^{\mathrm{cl}}_{L_{T,U}}=\bigcup_K \mathrm{LS}^{L}_{T,K}\,.$$

由于有限生成阿贝尔群 $\mathbb{T}/\mathbb{O}_U^\times \mathrm{Nm}_{\widetilde{F}/F}(K\otimes_{\mathbb{Z}} X_*(T))$ 的秩为 $\dim \widehat{T}^{\mathrm{Gal}(\widetilde{F}/F)}$，其卡蒂埃对偶 $\mathrm{Hom}(\mathbb{T}/\mathbb{O}_U^\times \mathrm{Nm}_{\widetilde{F}/F}(K\otimes_{\mathbb{Z}} X_*(T))\ \mathbb{G}_m)$ 在 Λ 上的相对维数为 $\dim \widehat{T}^{\mathrm{Gal}(\widetilde{F}/F)}$。因此，命题 6.15 表明 $\mathrm{LS}^{L}_{T,K}$ 在 Λ 上的相对维数为 0。最后，$\mathrm{LS}^{L}_{T,U}$ 在 Λ 上的相对虚维数也为 0，因此 [35,命题 B.0.1] 蕴含 $\mathrm{LS}^{L}_{T,U}$ 是经典的。□

6.17. 最后，我们证明定理 G。

定理。当 $G=T$ 是环面时，猜想 *6.10* 成立。

证明。利用命题 6.12，我们可以假设 Z 非空。随后，定理 6.16 和命题 6.15 表明，$\mathrm{LS}^{L}_{T,U}$ 自然地是一个 gerbe，其

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{T}/\mathbb{O}_U^\times,\mathbb{G}_m):=\bigcup_K \underline{\mathrm{Hom}}\big(\mathbb{T}/\mathbb{O}_U^\times \mathrm{Nm}_{\widetilde{F}/F}(K\otimes_{\mathbb{Z}} X_*(T)),\mathbb{G}_m\big)$$

带为 $\widehat{T}_{\text{伽罗瓦群}(\widetilde{F}/F)}$，其中 K遍历 $\widetilde{F}/F$ 的伽罗瓦群-稳定的 pro-p开子群$\widetilde{F}^{\times}_{\widetilde{Z}}$。这意味着 $\omega_{\mathrm{LS}_{L_T,\,U}}$同构于 $\mathscr{O}_{\mathrm{LS}_{L_T,\,U}}$。利用 [75, 命题 4.3, 2], 这也意味着我们有一个分解

$$D^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{perf}}(\mathrm{LS}_{L_{T,U}}) = \bigoplus_{\chi\in X_*(T)_{W_F}} D^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{perf}}(\mathrm{LS}_{L_{T,U}})_{\chi}$$

使得 $D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{perf}}(\mathrm{LS}^{L_{T,U}})_{\mathbf{1}}$自然等价于 $D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{perf}}(\mathrm{Hom}(\mathbb{T}/\mathbb{O}_U^{\times},\mathbb{G}_m))$, 后者由 [75, 引理 4.2.1] 等同于 $D(*/\mathbb{T}/\mathbb{O}_U^{\times},\Lambda)^{\omega}$。对所有 χ 属于 $X_*(T)_{W_F}$，与 χ 相伴的线丛作张量积也会给出等价 $D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{perf}}(\mathrm{LS}^{L_{T,U}})_{\mathbf{1}} \xrightarrow{\sim} D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{perf}}(\mathrm{LS}^{L_{T,U}})_{\chi}$。

对所有 z 属于 Z, [75, 引理 6.2.3] 与 [75, 引理 4.2.1] 表明我们有一个类似的分解

$$D^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{perf}}(\mathrm{LS}_{L_{T,F_z}}) = \bigoplus_{\chi_z\in X_*(T)_{W_{F_z}}} D^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{perf}}(\mathrm{LS}_{L_{T,F_z}})_{\chi_z},$$

其中 $D^{\mathrm{qc}}{}_{\mathrm{perf}}(\mathrm{LS}^{L_{T,F_z}})_{\chi_z}$对所有 χ_z属于$X_*(T)_{W_{F_z}}$自然等价于 $D(*/T(F_z)\ \Lambda)^{\omega}$。这诱导出一个分解

$$(\clubsuit)\qquad \bigotimes_{z\in Z}\mathrm{Ind}\, D^{\mathrm{qc}}_{\mathrm{perf}}(\mathrm{LS}_{L_{T,F_z}}) = \prod_{\chi_\bullet\in\bigoplus_{z\in Z}X_*(T)_{W_{F_z}}} D(*/\underline{T(F_Z)},\Lambda).$$

在这些识别下，$\mathrm{res}_{Z,\,*}(\omega_{L_{T,\,U}})$对应于各因子中的 $C_c^{\infty}(\mathbb{T}/\mathbb{O}_U^{\times},\ \Lambda)$，其中 $\chi_\bullet$属于 $\ker(\bigoplus_{z\in Z}X_*(T)_{W_{F_z}}\to X_*(T)_{W_F})$，而其他因子中为 0。

由于 T 是一个环面，Kottwitz 集中的每个元素都是基本的。因此 $\mathrm{Bun}_{T,\,U}$等于 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{T,\,U}$，所以定理 4.11 和引理 2.6 自然地将 $\mathrm{Bun}_{T,\,U}$ 识别为

$$\coprod_b \underline{T(F)}\backslash\underline{T(\mathbb{A})}/\underline{T(\mathbb{O}_U)T(F_Z)},$$

其中 b遍历 $B(F,\ T)$中满足对 U的所有闭点 u均有 $\mathrm{loc}_u(b)=1$的元素。因此，对于$\prod_{z\in Z}B(F_z,\ T)$中的所有 $b_\bullet$，$\mathrm{loc}_{Z,\,!}\Lambda$在

$$(\spadesuit)\qquad \bigotimes_{z\in Z} D(\mathrm{Bun}_{T,F_z},\Lambda) = \prod_{b_\bullet\in\prod_{z\in Z}B(F_z,T)} D(*/\underline{T(F_Z)},\Lambda)$$

等于$\bigoplus_{b'}C_c^{\infty}(T(F)\backslash T(\mathbb{A})/T(\mathbb{O}_U)\ \Lambda)$，其中 b'遍历 $B(F,T)$中满足对 Z 中的所有 z 均有 $\mathrm{loc}_z(b)=b_z$，且对 U的所有闭点 u 均有 $\mathrm{loc}_u(b)=1$ 的元素。根据[49, 命题 15.6], ，这类 b' 非空当且仅当 $(\kappa(b_z))_z$ 属于 $\ker(\bigoplus_{z\in Z}X_*(T)_{W_{F_z}}\to X_*(T)_{W_F})$；在此情形下，[49, 第 83] 页表明该集合是一个 $\ker^1(F,T)$-主齐性空间。利用 6.14，这意味着 $\mathrm{loc}_{Z,!}\Lambda$ 在(♠)中的像与 $\mathrm{res}_{Z,*}(\omega_{L_T,U})$在(♣)中的像同构。最后，[75, 注 6.4.6] 指出，$\bigotimes_{z\in Z}\mathbb{L}_{\psi_z}$ 恰由复合等价关系(♠)和(♣)给出。□

Appendix A. GAGA over sousperfectoid spaces

本节的目标是证明定理 H。实际上，我们证明了定理 H 在任意完备 Tate–Huber 对上的一个推广，尽管陈述它需要 Clausen–Scholze 的解析几何 [62]；见定理 A.18。在我们完成本文定稿之际，Wang [70, 定理 4.4.4]独立地沿极为相似的思路证明了定理 A.18 的一个推广。

定理 A.18 的证明紧密遵循 Clausen–Scholze 对复解析空间的 GAGA 证明 [14, 定理 13.10]。具体而言，给定“解析轨迹”的一种抽象形式体系，我们首先利用离散 Huber 对，对所有solid 拟凝聚层证明一个 GAGA 定理。接下来，我们证明 Grauert 相干性定理在我们设定中的类似结果。最后，我们据此证明先前的 GAGA 定理限制为伪相干对象上的一个等价。

最后，我们应用定理 H 证明丛的代数叠的解析化与丛的解析叠一致，从而回答 Heuer–Xu [40, 注 8.1.2]提出的问题。Wang [70]也独立证明了这一点。

记号。 对于任意（动画）凝聚环 $\mathcal{A}$，记 $D_{\mathrm{cond}}(\mathcal{A})$ 为其凝聚 $\mathcal{A}$-模的导出范畴，并回顾存在一个自然的全忠实函子 $D(\mathcal{A}(*)) \hookrightarrow D_{\mathrm{cond}}(\mathcal{A})$。

A.1. 我们从关于解析环的一些记号开始。按照 [62, 定义 12.11], ，记 AnRing 为（归一化动画）解析环的 ∞-范畴；对于任意解析环（$\mathcal{A}$, $\mathcal{M}$），记 $D(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \subseteq D_{\mathrm{cond}}(\mathcal{A})$ 为如 [62, 注 12.5] 中的完备对象的全子范畴。回顾一下， $D(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \subseteq D_{\mathrm{cond}}(\mathcal{A})$ 确定了底层凝聚环 $\mathcal{A}$ 上的解析环结构（ $\mathcal{A}$, $\mathcal{M}$ ）。

回顾一下，$(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \mapsto D(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 给出一个函子 $D(-) : \mathrm{AnRing} \to \mathrm{Sym}$。

引理。 函子 $D(-) : \mathrm{AnRing} \to \mathrm{Sym}$ 保推出。

证明。 考虑 AnRing 中的一个推出方块

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{A}, \mathcal{M}_{\mathcal{A}}) & \longrightarrow & (\mathcal{B}, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{C}, \mathcal{M}_{\mathcal{C}}) & \longrightarrow & (\mathcal{D}, \mathcal{M}_{\mathcal{D}}). \end{array}$$

于是 [62, 命题 12.12]表明，我们有一个拉回方形

$$\begin{array}{ccc} D(\mathcal{A}, \mathcal{M}_{\mathcal{A}}) & \longleftarrow & D(\mathcal{B}, \mathcal{M}_{B}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ D(\mathcal{C}, \mathcal{M}_{\mathcal{C}}) & \longleftarrow & D(\mathcal{D}, \mathcal{M}_{\mathcal{D}}), \end{array}$$

因此，对伴随函子进行转换即可得到结论。 □

A.2. 接下来，回顾解析环的拟凝聚模理论。对于 AnRing 中的任意 $(\mathcal{A}, \mathcal{M})$，记对应的 $\mathrm{AnRing}^{\mathrm{op}}$ 对象为 $\mathrm{AnSpec}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$。在 $\mathrm{AnRing}^{\mathrm{op}}$ 上赋予由有限个联合保守稳态局部化族生成的拓扑，如 [62, 第 95] 页所述。考虑 $\mathrm{AnRing}^{\mathrm{op}}$ 中以下几类态射 $\mathrm{AnSpec}(\mathcal{B}, \mathcal{N}) \to \mathrm{AnSpec}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$:

(I) 函子 $D(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \to D(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ 是如 [14, p. 61],(P) $(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ 中所述的开嵌入，它是沿着 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 如 [62, 命题 12.8] 所述由 $(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 诱导得到的。
记 E 为 $\mathrm{AnRing}^{\mathrm{op}}$ 中形如 $p \circ i$ 的态射类，其中 p 属于 P，且 i 属于 I。那么 [59, 引理 3.2.5][13] 的证明表明
- I 和 P 构成了 E 的适当分解，如 [56, 定义 A.5.9],所述

[13]虽然 [59, 引理 3.2.5] 限制在 $\mathrm{AnRing}^{\mathrm{op}}$ 中由实心仿射簇组成的全子范畴上，如 [59, 定义 2.6.6], 所述，但证明 [59, 引理 3.2.5] 时并未用到这一假设。

[41, 命题 A.5.10] 中关于 I 和 P的条件由函子 $D(-):\mathrm{AnRing}\to\mathrm{Sym}$ 满足,

因此, [41, 命题 A.5.10] 在 $\mathrm{AnRing}^{\mathrm{op}}$ 上赋予 $\mathrm{AnSpec}(\mathcal{A},\ \mathcal{M})\mapsto D(\mathcal{A},\ \mathcal{M})$ 六函子形式体系的结构, 其 !-可态射类为 E 。根据[62, 命题 12.18], , 这一六函子形式体系是层化的, 如 [41, 定义 3.4.1]所述。

记 {analytic stacks} 为 $\mathrm{AnRing}^{\mathrm{op}}$上 anima 层的 ∞-范畴。于是, [41, 定理 3.4.11] 将上述 $\mathrm{AnRing}^{\mathrm{op}}$ 上的六函子形式体系扩展为 {analytic stacks}上的层化六函子形式体系。注意, 如 [62, 定义 13.5] 所述, 解析空间的 ∞-范畴是 {analytic stacks}的一个全子范畴。

A.3. 核的模与诱导的解析环结构具有如下相容性。设 $(\mathcal{A},\ \mathcal{M})$ 是一个解析环, 设 $\mathcal{B}$是 $D(\mathcal{A},\ \mathcal{M})$ 中的一个代数, 并记 $(\mathcal{B},\ \mathcal{N})$ 为沿着 $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$从 $(\mathcal{A},\ \mathcal{M})$ 诱导的解析环, 如 [62,命题 12.8]所述。于是引理 A.1 表明, $D(\mathcal{B},\ \mathcal{N})$ 自然等价于 $\mathrm{Mod}_{\mathcal{B}}(D(\mathcal{A},\ \mathcal{M}))$, 因此 $-\otimes_{(\mathcal{B},\mathcal{N})}-$ 在 $D(\mathcal{A},\ \mathcal{M})$ 中的像由 $-\otimes_{\mathcal{B}}-$给出。

引理。 假设 $\mathcal{B}$ 属于 $D(\mathcal{A},\mathcal{M})$, 且如 [14, 定义 8.5 (1)] 中所述是核的。那么, 对象 C 属于 $D(\mathcal{B},\mathcal{N})$ 是核的, 当且仅当它在 $D(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 中的像是核的。

证明。 回忆一下, C属于 $D(\mathcal{B},\mathcal{N})$ 是核的, 当且仅当对于所有极端不连通的 S, 自然态射

$$(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{B}}(\mathcal{N}[S],\mathcal{B})\otimes_{\mathcal{B}}C)(*)\to\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{B}}(\mathcal{N}[S],C)(*)$$

是一个同构。伴随给出 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{N}[S],-)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}[S],-)$, 并且由于 $\mathcal{B}$属于 $D(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 是核的, [1, 命题 5.35] 表明 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}[S],\mathcal{B})$ 自然同构于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}[S],\mathcal{A})\otimes_{(\mathcal{A},\mathcal{M})}\mathcal{B}$。因此, 上述关系变为

$$(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}[S],\mathcal{A})\otimes_{(\mathcal{A},\mathcal{M})}C)(*)\to\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}[S],C)(*),$$

而对于所有极端不连通的 S, 这是一个同构, 当且仅当 C 在 $D(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 中的像是核的。□

A.4. 当所有解析环都是基底上的核的解析环时, 我们可以如下通过覆盖来检验核性。设 $(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 是一个解析环, 设 $\mathcal{B}$ 是 $D(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 中的一个核代数, 并将沿 $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 从 $(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 诱导的解析环记为 $(\mathcal{B},\mathcal{N})$, 如 [62, 命题 12.8] 所述。

令 $\{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^r$ 为 $D(\mathcal{B},\mathcal{N})$ 中的有限个核代数, 并记 $(\mathcal{B}_j,\mathcal{N}_j)$ 为沿 $\mathcal{B}\to\mathcal{B}_j$ 从 $(\mathcal{B},\mathcal{N})$ 诱导的解析环, 如 [62, 命题 12.8]所述, 对所有 $1\le j\le r$ 均成立。假设 $\left\{(\mathcal{B},\mathcal{N})\to(\mathcal{B}_j,\mathcal{N}_j)\right\}_{j=1}^r$ 是一族联合保守稳态局部化。

命题。 对象 C 属于 $D(\mathcal{B},\mathcal{N})$ 是核的, 当且仅当对所有 $1\le j\le r$, $C\otimes_{\mathcal{B}}\mathcal{B}_j$ 属于 $D(\mathcal{B}_j,\mathcal{N}_j)$是核的。

证明。 由于函子 $D(\mathcal{B},\mathcal{N})\to D(\mathcal{B}_j,\mathcal{N}_j)$ 是对称幺半的, 因此它会如 [14, 定义 8.1] 所述保留迹类态射。它也保留余极限, 因此会如 [14, 定义 8.5 (2)] 所述保留基本核对象, 进而根据 [14, 定理 8.6 (2)]保留核对象。

反之, 假设对所有 $1\le j\le r$, $D(\mathcal{B}_j,\mathcal{N}_j)$中的 $C\otimes_{\mathcal{B}}\mathcal{B}_j$ 都是核的。则引理 A.3表明, $D(\mathcal{B},\mathcal{N})$中 $C\otimes_{\mathcal{B}}\mathcal{B}_j$的像是核的。下降表明, C 自然同构于一个有限极限, 其各项形如$C\otimes_{\mathcal{B}}\bigotimes_{j\in J}\mathcal{B}_j$, 对应于 $\{1,\dots,r\}$的非空子集 J; 并且由于这些 $C\otimes_{\mathcal{B}}\bigotimes_{j\in J}\mathcal{B}_j$是核的, [14, 定理 8.6 (1)] 蕴含 C 也是核的。□

A.5. 在下列情形中，我们可以在一个覆盖上检验伪紧性 。设$(\mathcal{A},\mathcal{M})$为一个解析环。设 $\left\{(\mathcal{A},\mathcal{M})\to(\mathcal{A}_j,\mathcal{M}_j)\right\}_{j=1}^{r}$为一族有限的联合保守稳态局部化，使得对所有 $1\leq j\leq r$，函子$D(\mathcal{A},\mathcal{M})\to D(\mathcal{A}_j,\mathcal{M}_j)$是如 [14, 第 61] 页所述的、对应于 $D^{\leq 0}(\mathcal{A},\mathcal{M})$中幂等代数 $\mathcal{I}_j$ 的开嵌入。

命题。 对象 C *of* $D(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 如 [14, 定义 9。9]中所述是伪紧的，当且仅当它在 $D(\mathcal{A}_j,\mathcal{M}_j)$ 中的像对所有 $1\leq j\leq r$ 都是伪紧的。

证明。 由于 $D(\mathcal{A}_j,\mathcal{M}_j)\to D(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 是左 t-正合的且保持直和，若C 是伪紧的，则其在 $D(\mathcal{A}_j,\mathcal{M}_j)$ 中的像也是伪紧的。

反过来，假设对所有$1\leq j\leq r$， C 在 $D(\mathcal{A}_j,\mathcal{M}_j)$ 中的像都是伪紧的。由于复合 $D(\mathcal{A},\mathcal{M})\to D(\mathcal{A}_j,\mathcal{M}_j)\to D(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 由 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{fib}(\mathcal{A}\to\mathcal{I}_j)\ -)$ 给出，且 $\mathcal{I}_j$ 属于 $D^{\leq 0}(\mathcal{A},\mathcal{M})$，我们看到 $D(\mathcal{A},\mathcal{M})\to D(\mathcal{A}_j,\mathcal{M}_j)$ 将 $D^{\leq 0}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 映到 $D^{\leq 1}(\mathcal{A}_j,\mathcal{M}_j)$。下降表明 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C,-)$ 自然同构于一个有限极限，其项具有如下形式

$$\mathrm{Hom}_{\bigotimes_{j\in J}(\mathcal{A}_j,\mathcal{M}_j)}(C\otimes_{(\mathcal{A},\mathcal{M})}\bigotimes_{j\in J}(\mathcal{A}_j,\mathcal{M}_j),-\otimes_{(\mathcal{A},\mathcal{M})}\bigotimes_{j\in J}(\mathcal{A}_j,\mathcal{M}_j))$$

对于 $\{1,\ldots,r\}$ 的非空子集 J。上述结果表明， $-\otimes_{(\mathcal{A},\mathcal{M})}\bigotimes_{j\in J}(\mathcal{A}_j,\ \mathcal{M}_j)$ 将 $D^{\leq 0}(\mathcal{A},\ \mathcal{M})$ 映射到 $D^{\leq(\#J)}\big(\bigotimes_{j\in J}(\mathcal{A}_j,\ \mathcal{M}_j)\big)$。由于 $C\otimes_{(\mathcal{A},\mathcal{M})}\bigotimes_{j\in J}(\mathcal{A}_j,\ \mathcal{M}_j)$ 是伪紧的，这意味着 C 也是伪紧的。□

A.6. 接下来，我们回顾与完备 Huber 对相关联的解析环。对于任意完备 Huber 对 $(A,\ A^+)$，记 $(A,\ A^+)_\blacksquare$ 为 [62, 命题 13.16]，中所述的相应解析环。记 $(A,\ A^+)_\blacksquare[-]$ 为其测度函子，并记 $D_\blacksquare(A,\ A^+)$ 为 $D((A,\ A^+)_\blacksquare)$。当 A^+ 等于 A° 时，我们会在记号中省略它。由 [1, 命题 3.29]，可知， $D_\blacksquare(A,\ A^+)$ 自然等价于 $\mathrm{Mod}_A(D_\blacksquare(A^+))$。

引理。 我们在 AnRing 中有如下推出方块:

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{Z}[X,Y],\mathbb{Z})_\blacksquare & \longrightarrow & (\mathbb{Z}[X,Y],\mathbb{Z}[X])_\blacksquare \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\mathbb{Z}[X,Y],\mathbb{Z}[Y])_\blacksquare & \longrightarrow & \mathbb{Z}[X,Y]_\blacksquare,
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{Z}[XY],\mathbb{Z})_\blacksquare & \longrightarrow & \mathbb{Z}[XY]_\blacksquare \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\mathbb{Z}[X,Y],\ \mathbb{Z})_\blacksquare & \longrightarrow & (\mathbb{Z}[X,Y],\ \mathbb{Z}[XY])_\blacksquare,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(\mathbb{Z}[X+Y],\ \mathbb{Z})_\blacksquare & \longrightarrow & \mathbb{Z}[X+Y]_\blacksquare \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\mathbb{Z}[X,Y],\ \mathbb{Z})_\blacksquare & \longrightarrow & (\mathbb{Z}[X,Y],\ \mathbb{Z}[X+Y])_\blacksquare.
\end{array}$$

证明。 这可由 [62, 命题 12.12] 与 [1, 命题 3.32]中对$(-,\ -)_\blacksquare$ 的刻画结合得出。□

A.7. 以下解析环对应于以原点为中心以及以无穷远处为中心的闭[14]单位圆盘的补集。回顾， $\mathbb{Z}((T^{-1}))$ 是 $D_\blacksquare(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})$ [61, 观察 8.7], 中的一个幂等代数，以及相应的开

[14]“闭”是指由非严格不等式定义；我们的闭单位圆盘实际上在仿射直线上是开集，因此它们在仿射直线中的补集实际上是闭集。

嵌入，如 [14, 第 61] 页所示，为 $D_{\blacksquare}(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z}) \to D_{\blacksquare}(\mathbb{Z}[T])$ [61, 观察 8.10]。此外，回顾该复形

$$\mathbb{Z}[\![U]\!] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[T] \xrightarrow{UT-1} \mathbb{Z}[\![U]\!] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[T]$$

是 $D_{\blacksquare}(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})$ 中 $\mathbb{Z}((T^{-1}))$ 的投射分解 [61, 观察 8.6]。

回想一下，$\mathbb{Z}[\![U]\!]$ 自然同构于 $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}]/\mathbb{Z}[\{\infty\}]$，其中乘以 U 是由 $\mathbb{N}$ [1, 的自同态 $n \mapsto n+1$ 诱导的引理 3.11]。

引理。 $\mathbb{Z}[\![T]\!]$ 也是 $D_{\blacksquare}(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})$ 中的幂等代数，并且我们有

$$\mathbb{Z}((T^{-1})) \otimes_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_{\blacksquare}} \mathbb{Z}[\![T]\!] = 0.$$

证明。由 [61, 例 6.4]，我们得到

$$\mathbb{Z}[\![T]\!] \otimes_{(\mathbb{Z}[T]_{\blacksquare},\mathbb{Z})} \mathbb{Z}[\![T]\!] = (\mathbb{Z}[\![T_1]\!] \otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}} \mathbb{Z}[\![T_2]\!])/(T_1 - T_2) = \mathbb{Z}[\![T_1, T_2]\!]/(T_1 - T_2) = \mathbb{Z}[\![T]\!].$$

接下来，利用上述 $\mathbb{Z}((T^{-1}))$ 的投射分解，我们看到

$$\mathbb{Z}((T^{-1})) \otimes_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_{\blacksquare}} \mathbb{Z}[\![T]\!]$$

是该复形的固化

$$\mathbb{Z}[\![U]\!] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\![T]\!] \xrightarrow{UT-1} \mathbb{Z}[\![U]\!] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\![T]\!].$$

固化之后，[61, 例 6.4] 表明两项都变为 $\mathbb{Z}[\![U, T]\!]$。因为 $UT - 1$ 在 $\mathbb{Z}[\![U, T]\!]$中可逆，所得复形确实是正合的。□

A.8. 设(R, R^+)为一个完备胡贝尔对。

引理。 我们在AnRing中有一个推出方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{\blacksquare} & \longrightarrow & \mathbb{Z}[T]_{\blacksquare} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (R, R^+)_{\blacksquare} & \longrightarrow & (R\langle T\rangle, R^+\langle T\rangle)_{\blacksquare}. \end{array}$$

证明。将 $(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 记为推出。由于 [1, 引理 3.8] 表明 $\mathbb{Z}_{\blacksquare} \to \mathbb{Z}[T]_{\blacksquare}$是稳定的，我们得到

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= R \otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}} \mathbb{Z}[T]_{\blacksquare} && \text{by [62, p. 84]}, \\ &= R\langle T\rangle && \text{by [1, Proposition 3.14]}. \end{aligned}$$

接下来，[62, 命题 12.12] 表明，$D(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \subseteq D_{\mathrm{cond}}(R\langle T\rangle)$ 是由这样一些对象构成的全子范畴：它们在 $D_{\mathrm{cond}}(\mathbb{Z}[T])$ 和 $D_{\mathrm{cond}}(R)$ 中的像分别属于 $D_{\blacksquare}(\mathbb{Z}[T])$ 和 $D_{\blacksquare}(R, R^+)$。由于 $R^+\langle T\rangle$ 由 $\mathbb{Z}[T]$ 和 R^+拓扑生成，[1, 命题 3.32] 推出 $D(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 等于 $D_{\blacksquare}(R\langle T\rangle, R^+\langle T\rangle)$。□

A.9. 可以使用解析环来定义以下版本的解析化；值得注意的是，它仍然保留了代数函数。对于任意 R-代数 A，记 A^{alg}为 AnRing 中的推出

$$\begin{array}{ccc} (R_{\mathrm{disc}},\ R^+_{\mathrm{disc}})_{\blacksquare} & \longrightarrow & (A_{\mathrm{disc}},\ (R^+)^{\sim}_{\mathrm{disc}})_{\blacksquare} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (R, R^+)_{\blacksquare} & \longrightarrow & A^{\mathrm{alg}}. \end{array}$$

由于 A_{disc} 在 $D(R_{\mathrm{disc}},\ R^+$ 圆盘$)$ 中是核的， [62, 命题 13.14] 表明上箭头是稳固的。因此，根据 [62, 第 84] 页， A^{alg} 的底层凝聚环为 A。

对于任意 f in A，将 $A_{|f|\leq 1}$ and $A_{|f|\geq 1}$ 记为 AnRing 中的以下推出：

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}[T],\ \mathbb{Z})_\blacksquare & \longrightarrow & \mathbb{Z}[T]_\blacksquare \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow \\ A^{\mathrm{alg}} & \longrightarrow & A_{|f|\leq 1}, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}[T],\ \mathbb{Z})_\blacksquare & \longrightarrow & (\mathbb{Z}[T^{\pm 1}],\ \mathbb{Z}[T^{-1}])_\blacksquare \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow \\ A^{\mathrm{alg}} & \longrightarrow & A_{|f|\geq 1}. \end{array}$$

由于上箭头是稳局部化，下箭头也同样如此。

A.10. 下述解析环对应于以原点为中心的闭单位圆盘的闭包。在本节余下部分，假设 R 是 Tate。

命题。 对象 $R\langle T\rangle$ 在 $D_\blacksquare(R, R^+)$ 中是核的，如 [14, 定义 8.5 (1)]所述。此外，沿着 $R\to R\langle T\rangle$ ，根据[62, 命题 12.8] ，从 $(R, R^+)_\blacksquare$ 诱导的解析环自然同构于 $(R\langle T\rangle, R^+ + T\cdot R^{\circ\circ}\langle T\rangle)_\blacksquare$，并且诱导的态射 $R[T]^{\mathrm{alg}}\to (R\langle T\rangle, R^+ + T\cdot R^{\circ\circ}\langle T\rangle)_\blacksquare$ 是稳局部化。

证明。由于 R 是 Tate，根据 [2, 引理 4.4]，第一个结论成立。对于第二个结论，按照 [62, 命题 12.8]中的做法，将由 $R, R^+{}_\blacksquare$ 沿$R\to R\langle T\rangle$ 诱导的解析环记为 $(\mathcal{A}, \mathcal{M})$。因为 $R\langle T\rangle$ 属于 $D_\blacksquare(R, R^+)$，我们可知 $\mathcal{A} = R\langle T\rangle$。接下来， [62, 命题 12.12] 表明， $D(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \subseteq D_{\mathrm{cond}}(R\langle T\rangle)$ 是由以下对象构成的全子范畴：其在 $D_{\mathrm{cond}}(R)$ 中的像属于 $D_\blacksquare(R, R^+)$。由于$R^+ + T\cdot R^{\circ\circ}\langle T\rangle$ 由 R^+拓扑生成， [1, 命题 3.32] 推出$D(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 等于 $D_\blacksquare(R\langle T\rangle, R^+ + T\cdot R^{\circ\circ}\langle T\rangle)$，证毕。

对于第三个陈述， [62, 命题 13.14] 与第一个陈述推出

$$(R, R^+)_\blacksquare \to (R\langle T\rangle, R^+ + T\cdot R^{\circ\circ}\langle T\rangle)_\blacksquare$$

是稳定的，因此 [62,命题 12.15] 表明

$$R[T]^{\mathrm{alg}} \to (R\langle T\rangle, R^+ + T\cdot R^{\circ\circ}\langle T\rangle)_\blacksquare$$

也稳定。最后，引理 A.8 表明复合

$$R[T]^{\mathrm{alg}} \to (R\langle T\rangle, R^+ + T\cdot R^{\circ\circ}\langle T\rangle)_\blacksquare \to (R\langle T\rangle, R^+\langle T\rangle)_\blacksquare$$

是一个局部化。由于右箭头是一个局部化，左箭头也同样如此。□

A.11. 对任意 R-代数 A 和 f （属于 A），记 $A_{|f|\leq 1}$ 为 AnRing 中的推出

$$\begin{array}{ccc} R[T]^{\mathrm{alg}} & \longrightarrow & (R\langle T\rangle, R^+ + T\cdot R^{\circ\circ}\langle T\rangle)_\blacksquare \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow \\ A^{\mathrm{alg}} & \longrightarrow & \overline{A}_{|f|\leq 1}. \end{array}$$

以下解析空间分别对应于 AnSpec A^{alg} 中 f 为解析的轨迹，以及 f 可解析地逆的轨迹。选取 R 的一个伪一致化元 ϖ，在 {解析叠}中取余极限

$$\mathrm{an}(A, f) \coloneqq \varinjlim_{n\geq 0} \mathrm{AnSpec}\, A_{|\varpi^n f|\leq 1} \text{ and } D^{\mathrm{an}}(f) \coloneqq \varinjlim_{n\geq 0} \mathrm{AnSpec}\, A_{|\varpi^{-n} f|\geq 1},$$

并注意到它们不依赖于 ϖ 的选择。此外，分解

$$(R\langle\varpi T\rangle, R^+\langle\varpi T\rangle)_\blacksquare \to (R\langle T\rangle, R^+ + T\cdot R^{\circ\circ}\langle T\rangle)_\blacksquare \to (R\langle T\rangle, R^+\langle T\rangle)_\blacksquare$$

这表明 $\mathsf{an}(A,f)$ 自然同构于 $\varinjlim_{n\geq 0} \mathsf{AnSpec}\, A_{|\varpi^n f|\leq 1^\circ}$

A.12. 解析轨迹满足以下基本性质。

命题。
1) 对任意 r *in* R，我们有 $\mathrm{an}(R,r) = \mathrm{AnSpec}\ R^{\mathrm{alg}}$。*2)* 记 $\mathrm{an}(R[X,Y],X)\cap \mathrm{an}(R[X,Y],Y)$ 为 {解析叠}中的纤维积

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{an}(R[X,Y],X)\cap \mathrm{an}(R[X,Y],Y) & \longrightarrow & \mathrm{an}(R[X,Y],X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{an}(R[X,Y],Y) & \longrightarrow & \mathrm{AnSpec}\, R[X,Y]^{\mathrm{alg}}. \end{array}$$

那么 $\mathsf{an}(R[X,Y],X)\cap \mathsf{an}(R[X,Y],Y)\to \mathsf{AnSpec}\ R[X,Y]^{\mathrm{alg}}$ 通过.....分解$\mathsf{an}(R[X,Y],XY)\to \mathsf{AnSpec}\ R[X,Y]^{\mathrm{alg}}$ 以及 $\mathsf{an}(R[X,Y],X+Y)\to \mathsf{AnSpec}\ R[X,Y]^{\mathrm{alg}}$.

3) 复合$\mathrm{an}(R[T^{\pm 1}],T^{-1})\to \mathrm{AnSpec}\ R[T^{\pm 1}]^{\mathrm{alg}}\to \mathrm{AnSpec}\ R[T]^{\mathrm{alg}}$ 自然同构于 $D^{\mathrm{an}}(T)\to \mathrm{AnSpec}\ R[T]^{\mathrm{alg}}$ 在 $\mathrm{AnSpec}\ R[T]^{\mathrm{alg}}$之上。
4) $\{\mathrm{an}(R[T],T)\ D^{\mathrm{an}}(T)\}$ 构成一个上同调意义下的 *´etale*（如 [64, 定义 6.12] 中所述）稳定位数覆盖，覆盖 $\mathrm{AnSpec}\ R[T]^{\mathrm{alg}}$。
5) 记 $D^{\mathrm{an}}(X)\cup D^{\mathrm{an}}(Y)$ 为 {解析叠}中的推出

$$\begin{array}{ccc} D^{\mathrm{an}}(X)\cap D^{\mathrm{an}}(Y) & \longrightarrow & D^{\mathrm{an}}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^{\mathrm{an}}(Y) & \longrightarrow & D^{\mathrm{an}}(X)\cup D^{\mathrm{an}}(Y). \end{array}$$

于是 $D^{\mathrm{an}}(X+Y)\to \mathrm{AnSpec}\ R[X,Y]^{\mathrm{alg}}$ 经由以下映射分解

$$D^{\mathrm{an}}(X)\cup D^{\mathrm{an}}(Y)\to \mathrm{AnSpec}\, R[X,Y]^{\mathrm{alg}}.$$

证明。对于第 1) 部分，只需证明当 r 属于 $R^{\circ\circ}$时，$R_{|r|\leq 1} = R^{\mathrm{alg}}$。由 A.7 可知，函子 $D(R[T]^{\mathrm{alg}})\to D(R[T]_{|T|\leq 1})$ 是 [14, p. 61] 中对应于幂等代数 $\mathbb{Z}((T^{-1}))\otimes_{\mathbb{Z}[\blacksquare]}(R,R^+)_\blacksquare$ 的开嵌入。A.7 中对 $\mathbb{Z}((T))$ 和 $\mathbb{Z}[\![U]\!]$ 的描述表明，$\mathbb{Z}((T^{-1}))\otimes_{\mathbb{Z}[\blacksquare]}(R,R^+)_\blacksquare$ 由以下复形给出

$$\frac{(R,R^+)_\blacksquare[\mathbb{N}\cup\{\infty\}]}{R[\{\infty\}]}\otimes_R R[T]\xrightarrow{UT-1}\frac{(R,R^+)_\blacksquare[\mathbb{N}\cup\{\infty\}]}{R[\{\infty\}]}\otimes_R R[T].$$

由于 r 位于 $R^{\circ\circ}$ 中，乘以 $Ur-1$ 在 $(R,R^+)_\blacksquare[\mathbb{N}\cup\{\infty\}]/R[\{\infty\}]$ 上是可逆的。因此，在沿将 $T\mapsto r$ 映出的 R-代数态射 $R[T]\mapsto R$ 对上述复形作基底变换之后，所得复形确实是正合的。

对于第 2）部分，只需证明

$$R[X,Y]^{\mathrm{alg}}\to R[X,Y]_{|X|\leq 1}\otimes_{R[X,Y]^{\mathrm{alg}}} R[X,Y]_{|Y|\leq 1}$$

通过 $R[X,Y]^{\mathrm{alg}} \to R[X,Y]_{|XY|\leq 1}$ 和 $R[X,Y]^{\mathrm{alg}} \to R[X,Y]_{|X+Y|\leq 1}$ 分解。这是将 $-\otimes_{\mathbb{Z}_\blacksquare}(R,R^+)_\blacksquare$ 应用于引理 A.6 以及这些态射后得到的

$$(\mathbb{Z}[X,Y],\mathbb{Z}[XY])_\blacksquare \to \mathbb{Z}[X,Y]_\blacksquare \text{ and } (\mathbb{Z}[X,Y],\mathbb{Z}[X+Y])_\blacksquare \to \mathbb{Z}[X,Y]_\blacksquare.$$

对于第 3 部分，注意到 T 在 $(\mathbb{Z}[T^{\pm 1}],\ \mathbb{Z}[T^{-1}])_\blacksquare$ 中可逆，并且 $T\mapsto T^{-1}$ 诱导了 $(\mathbb{Z}[T^{\pm 1}],\ \mathbb{Z}[T])_\blacksquare \xrightarrow{\sim}(\mathbb{Z}[T^{\pm 1}],\ \mathbb{Z}[T^{-1}])_\blacksquare$ 的一个同构。将 $-\otimes_{\mathbb{Z}_\blacksquare}(R,\ R^+)_\blacksquare$ 应用于此可知，$R[T]^{\mathrm{alg}} \to R[T]_{|T|\geq 1}$ 可经由 $R[T]^{\mathrm{alg}} \to R[T^{\pm 1}]^{\mathrm{alg}}$ 分解，并且解析环 $R[T]_{|T|\geq 1}$ 与 $R[T^{\pm 1}]_{|T^{-1}|\leq 1}$ 在 $R[T^{\pm 1}]^{\mathrm{alg}}$ 上自然同构。这就得到了所需结果。

对于第 4 部分，[59, 引理 3.2.9] 表明，只需证明

$$\left\{R[T]_{|T|\leq 1}, R[T]_{|T|\geq 1}\right\}$$

构成一族联合保守稳态局部化 $R[T]^{\mathrm{alg}}$，使得在应用 $D(-,\ R^+)_\blacksquare$ 之后，所得函子如 [14, p. 61]中所述为开嵌入。这由将 $-\otimes_{\mathbb{Z}_\blacksquare}(R,\ R^+)_\blacksquare$ 应用于引理 A.7 得出。

对于第 5）部分，引理 A.7 表明，$\mathbb{Z}[\![T]\!]$ 是 $D_\blacksquare(\mathbb{Z}[T],\ \mathbb{Z})$ 中的幂等代数，而 A.7 蕴含 $D_\blacksquare(\mathbb{Z}[T],\ \mathbb{Z}) \to D_\blacksquare(\mathbb{Z}[T^{\pm 1},T^{-1}])$ 是如[14, p. 61] 中所述、对应于 $\mathbb{Z}[\![T]\!]$ 的开嵌入。因此，将 $-\otimes_{\mathbb{Z}_\blacksquare}(R,\ R^+)_\blacksquare$ 应用于 $D_\blacksquare(\mathbb{Z}[X,Y],\ \mathbb{Z})$ 中幂等代数的态射 $\mathbb{Z}[\![X+Y]\!]\to\mathbb{Z}[\![X,Y]\!]$，即可得到所需结果。□

A.13. 使用离散 Huber 对，可以证明如下关于所有 （solid）拟凝聚层的 GAGA 定理，正如 Clausen–Scholze [14] 的工作所示。设 A 是一个有限生成的 R-代数，并设 $A^+\subseteq A$ 是一个有限生成 R-子代数的整闭包。若 A^+ 等于由 f_1、.. .、f_m生成的 R-子代数的整闭包，则记 $\mathrm{an}(A,\ A^+)$ 为 $\bigcap_{i=1}^m \mathrm{an}(A,\ f_i)$ 在{AnSpec A^{alg}上的解析叠} 中的交。根据命题 A.12.1)、命题 A.12.2)以及 [14, 引理 6.11], 的证明，这与 f_1、.. .、f_m 的选择无关。

定理。 赋值 $\mathrm{Spa}(A_{\mathrm{disc}}, A^{+}{}_{\mathrm{disc}}) \mapsto \mathrm{an}(A, A^+)$ 将有理覆盖映射为稳局部化覆盖。因此，赋值 $\mathrm{Spec}\,A\mapsto \mathrm{an}(A, R^{\sim})$ 和$\mathrm{Spec}\,A\mapsto \mathrm{an}(A, A)$ 自然地粘合为函子

$$(-)^{\mathrm{alg}} \textit{ and } (-)^{\mathrm{an}} : \{\textit{schemes locally of finite type over } R\} \to \{\textit{analytic stacks}\},$$

分别，并配有自然变换 $(-)^{\mathrm{an}}\to(-)^{\mathrm{alg}}$。此外，$(-)^{\mathrm{an}}$将扎里斯基覆盖映射为上同调 ´*étale*稳局部化覆盖。最后，对于任意定义在 R 上的真概形 X，态射 $X^{\mathrm{an}}\to X^{\mathrm{alg}}$ 是一个同构。

证明。 第一个陈述可由有理覆盖的描述得到

$$\mathrm{Spa}(A_{\mathrm{disc}}, A^{+}_{\mathrm{disc}})$$

参见 [14, 引理 6.12] 和命题 A.12。第二个陈述由第一个陈述以及如下事实得出：赋值 $\mathrm{Spec}\,A\mapsto \mathrm{Spa}(A_{\mathrm{disc}}, R^{\sim}_{\mathrm{disc}})$ 和 $\mathrm{Spec}\,A\mapsto \mathrm{Spa}(A_{\mathrm{disc}}, A_{\mathrm{disc}})$ 将有理覆盖映射为有理覆盖。第三个陈述由命题 A.12.4) 得出。最后，第四个陈述由真性的赋值判别法得出。□

注。 根据 [62, 命题 13.6], ，函子 $(-)^{\mathrm{alg}}$ 和$(-)^{\mathrm{an}}$ 的值都属于 [62,定义 13.5]中所述的解析空间全子范畴。

A.14. 我们稍后将需要概形上的伪相干层这一概念，以及它与有限表示的关系。对于任意概形 X，记 $D_{\mathrm{pc}}(X)$ 为 $D_{\mathrm{qc}}(X)$ 中由 [68, Tag 08CB]所述的伪相干对象构成的全子范畴。当 $X = \operatorname{Spec} A$ 为仿射时，回顾 [68, Tag 08E7]，这等价于 [68, Tag 064Q]中所述的伪相干对象全子范畴 $D_{\mathrm{pc}}(A) \subseteq D(A)$。

引理。设 A 是一个有限生成的 R-代数。那么 A 是有限表示的R-代数，当且仅当对于所有 R-代数满射 $R[T_1, \ldots, T_m] \twoheadrightarrow A$，对象$A$都属于 $D_{\mathrm{pc}}(R[T_1, \ldots, T_m])$。

证明。设 $R[T_1, \ldots, T_m] \twoheadrightarrow A$是一个 R-代数满射，且 A属于

$$D_{\mathrm{pc}}(R[T_1, \ldots, T_m]).$$

那么 [68, Tag 064T] 蕴含 A是一个有限表示的 R-代数。

反过来，假设 A 是一个有限表示的 R-代数，并设

$$\alpha : R[T_1, \ldots, T_m] \twoheadrightarrow A$$

是一个 R-代数满射。根据 [68, Tag 00R2], , α 核是有限生成的。因此，诺特近似给出一个诺特环 R_0以及一个满射

$$\alpha_0 : R_0[T_1, \ldots, T_m] \twoheadrightarrow A_0$$

R_0代数，以及一个环同态 $R_0 \to R$，使得 $(A_0,\ \alpha_0)$ 到 R 的基变换同构于 $(A,\ \alpha)$。由于 $R_0[T_1, \ldots, T_m]$ 是诺特的，A_0 属于 $D_{\mathrm{pc}}(R_0[T_1, \ldots, T_m])$。因此，$A$ 属于 $D_{\mathrm{pc}}($ $R[T_1, \ldots, T_m])$。□

A.15. 根据构造，定理 A.13 中的解析化由以下形式的解析环覆盖。对于任意有限生成的 R代数 A，若其生成元为 $f = (f_1, \ldots, f_m)$，则用 $A_{|\underline{f}|\leq 1}$ 和 $A_{|\underline{f}|\leq 1}$ 表示 AnRing 中这些推出：

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_m], \mathbb{Z})_{\blacksquare} & \longrightarrow & \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_m]_{\blacksquare} \\ \downarrow{\scriptstyle \underline{f}} & & \downarrow \\ A^{\mathrm{alg}} & \longrightarrow & A_{|\underline{f}|\leq 1}, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} R[T_1, \ldots, T_m]^{\mathrm{alg}} & \longrightarrow & (R\langle T_1, \ldots, T_m\rangle,\ R^+ + (T_1, \ldots, T_m) \cdot R^{\circ\circ}\langle T_1, \ldots, T_m\rangle)_{\blacksquare} \\ \downarrow{\scriptstyle \underline{f}} & & \downarrow \\ A^{\mathrm{alg}} & \longrightarrow & \overline{A}_{|\underline{f}|\leq 1}. \end{array}$$

对于任意在 R 上局部有限型的概形 X，定理 A.13 表明，X^{an}是由形如 AnSpec$A_{|f|\leq 1}$ 的对象沿着 A.5 中的覆盖粘合而成的。因此，命题 A.5 表明，$D($ $A_{|f|\leq 1})$ 中由 [14, 定义 9.9] 中所述伪紧对象组成的全子范畴，自然地粘合为 $D($ $X^{\mathrm{an}})$ 的一个全子范畴。若 $D(X^{\mathrm{an}})$ 的一个对象属于这个全子范畴，我们就称它是伪紧的。

定理 A.13 和 A.11 表明，X^{an} 也可以由形如 AnSpec $A_{|f|\leq 1}$ 的对象沿着命题 A.4 中的覆盖粘合而成。因此，命题 A.4 表明，$D(A_{|f|\leq 1})$ 中由符合 [14, 定义 8.5 (1)] 的核对象组成的全子范畴

自然地粘合为 $D(X^{\mathrm{an}})$ 的一个全子范畴。我们称 $D(X^{\mathrm{an}})$ 的一个对象是核的，如果它属于这个全子范畴。

最后，将 $D_{\mathrm{pc}}(X^{\mathrm{an}})$记为由 $D(X^{\mathrm{an}})$中所有拟紧且核的对象构成的全子范畴。回顾 [1, 定理 5.50][15]，

$$D_{\mathrm{pc}}((\operatorname{Spec} R)^{\mathrm{an}}) \subseteq D((\operatorname{Spec} R)^{\mathrm{an}}) = D_{\blacksquare}(R, R^{+})$$

等于 $D_{\mathrm{pc}}(R) \subseteq D(R) \hookrightarrow D_{\blacksquare}(R, R^{+})$ 的像。

A.16. 对于定理 A.13 中的解析化，拟凝聚层的 !-拉回与任意一致有界下对象的直和可交换。更确切地说，对于任意局部有限型的概形 X（在 R 上），记

$$\pi : X^{\mathrm{an}} \to (\operatorname{Spec} R)^{\mathrm{an}} = \operatorname{AnSpec}(R, R^{+})_{\blacksquare}$$

对于 $(-)^{\mathrm{an}}$ 作用于结构态射 $X \to \operatorname{Spec} R$。

命题。假设 X 在 R上有限表示，并令 d 为一个整数。那么存在一个整数 e，使得对于 $D^{\geq d}_{\blacksquare}(R, R^{+})$ 的任意对象族$(M_\alpha)_\alpha$，族 $(\pi^! M_\alpha)_\alpha$ 属于 $D^{\geq e}(X^{\mathrm{an}})$，且自然态射

$$\bigoplus_\alpha \pi^! M_\alpha \to \pi^!\big(\bigoplus_\alpha M_\alpha\big)$$

是一个同构。

证明。定理 A.13 表明，$(-)^{\mathrm{an}}$ 将扎里斯基覆盖映为上同调´étale 稳定位数覆盖，因此将 X 替换为一个开覆盖后，我们可以假设 $X = \operatorname{Spec} A$，其中 A是一个有限表示的 R-代数。

令 $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ 为 A 的生成元。那么 X^{an} 同构于

$$\varinjlim_{n \geq 0} \operatorname{AnSpec} A_{|\varpi^n \underline{f}| \leq 1},$$

其中过渡态射是上同调 ´étale 的，因此只需将X^{an} 替换为 $\operatorname{AnSpec} A_{|\underline{f}| \leq 1^\circ}$。记 $T = (T_1, \ldots, T_m)$ 为 $R[T_1, \ldots, T_m]$ 的标准生成元，并注意到我们在 AnRing 中有一个推出方块

$$\begin{array}{ccc} (R[T_1, \ldots, T_m]_{\mathrm{disc}}, R^{+}_{\mathrm{disc}})_{\blacksquare} & \longrightarrow & R[T_1, \ldots, T_m]_{|\underline{T}| \leq 1} \\ \downarrow{\scriptstyle \underline{f}} & & \downarrow{\scriptstyle \underline{f}} \\ (A_{\mathrm{disc}}, (R^{+})^{\sim}_{\mathrm{disc}})_{\blacksquare} & \longrightarrow & A_{|\underline{f}| \leq 1}. \end{array}$$

现在，[1, 命题 3.22] 以及 [1, 命题 3.32] 对 $(-,-)_{\blacksquare}$ 的刻画表明，左箭头是按照 [62, 命题 12.8]，所述诱导的，因此右箭头也同样如此。因此，函子

$$(\operatorname{AnSpec} \underline{f})^{!} : D(R[T_1, \ldots, T_m]_{|\underline{T}| \leq 1}) \to D(A_{|\underline{f}| \leq 1})$$

由 $\operatorname{Hom}_{R\langle T_1, \ldots, T_m\rangle}(R\langle T_1, \ldots, T_m\rangle \otimes_{R[T_1, \ldots, T_m]} A, -)$ 给出，其中我们将其识别为

$$R[T_1, \ldots, T_m]_{|\underline{T}| \leq 1} = (R\langle T_1, \ldots, T_m\rangle, R^{+}\langle T_1, \ldots, T_m\rangle)_{\blacksquare}$$

[15]虽然 [1, 第 5] 节假设 (R, R^{+}) 是层化的，但在 [1, 定理 5.50] 的证明中并未用到这一假设。

利用引理 A.8。引理 A.14 表明 A 属于 $D_{\mathrm{pc}}(R[T_1,\dots,T_m])$，因此

$$R\langle T_1,\dots,T_m\rangle \otimes_{R[T_1,\dots,T_m]} A \tag{$\dagger$}$$

属于 $D_{\mathrm{pc}}(R\langle T_1,\ \dots\dots,\ T_m\rangle)$。根据 $[1,\text{定理 }5.50]$,($\dagger$)，可得到一个 $D(R[T_1,\dots,T_m]_{|T|\le 1})$ 中的伪紧对象，如 $[14,\text{定义 }9.9]$,所示。这意味着，对于所有整数n，(AnSpec f)$^!$与 $D^{\ge n}(R[T_1,\dots,T_m]_{|T|\le 1})$ 中对象的直和可交换。由于 ($\dagger$) 也属于 $D^{\le 0}(R[T_1,\dots,T_m]_{|T|\le 1})$，函子 (AnSpec f)$^!$也是左 t-正合的。 −

因此，我们可以假设 $A = R[T_1,\dots,T_m]$。考虑这些态射

$$\operatorname{AnSpec} A_{|\underline{T}|\le 1} \xrightarrow{\ j\ } \operatorname{AnSpec} A^{\mathrm{alg}} \xrightarrow{\ p\ } \operatorname{AnSpec}(R,R^+)_{\blacksquare},$$

并注意到，π 在 AnSpec $A_{|T|\le 1}$ 上的限制是 $p\circ j$。我们断言，$j^!p^!$与 $j^*p^*[m]$自然同构。首先，$[59,\text{引理 }3.2.9]$ 和 A.7 表明j 是上同调 ´étale 的，因此 $j^* = j^!$。由于 p 是诱导的，对于$D_{\blacksquare}(R,R^+)$中的所有对象 M，我们有 $j^!p^!M = j^!\mathrm{Hom}_R(A,M)$。接下来注意到，$\mathrm{Hom}_R(A,M)$自然同构于 $M((T_1^{-1},\dots,T_m^{-1}))/M[T_1,\dots,T_m]$，后者是幂等代数 $\mathbb{Z}((T_j^{-1}))\otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}}(R,R^+)_{\blacksquare}$ 在 $D(A^{\mathrm{alg}})$ 中对所有 $1\le j\le r$所作用的模。由 A.7，$j^!$ 是如 $[14,\text{第 }61]$ 页所示、与这些幂等代数对应的开嵌入之交，因此将 $j^!$ 应用于正合三角的张量积

$$M[T_j] \longrightarrow M((T_j^{-1})) \longrightarrow M((T_j^{-1}))/M[T_j] \xrightarrow{+1}$$

意味着

$$\begin{aligned} j^!\underline{\mathrm{Hom}}_R(A,M) &= j^!M((T_1^{-1},\dots,T_m^{-1}))/M[T_1,\dots,T_m] = j^!M[T_1,\dots,T_m][m] \\ &= j^!p^*M[m] = j^*p^*M[m]. \end{aligned}$$

最后，所需结果由该断言立即得出。 □

A.17. 作为推论，我们证明如下关于真推前的有限性结果，这是在我们的情形下 Grauert 相干性定理的类比。

推论。对于任意在 R 上有限表示的真概形 X，函子

$$\pi_* : D(X^{\mathrm{an}}) \to D_{\blacksquare}(R,R^+)$$

将 $D_{\mathrm{pc}}(X^{\mathrm{an}})$映至 $D_{\mathrm{pc}}(R)$。

证明。定理 A.13 表明 $X^{\mathrm{an}} \tilde{\to} X^{\mathrm{alg}}$。由于 X^{alg} 被有限多个形如 AnSpec$(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 的对象覆盖，因此它是拟紧的，故 X^{an} 也如此。因此，A.15 表明 X^{an} 被有限多个形如 AnSpec $A_{|f|\le 1}$ 的对象覆盖。由于 X 在 R 上分离，这些对象在 X^{an} 上的交仍具有这种形式，因此引理 A.3 和 $[14,\text{定理 }8.6\ (1)]$推出，π_* 将 $D(X^{\mathrm{an}})$ 中的核对象映至 $D_{\blacksquare}(R,R^+)$ 中的核对象，如 $[14,\text{定义 }8.5\ (1)]$所述。

我们声称，π_* 与 $\pi_!$自然同构。为此，注意到命题 A.10 表明，$(R,\ R^+)_{\blacksquare} \to A_{|f|\le 1}$ 是按照 $[62,\text{命题 }12.8]$诱导的。因此，$[41,\text{引理 }4.5.5]$ 推出 AnSpec $A_{|f|\le 1} \to$ AnSpec$(R,\ R^+)_{\blacksquare}$ 如 $[41,\text{定义 }4.5.1.(b)]$所述在上同调意义下是素的，且其余对偶化复形平凡；对由此类对象构成的 X^{an} 的覆盖应用 $[41,\text{注 }4.4.11.(iii)]$，可知 π也满足同样的性质。这便证明了所声称的结论。

设 C 是 $D(X^{\mathrm{an}})$中的一个伪紧对象，并设 d 是一个整数。则命题 A.16 表明，存在一个整数 e ，使得对于 $D_{\blacksquare}^{\geq d}(R,\ R^{+})$中的任意对象族 $(M_\alpha)_\alpha$，族 $(\pi^! M_\alpha)_\alpha$ 属于 $D^{\geq e}(X^{\mathrm{an}})$，且满足

$$\bigoplus_\alpha \pi^! M_\alpha = \pi^!\big(\bigoplus_\alpha M_\alpha\big).$$

由于 C 是伪紧的，该断言表明

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(\pi_* C, \bigoplus_\alpha M_\alpha) &= \mathrm{Hom}(C, \pi^! \bigoplus_\alpha M_\alpha)\\ &= \mathrm{Hom}(C, \bigoplus_\alpha \pi^! M_\alpha) = \bigoplus_\alpha \mathrm{Hom}(C, \pi^! M_\alpha) = \bigoplus_\alpha \mathrm{Hom}(\pi_* C, M_\alpha).\end{aligned}$$

因此， $\pi_* C$ 是伪紧的，得证。 □

A.18. 利用推论 A.17，我们证明定理 A.13 限制为伪相干对象子范畴之间的一个等价，如下所述。对于任意一个在 R上局部有限型的概形X ，定理 A.13 表明，X^{alg} 由形如 AnSpec A^{alg} 的对象沿着由扎里斯基覆盖诱导的覆盖粘合而成。因此，A.14 表明，全子范畴 $D_{\mathrm{pc}}(A) \subseteq D(A) \hookrightarrow D(A^{\mathrm{alg}})$自然粘合为 $D(X^{\mathrm{alg}})$的一个全子范畴，该子范畴自然等价于 $D_{\mathrm{pc}}(X)$。

考虑函子 $D(X^{\mathrm{alg}}) \to D(X^{\mathrm{an}})$。当 $X = \mathrm{Spec}\ A$是仿射的时， $[1, \text{定理 } 5.50]$ 和 $[14, \text{定理 } 8.6\ (1)]$ 表明，该函子将 $D_{\mathrm{pc}}(A)$映到 $D_{\mathrm{pc}}((\mathrm{Spec}\ A)^{\mathrm{an}})$，因此一般而言，该函子将 $D_{\mathrm{pc}}(X)$映到 $D_{\mathrm{pc}}(X^{\mathrm{an}})$。

定理。 对于任意有限表示于 R上的真概形 X ，所得函子 $D_{\mathrm{pc}}(X) \to D_{\mathrm{pc}}(X^{\mathrm{an}})$ 是一个等价。

证明。 完全忠实性由定理 A.13 得出。为证明本质满射性，设C 是 $D_{\mathrm{pc}}(X^{\mathrm{an}})$的一个对象。由完全忠实性，只需证明对于所有仿射开子概形 $j\colon \mathrm{Spec}\, A \hookrightarrow X$， C在复合映射下的像

$$D_{\mathrm{pc}}(X^{\mathrm{an}}) \subseteq D(X^{\mathrm{an}}) \xleftarrow{\sim} D(X^{\mathrm{alg}}) \xrightarrow{j^{\mathrm{alg},*}} D(A^{\mathrm{alg}})$$

属于 $D_{\mathrm{pc}}(A) \subseteq D(A) \hookrightarrow D(A^{\mathrm{alg}})$的像。由于 $j^{\mathrm{alg},*}$保持伪紧对象，只需证明 $j^{\mathrm{alg},*}C$ 属于 $D(A) \hookrightarrow D(A^{\mathrm{alg}})$的像。诺特近似给出 X 的一个有限生成理想层 $\mathscr{I}$ ，其零点集等于闭子集 $X \smallsetminus \mathrm{Spec}\ A \subseteq X$，因此将 X替换为沿 $\mathscr{I}$的爆破后，我们可以假设 $\mathrm{Spec}\, A = X \smallsetminus D$ 对应于 X上的一个有效卡蒂埃除子 D。于是 $j_*^{\mathrm{alg}} j^{\mathrm{alg},*}C = \varinjlim_{n\geq 0} C \otimes \mathscr{O}_X(-nD)$，因此

$$\pi_* j_*^{\mathrm{alg}} j^{\mathrm{alg},*} C = \varinjlim_{n\geq 0} \pi_*\big(C \otimes \mathscr{O}_X(-nD)\big).$$

注意， $\pi_* j_*^{\mathrm{alg}} j^{\mathrm{alg},*}C$是 $j^{\mathrm{alg},*}C$在 $D_{\blacksquare}(R, R^{+})$中的像。由于$C\otimes\mathscr{O}_X(-nD)$属于 $D_{\mathrm{pc}}(X^{\mathrm{an}})$，推论 A.17 表明$\pi_*\big(C \otimes \mathscr{O}_X(-nD)\big)$ 属于 $D_{\mathrm{pc}}(R)$，因此 $j^{\mathrm{alg},*}C$在 $D_{\blacksquare}(R, R^{+})$中的像属于 $D(R) \hookrightarrow D_{\blacksquare}(R, R^{+})$的像。因此， $j^{\mathrm{alg},*}C$属于 $D(A) \hookrightarrow D(A^{\mathrm{alg}})$的像，如所愿。□

A.19. 最后，我们证明定理 H。回顾一下，该对应关系

$$\mathrm{Spa}(A, A^+) \mapsto \mathrm{AnSpec}(A, A^+)_{\blacksquare}$$

从 Tate 仿射型adic空间到 {解析叠} 的函子将有理覆盖映为稳局部化覆盖 [59, 命题 2.3.2], 因此它自然地粘合成一个函子

$$(-)_{\blacksquare} : \{\text{analytic adic spaces}\} \to \{\text{analytic stacks}\}.$$

在本节余下部分，假设 R 是次完美胚，并记 S 为 Spa(R, R^+)。那么对于任意在 R上的光滑概形 X ，定义1.1中的adic 空间 X_S^{an}由 [25, 命题 IV.4.9]保证存在。

定理。 对于任意在 R上的光滑真概形 X ，函子

$$\{vector\ bundles\ on\ X\} \to \{vector\ bundles\ on\ X_S^{\mathrm{an}}\}$$

是范畴等价。

证明。 通过用形如 AnSpec $A_{|f|\leq 1}$ 的足够小的 steady 子空间覆盖 X^{an} ，我们看到 X^{an} 同构于 $(X_S^{\mathrm{an}})_{\blacksquare}$。于是定理 A.18 给出自然等价 $D_{\mathrm{pc}}(X) \xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{pc}}((X_S^{\mathrm{an}})_{\blacksquare})$，因此在由完美对象组成的全子范畴之间存在自然等价 C ，如 [14, 命题 9.2] 所述，并且 $- \otimes C$ 是 t-正合的。

对于 $D_{\mathrm{pc}}(X)$， [68, Tag 0658] 表明，该子范畴自然等价于 {上 X}的向量丛。对于 $D_{\mathrm{pc}}((X_S^{\mathrm{an}})_{\blacksquare})$，将 [1, 定理 5.50] 和 [68,Tag 0658] 应用于上述由形如 AnSpec $A_{|f|\leq 1}$ 的对象构成的 $X^{\mathrm{an}} \cong (X_S^{\mathrm{an}})_{\blacksquare}$ 覆盖，可知该子范畴自然等价于 {上 X_S^{an}}的向量丛。□

A.20. 作为定理 A.19 的一个应用，我们以证明丛的代数叠的解析化与丛的解析叠一致来结束本节。这回答了 Heuer–Xu 的一个问题 [40, 注 8.1.2]。

令 K 为 $\mathbb{Q}_p$上的代数闭非阿基米德域，并记 Perfd_K为 Spa K上的仿射完美空间范畴。赋予 Perfd_K 以 v-拓扑。回顾 [40, 定义 8.4.4] 中的钻石化函子

$$(-)^{\diamondsuit} : \{\text{algebraic stacks over } K\} \to \{\text{small v-stacks on } \mathrm{Perfd}_K\}.$$

设 X 是 K上的光滑真概形，且 G 是 K上的线性代数群。记$\mathcal{B}_{G,X}$ 和$\mathcal{H}_{G,X}$ 分别为 K 上 G-丛及 X上的 G-Higgs丛所对应的代数栈。按照 [39, 定义 7.12.(1)] 和 [39, 定义 7.12.(2)], , 分别记 $\mathrm{Bun}_{G,X}$ 和 $\mathrm{Hig}_{G,X}$ 为 Perfd_K 上的小 v-栈。

定理。 v-栈之间的自然态射Perfd_K

$$\mathcal{B}_{G,X}^{\diamondsuit} \to \mathrm{Bun}_{G,X} \quad and\ \mathcal{H}_{G,X}^{\diamondsuit} \to \mathrm{Hig}_{G,X}$$

是同构。

证明。 这直接由定理 A.19 得出。 □

Appendix B. ℓ-adic realizations of Berkovich motives

在 §5 和 §6 中，我们使用 [65, 66] 中的 Berkovich（即超收敛）动机层，因为它们具有良好的形式性质。例如，存在 !-推前；在凝聚 anima 上取值时，它们可以用拟有限集上的经典层来描述。本节开头，我们先回顾这些内容。

当我们需要比较全局 shtuka $\mathrm{Sht}^{I}_{G,\ V}$ 的模空间（的解析化）所对应的Berkovich动机与其经典 ℓ-进层时，就会遇到困难。理想情况下，我们可以从 $\mathrm{Sht}^{I}_{G,\ V}$ 上的动机交叉上同调层出发，对其进行解析化，然后再取 ℓ-进实现。然而，目前只有在 G 分裂时才已知这样的动机交叉上同调层 [58], ；而且，我们仍需比较 Berkovich动机与经典动机。为避免这一点，我们将发展一些工具，以追踪簇上的 ℓ-进层、其解析化上的 ℓ-进层以及这些解析化上的动机层之间的关系。

我们通过回顾以下对象上的动机层的描述来结束本节 F_v和 Div^1_v，并描述它们与动机近邻循环的关系。

记号。 在本节中，我们在 $\mathbb{F}_q$ 上工作。

B.1. 我们首先回顾*Berkovich*动机 [65]的理论。按照 [65, 定义 3.1],赋予 {上完美胚环的范畴弧拓扑；根据 [65, 定理 3.14]，该拓扑是次典范的。记 {上的弧层为 $\mathbb{F}_q$} 上的∞-范畴，即定义在 {上 $\mathbb{F}_q$}^{op}的完美胚环上的 anima 层范畴，并回顾[65, 第 54] 页中的 $\mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$-线性超收敛动机六函子形式主义 $D_{\mathrm{mot}}(-)$，其定义在{上的弧层范畴 $\mathbb{F}_q$}上。

B.2. 在由拟有限集（即凝聚 *anima*）产生的代数栈上取值时，Berkovich动机有如下描述。回顾 [41, 构造 3.5.16] 中的 $\mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$-线性六函子形式体系 $D(-,\mathbb{Z}[\frac{1}{q}])$，其定义在 {凝聚 anima}上，并记

$$\underline{(-)} : \{\text{condensed anima}\} \to \{\text{arc-sheaves over } \overline{\mathbb{F}}_q\}$$

对赋值 $X \mapsto X$ 从拟有限集出发的左Kan延拓。于是，[66, 命题 2.1]的证明表明，我们有一个三函子形式体系之间的态射

$$D(-,\mathbb{Z}[\tfrac{1}{q}]) \to D_{\mathrm{mot}}(\underline{(-)})$$

在 {凝聚 anima} 上，关于 !-可态射，针对 $D(-,\ \mathbb{Z}[\frac{1}{q}])$。

命题。 这诱导出一个6-函子形式体系之间的同构

$$D(-,\mathbb{Z}[\tfrac{1}{q}]) \otimes_{D(\mathbb{Z}[\frac{1}{q}])} D_{\mathrm{mot}}(*) \xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{mot}}(\underline{(-)})$$

在 {凝聚 *anima*} 上，关于!-可态射，针对 $D(-,\mathbb{Z}[\frac{1}{q}])$。

证明。 在有限集上求值时，这显然成立。对于任意有限集的余滤极限$X = \lim_{\longleftarrow i} X_i$，我们有 $X = \lim_{\longleftarrow i} X_i$，因此 [65, 引理 10.4] 表明

$$\begin{aligned} D(X,\mathbb{Z}[\tfrac{1}{q}]) \otimes_{D(\mathbb{Z}[\frac{1}{q}])} D_{\mathrm{mot}}(*) &= \big[\varinjlim_i D(X_i,\mathbb{Z}[\tfrac{1}{q}])\big] \otimes_{D(\mathbb{Z}[\frac{1}{q}])} D_{\mathrm{mot}}(*) \\ &= \varinjlim_i \big[D(X_i,\mathbb{Z}[\tfrac{1}{q}]) \otimes_{D(\mathbb{Z}[\frac{1}{q}])} D_{\mathrm{mot}}(*)\big] \\ &= \varinjlim_i D_{\mathrm{mot}}(\underline{X_i}) = D_{\mathrm{mot}}(\underline{X}). \end{aligned}$$

最后，由 [66, 定理 3.4.11]中的唯一性即可得出该结果。 □

B.3. Berkovich动机与 ´étale 层的关系如下。记

$$a'^{*}:\{\text{small v-stacks over } \overline{\mathbb{F}}_q\}\to\{\text{arc-sheaves over } \overline{\mathbb{F}}_q\}$$

对赋值 $\mathrm{Spa}(R,R^{+})\mapsto \mathrm{Hom}^{\mathbb{F}_q}(R,-)$ [66, p. 3]. 作左Kan延拓。对于所有正整数 m 以及其上的任意小 v-叠 X $\mathbb{F}_q$， [65, 命题 12.3]给出一个自然的完全忠实对称幺半函子

$$\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}/\ell^m}(D_{\mathrm{mot}}(a'^{*}X))\hookrightarrow D_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/\ell^m)$$

该函子与拉回相容，其本质像由如 [25,命题 IV.2.4] 中所述的超收敛对象构成。

据此，可以如下定义 ℓ-进实现函子 $\widehat{r}_{\ell,X}$，于是对上述对象取 $\varprojlim_{m\geq 1}$ 会诱导出一个函子

$$\widehat{r}_{\ell,X}:D_{\mathrm{mot}}(a'^{*}X)\to\varprojlim_{m\geq 1}\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}/\ell^m}(D_{\mathrm{mot}}(a'^{*}X))\hookrightarrow\widehat{D}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_\ell).$$

记 $D(\mathbb{Z}_\ell)$ 为 $\varprojlim_{m\geq 1}D(\mathbb{Z}/\ell^m)$。则自然函子 $D_{\mathrm{perf}}(\mathbb{Z}_\ell)\to D(\mathbb{Z}_\ell)$ 由引理 4.2], 和 [25, p. 168] 识别出 $D_{\text{ét}}(*,\mathbb{Z}_\ell)$ 与 $D(\mathbb{Z}_\ell)$。在此识别下， [65, 定理 11.1] 表明 $\widehat{r}_{\ell,*}$ 限制为函子$D_{\mathrm{mot}}(*)^{\omega}\to D_{\mathrm{perf}}(\mathbb{Z}_\ell)$，因此 [65, 定理 11.1] 说明，应用 Ind 可得函子 $r_{\ell,*}$: $D_{\mathrm{mot}}(*)\to D(\mathbb{Z}_\ell)$。

B.4. 在本节余下部分，我们将使用如下 Berkovich 动机的基变换。对于任意小 v-叠 X over $\mathbb{F}_q$，记 $D_{\mathrm{mot}}(X)$ 为 $D_{\mathrm{mot}}(a'^{*}X)$。

设 Λ 是一个 $\mathbb{Z}_\ell$-代数，并考虑如下复合

$$D_{\mathrm{mot}}(*)\xrightarrow{r_{\ell,*}}(\mathbb{Z}_\ell)\longrightarrow D(\Lambda).$$

记 $D(X,\Lambda)$ 为对称幺半 ∞-范畴 $D_{\mathrm{mot}}(X)\otimes_{D_{\mathrm{mot}}(*)}D(\Lambda)$，因此 $D(-,\Lambda)$ 是定义在 $\mathbb{F}_q\}$ 上的 $\{$ 小 v-叠上的一个 Λ-线性六函子形式体系。

作为命题 B.2 的推论，将 $D(-,\Lambda)$ 取值于分类叠上，得到光滑表示范畴。更确切地说，设 G 是一个局部 pro-p 群，设 K 是 G 的一个紧开子群，并记 $j:*/K\to*/G$ 为相应的小 v-叠之间的态射。

推论。对称幺半 ∞-范畴 $D(*/G,\Lambda)$ 自然等价于 Λ 上 $_G$ 的光滑表示的导出范畴。在此识别下， $j_!:D(*/K,\Lambda)\to D(*/G,\Lambda)$ 对应于 c-Ind_K^G。

证明。将 G 视为凝聚集，并考虑凝聚 anima $*/G$。于是，arc 层 $*/G$ 自然同构于 $a'^{*}(*/G)$，因此结论由命题 B.2, [41, 命题 5.3.10], 和 [41, 命题 5.4.4]得出。□

B.5. 为了便于在 §5 中将簇上的经典 ´étale ℓ-进层理论与 $\mathbb{F}_q$ 进行比较，我们将考虑以下相对于基底的 *Zariski*-可构造 动机（或 ´étale 层）的概念。设 Z 是$\mathbb{F}_q$上的分离有限型概形，且 C 是 $Z^{\diamondsuit}$上的小 v-叠。

定义。对于任意 Z上的分离有限型概形 X，
a) 记 $D^{Z\setminus C}{}_{\mathrm{mot}}(X_C^{\diamondsuit})\subseteq D_{\mathrm{mot}}(X_C^{\diamondsuit})$ 为由形如 $f_{C,!}^{\diamondsuit}\mathbb{Z}[\frac{1}{q}](n)$ 的对象在锥与收缩下生成的全子范畴，其中 $f:Y\to X$取遍分离有限型态射，且 n 取遍整数。

b) 对所有正整数 m，记 $D^{Z\setminus C}_{\text{ét}}(X_C^{\diamondsuit},\mathbb{Z}/\ell^m) \subseteq D_{\text{ét}}(X_C^{\diamondsuit},\mathbb{Z}/\ell^m)$ 为由形如 $f_{C,!}^{\diamondsuit}(\mathbb{Z}/\ell^m)$ 的对象在锥与收缩下生成的全子范畴，其中 $f\colon Y\to X$ 取遍分离有限型态射。

c) 将 $D^{Z\setminus C}_{\text{ét}}(X_C^{\diamondsuit},\mathbb{Z}_\ell) \subseteq \widehat{D}_{\text{ét}}(X_C^{\diamondsuit},\mathbb{Z}_\ell)$ 记作全子范畴

$$\varprojlim_{m\geq 1} D^{Z\setminus C}_{\text{ét}}(X_C^{\diamondsuit},\mathbb{Z}/\ell^m).$$

B.6. 立刻可得簇上 $\mathbb{F}_q$ 的 ´etale 层与其解析化上的 ´etale 层之间的如下关系。注意，$D_{\text{mot}}((-)_C^{\diamondsuit})$、$\widehat{D}_{\text{ét}}((-)_C^{\diamondsuit},\mathbb{Z}_\ell)$ 和 $D(-,\mathbb{Z}_\ell)$ 是

$$\{\text{separated finite type schemes over } Z\}.$$

现在 [63, 命题 27.1], [63, 命题 27.2], 和 [63, 命题 27.4] 给出了一个完全忠实的三函子形式体系态射

$$c^*: D(-,\mathbb{Z}_\ell)\hookrightarrow \widehat{D}_{\text{ét}}((-)^{\diamondsuit},\mathbb{Z}_\ell)$$

在 Z} 上的 {分离有限型概形上，且真基变换表明拉回诱导出三函子形式体系之间的态射

$$|_C: \widehat{D}_{\text{ét}}((-)^{\diamondsuit},\mathbb{Z}_\ell)\to \widehat{D}_{\text{ét}}((-)_C^{\diamondsuit},\mathbb{Z}_\ell)$$

在 Z} 上的 {分离有限型概形上。

B.7. Zariski-可构造动机与 ´étale 层之间还存在如下关系。

命题。
1） $D_{\text{mot}}((-)_C^{\diamondsuit})$ 限制为三函子形式体系 $D^{Z\setminus C}$ *mot* $((-)_C^{\diamondsuit})$。*2*） $\widehat{D}_{\text{ét}}((-)_C^{\diamondsuit},\mathbb{Z}_\ell)$ 限制为三函子形式体系 $D^{Z\setminus C}_{\text{ét}}((-)_C^{\diamondsuit},\mathbb{Z}_\ell)$。*3*）复合 $|_C\circ c^*$ 将 $D_{\text{cons}}(-,\mathbb{Z}_\ell)$ 发送到 $D^{Z\setminus C}_{\text{ét}}((-)_C^{\diamondsuit},\mathbb{Z}_\ell)$。*4*）函子 $\widehat{r}_{\ell,(-)_C^{\diamondsuit}}$ 将 $D^{Z\setminus C}$ *mot* $((-)_C^{\diamondsuit})$ 发送到 $D^{Z\setminus C}_{\text{ét}}((-)_C^{\diamondsuit},\mathbb{Z}_\ell)$，并在 Z} 上的 {分离有限型概形上诱导出三函子形式体系之间的态射。

证明。第 1）和第 2）部分立即由真基变换得到。对于第 3）部分，回忆 $D_{\text{cons}}(X,\mathbb{Z}/\ell^m)$ 是由形如 $f_!(\mathbb{Z}/\ell^m)$ 的对象在锥和收缩下生成的，其中 $f\colon Y\to X$ 遍历分离有限型态射。因此，B.6 和真基变换表明，$|_C\circ c^*$ 将 $D_{\text{cons}}(X,\mathbb{Z}/\ell^m)$ 发送到 $D^{Z\setminus C}_{\text{ét}}((-)_C^{\diamondsuit},\mathbb{Z}/\ell^m)$。最后，取 $\varprojlim_{m\geq 1}$ 即得所需结果。

对于第 4 部分的第一个断言，设 $f\colon Y\to X$ 是一个分离的有限型态射，并令 n 为一个整数。根据长田紧化，存在一个真态射 $\bar{f}\colon \bar{Y}\to X$ 和一个开嵌入 $j\colon Y\to \bar{Y}$，使得 $f=\bar{f}\circ j$。于是 $j_C^{\diamondsuit}$ 是一个部分适当开嵌入，因此 $j_{C,!}^{\diamondsuit}\mathbb{Z}[\tfrac{1}{q}](n)$ 在 $D_{\text{ét}}(Y_C^{\diamondsuit},\mathbb{Z}/\ell^m)$ 中的像同构于 $j_{C,!}^{\diamondsuit}(\mathbb{Z}/\ell^m)$。由于 $f_C^{\diamondsuit}$ 如定义 4.17]，所述是一个真态射且具有有限上同调维数，由命题 12.3] 可知，$f_{C,!}^{\diamondsuit}\mathbb{Z}[\tfrac{1}{q}](n) = f_{C,*}^{\diamondsuit}j_{C,!}^{\diamondsuit}\mathbb{Z}[\tfrac{1}{q}](n)$ 在 $D_{\text{ét}}(X_C^{\diamondsuit},\mathbb{Z}/\ell^m)$ 中的像同构于 $f_{C,*}^{\diamondsuit}j_{C,!}^{\diamondsuit}(\mathbb{Z}/\ell^m) = f_{C,!}^{\diamondsuit}(\mathbb{Z}/\ell^m)$。因此，取 $\varprojlim_{m\geq 1}$ 即得所需断言。最后，第 4 部分的第二个断言由 B.3 和上述论证推出。
□

B.8. 最后，我们将前面的讨论作 Ind-扩张。命题 B.7.2) 表明，作 Ind-扩张会得到一个态射

$$\Upsilon : \mathrm{Ind}\, D_{\mathrm{mot}}^{Z\setminus C}((-)_C^{\diamondsuit}) \to D_{\mathrm{mot}}((-)_C^{\diamondsuit})$$

关于 {分离有限型概形上的三函子形式体系，以及命题 B.7.3）表明，将 Ind 应用于 $|_C \circ c^*$: $D_{\mathrm{cons}}(-, \mathbb{Z}_\ell) \to D^{Z\setminus C}$ ét $((-)_C^{\diamondsuit}, \mathbb{Z}_\ell)$ 会得到一个三函子形式体系的态射

$$\rho : D(-, \mathbb{Z}_\ell) \to \mathrm{Ind}\, D_{\text{ét}}^{Z\setminus C}((-)_C^{\diamondsuit}, \mathbb{Z}_\ell)$$

关于 {分离有限型概形上的三函子形式体系。最后，命题 B.7.4）表明$\widehat{r}_{\ell,\ (-)_C^{\diamondsuit}}$ 诱导出一个三函子形式体系的态射

$$D_{\mathrm{mot}}^{Z\setminus C}((-)_C^{\diamondsuit}) \to D_{\text{ét}}^{Z\setminus C}((-)_C^{\diamondsuit}, \mathbb{Z}_\ell)$$

关于 {分离有限型概形上的三函子形式体系，因此应用 Ind 会得到一个态射

$$r_{\ell,(-)_C^{\diamondsuit}} : \mathrm{Ind}\, D_{\mathrm{mot}}^{Z\setminus C}((-)_C^{\diamondsuit}) \to \mathrm{Ind}\, D_{\text{ét}}^{Z\setminus C}((-)_C^{\diamondsuit}, \mathbb{Z}_\ell)$$

关于 {分离有限型概形上的三函子形式体系。

B.9. 记 F 为 $\mathbb{F}_q((\pi))$，取 F的一个可分闭包 F，并记 F的完备化为 C。那么，Spa C 上的 Zariski 可构造 ´étale^ 层（相对于任意一个 Z）有一个简单的描述。更确切地说， $D_{\text{ét}}$(Spa C, $\mathbb{Z}_\ell$) 自然地^同构于 $D(\mathbb{Z}_\ell)$，并且在这一识别下，B.6 表明

$$D_{\text{ét}}^{Z\setminus \mathrm{Spa}\, C}(\mathrm{Spa}\, C, \mathbb{Z}_\ell) = D_{\mathrm{perf}}(\mathbb{Z}_\ell).$$

我们证明 Spa C 上 Zariski-可构造动机的一个类似描述:

命题。我们有 $D^{Z\setminus \mathrm{Spa}\, C}{}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Spa}\ C) = D_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Spa}\ C)^{\omega}$。

命题 B.9 和 [65, 命题 10.1] 表明

$$\Upsilon : \mathrm{Ind}\, D_{\mathrm{mot}}^{Z\setminus \mathrm{Spa}\, C}(\mathrm{Spa}\, C) \to D_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Spa}\, C)$$

这是一个等价。

证明。考察 f: $Z \times X \to Z$ 对于$\mathbb{F}_q$上的光滑射影概形 X，[65, 命题 10.1] 表明 D_{mot}(Spa C)$^{\omega}$ 属于 $D^{Z\setminus \mathrm{Spa}\, C}{}_{\mathrm{mot}}$(Spa C)。对于反向包含，只需证明：对于任意分离有限型态射f: $Y \to$ Spec C，对象 $f^{\mathrm{an},\ \diamondsuit !}\mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$在 D_{mot}(Spa C) 中是紧的。由于 (–)$^{\mathrm{an},\ \diamondsuit}$经过极限完美化分解，我们可以假设 Y 是约化的。

现在对 dim Y 进行归纳，其中 dim $Y = 0$ 情形是直接的。根据切除 [65, 命题 4.25] 以及归纳假设，我们可以假设Y 是不可约的。于是 [17, 定理 4.1] 给出一个光滑射影态射 ~ ~ ~ ~f: $Y \to$Spec C、一个稠密开子空间 $V \subseteq Y$、一个稠密开子空间 i: $V \hookrightarrow Y$、~以及一个有限 ´étale 态射 j: $V \to V$在 C 上。根据切除 [65, 命题 4.25]以及归纳假设，我们可以假设 $Y = V$。记 d 为所有整除 deg j 的素数 $\ell \neq p$ 的积。由于 ($f^{\mathrm{an},\ \diamondsuit !}\mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$) $\otimes_{\mathbb{Z}[\frac{1}{q}]} \mathbb{Z}/d^m = f$–个$^{\diamondsuit}$!($\mathbb{Z}/d^m$), – –

铺展意味着， $f^{\mathrm{an},\ \diamondsuit !}\ \mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$在 –

$$\varprojlim_{m\geq 1} \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}/d^m}(D_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Spa}\, C)) = \widehat{D}\big(\prod_{\ell | d} \mathbb{Z}_\ell\big)$$

是紧的。因此，只需证明 f一个 $\Diamond!$ $\mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$ 在 $\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}[\frac{1}{dq}]}(D_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Spa}\ C))$ 中的像是紧的。

[65, 命题 10.1] 的证明表明， $\widetilde{f}^{\mathrm{an}},\ \Diamond!\ \mathbb{Z}[\frac{1}{dq}]$ 是紧的

$$\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{dq}]}(D_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Spa}\,C)),$$

因此，切除 [65, 命题 4.25] 和归纳假设推出，对 $(\widetilde{f}\circ i)^{\mathrm{an}},\ \Diamond!\ \mathbb{Z}[\frac{1}{dq}]$ 同样成立。最后，迹映射将 $f^{\mathrm{an}},\ \Diamond!\ \mathbb{Z}[\frac{1}{dq}]$ 展示为 $(\widetilde{f}\circ i)^{\mathrm{an}},\ \Diamond!\ \mathbb{Z}[\frac{1}{dq}]$ 的一个缩回，由此得到所需结果。 □

B.10. 记 $\breve{F}$ 为 $\mathbb{F}_q((\pi))$，记 $\phi:\mathrm{Spd}\ \breve{F}\to\mathrm{Spd}\ \breve{F}$ 为 $\mathbb{F}_q$ 上的几何 q-Frobenius 自同构，并记 Div^1 为 $\mathbb{F}_q$ 上的小 v-层 $(\mathrm{Spd}\ \breve{F})/\phi^{\mathbb{Z}}$。

我们回顾 $\mathrm{Spd}\ \breve{F}$ 和 Div^1 上动机的以下描述。固定一个群同构 $\mathbb{F}_q^\times\cong\mathbb{Q}/\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$，并选取 F 中 π 的一组相容的 π次方根 $\{\pi^{1/n}\}_{p\nmid n}$。回想一下，这些选择会在 $\mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$ [66, p. 10] 上诱导某些群概形的短正合列。

$$1\longrightarrow \mathrm{ID}_F\longrightarrow \mathrm{WD}_F\longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}\longrightarrow 1.$$

引理。 这些选择会诱导相容等价

$$D(\mathrm{Spd}\,\breve{F},\Lambda)\cong D_{\mathrm{qcoh}}\big((\mathrm{Spec}\,\Lambda)/\mathrm{ID}_F\big)\ \textit{and}\ D(\mathrm{Div}^1,\Lambda)\cong D_{\mathrm{qcoh}}\big((\mathrm{Spec}\,\Lambda)/\mathrm{WD}_F\big).$$

证明。 记 $MG_{\mathbb{F}_q}$ 为来自 [65, p. 62], 、定义在 $\mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$ 上的代数栈，并回想我们有一个自然函子 $D_{\mathrm{qcoh}}(MG_{\mathbb{F}_q})\to D_{\mathrm{mot}}(*)$ [65, p. 62]。考虑由同构 $\mathbb{F}_q^\times\cong\mathbb{Q}/\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 按照 [66, p. 10] 诱导的态射 $\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[\frac{1}{q}]\to MG_{\mathbb{F}_q}$；注意，同构 $\mathbb{F}_q^\times\cong\mathbb{Q}/\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 也会诱导一个交换方形

$$\begin{array}{ccc} D_{\mathrm{qcoh}}(MG_{\overline{\mathbb{F}}_q}) & \longrightarrow & D_{\mathrm{mot}}(*) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_{\ell,*}} \\ D(\mathbb{Z}[\frac{1}{q}]) & \longrightarrow & D(\mathbb{Z}_\ell). \end{array}$$

记 X_{Div^1} 与 X_{Div^1} 为 [66, 定义4.1]中$MG_{\mathbb{F}_q}$ 上的代数叠。则 [66, 定理4.2] 及其证明给出相容等价

$$D_{\mathrm{qcoh}}(\widetilde{X}_{\mathrm{Div}^1})\otimes_{D_{\mathrm{qcoh}}(MG_{\overline{\mathbb{F}}_q})} D_{\mathrm{mot}}(*)\xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Spd}\,\breve{F}),$$
$$D_{\mathrm{qcoh}}(X_{\mathrm{Div}^1})\otimes_{D_{\mathrm{qcoh}}(MG_{\overline{\mathbb{F}}_q})} D_{\mathrm{mot}}(*)\xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Div}^1).$$

因此上述交换方形诱导相容等价

$$D_{\mathrm{qcoh}}(\widetilde{X}_{\mathrm{Div}^1}\times_{MG_{\overline{\mathbb{F}}_q}}\mathrm{Spec}\,\Lambda)\xrightarrow{\sim} D(\mathrm{Spd}\,\breve{F},\Lambda),$$
$$D_{\mathrm{qcoh}}(X_{\mathrm{Div}^1}\times_{MG_{\overline{\mathbb{F}}_q}}\mathrm{Spec}\,\Lambda)\xrightarrow{\sim} D(\mathrm{Div}^1,\Lambda).$$

最后， [66, p. 10] 相容地识别

$$\widetilde{X}_{\mathrm{Div}^1}\times_{MG_{\overline{\mathbb{F}}_q}}\mathrm{Spec}\,\Lambda\cong(\mathrm{Spec}\,\Lambda)/\mathrm{ID}_F,$$
$$X_{\mathrm{Div}^1}\times_{MG_{\overline{\mathbb{F}}_q}}\mathrm{Spec}\,\Lambda\cong(\mathrm{Spec}\,\Lambda)/\mathrm{WD}_F.$$ □

B.11. 我们以描述动机近邻循环 在 ℓ-进实现下的行为结束本节。记 $f\colon \mathrm{Spa}\ C \to *$ 为结构态射。回忆一下，f_* 给出等价 $D_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Spa}\ C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}^{f_*\mathbb{Z}[\frac{1}{q}]}(D_{\mathrm{mot}}(*))$，并且我们在 B.10 中对$\{\pi^{1/n}\}_{p\nmid n}$的选择诱导出一个态射 $f_*\mathbb{Z}[\frac{1}{q}] \to \mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$，它是 $\mathbb{E}_\infty$-代数在 $D_{\mathrm{mot}}(*)$[65, p. 61]中的态射。在此识别下，记 $\Psi\colon \bar{} D_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Spa}\ C) \to D_{\mathrm{mot}}(*)$ 为与 $-\otimes_{f_*\mathbb{Z}[\frac{1}{q}]} \mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$ [65, 定义 11.3]对应的函子。

回想一下，拉回给出一个等价 [25, p. 168]

$$\widehat{D}_{\text{ét}}(*, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{\sim} \widehat{D}_{\text{ét}}(\mathrm{Spa}\, C, \mathbb{Z}_\ell).$$

命题。 函子 Ψ保留紧对象。此外，我们有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} D_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Spa}\, C) & \xrightarrow{\widehat{r}_{\ell,\mathrm{Spa}\, C}} & \widehat{D}_{\text{ét}}(\mathrm{Spa}\, C, \mathbb{Z}_\ell) \\ \downarrow{\scriptstyle \Psi} & & \uparrow{\scriptstyle \wr} \\ D_{\mathrm{mot}}(*) & \xrightarrow{\widehat{r}_{\ell,*}} & \widehat{D}_{\text{ét}}(*, \mathbb{Z}_\ell). \end{array}$$

命题 B.11 和 B.3 蕴含 $\widehat{r}_{\ell,\mathrm{Spa}\, C}$ 限制为一个函子

$$D_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Spa}\, C)^\omega \to D_{\mathrm{perf}}(\mathbb{Z}_\ell),$$

因此 [65, 命题 10.1] 表明，应用 Ind 得到一个函子

$$r_{\ell,\mathrm{Spa}\, C} : D_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Spa}\, C) \to D(\mathbb{Z}_\ell).$$

证明。 由于 $f^*\colon D_{\mathrm{mot}}(*) \to D_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Spa}\ C)$ 是 f_* 的左伴随，它对应于$-\otimes_{\mathbb{Z}[\frac{1}{q}]} f_*\mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$。因此 $\Psi \circ f^*$自然同构于恒等函子，所以第一个结论由 [65, 命题 10.1] 和 [65, 定理 11.1]推出。

对于第二个陈述， [65, 命题 11.4] 的证明表明，对所有正整数 m，对 $f_*\mathbb{Z}[\frac{1}{q}] \to \mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$应用 $-\otimes_{\mathbb{Z}[\frac{1}{q}]} \mathbb{Z}/\ell^m$可得一个同构。由此得到所需结果。□

Appendix C. Global rigid inner forms, by Peter Dillery

下文中， G 始终表示定义在全局函数域 F 上的连通约化群，该函数域与常数域为 $\mathbb{F}_q$的射影曲线 C 相关。我们将不再采用本文其余部分的记号，而用 F^s 表示固定代数闭包 F中 F 的一个可分闭包。 F 的所有位组成的集合记为 V_F。我们用 Kott_F表示 F上的 Kottwitz gerbe，用 Kott_v表示每个 F_v 上的 Kottwitz gerbe。对于 F的位集 Σ，我们用 $O_{F,\,\Sigma}$ 表示 F的Σ-整数环。

C.1. 定理 4.11 表明，拟分裂连通约化群的 $B(F,\ G)_{\mathrm{basic}}$-内形式 G_b 自然出现在 $\mathrm{Bun}_{G,\ F}$ 的半稳定轨迹的描述中。本附录旨在运用论文正文中的结果，证明“扩展”栈 $\mathrm{Bun}^{e}_{G,\ F}$ 的基本几何性质。该栈在 [21], 中引入，其几何性质类似于 $\mathrm{Bun}_{G,\ F}$，但其半稳定轨迹编码的是 G 的全局刚性内形式（按 [20], 的意义），而不只是 $B(F,\ G)_{\mathrm{basic}}$-内形式。使用全局刚性内形式的优点在于，它们使得我们能够陈述（[21, 猜想 5.7]）一个适用于任意连通

约化群在 F 上的离散自守表示的重数公式。我们有理由相信，正文中理论工具的适用于 $\mathrm{Bun}^{e}_{G,\,F}$ 的版本，结合猜想中的、适用于 $\mathrm{Kott}_v \times_{F_v} \mathrm{Kal}_v$ 的朗兰兹对应精化形式（见 [21, 猜想 5.1]），可用于证明该重数公式的若干情形。我们强调，此处给出的构造受到 [22] 在局部情形下工作的启发。

C.2. 我们回顾局部和全局刚性内形式的概念。可以利用类域论构造一个整体丛 $\mathrm{Kal}_F \to \mathrm{Spec}(F)$（[20, 命题 3.21]），并对每个素位 $v \in V_F$ 构造一个局部丛 $\mathrm{Kal}_v \to \mathrm{Spec}(F_v)$（[19, 定理 3.4]）；它们分别由原有限乘法群概形 P 和 u_v 带化。关于这两个丛及其带的更详细概述，请参见 [21, §2.1] 。我们赋予这些丛从 $\mathrm{Spec}(F)$ 继承的 ´étale 拓扑。

对于 $? \in \{F, v\}$，基本上同调 $H^1(\mathrm{Kal}_?,\, G)_{\mathrm{basic}}$ 定义为 $\mathrm{Kal}_?$ 上 ´étale G-挠子的所有同构类，且其在 $\mathrm{Kal}_?$ 的带上的限制是一个F有理同态 $P \to Z_G$ 或 $u_v \to Z_G$。这些丛的一个关键性质是自然映射

$$H^1(\mathrm{Kal}_?, G)_{\mathrm{basic}} \to H^1(F, G_{\mathrm{ad}})$$

始终是满射。换言之，G的任意内形式都可以实现为来自这些 gerbe 上的一个 G-扭子。

在 [22] 和 [21] 中定义了该 gerbe 的一个变体，它更适合几何研究:

定义。将 $B_e(G)$（分别地，$B_e(G_{F_v})$）定义为 gerbe $\mathrm{Kott}_F \times_F \mathrm{Kal}_F$（分别地，$\mathrm{Kott}_v \times_{F_v} \mathrm{Kal}_v$）上所有 ´étale$G$-扭子的同构类，其中它们到 Kal_F（分别地，Kal_{F_v}）的带的限制均经过 Z_G。将子集 $B_e(G)_{\mathrm{basic}}$（分别地，$B_e(G_{F_v})_{\mathrm{basic}}$）定义为这样的类：它们到 gerbe $\mathrm{Kott}_F \times_F \mathrm{Kal}_F$（分别地，$\mathrm{Kott}_v \times_{F_v} \mathrm{Kal}_v$）的整个带的限制均经过 Z_G。

正如存在一个双射 $B(F,\, G)_{\mathrm{basic}} \xrightarrow{\sim} (\pi_1(G)[V_{F^s}]_0)^{\mathrm{Gal}(F^s/F)}$ 一样，$B_e(G)_{\mathrm{basic}}$ 也有一个由 [21, 定理 3.10]给出的线性代数描述；该描述恢复了 $B(F,\, G)$-双射以及 $H^1(\mathrm{Kal}_F,\, G)_{\mathrm{basic}}$-双射，后者来自 [20,定理 4.11]。为简洁起见，我们略去这里的细节，但要指出的是，证明依赖于 [21, 命题 3.1] 对 gerbe $\mathrm{Kott}_F \times_F \mathrm{Kal}_F$ 的一个显式坦纳卡描述，该描述推广了利用德林费尔德等位晶体对 Kott_F 的描述。

C.3. 定义栈 $\mathrm{Bun}^{e}_{G,\,F}$ 的关键要素，是 Kal_F的一种推广。后者定义在曲线 C 的一个固定仿射开子集 $U = C \setminus |\Sigma|$ 上，适用于有限集的位 Σ。这个 gerbe 记作 $\mathrm{Kal}_{F,\,\Sigma} \to U$。

gerbe $\mathrm{Kal}_{F,\Sigma}$ 由有限层丛构造而成。固定 Σ 在V_{F^s}中的一个提升集合 $\dot{\Sigma}$，并将 F的最大 Σ-非分歧扩张记为 F_Σ。再固定一个对 $\{(E_i, n_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的余最终系统，使得 $n_i \in \mathbb{N},\ F \subseteq E_i \subseteq F_\Sigma$，并且若 $j \geq i$，则$E_i \subseteq E_j$ 且 $n_i \mid n_j$。定义 $P_{\dot{\Sigma},i}$ 为与 $(\frac{1}{n_i}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})[\mathrm{Gal}(E_i/F) \times \Sigma_{F_i}]_0$卡蒂埃对偶的 $O_{F,\Sigma}$-群概形，其中由所有满足以下条件的元素构成：其 $[(\sigma, w)]$-系数除非 $\sigma^{-1}(w) \in \dot{\Sigma}_{E_i}$，否则为零。下标“0, 0”表示我们要求这些元素同时被两个增广映射消去。根据（[21, 推论 2.12]），存在一个“层级i”典范类 $\xi_i \in H^2_{\mathrm{fppf}}(O_{F,\Sigma}, P_{\dot{\Sigma},i})$，这些类通过文中所定义的一系列过渡映射 $\{P_{\dot{\Sigma},j} \to P_{\dot{\Sigma},i}\}$ 彼此相容，使得 $P_{\dot{\Sigma}} = \varprojlim P_{\dot{\Sigma},i}$。

为了定义与 $\mathrm{Kal}_{F,\Sigma}$ 对应的典范类，可以取 $\varprojlim \xi_i$ in $H^2_{\mathrm{fppf}}(F, P_{\dot{\Sigma}})$ 的唯一提升；对每个 $v \in V_F$，它都会以某种适当的意义局部化

为 $H^2_{\mathrm{fppf}}(F_v, u_v)$ 中与 Kal_v 对应的类——完整细节见 [21,定理 2.16]。可以定义一个过渡映射 $\mathrm{Kal}_{F,\Sigma'} \to \mathrm{Kal}_{F,\Sigma}$，对所有 $\Sigma \subseteq \Sigma'$ 均成立，而这些映射的拉回诱导出一个双射

$$\varinjlim_{\Sigma} H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kal}_{F,\Sigma}, G) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Kal}_F, G).$$

C.4. 现在回顾栈 $\mathrm{Bun}^e_{G,F}$ 的定义，它源自 [21, §4], ，其灵感来自 [22]的思想。每个 gerbe $\mathrm{Kal}_{F,\Sigma}$ 都定义（[21, 引理 4.2]）一个 adic gerbe $\mathrm{Kal}^{\mathrm{ad}}_{F,\Sigma} \to \mathrm{Spa}(O_{F,\Sigma})$（相对于 v-拓扑）；对于一个$S$ 上的仿射完美空间S，定义 $H^1_{\text{ét}}(\mathfrak{U}_S, G)_{\mathrm{Kal\text{-}basic}}$ 为 $\mathfrak{U}_S$ 上的所有 étale G-torsor$\mathscr{G}$的同构类：$= U_S^{\mathrm{an}} \times_{\mathrm{Spa}(O_{F,\Sigma})} \mathrm{Kal}^{\mathrm{ad}}_{F,\Sigma}$，其在带上的限制是一个态射

$$(P^{\mathrm{ad}}_{\dot\Sigma})_S \xrightarrow{\lambda_{\mathscr{G}}} Z_{G,S}.$$

我们用 $Z^1_{\text{ét}}(\mathfrak{U}_S, G)_{\mathrm{Kal}_F\text{-基本}}$表示所有这类 torsor（而非同构类）。

于是主要定义如下（[21, 定义 4.6]）：

定义。(1) 给定 U 中的一个稠密仿射开子集，定义一个函子 $\mathrm{Bun}^e_{G,U}$，它从 $\mathbb{F}_q$ 上的仿射刚性空间到群胚，定义如下

$$S \mapsto \{(\mathscr{G}, \phi) | \mathscr{G} \in Z^1_{\text{ét}}(\mathfrak{U}_S, G)_{\mathrm{Kal}_F\text{-basic}},\ \phi\colon \mathscr{G} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Frob}_S \times \mathrm{id})^*\mathscr{G}\};$$

(2) 定义函子 $\mathrm{Bun}^e_{G,F}$，它将 $\mathbb{F}_q$ 上的仿射刚性空间完美胚映射到群胚:

$$S \mapsto \varinjlim_{U} \mathrm{Bun}^e_{G,U}(S).$$

在 [21, 引理 4.7] 中证明了，这两个函子都是小 v-叠。

C.5. 赋值 $(\mathscr{G}, \phi) \in \mathrm{Bun}^e_{G,U}(S) \mapsto \lambda_{\mathscr{G}}$定义了一个映射

$$\mathrm{Bun}^e_{G,U} \xrightarrow{\Lambda} \underline{\mathrm{Hom}}_U(P_{\dot\Sigma}, Z_G),$$

其中 $\underline{\mathrm{Hom}}_U(P_{\dot\Sigma}, Z_G)$ 是将 S映射到 $\mathrm{Hom}^{U_S^{\mathrm{an}}}((P_{\mathrm{ad}\dot\Sigma})_S, Z_{G,S})$ 的函子。现在我们再回顾一个定义 [21, 定义 4.11]。

注意，对于完美胚空间 S 上每个 $\mathbb{F}_q$的几何点 $\bar s$，我们都有一个典范同构

$$\mathrm{Hom}_U(P_{\dot\Sigma}, Z_G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{U_{\bar s}^{\mathrm{an}}}((P^{\mathrm{ad}}_{\dot\Sigma})_{\bar s}, Z_{G,\bar s}).$$

鉴于此，给定 $\lambda \in \mathrm{Hom}(P^{\mathrm{ad}}_{\dot\Sigma}, Z_G)$，定义 $\mathrm{Bun}^{e,\lambda}_{G,U}$为由以下条件刻画的子栈

$$\mathrm{Bun}^{e,\lambda}_{G,U}(S) = \{x \in \mathrm{Bun}^e_{G,U}(S) | \lambda_{\bar x} = \lambda \in \mathrm{Hom}_{U_{\bar s}^{\mathrm{an}}}((P^{\mathrm{ad}}_{\dot\Sigma})_{\bar s}, Z_{G,\bar s})\},$$

其中 $\bar s$ 遍历 S 的所有几何点，且 $\bar x$ 表示 x 在 $\bar s$处的像。

使我们能够在这一新设定中使用论文主体中结果的一个关键结果是 [21, 推论 4.13], ，它表明 Λ 诱导一个分解（作为v-栈）

$$\mathrm{Bun}^e_{G,U} \xrightarrow{\sim} \bigsqcup_{\lambda \in \mathrm{Hom}_F(P_{\dot\Sigma}, Z_G)} \mathrm{Bun}^{e,\lambda}_{G,U},$$

并且对$\mathrm{Bun}^e_{G,F}$亦类似。

§2.9 中引入的概念有一个类似版本 [21, 定义 4.9]：

定义。(1) 定义 $\mathrm{Bun}_G^{e,1}{}_{,,F}$ 为由以下条件刻画的子栈

$$\mathrm{Bun}_{G,F}^{e,1}(S)=\{x\in \mathrm{Bun}_{G,F}^{e}(S)|\bar{x}=\mathrm{triv}\in \mathrm{Bun}_{G,F}(\bar{s})\},$$

其中 $\bar{s}$ 遍历 S 的所有几何点，而 $\bar{x}$ 表示 x在 $\bar{s}$处的像。

(2) 给定 b，它是 $B_e(G)_{\mathrm{basic}}$的一个元素，定义 $\mathrm{Bun}_G^{e,b}{}_{,,F}$ 为由以下条件刻画的子栈：$\mathrm{Bun}_G^{e,b}{}_{,,F}(S)=\{x\in \mathrm{Bun}_{G,F}^{e}(S)|\bar{x}=b\in \mathrm{Bun}_{G,F}(s)\}$，其中 $\bar{s}$遍历 S 的所有几何点，而 $\bar{x}$ 表示 x 在 $\bar{s}$处的像。

命题 2.9 的证明中相同的扭曲论证表明：

命题。*(1)* 对于从 $Kott_{F,\Sigma}\times_U$ 拉回的 $b\in B_e(G)_{\mathrm{basic}}$ $Kal_{F,\Sigma}$，存在自然同构 $Bun_{G,U}^{e}\xrightarrow{\sim} Bun_{G_b,U}^{e}{}_{,,U}$，将 $Bun_G^{e,b}{}_{,,U}$ 映到 $Bun_{G_b}^{e,1}{}_{,,U}$。*(2)* 对于固定 $\lambda\in Hom_U(P_{\dot{\Sigma}},Z_G)$ 上方的 $b\in H^1(Kott_{F,\Sigma}\times_U Kal_{F,\Sigma})_{\mathrm{basic}}$，我们有同构 $Bun_G^{e,\lambda}{}_{,,U}\xrightarrow{\sim} Bun_{G_b,U}$。

上文中的 $\mathrm{Kott}_{F,\Sigma}$ 是 Kott_F 的一个“U-层”版本，后者定义于 [21, §2.3]。结合这一结果与 [21, 推论 4.13]，可证明栈 $\mathrm{Bun}_{G,U}^{e}$ 同构于一族代数栈 $\mathrm{Bun}_{G',U}$ 的不交并，其中 G' 遍历 G 的内形式（这是 [22,Exemple 12.6] 的整体类比）。

因此，我们由命题 4.5 得出：

推论。每个$\mathrm{Bun}_{G,U}^{e}$ 都是一个 *Artin* v-栈。

C.6. 现在我们证明关于 $\mathrm{Bun}_{G,F}^{e}$ 的几何的一些更精细结果。首先，我们推导出以下定理 2.10 的类比结果；特别地，它将 $\mathrm{Bun}_{G,U}^{e}(\mathrm{Spd}\,\mathbb{F}_q)$ 识别为 $B_e(G)$：

定理。完美 v-栈 $\mathrm{Bun}_{G\,U}^{e\,\mathrm{red}}{}_{,,}$在 $\mathbb{F}_q$ 上是以下对象的 v-层化

$$(1)\quad \mathrm{Spec}\,B\mapsto\left\{\begin{array}{c}\mathrm{Kal}_F\text{-}basic\ G\text{-}torsors\ \mathscr{G}\ on\ U_B\times_U\mathrm{Kal}_{F,\Sigma}\ equipped\ with\\ an\ isomorphism\ \phi:\mathscr{G}\xrightarrow{\sim}(\mathrm{Frob}_B\times\mathrm{id})^*\mathscr{G}\end{array}\right\}.$$

此外，当 $\mathrm{Spec}\,B$ 的每个连通分支都是赋值环时，无需进行层化。

证明。 [21, 推论 4.13] 蕴含 $\mathrm{Bun}_G^{e\,\mathrm{red}}{}_{,,U}\xrightarrow{\sim}\bigsqcup_{\lambda\in}\mathrm{Hom}_F(P_{\dot{\Sigma}},Z_G)\,\mathrm{Bun}_{G\,U}^{e\,\lambda\,\mathrm{red}}{}_{,,,}$。我们在命题 C.5 中看到，在一个固定的 λ 上方选取 $b\in H^1(\mathrm{Kott}_{F,\Sigma}\times\mathrm{Kal}_{F,\Sigma})_{\mathrm{basic}}$（根据命题 2.29），我们可以做到这一点）给出了 $\mathrm{Bun}_G^{e,\lambda}{}_{,,U}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Bun}_{G_b,U}$ 的一个识别。与命题 4.12] 的证明类似（但更简单），我们可以按照 $\mathrm{Hom}_U(P_{\dot{\Sigma}},Z_G)$ 对函子 (1) 作出类似的不交并分解；再通过 b 扭曲，便得到一个同构：从将 $\mathrm{Spec}\,B$ 映射到如 (1) 中所有 $\mathscr{G}$ 的预层（使得 $\lambda_{\mathscr{G}}=\lambda$ 在 B 的所有几何点处），到 $(*)$ 中的函子。随后我们可以使用定理 2.10 得出结论。□

C.7. 本小节纯属对 [21] 的回顾，涉及栈 $\mathrm{Bun}_{G,\ F}^{e}$的局部化性质。首先，对于素位 $v\in V_F$，我们将栈 $\mathrm{Bun}_{G,\ F_v}^{e}$ 定义为与 $\mathrm{Bun}_{G,\ U}^{e}$ 相同，但以 F_v 替代 $O_{F,\ \Sigma}$，并以 Kal_v 替代 $\mathrm{Kal}_{F,\ \Sigma}$，定义见 [22, §12]。

我们回顾 [21, §4.2] 中定义的函子 $\mathrm{Bun}^e_{G,\mathbb{A}}$：

$$S \mapsto \varinjlim_{\Sigma} \prod_{v\notin\Sigma} \mathrm{Bun}_{G,O_v}(S) \times \prod_{v\in\Sigma} \mathrm{Bun}^e_{G,F_v}(S),$$

其中极限取遍所有有限个赋值点子集 Σ。这定义了一个小 v-叠，并且我们有一个态射

$$\mathrm{Bun}^e_{G,F} \to \mathrm{Bun}^e_{G,\mathbb{A}}$$

该态射由每个素位处的局部化映射 $\mathrm{Kal}_v \to \mathrm{Kal}_F$ 导出，详见 [21, §2.1]。于是有 [21, 命题 4.16]:

命题。存在一个态射

$$\mathrm{Bun}^e_{G,U} \to \prod_{v\notin\Sigma} \mathrm{Bun}_{G,O_v} \times \prod_{v\in\Sigma} \mathrm{Bun}^{e,(\Sigma)}_{G,F_v} \subseteq \prod_{v\notin\Sigma} \mathrm{Bun}_{G,O_v} \times \prod_{v\in\Sigma} \mathrm{Bun}^e_{G,F_v}$$

它使得方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bun}^e_{G,U} & \longrightarrow & \prod_{v\notin\Sigma} \mathrm{Bun}_{G,O_v} \times \prod_{v\in\Sigma} \mathrm{Bun}^{e,(\Sigma)}_{G,F_v} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Bun}^e_{G,F} & \longrightarrow & \mathrm{Bun}^e_{G,\mathbb{A}} \end{array}$$

笛卡尔。

上述 $\mathrm{Bun}^{e\,(\Sigma)}_{G\,F_v}$ 是栈 Bun^e_{G,F_v} 的一个小修改，适配于 F_Σ 在 v上方某个固定素位处的完备化，完整细节见 [21, 第 4 节.2]

C.8. 存在 $\mathrm{Bun}_{G,F}$的半稳定轨迹的一个类似物：

定义。令 $\mathrm{Bun}^{e\,\mathrm{ss}}_{G\,F}$ 为以下对象的原像

$$\varinjlim_{v\notin\Sigma} \prod_{v\notin\Sigma} \mathrm{Bun}_{G,O_v} \times \prod_{v\in\Sigma} \mathrm{Bun}^{e,\mathrm{ss}}_{G,F_v}$$

位于 $\mathrm{Bun}^e_{F,G}$中，其中 $\mathrm{Bun}^{e\,\mathrm{ss}}_{G}$ 是 [22]中定义的局部半稳定轨迹。它不依赖于局部化映射的选择，是一个小 v-栈，并且是 $\mathrm{Bun}^{e\,\mathrm{ss}}_{G\,F}$的一个开子栈。

可以使用 $B_e(G)_{\mathrm{basic}}$ 显式描述 $\mathrm{Bun}^e_{G,F}$ 的半稳定轨迹。

定理。*(1)* 子栈 $\mathrm{Bun}^{e\,1}_{G}$ 是开子栈，且同构于 $*/\underline{G(O_{F,\Sigma})}$。*(2)* 对于 $b \in B_e(G)$基本情形，子栈 $\mathrm{Bun}^{e\,b}_{G}$ 是开子栈，且同构于 $*/G_b(F)$。*(3)* 我们有代数栈的等式 $\mathrm{Bun}^e_{G,F} = \bigsqcup_{b\in B_e(G)\text{基本}} \mathrm{Bun}^{e\,b}_{G}$。

证明。对于第一个陈述，我们注意到，$\mathrm{Bun}^{e\,1}_{G}$ 经由 Λ的像由其在任意几何点处的取值决定，因此是平凡态射 0_P。根据命题 C.5，我们可以将包含 $\mathrm{Bun}^{e\,1}_{G} \hookrightarrow \mathrm{Bun}^{e\,0_P}_{G}$ 识别为包含 $\mathrm{Bun}^{1}_{G} \hookrightarrow \mathrm{Bun}_{G}$，于是结合命题 4.12]与定理 2.4即可得到所需结论。

第二部分是第一项陈述与命题 C.5 的推论。第二部分陈述中关于不相交性的部分可由该不相交性推出

即在利用 [21, 推论 4.13]对 $\mathrm{Bun}^{e}_{G,F}$ 进行分解之后，$\mathrm{Bun}^{b}_{G,F}$ 的不相交性。类似地，该并集为穷尽这一事实的验证可借助（作为代数栈的）分解来完成。

$$\mathrm{Bun}^{e,\mathrm{ss}}_{G,U} \xrightarrow{\sim} \bigsqcup_{\lambda\in\mathrm{Hom}_F(P_{\breve{\Sigma}},Z_G)} \mathrm{Bun}^{e,\mathrm{ss},\lambda}_{G,U}$$

由 [21, 推论 4.13] 导出，然后注意到识别 $\mathrm{Bun}^{e,\lambda}_{G,,U} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bun}^{e}_{G_b,U}$ 对于 $b \in B_e(G)_{\mathrm{basic}}$ 将 $\mathrm{Bun}^{e,\mathrm{ss},\lambda}_{G,,U}$ 识别为 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G_b,U}$。现在可以使用定理 4.11。□

References

[1] G. Andreychev, 《解析阿迪克空间上的伪凝聚复形与完美复形及向量丛》。 *arXiv e-prints*, 第 arXiv:2105.12591 页，2021 年 5 月，2105.12591。[2] G. Andreychev。《阿迪克 R¨空间的 K-理论》。 *arXiv e-prints*, 第 arXiv:2311.04394 页，2023 年 11 月，2311.04394。[3] J. Ansch¨utz。《Fargues-Fontaine 曲线上的约化群概形》。 *Math. Ann.*，374(3- 4):1219–1260，2019。[4] J. Ansch¨utz。《绝对 G 2023 Fargues-Fontaine 曲线上的 -丛》。 *Acta Arith.*，( ): – 。[5] E. Arasteh Rad 和 U. Hartl。《全局 G-Shtuka 的模叠的均匀化》。*national Mathematics Research Notices* 11 2019 *Inter* ，。

[6] E. Arasteh Rad 和 U. Hartl。《函数域上的 Langlands-Rapoport 猜想》。 *arXiv e-prints* 1605 01575, 2023, 1605 01575 ，第 arXiv: 页。

2023 年 12 月。。[7] D. Arinkin 和 D. Gaitsgory。《凝聚层的奇异支撑与几何朗兰兹猜想》。 *Selecta Math. (N.S.)*, 21(1):1–199，2015。[8] D. Arinkin、D. Gaitsgory、D. Kazhdan、S. Raskin、N. Rozenblyum 和 Y. Varshavsky。《具有受限变化的局部系统栈与具有幂零奇异支撑的几何朗兰兹理论》。 *arXiv e-prints*, 第 arXiv:2010.01906 页，2022 年 4 月，2010.01906。[9] D. Ben-Zvi、Y. Sakellaridis 和 A. Venkatesh。《相对 Langlands 对偶》。 *arXiv e-prints*, 第 arXiv:2409.04677 页，2024 年 9 月，2409.04677。[10] B. Bhatt。《代数化与 Tannaka 对偶》。 *Camb. J. Math.*，4(4):403–461，2016。[11] B. Bhatt 和 P. Scholze。《Witt 向量仿射格拉斯曼ian 的射影性》。 *Invent. Math.*，209 2 329( ): –423，2017。[12] M. Brion 和 S. Kumar。《 *Frobenius splitting methods in geometry and representation theory*》，第 *Progress in Mathematics* 卷第 231 卷。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2005。[13] M. Broshi。《戴德金概形上的 G-托ors》。 *J. Pure Appl. Algebra*，217(1):11–19，2013。[14] D. Clausen 和 P. Scholze。《凝聚数学与复几何》。 `https://people.mpim-bonn.mpg.de/scholze/Complex.pdf` 2022 ，。[15] P. Daniels、P. van Hoften、D. Kim 和 M. Zhang。《Igusa 叠与 Shimura 簇的上同调》。 *arXiv e-prints*, 第 arXiv:2408.01348 页，2024 年 8 月，2408.01348。[16] J.-F. Dat、D. Helm、R. Kurinczuk 和 G. Moss。《Langlands 参数的模空间》。

J. Eur. ，( ): – 。[17] A. J. de Jong。《光滑性、半稳定性与修改》。 *Math. Soc. (JEMS)* 27 5 1827 1927, 2025

Inst. Hautes Études Sci. Publ. ，( ): –93, 1996。[18] A. J. de Jong。《关于算术基本群的猜想》。 *Israel J. Math.*，121 84，2001 61: – 。[19] P. Dillery。《局部函数域上的刚性内形式》。 *Adv. Math.*，430 109204，100，2023：论文编号 。[20] P. Dillery。《全局函数域上的刚性内形式》。 *J. Inst. Math. Jussieu*，24(6):2181– 2256，2025。[21] P. Dillery。《函数域上的 Fargues 构造的一个整体版本》。即将出版，2026。[22] L. Fargues。《论 Kaletha gerbe，曲线与 Kottwitz 集合》。`imj-prg.fr/~laurent.fargues/Kaletha.pdf` 2022 `https://webusers.` ，。[23] L. Fargues。《局部 Langlands 对应的几何化：概述》。

Math. 83 51 *J. Math.* ，( ): – 。

Sci. Univ. Tokyo 32 2 157 240, 2025

[24] L. Fargues 和 J.-M. Fontaine。《曲线与向量丛：整体 z-阿迪克霍奇 理论》。*Astérisque*，(406):xiii +382，2018。附有 Pierre Colmez 撰写的序言。[25] L. Fargues 和 P. Scholze。《局部 Langlands 对应的几何化》。 *arXiv e-prints* 2102 13459， 2024, 2102 13459 ，第 arXiv: 页。2024 年 1 月。。[26] L. Fargues 和 P. Scholze。《朗兰兹纲领与曲线上的丛模空间》。载于 *The Langlands Program*，第 *Proc. Sympos. Pure Math.* 卷第 112.2 卷，第 125–165 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2025。[27] D. Gaitsgory。《论德容猜想》。 *Israel J. Math.*，157:155–191，2007。[28] D. Gaitsgory。《归纳相干层》。 *Mosc. Math. J.*，13(3):399–528，553，2013。[29] D. Gaitsgory 和 S. Raskin。《从特征零出发研究正特征下的几何朗兰兹》。载于 *Algebraic Geometry and the Langlands Program: a volume in honour of GérardLaumon*，Simons Symp. Springer，Cham。即将出版。[30] D. Gaitsgory 和 N. Rozenblyum。《 *A study in derived algebraic geometry. Vol. I. Correspondences and duality* 》，第 卷，。 221 *Mathematical Surveys and Monographs* 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017。[31] I. Gleason。《Scholze 的钻石范畴的特化映射》。 *Math. Ann.*，391(2):1611– 1679，2025。[32] I. Gleason、A. B. Ivanov 和 F. Zillinger。《Fargues–Fontaine 曲线上的亚纯向量丛》。 *arXiv e-prints*，第 arXiv:2307.00887 页，2025 年 2 月，2307.00887。[33] P. Hamacher 和 W. Kim。《函数域上的 G-等斜率结构》。 *Selecta Math. (N.S.)*，27 4 75，34，2021 ( ):论文编号 。[34] L. Hamann 和 N. Imai。《抛物丛模空间上的对偶化复形》。 *J. Reine* ，：– 。 *Angew. Math.* 825 139 183, 2025 [35] D. Hansen。《关于范畴化局部朗兰兹猜想的北京讲义》。 *arXiv e-prints*，第 arXiv:2310.04533 页，2023 年 10 月，2310.04533。[36] D. Hansen 和 K. S. Kedlaya。《Huber 环的层性判据》。 `https://kskedlaya.org/papers/criteria.pdf` 2025 ，。[37] U. Hartl 和 R. Pink。《穿孔单位圆盘上具有 Frobenius 结构的向量丛》。*Compos. Math.*，140(3):689–716，2004。[38] U. Hartl 和 E. Viehmann。《有界局部 G-shtuka 模空间的一般纤维》。 *J. Inst. Math. Jussieu*，22(2):799–878，2023。[39] B. Heuer。《 p-阿迪克非阿贝尔霍奇理论中的模空间》。 *arXiv e-prints*，第 arXiv:2207.13819 页，2024 年 2 月，2207.13819。[40] B. Heuer 和 D. Xu。《通过模叠研究曲线的 p -阿迪克非阿贝尔霍奇理论》。 *arXiv e-prints* 2402 01365， 2024, 2402 01365 ，第 arXiv: 页。2024 年 2 月。。[41] C. Heyer 和 L. Mann。《六函子形式体系与光滑表示》。 *arXiv e-prints*，第 arXiv:2410.13038 页，2024 年 10 月，2410.13038。[42] R. Huber。《形式概形与刚性解析簇的推广》。 *Math. Z.*，217 4 513 551，1994 ( ): – 。[43] R. Huber。《 *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*》。Aspects of Mathematics，E30。Friedr. Vieweg & Sohn，布伦瑞克，1996。[44] S. Iakovenko。《Kottwitz gerbe 的表示》。 *arXiv e-prints*，第 arXiv:2205.06510 页，2022 年 5 月，2205.06510。[45] A. B. Ivanov。《完美环路函子的弧下降与 p *J.* -阿迪克 *Reine Angew. Math.* 794 1 54, 2023 Deligne-Lusztig 空间》。 ，：– 。[46] K. S. Kedlaya。《层、代数栈与 shtuka》。载于 *Perfectoid spaces* 242 *Mathematical* ，卷数 ， *Surveys and Monographs* 58 205 2019 第 – 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，。[47] K. S. Kedlaya 和 R. Liu。《相对 p *Astérisque* 371 239, -阿迪克霍 2015 奇理论：基础》。 ，( ): 。[48] D. Kim。《从 Novikov 环下降有限投射模》。 *arXiv e-prints*，第 arXiv:2402.17852 页，2024 年 2 月，2402.17852。[49] R. Kottwitz。《所有局部域与整体域上的 B(G)》。 *arXiv e-prints*，第 arXiv:1401.5728 页，2014 年 1 月，1401.5728。[50] L. Lafforgue。《Drinfeld chtouca 与 Ramanujan-Petersson 猜想》。 *Astérisque*，(243):ii+329，1997。[51] V. Lafforgue。《约化群的 chtouca 与整体 Langlands 参数化》。*J. Amer. Math. Soc.*，31(3):719–891，2018。

[52] R. P. Langlands. 阿贝尔代数群的表示. 第 231–250 页. 1997. Olga Taussky-Todd：纪念文集. [53] S. D. Li-Huerta. 函数域上的 plectic猜想,
2021 https://arxiv.org/abs/ . .[54] S. D. 2106.05382
Li-Huerta. 函数域上的局部-整体相容性. *arXiv e-prints*, 第 arXiv:2301.09711 页, 2023 年 8 月, 2301.09711. [55] S. D. Li-Huerta. 关于近域与局部 Langlands 对应. *arXiv e-prints*, 第 arXiv:2407.07063 页, 2024 年 7 月, 2407.07063. [56] L. Mann. 刚性解析几何中的 p-进六函子形式体系. *arXiv e-prints*, 第 arXiv:2206.02022 页, 2022 年 6 月, 2206.02022.[57] T. Richarz. 仿射格拉斯曼流形与几何 Satake 等价.
Int. Math. Res. Not. , ( ): – . [58] T. *IMRN* 12 3717 3767, 2016
Richarz 和 J. Scholbach. shtuka 模叠的交叉动机.
Forum
Math. Sigma 8 8, 99, 2020 , :论文编号 e .

[59] J. E. Rodr´iguez Camargo. 刚性几何中的解析 de Rham 叠. *arXiv e-prints*, 第 arXiv:2401.07738 页, 2024 年 1 月, 2401.07738.[60] P. Scholze. Lubin-Tate 塔的
p *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* -进上同调. , ( ): – *(4)* 51 4 811 863, 2018
. 附有 Michael Rapoport 撰写的附录 . [61] P. Scholze. 凝聚数学讲义. https://people.mpim-bonn.mpg.de/ scholze/Condensed.pdf 2019 , . [62] P.

Scholze. 解析几何讲义.
https://people.mpim-bonn.mpg.de/scholze/ Analytic.pdf 2020 , . [63] P.

Scholze. 钻石的 étale 上同调.
arXiv e-prints 1709 07343, 2022, , arXiv 页面： . 1709 07343
1 月 . .[64] P. Scholze. 六函子形式主义.
https://people.mpim-bonn.mpg.de/scholze/ SixFunctors.pdf 2022 , . [65] P.

Scholze. Berkovich动机. *arXiv e-prints*, arXiv 页面：2412.03382, 2025 年 11 月, 2412.03382. [66] P. Scholze. 局部朗兰兹对应的几何化，动机化版本. *arXiv e-prints*, arXiv 页面：2501.07944, 2025 年 1 月, 2501.07944.[67] P. Scholze 和 J. Weinstein.
Berkeley Lectures on p-adic Geometry 207 *Annals* , 第 卷 .
of Mathematics Studies 2020
Princeton University Press, Princeton, NJ, . [68] Stacks Project 作者群. Stacks Project.
http://stacks.math.columbia.edu, 2024. [69] Y. Varshavsky. 主
F 10 1 131 166, -丛的模空间.
2004
Selecta Math. (N.S.), ( ): – .[70] Q. Wang. 相对 GAGA 定理及其在解析映射叠中的应用. *arXiv e-prints*, arXiv 页面：2601.12299, 2026 年 1 月, 2601.12299.[71] C. Xue. shtuka 代数栈的上同调层的光滑性. 载于 *Algebraic Geometry and the Langlands Program: a volume in honour of Gérard Laumon* , Simons

Symp. Springer, Cham. 即将出版.[72] M. Zhang. PEL 型 Igusa 叠与 Shimura 簇的
p *arXiv* -进几何. , *e-prints* 2309 05152, 2023, 2309 05152
arXiv 页面： . 9 月 . .[73] X. Zhu. Langlands 参数叠上的凝聚层. 载于 *The Langlands Program*, 第 112.2 卷 *Proc. Sympos. Pure Math.*, 第 39–123 页. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2025.[74] X. Zhu. 温和范畴局部朗兰兹对应. *arXiv e-prints*, arXiv 页面：2504.07482, 2025 年 4 月, 2504.07482.[75] K. Zou. 环面上的 Fargues 猜想的范畴形式. *arXiv e-prints*, arXiv 页面：2202.13238, 2024 年 8 月, 2202.13238.

Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology,
77 MassachusettsAvenue, Cambridge, MA 02139*Email address*: sdlh@mit.edu