arXiv:2602.04988v1 [math.NA] 4 Feb 2026

基于简化传输条件的非相对论区域非线性 Klein-Gordon 方程一致准确多尺度时间积分器

鲍威祖和刘草怡

Abstract. 我们针对带有无量纲参数 $\varepsilon \in (0,1]$ （与光速成反比）的非线性 Klein–戈登方程（NKGE），提出一种新颖且简化的多尺度时间积分傅里叶伪谱（MTI-FP）方法，并证明该方法在非相对论区域内具有一致的一阶时间精度，即 $0 < \varepsilon \ll 1$。在此区域内，NKGE 的解在时间上高度振荡，其波长为 $O(\varepsilon^2)$，这给设计一致准确的数值方法带来了巨大困难。MTI-FP 方法基于：（i）在每个时间区间内，采用简化传输条件对 NKGE 按频率进行多尺度分解；（ii）采用指数波积分器进行时间离散，并采用傅里叶伪谱方法进行空间离散。通过调整能量方法并结合数学归纳法，我们在 H^1-范数下得到两个误差界，分别对应 $O(h^{m_0} + \tau^2/\varepsilon^2)$ 和 $O(h^{m_0} + \tau + \varepsilon^2)$，其中网格尺寸为 h、时间步长为 τ，且 m_0 为依赖于解的正则性的整数。这立即推出关于 $\varepsilon \in (0,1]$ 的一致准确误差界 $O(h^{m_0} + \tau)$。此外，通过结合每个时间区间内的多尺度分解，对微观变量进行线性插值，我们得到任意时刻 $t \geq 0$ 的一致准确数值解。因此，根据香农采样理论，所提出的 MTI-FP 方法具有时间超分辨率性质，即使时间步长远大于 $O(\varepsilon^2)$ 波长，也能得到准确的数值解。文中给出了大量数值结果，以验证误差界并展示该方法的时间超分辨率。最后，我们将所提出的 MTI-FP 方法用于数值研究非相对论区域内 NKGE 收敛到不同极限模型的收敛速率。

1. Introduction

考虑 d 维（$d = 1$、2、3）中带三次非线性的无量纲非线性 Klein–戈登方程（NKGE） [3, 6, 11, 27, 37]

$$\varepsilon^2 \partial_{tt} u(\mathbf{x},t) - \Delta u(\mathbf{x},t) + \frac{1}{\varepsilon^2} u(\mathbf{x},t) + \lambda u(\mathbf{x},t)^3 = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \tag{1.1a}$$

$$u(\mathbf{x},0) = \phi_1(\mathbf{x}), \quad \partial_t u(\mathbf{x},0) = \frac{1}{\varepsilon^2}\phi_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{1.1b}$$

其中，t 是时间，$\mathbf{x}$ 是空间变量，$u := u(\mathbf{x}\ t)$ 是实值标量场，$\lambda \in \mathbb{R}$ 是给定常数，$0 < \varepsilon \leq 1$ 是一个无量纲参数，与光速成反比

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：65M15、65M70、81Q05。

Key words and phrases. 非线性 Klein–Gordon 方程，非相对论区域，多尺度分解，传递条件，一致准确。第一作者的工作部分得到了新加坡教育部 AcRF 一级资助 A-8003584-00-00 的支持。

，而 $\phi_1(\mathbf{x})$和 $\phi_2(\mathbf{x})$是两个给定的实值初始数据，它们与 ε无关。

非线性 Klein–Gordon 方程 (1.1) 被称为非线性 Schr¨odinger 方程 [28, 30] 的相对论扩展，具有广泛的应用 [13, 34, 35], ，可用于描述量子场中无自旋粒子的动力学 [29, 36] ，并作为宇宙学中暗物质或黑洞蒸发问题的模型 [1, 2, 17]。它具有时间对称性并且能量守恒 [6, 11, 28, 34], ，即对于 $t \geq 0$

$$
\begin{aligned}
E(t) &:= \int_{\mathbb{R}^d} \left[\varepsilon^2 |\partial_t u(\mathbf{x},t)|^2 + |\nabla u(\mathbf{x},t)|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}|u(\mathbf{x},t)|^2 + \frac{\lambda}{2}|u(\mathbf{x},t)|^4 \right] d\mathbf{x} \\
&\equiv \int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{1}{\varepsilon^2}|\phi_2(\mathbf{x})|^2 + |\nabla \phi_1(\mathbf{x})|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}|\phi_1(\mathbf{x})|^2 + \frac{\lambda}{2}|\phi_1(\mathbf{x})|^4 \right] d\mathbf{x} := E(0). \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

对于固定的 $\varepsilon = O(1)$，例如 $\varepsilon = 1$，非线性 Klein–Gordon 方程已在解析和数值方面得到充分研究；参见 [8, 13, 16, 19, 25, 27, 32, 34, 39, 42] 及其中的参考文献。

相反，当 $0 < \varepsilon \ll 1$时，即在非相对论区域，由于能量 $E(t) = O(\varepsilon^{-2})$在 (1.2) 中随着 $\varepsilon \to 0$而变得无界，非线性 Klein–Gordon 方程 (1.1) 在 $\varepsilon \to 0$时是一个奇异极限问题。关于这一非相对论极限问题，已有文献从渐近和解析角度进行了充分研究 [28, 30, 33, 41]。事实上，当 $0 < \varepsilon \ll 1$时，非线性 Klein–Gordon 方程 (1.1) 的解可以分解为[28, 30]

$$
u(\mathbf{x},t) = e^{it/\varepsilon^2} v(\mathbf{x},t) + e^{-it/\varepsilon^2} \overline{v(\mathbf{x},t)} + r(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t \geq 0, \qquad (1.3)
$$

其中， $i = \sqrt{-1}$ 为复数单位， $\bar{f}$ 表示f的复共轭； $v := v(\mathbf{x}\ t)$ 满足非线性薛定谔方程（NLSE）或带波算子的非线性薛定谔方程（NLSW），后者作为极限模型；余项为 $r := r(\mathbf{x}\ t) = O(\varepsilon^2)$ [5, 28, 33, 41]。基于这些结果，显然，在非相对论区域内，非线性 Klein–Gordon 方程（1.1）的解在时间上高度振荡，具有 $O(\varepsilon^2)$-波长，这给设计和分析高效、准确且对 $\varepsilon \in (0, 1]$, 一致准确的数值方法带来了巨大挑战，尤其是在 $0 < \varepsilon \ll 1$ 的非相对论区域内。

过去十年间，人们投入大量精力分析现有数值方法，并为非相对论区域中的 NKGE (1.1) 提出新的、一致准确的数值方法，尤其关注其误差界如何显式依赖网格尺寸 h 、时间步长 τ 以及小参数 ε。这些误差界可以表明，在非相对论区域中，不同 NKGE (1.1) 数值方法对空间和时间的分辨率（或网格划分策略）有何要求。事实上，不同数值方法各有优缺点。当 $\varepsilon = O(1)$ 时，经典有限差分时域（FDTD）方法 [6, 11, 19] 表现很好；但在非相对论区域中，它们要求采用 $h = O(1)$ 和 $\tau = O(\varepsilon^3)$ [6] 的网格划分策略，因此按照香农采样理论，它们属于时间欠分辨方法，也就是说，当 $0 < \varepsilon \ll 1$ 时，每个时间波需要 $O(\varepsilon^{-1}) \gg 1$ 个网格点来捕捉。极限积分器（LIs） [21] 在 $0 < \varepsilon \ll 1$ 时表现良好，但当 $\varepsilon = O(1)$ 时，它们无法以 $O(1)$ 阶误差收敛。指数波积分器（EWI） [6, 11, 42] 和时间分裂方法 [11, 18] 在$\varepsilon = O(1)$ 时都表现很好；在非相对论区域中，它们要求采用 $h = O(1)$ 和 $\tau = O(\varepsilon^2)$ 的网格划分策略，因此按照香农采样理论，它们属于时间最优分辨方法，也就是说，当 $0 < \varepsilon \ll 1$ 时，每个时间波需要 $O(1)$ 个网格点来捕捉

当 $0 < \varepsilon \ll 1$ 时，每个时间波需要这些网格点来捕捉。事实上，上述所有数值方法对于 NKGE (1.1) 而言，关于$\varepsilon \in (0, 1]$，都是非一致准确的数值方法。近年来，人们提出并分析了若干一致准确的数值方法，包括多尺度时间积分器（MTI）[5, 7], 、双尺度公式（TSF） [15] 方法、多重旋转组合（MRC）[31] 方法，以及一致精度低正则性积分器（UALRI） [14]。它们在非相对论区域中具有相同的网格划分策略，即 $h = O(1)$ 和 $\tau = O(1)$，因此按照香农采样理论，它们属于时间超分辨方法；也就是说，即使时间步长远大于 $O(\varepsilon^2)$处的时间波长，也能获得准确的解!

本文的主要目的是，通过在每个时间区间内对非线性 Klein–Gordon 方程（NKGE）按频率进行多尺度分解，并在每个时间步采用简化传输条件，为 NKGE（1.1）提出一种新的简化多尺度时间积分傅里叶伪谱（MTI-FP）方法。我们采用两种不同的分析技术，即能量方法和数学归纳法，分别得到 H^1-范数下在 $O(h^{m_0} + \tau^2/\varepsilon^2)$ 和 $O(h^{m_0} + \tau + \varepsilon^2)$ 处的两个误差界，其中 m_0 是依赖于解的正则性的整数。根据这两个相互独立的误差界，我们可以立即建立关于 $\varepsilon \in (0, 1]$, 的 $O(h^{m_0} + \tau)$ 一致精确误差界，这意味着所提出的 MTI-FP 方法具有时间超分辨率性质。与文献中的 MTI 方法相比 [5, 7], , 所提出的 MTI-FP 方法有三大优势：（i）数值格式大幅简化，因此实际计算中的计算成本显著降低；（ii）在获得相同的一阶时间一致误差界时，正则性要求显著降低；（iii）其空间精度达到给定解正则性下的最优水平。此外，在每个时间区间内，对多尺度分解中的微观变量进行线性插值，即对（1.3）中的 v 和 r 进行线性插值，可在几乎不增加计算成本的情况下，得到任意时刻 $t \geq 0$ 的一致准确解近似。利用几乎不增加计算成本的后处理，在任意时刻 $t \geq 0$ 构造数值解，这一方法仅适用于 MTI-FP 方法，而不适用于文献中的其他一致准确数值方法，例如双尺度公式方法（TFS 方法）、多重旋转组合（MRC）方法和一致精度低正则性积分器（UALRI）。

本文结构安排如下。第 2 节介绍带有简化传输条件的非线性 Klein–Gordon 方程 (1.1) 的多尺度分解。第 3 节提出相应的 MTI-FP 方法，并在第 4 节建立其严格的误差估计。第 5 节给出一种多尺度插值，第 6 节报告数值结果。最后，第 7 节给出一些结论。全文采用标准的 Sobolev空间及其对应范数，用 c.c. 表示其前一项的复共轭，并用 $A \lesssim B$ 表示存在一个通用常数 $C > 0$，其独立于 ε、 h 和 τ, 使得 $|A| \leq CB$。

2. Multiscale decompositions by amplitude and/or frequency

本节中，我们将介绍 NKGE (1.1) 的解u(x t) 在 $[0, T]$ 上的不同多尺度分解。

将试探形式(1.3)代入 NKGE (1.1)，经过一些简单的计算，可得以下方程

$$
\begin{aligned}
0 =&\varepsilon^2\partial_{tt}u(\mathbf{x},t) - \Delta u(\mathbf{x},t) + \frac{1}{\varepsilon^2}u(\mathbf{x},t) + \lambda u(\mathbf{x},t)^3 \\
=&e^{it/\varepsilon^2}\left[\varepsilon^2\partial_{tt}v(\mathbf{x},t) + 2i\partial_t v(\mathbf{x},t) - \Delta v(\mathbf{x},t) + 3\lambda|v(\mathbf{x},t)|^2 v(\mathbf{x},t)\right] + \text{c.c.} \\
&+ \varepsilon^2\partial_{tt}r(\mathbf{x},t) - \Delta r(\mathbf{x},t) + \frac{1}{\varepsilon^2}r(\mathbf{x},t) + \lambda e^{3it/\varepsilon^2}v(\mathbf{x},t)^3 + \lambda e^{-3it/\varepsilon^2}\overline{v(\mathbf{x},t)}^3 \\
&+ f(v(\mathbf{x},t), r(\mathbf{x},t), t),
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

with

$$
f(v,r,t) := \lambda r\left[r^2 + 3r\left(e^{it/\varepsilon^2}v + e^{-it/\varepsilon^2}\overline{v}\right) + 3\left(e^{it/\varepsilon^2}v + e^{-it/\varepsilon^2}\overline{v}\right)^2\right], \tag{2.2}
$$

以及以下初始条件

$$
\phi_1(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x},0) + \overline{v(\mathbf{x},0)} + r(\mathbf{x},0), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \tag{2.3a}
$$

$$
\frac{1}{\varepsilon^2}\phi_2(\mathbf{x}) = \frac{i}{\varepsilon^2}\left(v(\mathbf{x},0) - \overline{v(\mathbf{x},0)}\right) + \partial_t v(\mathbf{x},0) + \overline{\partial_t v(\mathbf{x},0)} + \partial_t r(\mathbf{x},0). \tag{2.3b}
$$

为了使余项 r 足够小，例如 $r = O(\varepsilon^2)$，我们要求

$$
r(\mathbf{x},0)\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad v(\mathbf{x},0) + \overline{v(\mathbf{x},0)} = \phi_1(\mathbf{x}) = O(1), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d. \tag{2.4}
$$

由于当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时（2.3b）中的尺度分离，我们要求

$$
v(\mathbf{x},0) - \overline{v(\mathbf{x},0)} = -i\phi_2(\mathbf{x}), \quad \partial_t v(\mathbf{x},0) + \overline{\partial_t v(\mathbf{x},0)} + \partial_t r(\mathbf{x},0) = 0, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d. \tag{2.5}
$$

结合（2.4）和（2.5），我们得到

$$
v(\mathbf{x},0) = \frac{1}{2}\left[\phi_1(\mathbf{x}) - i\phi_2(\mathbf{x})\right] := v_0(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \tag{2.6}
$$

$$
r(\mathbf{x},0)\equiv 0, \quad \partial_t r(\mathbf{x},0) = -\partial_t v(\mathbf{x},0) - \partial_t\overline{v(\mathbf{x},0)}. \tag{2.7}
$$

通过采用振幅多尺度分解（ O）和频率多尺度分解（ ε^{-2} ）（见（2.1）），我们引入两种不同的分解及相应的极限模型。

注意到（2.6）–（2.7），我们要求 v 满足以下带有初始条件（2.6）的非线性薛定谔方程（NLSE）

$$
2i\partial_t v(\mathbf{x},t) - \Delta v(\mathbf{x},t) + 3\lambda|v(\mathbf{x},t)|^2 v(\mathbf{x},t) = 0, \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \quad t>0. \tag{2.8}
$$

结合（2.1）和（2.8），并注意到（2.6）–（2.7）及带有 $t=0$ 的（2.8），可得余项 r 满足带有源项和小初始数据的非线性克莱因–戈登方程：

$$
\varepsilon^2\partial_{tt}r - \Delta r + \frac{1}{\varepsilon^2}r + f(v,r,t) + \left[\lambda e^{3it/\varepsilon^2}v^3 + \varepsilon^2 e^{it/\varepsilon^2}\partial_{tt}v + \text{c.c.}\right] = 0, \tag{2.9a}
$$

$$
r(\mathbf{x},0)\equiv 0, \quad \partial_t r(\mathbf{x},0) = \frac{1}{8}\left[4\Delta\phi_2(\mathbf{x}) - 3\lambda(\phi_1(\mathbf{x})^2 + \phi_2(\mathbf{x})^2)\phi_2(\mathbf{x})\right]. \tag{2.9b}
$$

容易验证，若 v 和 r 分别是满足 (2.6) 和 (2.9) 的方程 (2.8) 的解，则 (1.3) 中的 u 是非线性 Klein–Gordon 方程 (1.1) 的解。因此，带有 (2.6) 的 NLSE (2.8) 是非相对论区域内 NKGE (1.1) 的极限模型。关于 NKGE (1.1) 收敛到带有 (2.6) 的 NLSE (2.8)，以及相对于 ε 的相应二次收敛率，已有研究从解析和

数值方面进行了探讨。我们在此指出，由于 (2.9) 中的共振项 $e^{it/\varepsilon^2}\partial_{tt}v$，其解 $\|r(\cdot,t)\|_{L^\infty}$ 的振幅可能随时间 [26, 28, 30]，线性甚至二次增长，这可能会给采用上述多尺度分解（即结合带有 (2.6) 的 NLSE (2.8) 和 NKGE (2.9)）来设计原始 NKGE (1.1) 的一致准确数值方法带来稳定性和效率方面的问题。

为克服上述困难，针对非线性 Klein–Gordon 方程 (1.1) 的另一种按频率进行的多尺度分解如下： v 满足以下带波算子的非线性薛定谔方程 (NLSW)：

$$\varepsilon^2\partial_{tt}v(\mathbf{x},t)+2i\partial_t v(\mathbf{x},t)-\Delta v(\mathbf{x},t)+3\lambda|v(\mathbf{x},t)|^2v(\mathbf{x},t)=0, \tag{2.10a}$$

$$v(\mathbf{x},0)=v_0(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\left[\phi_1(\mathbf{x})-i\phi_2(\mathbf{x})\right],\quad \partial_t v(\mathbf{x},0)=\gamma(\mathbf{x}), \tag{2.10b}$$

而余项 r 满足带源项和小初值的非线性克莱因-戈登方程：

$$\varepsilon^2\partial_{tt}r-\Delta r+\frac{1}{\varepsilon^2}r+f(v,r,t)+\left[\lambda e^{3it/\varepsilon^2}v^3+\text{c.c.}\right]=0, \tag{2.11a}$$

$$r(\mathbf{x},0)\equiv 0,\quad \partial_t r(\mathbf{x},0)=-\gamma(\mathbf{x})-\overline{\gamma(\mathbf{x})}, \tag{2.11b}$$

其中， γ(x) 是一个给定的复值函数，稍后将予以说明。同样，容易验证，若 v 和 r 分别是 NLSW (2.10) 和非线性 Klein–Gordon 方程 (2.11) 的解，则 (1.3) 中的 u 是非线性 Klein–Gordon 方程 (1.1) 的解。因此，当 $\varepsilon\to 0$时，NLSW (2.10) 是非线性 Klein–Gordon 方程 (1.1) 的半极限模型。关于 ε，从非线性 Klein–Gordon 方程 (1.1) 到 NLSW (2.10) 的全局时间二次收敛已在文献 [5, 26, 28, 30] 中通过解析和数值方法进行了研究。

按频率进行的多尺度分解 (2.10) 和 (2.11) 中可以使用不同的 γ(x)。在 [5] 中， γ(x) 被取为非线性薛定谔波方程的良备初值，即通过在 (2.10a) 中令 $t=0$ 和 $\varepsilon\to 0$ 得到，形式如下：

$$\begin{aligned}\gamma(\mathbf{x})&=\frac{i}{2}\left[-\Delta v(\mathbf{x},0)+3\lambda|v(\mathbf{x},0)|^2v(\mathbf{x},0)\right]\\&=\frac{i}{2}\left[-\Delta v_0(\mathbf{x})+3\lambda|v_0(\mathbf{x})|^2v_0(\mathbf{x})\right]:=v_1(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d.\end{aligned} \tag{2.12}$$

基于非线性薛定谔波方程的这一良备初值，形式上可以证明v(x t)、 $\partial_t v$(x t)和 $\partial_{tt}v$(x t)关于 $\varepsilon\in(0,1]$ [5]一致有界。基于按频率进行的多尺度分解(2.10)和(2.11)中对 γ(x)的这一选取，文献 [5]提出并分析了一种多尺度时间积分法傅里叶拟谱（ MTI-FP）方法。另一方面，我们可以取最简化的初始条件为 γ(x) $\equiv 0$，这立即意味着(2.10)和(2.11)中 $\partial_t v$(x, 0) $=\partial_t r$(x, 0) $\equiv 0$ ，即除 v(x, 0)外， v 和 r 的初始条件均取为齐次。基于这一最简化的初始条件，我们将针对非线性 Klein–Gordon 方程(1.1)提出一种新的简化的 MTI-FP 方法，并建立其关于 $\varepsilon\in(0,1]$在时间上的一致一阶精度。与文献 [5], 中的 MTI-FP 方法相比，由于采用了齐次初始条件，所提出的 MTI-FP 方法得到显著简化，从而在实际计算中大大降低了计算成本，并且为了获得相同的时间一致一阶误差界，正则性要求也显著减弱。

3. A uniformly accurate MTI-FP method

在本节中，我们基于带有 $\gamma(x) \equiv 0$的按频率进行的多尺度分解(2.10)和(2.11)，针对非线性 Klein–Gordon 方程(1.1)提出一种多尺度时间积分法傅里叶拟谱（MTI-FP）方法。

为简化记号且不失一般性，我们仅介绍一维（1D）情形下的 MTI-FP 方法。通过张量积可直接推广至高维。按照文献中的做法， [5, 6, 19, 21], 通常将带有 $d = 1$ 的非线性 Klein–Gordon 方程（1.1）截断到有界区间 $\Omega = (a, b)$ 上（$|a|$ 和b 取足够大，使得截断误差可以忽略），并施加周期边界条件

$$\varepsilon^2 \partial_{tt} u(x,t) - \partial_{xx} u(x,t) + \frac{1}{\varepsilon^2} u(x,t) + \lambda u(x,t)^3 = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{3.1a}$$

$$u(x,0) = \phi_1(x), \quad \partial_t u(x,0) = \frac{1}{\varepsilon^2}\phi_2(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{3.1b}$$

$$u(a,t) = u(b,t), \qquad \partial_x u(a,t) = \partial_x u(b,t), \qquad t \geq 0. \tag{3.1c}$$

3.1. 基于简化传输条件的多尺度分解。设 $\tau = \Delta t > 0$ 为时间步长，并将时间层记为 $t_n = n\tau$ ，其中$n = 0, 1, \ldots\ldots$。首先，在给定 $t = t_n$ 处的初始数据后，我们对时间区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 上方程（3.1）的解进行按频率的多尺度分解，得到

$$u(x,t_n) = \phi_1^n(x) = O(1), \qquad \partial_t u(x,t_n) = \frac{1}{\varepsilon^2}\phi_2^n(x) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right), \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{3.2}$$

与前几节类似，我们对区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 上方程 (3.1) 的解 $u(x,t) := u(x, t_n + s)$ 采用如下试探形式

$$u(x,t_n+s) = e^{is/\varepsilon^2} v^n(x,s) + e^{-is/\varepsilon^2}\overline{v^n(x,s)} + r^n(x,s), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad 0 \leq s \leq \tau. \tag{3.3}$$

于是，在区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 上，对 NKGE (3.1) 进行按频率的多尺度分解并施加简化传输条件，可得： $v^n := v^n(x,s)$ 满足如下带波算子的非线性薛定谔方程（NLSW），并具有简化传输条件：

$$\varepsilon^2 \partial_{ss} v^n(x,s) + 2i\partial_s v^n(x,s) - \partial_{xx} v^n(x,s) + 3\lambda |v^n(x,s)|^2 v^n(x,s) = 0, \tag{3.4a}$$

$$v^n(x,0) = \frac{1}{2}\left[\phi_1^n(x) - i\phi_2^n(x)\right], \quad \partial_s v^n(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{3.4b}$$

$$v^n(a,s) = v^n(b,s), \quad \partial_x v^n(a,s) = \partial_x v^n(b,s), \quad 0 \leq s \leq \tau, \tag{3.4c}$$

而余项 $r^n := r^n(x,s)$ 满足如下带源项和齐次初始数据的非线性克莱因–戈登方程：

$$\varepsilon^2 \partial_{ss} r^n - \partial_{xx} r^n + \frac{1}{\varepsilon^2} r^n + f(v^n, r^n, s) + \left[\lambda e^{3is/\varepsilon^2}(v^n)^3 + \text{c.c.}\right] = 0, \tag{3.5a}$$

$$r^n(x,0) = 0, \quad \partial_s r^n(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{3.5b}$$

$$r^n(a,s) = r^n(b,s), \quad \partial_x r^n(a,s) = \partial_x r^n(b,s), \quad 0 \leq s \leq \tau, \tag{3.5c}$$

其中， $f(v^n, r^n, s)$由式（2.2）给出。

3.2. 指数波积分器傅里叶伪谱全离散格式。设网格尺寸为 $h := (b-a)/N$，其中 N 为正偶整数，网格点为 $x_j := a + jh$，其中 $j = 0$、1、...、N。定义

$$X_N := \operatorname{span}\left\{ e^{i\mu_l(x-a)} \mid l = -\frac{N}{2}, ..., \frac{N}{2} - 1 \right\} \quad \text{with} \quad \mu_l := \frac{2\pi l}{b-a},$$

$$Y_N := \left\{ \mathbf{v} = (v_0, v_1, ..., v_N)^T \in \mathbb{C}^{N+1} \mid v_0 = v_N \right\} \text{ with } \|\mathbf{v}\|_{l^2} := \left(h \sum_{j=0}^{N-1} |v_j|^2 \right)^{1/2}.$$

对于 Ω 上的周期函数 $v(x)$ 和向量 $\mathbf{v} \in Y_N$，令 $P_N\colon L^2(\Omega) \to X_N$ 表示标准的 L^2 投影算子，并令 $I_N\colon C(\Omega) \to X_N$ 或 $Y_N \to X_N$ 表示三角插值算子，即，

$$(3.6)\quad (P_N v)(x) = \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \widehat{v}_l e^{i\mu_l(x-a)}, \quad (I_N \mathbf{v})(x) = \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \widetilde{\mathbf{v}}_l e^{i\mu_l(x-a)}, \quad a \le x \le b,$$

其中，$\widehat{v}_l$ 和 $\widetilde{\mathbf{v}}_l$ 分别是周期函数 $v(x)$ 和向量 $\mathbf{v}$ 的傅里叶变换系数和离散傅里叶变换系数，定义如下:

$$(3.7)\qquad \widehat{v}_l = \frac{1}{b-a} \int_a^b v(x) e^{-i\mu_l(x-a)} dx, \quad \widetilde{\mathbf{v}}_l = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} v_j e^{-i\mu_l(x_j-a)},$$

其中，对于周期函数 $v(x)$，$v_j := v(x_j)$，$j = 0$、1、.....、N。

为了对方程(3.4)和(3.5)进行数值离散，我们在时间方向采用指数波积分器 [6]，并在空间方向采用傅里叶谱/拟谱方法 [5, 12, 38]。在离散过程中，我们首先应用傅里叶谱方法对(3.4)和(3.5)进行离散。我们的目标是对$0 \le s \le \tau$求 $v_N^n(x,s)$ $r_N^n(x,s) \in X_N$，即

$$(3.8)\quad v_N^n(x,s) = \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \widehat{(v_N^n)}_l(s) e^{i\mu_l(x-a)}, \quad r_N^n(x,s) = \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \widehat{(r_N^n)}_l(s) e^{i\mu_l(x-a)},$$

使得(3.8)是非线性薛定谔波方程(3.4)与余项方程(3.5)的解。将精确解 v^n 和 r^n 展开为傅里叶级数

$$v^n(x,s) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{(v^n)}_l(s) e^{i\mu_l(x-a)}, \quad r^n(x,s) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{(r^n)}_l(s) e^{i\mu_l(x-a)}, \qquad 0 \le s \le \tau.$$

对(3.4)和(3.5)两边作傅里叶变换，并注意到 $e^{i\mu_l(x-a)}$的正交性，我们对 $l = -\frac{N}{2}$, ..., $\frac{N}{2} - 1$得到

$$(3.9)\qquad \varepsilon^2 \widehat{(v^n)}_l''(s) + 2i\widehat{(v^n)}_l'(s) + \mu_l^2 \widehat{(v^n)}_l(s) + \widehat{(g^n)}_l(s) = 0, \quad 0 < s \le \tau,$$

$$(3.10)\quad \varepsilon^2 \widehat{(r^n)}_l''(s) + \varepsilon^2 \omega_l^2 \widehat{(r^n)}_l(s) + e^{\frac{3is}{\varepsilon^2}} \widehat{(h^n)}_l(s) + e^{\frac{-3is}{\varepsilon^2}} \widehat{(\overline{h^n})}_l(s) + \widehat{(f^n)}_l(s) = 0,$$

其中 $\omega_l = \frac{1}{\varepsilon^2}\sqrt{1 + \varepsilon^2 \mu_l^2}$对于 $l = -\frac{N}{2}$, ..., $\frac{N}{2} - 1$, 且

$$(3.11)\qquad g^n := g(v^n(x,s)), \quad h^n := h(v^n(x,s)), \quad f^n := f(v^n(x,s), r^n(x,s), s),$$

with

$$(3.12)\qquad g(v^n) := 3\lambda |v^n|^2 v^n, \qquad h(v^n) := \lambda (v^n)^3.$$

注意到 (3.4) 和 (3.5) 中的初始数据，由杜哈梅尔原理可得

$$\widehat{(v^n)}_l(s) = a_l(s)\widehat{(v^n)}_l(0) - \int_0^s b_l(s-\theta)\widehat{(g^n)}_l(\theta)d\theta, \quad 0 \le s \le \tau, \tag{3.13}$$

$$\widehat{(r^n)}_l(s) = \int_0^s \frac{\sin(\omega_l(\theta-s))}{\varepsilon^2\omega_l}\left[e^{\frac{3i\theta}{\varepsilon^2}}\widehat{(h^n)}_l(\theta) + e^{\frac{-3i\theta}{\varepsilon^2}}\widehat{\overline{(h^n)}}_l(\theta) + \widehat{(f^n)}_l(\theta)\right]d\theta, \tag{3.14}$$

其中

$$\begin{cases} a_l(s) := \dfrac{\lambda_l^+ e^{is\lambda_l^-} - \lambda_l^- e^{is\lambda_l^+}}{\lambda_l^+ - \lambda_l^-}, \quad b_l(s) := i\dfrac{e^{is\lambda_l^+} - e^{is\lambda_l^-}}{\varepsilon^2(\lambda_l^- - \lambda_l^+)}, \quad 0 \le s \le \tau, \\ \lambda_l^\pm := -\dfrac{1}{\varepsilon^2}\left[1 \pm \sqrt{1+\varepsilon^2\mu_l^2}\right], \qquad l = -\dfrac{N}{2}, \ldots, \dfrac{N}{2} - 1. \end{cases} \tag{3.15}$$

然后对 (3.13)-(3.14) 关于 s 求导，可得

$$\widehat{(v^n)}_l'(s) = a_l'(s)\widehat{(v^n)}_l(0) - \int_0^s b_l'(s-\theta)\widehat{(g^n)}_l(\theta)d\theta, \quad 0 \le s \le \tau, \tag{3.16}$$

$$\widehat{(r^n)}_l'(s) = \int_0^s \frac{\cos(\omega_l(\theta-s))}{-\varepsilon^2}\left[e^{\frac{3i\theta}{\varepsilon^2}}\widehat{(h^n)}_l(\theta) + e^{\frac{-3i\theta}{\varepsilon^2}}\widehat{\overline{(h^n)}}_l(\theta) + \widehat{(f^n)}_l(\theta)\right]d\theta, \tag{3.17}$$

其中

$$a_l'(s) = i\lambda_l^+\lambda_l^- \frac{e^{is\lambda_l^-} - e^{is\lambda_l^+}}{\lambda_l^+ - \lambda_l^-}, \quad b_l'(s) = \frac{\lambda_l^+ e^{is\lambda_l^+} - \lambda_l^- e^{is\lambda_l^-}}{\varepsilon^2(\lambda_l^+ - \lambda_l^-)}, \quad 0 \le s \le \tau. \tag{3.18}$$

为了近似计算 (3.13)-(3.14) 和 (3.16)-(3.17) 中的积分，我们采用 (i) Gautschi 型求积 [7, 22, 23] 计算涉及 g^n 和 h^n的积分，以及 (ii) 梯形法则 [7, 22] 计算涉及 f^n的积分，例如，

$$\int_0^s b_l(s-\theta)\widehat{(g^n)}_l(\theta)d\theta \approx \int_0^s b_l(s-\theta)\left[\widehat{(g^n)}_l(0) + \theta\widehat{(g^n)}_l'(0)\right]d\theta,$$
$$\int_0^s \frac{\sin(\omega_l(\theta-s))}{\varepsilon^2\omega_l}\widehat{(f^n)}_l(\theta)d\theta \approx -s\frac{\sin(\omega_l s)}{2\varepsilon^2\omega_l}\widehat{(f^n)}_l(0).$$

因此，取 $s = \tau$，可得

$$\begin{aligned} \widehat{(v^n)}_l(\tau) &\approx a_l(\tau)\widehat{(v^n)}_l(0) - c_l(\tau)\widehat{(g^n)}_l(0), \\ \widehat{(v^n)}_l'(\tau) &\approx a_l'(\tau)\widehat{(v^n)}_l(0) - c_l'(\tau)\widehat{(g^n)}_l(0), \end{aligned} \tag{3.19}$$

and

$$\widehat{(r^n)}_l(\tau) \approx -p_l(\tau)\widehat{(h^n)}_l(0) - \overline{p_l}(\tau)\widehat{\overline{(h^n)}}_l(0), \tag{3.20a}$$

$$\widehat{(r^n)}_l'(\tau) \approx -p_l'(\tau)\widehat{(h^n)}_l(0) - \overline{p_l'}(\tau)\widehat{\overline{(h^n)}}_l(0) - \frac{\tau}{2\varepsilon^2}\widehat{(f^n)}_l(\tau), \tag{3.20b}$$

其中我们应用齐次传输条件 $\partial_s v^n(x, 0) = 0$，因此$\partial_s g^n|_{s=0} = \partial_s h^n|_{s=0} = 0$，并且

$$\begin{cases} c_l(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau b_l(\tau-\theta)d\theta, \qquad p_l(\tau) = \int_0^\tau \frac{\sin(\omega_l(\tau-\theta))}{\varepsilon^2\omega_l}e^{3i\theta/\varepsilon^2}d\theta, \\ c_l'(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau b_l'(\tau-\theta)d\theta, \qquad p_l'(\tau) = \int_0^\tau \frac{\cos(\omega_l(\tau-\theta))}{\varepsilon^2}e^{3i\theta/\varepsilon^2}d\theta. \end{cases} \tag{3.21}$$

结合 (3.8)、(3.19)-(3.20) 和多尺度分解 (3.3)，我们得到用于非线性 Klein–Gordon 方程 (3.1) 的多尺度时间积分法傅里叶谱（MTI-FS）方法，即

$$\widehat{(v_N^n)}_l(\tau) \approx a_l(\tau)\widehat{(v_N^n)}_l(0) - c_l(\tau)\widehat{(g_N^n)}_l(0), \tag{3.22a}$$

$$\widehat{(v_N^n)}_l'(\tau) \approx a_l'(\tau)\widehat{(v_N^n)}_l(0) - c_l'(\tau)\widehat{(g_N^n)}_l(0), \tag{3.22b}$$

$$\widehat{(r_N^n)}_l(\tau) \approx -p_l(\tau)\widehat{(h_N^n)}_l(0) - \overline{p_l}(\tau)\widehat{(\overline{h_N^n})}_l(0), \qquad l = -\frac{N}{2}, ..., \frac{N}{2} - 1, \tag{3.22c}$$

$$\widehat{(r_N^n)}_l'(\tau) \approx -p_l'(\tau)\widehat{(h_N^n)}_l(0) - \overline{p_l'}(\tau)\widehat{(\overline{h_N^n})}_l(0) - \frac{\tau}{2\varepsilon^2}\widehat{(f_N^n)}_l(\tau), \tag{3.22d}$$

其中 $g_N^n := g(v_N^n(x,s))$、$h_N^n := h(v_N^n(x,s))$ 和 $f_N^n := f(v_N^n(x,s)\ r_N^n(x,s)\ s)$。

在实际应用中，(3.7) 中的积分通常通过数值求积 [12, 22, 38] 进行近似。设 u_j^n 和 $\dot{u}_j^n$ 分别是 $u(x_j,t_n)$ 和 $\partial_t u(x_j,t_n)$ 的近似值，并设 v^n、$_j{}^1$、$\dot{v}^n$、$_j{}^1$、r^n、$_j{}^1$、$\dot{r}^n$、$_j{}^1$ 分别是 $v^n(x_j,\tau)$、$\partial_s v^n(x_j,\tau)$、$r^n(x_j,\tau)$ 和 $\partial_s r^n(x_j,\tau)$ 的近似值，其中 $n = 0$、1、.. 以及 $j = 0$、1、...、N。记 $\mathbf{u}^n = (u_0^n, u_1^n, \ldots, u_N^n)^T \in Y_N$，$\dot{\mathbf{u}}^n = (\dot{u}_0^n, \dot{u}_1^n, \ldots, \dot{u}_N^n)^T \in Y_N$，$\mathbf{v}^{n,1} = (v^n{}_{,1\,0}, v^n{}_{,1\,1}, \ldots v^n{}_{,N}{}^1)^T \in Y_N$，$\dot{\mathbf{v}}^{n,1} = (\dot{v}^n{}_{,1\,0}, \dot{v}^n{}_{,1\,1}, \ldots, \dot{v}^n{}_{,N}{}^1)^T \in Y_N$，$\mathbf{r}^{n,1} = (r^n{}_{,1\,0}, r^n{}_{,1\,1}, \ldots, r^n{}_{,N}{}^1)^T \in Y_N$ 和 $\dot{\mathbf{r}}^{n,1} = (\dot{r}^n{}_{,1\,0}, \dot{r}^n{}_{,1\,1}, \ldots, \dot{r}^n{}_{,N}{}^1)^T \in Y_N$。那么，针对非线性 Klein–Gordon 方程 (3.1) 的多尺度时间积分傅里叶伪谱（MTI-FP）方法可写为

$$u_j^{n+1} = e^{i\tau/\varepsilon^2} v_j^{n,1} + e^{-i\tau/\varepsilon^2}\overline{v_j^{n,1}} + r_j^{n,1}, \quad j = 0, 1, ..., N, \tag{3.23a}$$

$$\dot{u}_j^{n+1} = e^{i\tau/\varepsilon^2}\left(\dot{v}_j^{n,1} + \frac{i}{\varepsilon^2}v_j^{n,1}\right) + e^{-i\tau/\varepsilon^2}\left(\overline{\dot{v}_j^{n,1}} - \frac{i}{\varepsilon^2}\overline{v_j^{n,1}}\right) + \dot{r}_j^{n,1}, \tag{3.23b}$$

其中

$$v_j^{n,1} = \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \widetilde{(\mathbf{v}^{n,1})}_l e^{i\mu_l(x_j-a)}, \qquad \dot{v}_j^{n,1} = \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \widetilde{(\dot{\mathbf{v}}^{n,1})}_l e^{i\mu_l(x_j-a)}, \tag{3.24a}$$

$$r_j^{n,1} = \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \widetilde{(\mathbf{r}^{n,1})}_l e^{i\mu_l(x_j-a)}, \qquad \dot{r}_j^{n,1} = \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \widetilde{(\dot{\mathbf{r}}^{n,1})}_l e^{i\mu_l(x_j-a)}, \tag{3.24b}$$

其中傅里叶系数由下式给出

$$\widetilde{(\mathbf{v}^{n,1})}_l = a_l(\tau)\widetilde{(\mathbf{v}^{n,0})}_l - c_l(\tau)\widetilde{(\mathbf{g}^{n,0})}_l, \ \widetilde{(\dot{\mathbf{v}}^{n,1})}_l = a_l'(\tau)\widetilde{(\mathbf{v}^{n,0})}_l - c_l'(\tau)\widetilde{(\mathbf{g}^{n,0})}_l, \tag{3.25a}$$

$$\widetilde{(\mathbf{r}^{n,1})}_l = -p_l(\tau)\widetilde{(\mathbf{h}^{n,0})}_l - \overline{p_l}(\tau)\widetilde{(\overline{\mathbf{h}^{n,0}})}_l, \qquad l = -\frac{N}{2}, ..., \frac{N}{2} - 1, \tag{3.25b}$$

$$\widetilde{(\dot{\mathbf{r}}^{n,1})}_l = -p_l'(\tau)\widetilde{(\mathbf{h}^{n,0})}_l - \overline{p_l'}(\tau)\widetilde{(\overline{\mathbf{h}^{n,0}})}_l - \frac{\tau}{2\varepsilon^2}\widetilde{(\mathbf{f}^{n,1})}_l, \tag{3.25c}$$

and

$$\mathbf{v}^{n,0} = (v_0^{n,0}, v_1^{n,0}, \ldots, v_N^{n,0})^T \in Y_N, \quad \mathbf{g}^{n,0} = (g_0^{n,0}, g_1^{n,0}, \ldots, g_N^{n,0})^T \in Y_N, \tag{3.26a}$$

$$\mathbf{h}^{n,0} = (h_0^{n,0}, h_1^{n,0}, \ldots, h_N^{n,0})^T \in Y_N, \quad \mathbf{f}^{n,1} = (f_0^{n,1}, f_1^{n,1}, \ldots, f_N^{n,1})^T \in Y_N, \tag{3.26b}$$

where

$$v_j^{n,0} = \frac{1}{2}\left(u_j^n - i\varepsilon^2\dot{u}_j^n\right), \qquad j = 0, 1, ..., N, \qquad n \geq 0, \tag{3.27a}$$

$$g_j^{n,0} = g(v_j^{n,0}), \quad h_j^{n,0} = h(v_j^{n,0}), \quad f_j^{n,1} = f(v_j^{n,1}, r_j^{n,1}, \tau). \tag{3.27b}$$

初始数据给定为

$$u_j^0 = \phi_1(x_j), \qquad \dot{u}_j^0 = \frac{1}{\varepsilon^2}\phi_2(x_j), \qquad j = 0, 1, \ldots, N. \tag{3.28}$$

在实际计算中，上述用于(3.1)的 MTI-FP 方法通过快速傅里叶变换(FFT)实现。因此，该方法完全显式、精确且效率很高，其内存成本为 $O(N)$，每个时间步长的计算成本为 $O(N\log N)$。

备注 1. 与采用良备初值 *[5]*,的 MTI-FP 方法相比， γ齐次传输条件 $x(\equiv 0)$的选择大大简化了格式及相应的误差分析。在实际计算中，它提高了计算效率并缩短了运行时间。

4. A uniformly accurate error bound

本节将通过两种不同的技术，为 MTI-FP (3.23)-(3.28) 建立两个相互独立的最优误差界，这将立即推出关于 $\varepsilon \in (0, 1]$的一致精确误差界。

4.1. 主要结果。设 $0 < T < T^*$，其中 T^* 是问题(3.1)的解 $u(x, t)$的最大存在时间。我们对解 $u(x, t)$作出如下假设(A)，即存在一个整数 $m_0 \geq 4$ 使得

$$\text{(A)} \quad u \in C^1\left([0, T]; H_p^{m_0+1}(\Omega)\right), \quad \|u\|_{L^\infty([0,T];H^{m_0+1})} + \varepsilon^2 \|\partial_t u\|_{L^\infty([0,T];H^{m_0+1})} \lesssim 1,$$

其中 $H_p^m(\Omega) = \left\{\phi(x) \in H^m(\Omega) \mid \phi^{(k)}(a) = \phi^{(k)}(b) \quad k = 0, 1, \ldots, m-1\right\}$。

我们引入以下记号

$$C_0 = \max_{0<\varepsilon\leq 1} \left\{ \|u\|_{L^\infty([0,T];H^{m_0+1})}, \varepsilon^2 \|\partial_t u\|_{L^\infty([0,T];H^{m_0+1})} \right\}, \tag{4.1}$$

并将误差函数定义为

$$e^n(x) := u(x, t_n) - (I_N \mathbf{u}^n)(x), \quad \dot{e}^n(x) := \partial_t u(x, t_n) - (I_N \dot{\mathbf{u}}^n)(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{4.2}$$

其中，$\mathbf{u}^n$ 和 $\dot{\mathbf{u}}^n$ 是由 MTI-FP 方法 (3.23)-(3.28) 得到的数值解。于是，我们得到 MTI-FP 方法 (3.23)-(3.28) 的以下误差界。

定理 1. 在假设(A)下，存在两个常数 $0 < h_0 < 1$ 和$0 < \tau_0 < 1$，它们充分小且与 ε 无关，使得对任意 $0 < \varepsilon \leq 1$，当 $0 < h \leq h_0$ 和 $0 < \tau \leq \tau_0$时，有

$$\|e^n\|_{H^1} + \varepsilon^2 \|\dot{e}^n\|_{H^1} \lesssim h^{m_0} + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2}, \quad \|e^n\|_{H^1} + \varepsilon^2 \|\dot{e}^n\|_{H^1} \lesssim h^{m_0} + \tau + \varepsilon^2, \tag{4.3}$$

$$\|I_N \mathbf{u}^n\|_{H^1} \leq C_0 + 1, \quad \|I_N \dot{\mathbf{u}}^n\|_{H^1} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}(C_0 + 1), \quad 0 \leq n \leq \frac{T}{\tau}. \tag{4.4}$$

因此，取 (4.3) 中两个误差估计的较小值，再对 $\varepsilon \in (0, 1]$, 取最大值，我们得到一个关于 $\varepsilon \in (0, 1]$, 的一致误差估计

$$\begin{aligned} \|e^n\|_{H^1} + \varepsilon^2 \|\dot{e}^n\|_{H^1} &\lesssim h^{m_0} + \tau + \max_{0<\varepsilon\leq 1} \min\left\{ \frac{\tau^2}{\varepsilon^2}, \varepsilon^2 \right\} \\ &\lesssim h^{m_0} + \tau, \qquad 0 \leq n \leq \frac{T}{\tau}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

为了证明定理 1，我们引入误差能量泛函 [5]

$$\mathcal{E}(e^n,\dot{e}^n):=\varepsilon^2\left\|\dot{e}^n\right\|_{H^1}^2+\left\|\partial_x e^n\right\|_{H^1}^2+\frac{1}{\varepsilon^2}\left\|e^n\right\|_{H^1}^2,\quad 0\le n\le\frac{T}{\tau}. \tag{4.6}$$

证明将分为以下小节介绍的四个主要步骤：(i) 微观（或局部）变量 v^n 和 r^n的估计；(ii) 误差函数及相应的误差方程；(iii) 局部截断误差和非线性项误差的估计；(iv) 利用能量方法证明主要结果。

4.2. 微观（或局部）变量的估计。我们首先给出多尺度分解 (3.4)-(3.5)中每个时间步长下 v^n 和 r^n 的先验估计。

引理 2.（先验估计）在假设(A)下，存在一个与 $0<\varepsilon\le 1$ 和 $h>0$无关的常数$\tau_1>0$，使得对于 $0<\tau\le\tau_1$

$$\left\|v^n\right\|_{L^\infty([0,\tau];H^{m_0+1})}+\left\|\partial_s v^n\right\|_{L^\infty([0,\tau];H^{m_0-1})}+\varepsilon^2\left\|\partial_{ss}v^n\right\|_{L^\infty([0,\tau];H^{m_0-1})}\lesssim 1, \tag{4.7}$$

$$\left\|r^n\right\|_{L^\infty([0,\tau];H^{m_0-1})}+\varepsilon^2\left\|\partial_s r^n\right\|_{L^\infty([0,\tau];H^{m_0-1})}+\varepsilon^4\left\|\partial_{ss}r^n\right\|_{L^\infty([0,\tau];H^{m_0-3})}\lesssim\varepsilon^2. \tag{4.8}$$

证明。回顾初始数据 (3.4b) 和假设(A)，可得

$$\left\|v^n(\cdot,0)\right\|_{H^{m_0+1}}\lesssim\left\|u(\cdot,t_n)\right\|_{H^{m_0+1}}+\varepsilon^2\left\|\partial_t u(\cdot,t_n)\right\|_{H^{m_0+1}}\lesssim 1.$$

对非线性薛定谔波方程 (3.4) 应用杜哈梅尔原理，可得

$$v^n(x,s)=a(s)v^n(x,0)-\int_0^s b(s-\theta)g(v^n(x,\theta))d\theta,\quad 0\le s\le\tau,$$

其中， $a(s)$ 和 $b(s)$ 是伪微分算子

$$a(s)=\frac{\lambda^+e^{is\lambda^-}-\lambda^-e^{is\lambda^+}}{\lambda^+-\lambda^-},\quad b(s)=i\frac{e^{is\lambda^+}-e^{is\lambda^-}}{\varepsilon^2(\lambda^--\lambda^+)},\quad \lambda^\pm=-\frac{1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2\Delta}}{\varepsilon^2},$$

且对任意 $\phi\in H^k(\Omega)$

$$\left\|a(s)\phi\right\|_{H^k}\lesssim\left\|\phi\right\|_{H^k},\quad \left\|b(s)\phi\right\|_{H^k}\lesssim\left\|\phi\right\|_{H^k}.$$

于是有

$$\left\|v^n(\cdot,s)\right\|_{H^{m_0+1}}\lesssim\left\|v^n(\cdot,0)\right\|_{H^{m_0+1}}+\int_0^s\left\|g(v^n(\cdot,\theta))\right\|_{H^{m_0+1}}d\theta,\quad 0\le s\le\tau.$$

因此，通过对非线性波动方程 [40]，进行标准的自举论证，我们得到存在一个正常数 τ_1^*，其与 ε 和 h 无关，使得对任意 $0<\tau\le\tau_1^*$，

$$\left\|v^n\right\|_{L^\infty([0,\tau];H^{m_0+1})}\lesssim 1.$$

类似地，对 (3.4) 求导可得 $\partial_s v^n$ 的公式，即:

$$\partial_s v^n(x,s)=\varepsilon^2 b(s)\partial_{ss}v^n(x,0)-\int_0^s b(s-\theta)\partial_\theta g(v^n(x,\theta))d\theta,\quad 0\le s\le\tau,$$

其中

$$\partial_{ss}v^n(x,0)=\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\partial_{xx}v^n(x,0)-g(v^n(x,0))\right]\in H^{m_0-1}.$$

因此，结合

$$\varepsilon^2\partial_{ss}v^n(x,s)=-2i\partial_s v^n(x,s)+\partial_{xx}v^n(x,s)-3\lambda|v^n(x,s)|^2v^n(x,s),\quad 0\le s\le\tau,$$

我们可以用类似的方式容易地建立估计式 (4.7)，为简洁起见此处省略细节。

为得到估计式 (4.8)，我们在傅里叶空间中进行分析。假设

$$r^n(x,s)=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\widehat{(r^n)}_l(s)e^{i\mu_l(x-a)},\quad x\in\overline{\Omega},\quad 0\le s\le\tau,$$

并对 (3.5) 的两边作傅里叶变换，我们得到

$$\widehat{(r^n)}_l(s)=\int_0^s\frac{\sin(\omega_l(\theta-s))}{\varepsilon^2\omega_l}\left(e^{\frac{3i\theta}{\varepsilon^2}}\widehat{(h^n)}_l(\theta)+e^{\frac{-3i\theta}{\varepsilon^2}}\widehat{(\overline{h^n})}_l(\theta)+\widehat{(f^n)}_l(\theta)\right)d\theta,\tag{4.9}$$

其中 h^n 和 f^n 由 (3.11) 给出。

令 $\beta_l=\omega_l-\frac{1}{\varepsilon^2}=\mu_l^2/\sqrt{1+\varepsilon^2\mu_l^2}$，则我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^s\frac{\sin(\omega_l(\theta-s))}{\varepsilon^2\omega_l}e^{3i\theta/\varepsilon^2}\widehat{(h^n)}_l(\theta)d\theta\\
&=i\int_0^s\frac{e^{i\omega_l(s-\theta)}-e^{-i\omega_l(s-\theta)}}{2\varepsilon^2\omega_l}e^{3i\theta/\varepsilon^2}\widehat{(h^n)}_l(\theta)d\theta\\
&=\frac{i}{2\varepsilon^2\omega_l}\left[e^{i\omega_l s}\int_0^s e^{-i\beta_l\theta}e^{2i\theta/\varepsilon^2}\widehat{(h^n)}_l(\theta)d\theta-e^{-i\omega_l s}\int_0^s e^{i\beta_l\theta}e^{4i\theta/\varepsilon^2}\widehat{(h^n)}_l(\theta)d\theta\right]\\
&=\frac{i}{2\varepsilon^2\omega_l}\left[\frac{\varepsilon^2}{2i}e^{i\omega_l s}\int_0^s e^{-i\beta_l\theta}\widehat{(h^n)}_l(\theta)d(e^{2i\theta/\varepsilon^2})-\frac{\varepsilon^2}{4i}e^{-i\omega_l s}\int_0^s e^{i\beta_l\theta}\widehat{(h^n)}_l(\theta)d(e^{4i\theta/\varepsilon^2})\right]\\
&=\frac{e^{i\omega_l s}}{4\omega_l}\left[e^{is(\frac{2}{\varepsilon^2}-\beta_l)}\widehat{(h^n)}_l(s)-\widehat{(h^n)}_l(0)-\int_0^s e^{i\theta(\frac{2}{\varepsilon^2}-\beta_l)}\left(\widehat{(\partial_\theta h^n)}_l-i\beta_l\widehat{(h^n)}_l\right)d\theta\right]\\
&\quad+\frac{e^{-i\omega_l s}}{8\omega_l}\left[\widehat{(h^n)}_l(0)-e^{is(\beta_l+\frac{4}{\varepsilon^2})}\widehat{(h^n)}_l(s)+\int_0^s e^{i\theta(\beta_l+\frac{4}{\varepsilon^2})}\left(\widehat{(\partial_\theta h^n)}_l+i\beta_l\widehat{(h^n)}_l\right)d\theta\right].
\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^s\frac{\sin(\omega_l(\theta-s))}{\varepsilon^2\omega_l}e^{3i\theta/\varepsilon^2}\widehat{(h^n)}_l(\theta)d\theta\right|\\
&\lesssim\varepsilon^2\left[\left|\widehat{(h^n)}_l(s)\right|+\left|\widehat{(h^n)}_l(0)\right|+\int_0^s\left(\left|\widehat{(\partial_\theta h^n)}_l(\theta)\right|+\mu_l^2\left|\widehat{(h^n)}_l(\theta)\right|\right)d\theta\right].
\end{aligned}$$

类似地，通过分部积分，我们得到 (4.9) 的以下估计

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{(r^n)}_l(s)\right|\lesssim&\varepsilon^2\left[\left|\widehat{(h^n)}_l(s)\right|+\left|\widehat{(h^n)}_l(0)\right|+\int_0^s\left(\left|\widehat{(\partial_\theta h^n)}_l(\theta)\right|+\mu_l^2\left|\widehat{(h^n)}_l(\theta)\right|\right)d\theta\right]\\
&+\varepsilon^2\left[\left|\widehat{(\overline{h^n})}_l(s)\right|+\left|\widehat{(\overline{h^n})}_l(0)\right|+\int_0^s\left|\widehat{(\overline{\partial_\theta h^n})}_l(\theta)\right|+\mu_l^2\left|\widehat{(\overline{h^n})}_l(\theta)\right|d\theta\right]\\
&+\int_0^s\left|\widehat{(f^n)}_l(\theta)\right|d\theta,\quad 0\le s\le\tau,\quad l\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}\tag{4.10}$$

将 (4.10) 的平方乘以 $1+\mu_l^2+\cdots+\mu_l^{2(m_0-1)}$，并对 $l\in\mathbb{Z}$ 求和，得到

$$\begin{aligned}\|r^n(\cdot,s)\|_{H^{m_0-1}}^2 \lesssim&\varepsilon^4\Big[\|h^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^{m_0-1})}^2+s^2\|\partial_s h^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^{m_0-1})}^2\\&+s^2\|h^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^{m_0+1})}^2\Big]+s\int_0^s\|f^n(\theta)\|_{H^{m_0-1}}^2\,d\theta\\ \lesssim&\varepsilon^4+\int_0^s\|f^n(\theta)\|_{H^{m_0-1}}^2\,d\theta,\qquad 0\le s\le\tau.\end{aligned}\tag{4.11}$$

回顾(3.11)中 f^n 的公式以及先验估计(4.7)，并采用自举论证 [40], ，我们得到：存在一个与 ε 和 h 无关的正常数 $0<\tau_1<\tau_1^*$，使得对任意 $0<\tau\le\tau_1$,

$$\|r^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^{m_0-1})}\lesssim\varepsilon^2.$$

类似地，我们可以得到如下估计

$$\|\partial_s r^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^{m_0-1})}\lesssim 1,\quad \|\partial_{ss} r^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^{m_0-3})}\lesssim\frac{1}{\varepsilon^2},\tag{4.12}$$

从而完成了(4.8)的证明。 □

4.3. 误差函数及相应的误差方程。定义另一 r
组误差函数

$$e_N^n:=(P_Nu)(x,t_n)-(I_N\mathbf{u}^n)(x),\ \dot e_N^n:=(P_N\partial_t u)(x,t_n)-(I_N\dot{\mathbf{u}}^n)(x),\ x\in\overline{\Omega}.\tag{4.13}$$

根据假设(A)中解 $u(x,t)$ 的正则性，我们有

$$\|e^n\|_{H^1}\le\|u(\cdot,t_n)-(P_Nu)(\cdot,t_n)\|_{H^1}+\|e_N^n\|_{H^1}\lesssim h^{m_0}+\|e_N^n\|_{H^1},\tag{4.14a}$$

$$\|\dot e^n\|_{H^1}\le\|\partial_t u(\cdot,t_n)-(P_N\partial_t u)(\cdot,t_n)\|_{H^1}+\|\dot e_N^n\|_{H^1}\lesssim\frac{h^{m_0}}{\varepsilon^2}+\|\dot e_N^n\|_{H^1}.\tag{4.14b}$$

因此，我们只需证明将 e^n 和 $\dot e^n$ 分别替换为 e_N^n 和 $\dot e_N^n$ 后的估计式 (4.3) 和 (4.4)。

引理3.（精确解公式）将问题 (3.1) 的精确解 $u(x,t)$ 的傅里叶展开记为

$$u(x,t)=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\widehat{u}_l(t)e^{i\mu_l(x-a)},\quad x\in\overline{\Omega},\quad t\ge 0,\tag{4.15}$$

则有

$$\begin{aligned}\widehat{u}_l(t_{n+1})=&\cos(\omega_l\tau)\widehat{u}_l(t_n)+\frac{\sin(\omega_l\tau)}{\omega_l}\widehat{u}_l'(t_n)-\int_0^\tau\frac{\sin(\omega_l(\tau-\theta))}{\varepsilon^2\omega_l}\Big[e^{i\theta/\varepsilon^2}\widehat{(g^n)}_l(\theta)\\&+e^{-i\theta/\varepsilon^2}\widehat{(\overline{g^n})}_l(\theta)+e^{3i\theta/\varepsilon^2}\widehat{(h^n)}_l(\theta)+e^{-3i\theta/\varepsilon^2}\widehat{(\overline{h^n})}_l(\theta)+\widehat{(f^n)}_l(\theta)\Big]\,d\theta,\end{aligned}\tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}\widehat{u}_l'(t_{n+1})=&-\omega_l\sin(\omega_l\tau)\widehat{u}_l(t_n)+\cos(\omega_l\tau)\widehat{u}_l'(t_n)-\int_0^\tau\frac{\cos(\omega_l(\tau-\theta))}{\varepsilon^2}\Big[e^{i\theta/\varepsilon^2}\widehat{(g^n)}_l(\theta)\\&+e^{-i\theta/\varepsilon^2}\widehat{(\overline{g^n})}_l(\theta)+e^{3i\theta/\varepsilon^2}\widehat{(h^n)}_l(\theta)+e^{-3i\theta/\varepsilon^2}\widehat{(\overline{h^n})}_l(\theta)+\widehat{(f^n)}_l(\theta)\Big]\,d\theta.\end{aligned}\tag{4.17}$$

证明。回顾区间 $[t_n,t_{n+1}]$ 上的问题 (3.1)，并进行傅里叶变换，可得

$$\varepsilon^2\widehat{u}_l''(t_n+s)+\varepsilon^2\omega_l^2\widehat{u}_l(t_n+s)+\lambda\widehat{(u^3)}_l(t_n+s)=0,\quad 0\le s\le\tau.$$

应用杜哈梅尔原理，对于 $0 \le s \le \tau$ 可得

$$\begin{aligned}\widehat{u}_l(t_n+s) =&\cos(\omega_l s)\widehat{u}_l(t_n)+\frac{\sin(\omega_l s)}{\omega_l}\widehat{u}_l'(t_n)\\ &-\lambda\int_0^s\frac{\sin(\omega_l(s-\theta))}{\varepsilon^2\omega_l}\widehat{(u^3)}_l(t_n+\theta)d\theta.\end{aligned}\tag{4.18}$$

注意到 (2.2)、(3.3) 和 (3.12)，可得

$$\lambda\left(u(x,t_n+s)\right)^3=\left(e^{is/\varepsilon^2}g^n+e^{3is/\varepsilon^2}h^n+\text{c.c.}\right)+f^n,\tag{4.19}$$

其中，g^n、h^n 和 f^n 由 (3.11)–(3.12) 给出。

将 (4.19) 代入 (4.18)，得到 (4.16)。对 s 关于 s 求导，以类似方式可得 (4.17)，从而完成证明。□

引理 4.（MTI-FP 的新公式）对于 $n \ge 0$，将 (4.1) 中的 $(I_N\mathbf{u}^n)(x)$ 和 $(I_N\dot{\mathbf{u}}^n)(x)$ 展开为傅里叶级数，得到

$$\begin{aligned}(I_N\mathbf{u}^n)(x)&=\sum_{l=-N/2}^{N/2-1}\widetilde{(\mathbf{u}^n)}_l e^{i\mu_l(x-a)},\\ (I_N\dot{\mathbf{u}}^n)(x)&=\sum_{l=-N/2}^{N/2-1}\widetilde{(\dot{\mathbf{u}}^n)}_l e^{i\mu_l(x-a)},\ x\in\overline{\Omega},\end{aligned}\tag{4.20}$$

于是可得

$$\widetilde{(\mathbf{u}^{n+1})}_l=\cos(\omega_l\tau)\widetilde{(\mathbf{u}^n)}_l+\frac{\sin(\omega_l\tau)}{\omega_l}\widetilde{(\dot{\mathbf{u}}^n)}_l-\widetilde{G_l^n},\quad l=-\frac{N}{2},...,\frac{N}{2}-1,\tag{4.21}$$

$$\widetilde{(\dot{\mathbf{u}}^{n+1})}_l=-\omega_l\sin(\omega_l\tau)\widetilde{(\mathbf{u}^n)}_l+\cos(\omega_l\tau)\widetilde{(\dot{\mathbf{u}}^n)}_l-\widetilde{\dot{G}_l^n},\tag{4.22}$$

其中

$$\widetilde{G_l^n}=e^{i\tau/\varepsilon^2}c_l(\tau)\widetilde{(\mathbf{g}^{n,0})}_l+e^{-i\tau/\varepsilon^2}\overline{c_l}(\tau)\widetilde{(\overline{\mathbf{g}^{n,0}})}_l+p_l(\tau)\widetilde{(\mathbf{h}^{n,0})}_l+\overline{p_l}(\tau)\widetilde{(\overline{\mathbf{h}^{n,0}})}_l,\tag{4.23a}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\dot{G}_l^n}=&e^{i\tau/\varepsilon^2}\left[c_l'(\tau)+\frac{i}{\varepsilon^2}c_l(\tau)\right]\widetilde{(\mathbf{g}^{n,0})}_l+e^{-i\tau/\varepsilon^2}\left[\overline{c_l'}(\tau)-\frac{i}{\varepsilon^2}\overline{c_l}(\tau)\right]\widetilde{(\overline{\mathbf{g}^{n,0}})}_l\\ &+p_l'(\tau)\widetilde{(\mathbf{h}^{n,0})}_l+\overline{p_l'}(\tau)\widetilde{(\overline{\mathbf{h}^{n,0}})}_l+\frac{\tau}{2\varepsilon^2}\widetilde{(\mathbf{f}^{n,1})}_l.\end{aligned}\tag{4.23b}$$

证明。回顾 MTI-FP 方法 (3.23)–(3.24)，可得

$$\widetilde{(\mathbf{u}^{n+1})}_l=e^{i\tau/\varepsilon^2}\widetilde{(\mathbf{v}^{n,1})}_l+e^{-i\tau/\varepsilon^2}\widetilde{(\overline{\mathbf{v}^{n,1}})}_l+\widetilde{(\mathbf{r}^{n,1})}_l,\quad l=-\frac{N}{2},...,\frac{N}{2}-1.\tag{4.24}$$

将公式 (3.25) 中的 $(\mathbf{v}^{n,1})_l$ 和 $(\mathbf{r}^{n,1})_l$ 以及初始数据 (3.27a) 代入 (4.24)，可得对于 $l=-\frac{N}{2},..,\frac{N}{2}-1$

$$\widetilde{(\mathbf{u}^{n+1})}_l=\text{Re}\left\{e^{i\tau/\varepsilon^2}a_l(\tau)\right\}\widetilde{(\mathbf{u}^n)}_l+\varepsilon^2\text{Im}\left\{e^{i\tau/\varepsilon^2}a_l(\tau)\right\}\widetilde{(\dot{\mathbf{u}}^n)}_l-\widetilde{G_l^n},\tag{4.25}$$

其中，Re(f) 和 Im(f) 分别表示 f 的实部和虚部。因此，应用 (3.15) 可得 (4.21)。(4.22) 和 (4.23b) 的证明类似，细节从略。□

引入局部截断误差函数

$$\xi^n(x)=\sum_{l=-N/2}^{N/2-1}\widehat{\xi_l^n}e^{i\mu_l(x-a)},\quad \dot{\xi}^n(x)=\sum_{l=-N/2}^{N/2-1}\widehat{\dot{\xi}_l^n}e^{i\mu_l(x-a)},\quad x\in\overline{\Omega}, \tag{4.26}$$

其中

$$\widehat{\xi_l^n}:=\widehat{u}_l(t_{n+1})-\left[\cos(\omega_l\tau)\widehat{u}_l(t_n)+\frac{\sin(\omega_l\tau)}{\omega_l}\widehat{u}_l'(t_n)-\widehat{\mathcal{G}_l^n}\right], \tag{4.27}$$

$$\widehat{\dot{\xi}_l^n}:=\widehat{u}_l'(t_{n+1})-\left[-\omega_l\sin(\omega_l\tau)\widehat{u}_l(t_n)+\cos(\omega_l\tau)\widehat{u}_l'(t_n)-\widehat{\dot{\mathcal{G}}_l^n}\right], \tag{4.28}$$

with

$$\widehat{\mathcal{G}_l^n}:=e^{i\tau/\varepsilon^2}c_l(\tau)\widehat{(g^n)}_l(0)+e^{-i\tau/\varepsilon^2}\overline{c_l}(\tau)\widehat{(\overline{g^n})}_l(0)$$

$$+\ p_l(\tau)\widehat{(h^n)}_l(0)+\overline{p_l}(\tau)\widehat{(\overline{h^n})}_l(0), \tag{4.29a}$$

$$\widehat{\dot{\mathcal{G}}_l^n}:=e^{i\tau/\varepsilon^2}\left[c_l'(\tau)+\frac{i}{\varepsilon^2}c_l(\tau)\right]\widehat{(g^n)}_l(0)+\ e^{-i\tau/\varepsilon^2}\left[\overline{c_l'}(\tau)-\frac{i}{\varepsilon^2}\overline{c_l}(\tau)\right]\widehat{(\overline{g^n})}_l(0)$$

$$+\ p_l'(\tau)\widehat{(h^n)}_l(0)+\overline{p_l'}(\tau)\widehat{(\overline{h^n})}_l(0)+\frac{\tau}{2\varepsilon^2}\widehat{(f^n)}_l(\tau). \tag{4.29b}$$

此外，将非线性项产生的误差定义为

$$\eta^n(x):=\sum_{l=-N/2}^{N/2-1}\widehat{\eta_l^n}e^{i\mu_l(x-a)},\quad \dot{\eta}^n(x):=\sum_{l=-N/2}^{N/2-1}\widehat{\dot{\eta}_l^n}e^{i\mu_l(x-a)},\quad x\in\overline{\Omega}, \tag{4.30}$$

其中

$$\widehat{\eta_l^n}:=\widehat{\mathcal{G}_l^n}-\widetilde{G_l^n},\qquad \widehat{\dot{\eta}_l^n}:=\widehat{\dot{\mathcal{G}}_l^n}-\widetilde{\dot{G}_l^n}. \tag{4.31}$$

将精确流 (4.16) 和 (4.17) 从数值流 (4.21) 和 (4.22) 中相减，可得以下误差方程（在相空间中）

$$\widehat{(e_N^{n+1})}_l=\cos(\omega_l\tau)\widehat{(e_N^n)}_l+\frac{\sin(\omega_l\tau)}{\omega_l}\widehat{(\dot{e}_N^n)}_l+\widehat{\xi_l^n}-\widehat{\eta_l^n},\quad l=-\frac{N}{2},...,\frac{N}{2}-1, \tag{4.32}$$

$$\widehat{(\dot{e}_N^{n+1})}_l=-\omega_l\sin(\omega_l\tau)\widehat{(e_N^n)}_l+\cos(\omega_l\tau)\widehat{(\dot{e}_N^n)}_l+\widehat{\dot{\xi}_l^n}-\widehat{\dot{\eta}_l^n}. \tag{4.33}$$

4.4. 误差函数的能量估计。对于 (4.26) 中的局部截断误差函数，我们有以下估计。

引理 5。（局部截断误差）在假设(A)下，当 $0<\tau\le\tau_1$ 时，我们对 $0<\varepsilon\le 1$ 有两个相互独立的估计

$$\mathcal{E}(\xi^n,\dot{\xi}^n)\lesssim\frac{\tau^6}{\varepsilon^6},\quad \mathcal{E}(\xi^n,\dot{\xi}^n)\lesssim\tau^2\varepsilon^2+\frac{\tau^4}{\varepsilon^2},\qquad n=0,1,...,\frac{T}{\tau}-1. \tag{4.34}$$

证明。注意到 $e^{i\tau/\varepsilon^2}b_l(\tau-\theta)=\frac{\sin(\omega_l(\tau-\theta))}{\varepsilon^2\omega_l}e^{i\theta/\varepsilon^2})$ 以及 (3.21)，将精确解公式 (4.16) 代入 (4.27)，并应用泰勒展开，得到

$$\begin{aligned}\widehat{\xi_l^n}=&-\int_0^\tau\frac{\sin(\omega_l(\tau-\theta))}{\varepsilon^2\omega_l}\theta^2\left[e^{i\theta/\varepsilon^2}\int_0^1\widehat{(g^n)}_l''(\theta\rho)(1-\rho)d\rho\right.\\&+e^{-i\theta/\varepsilon^2}\int_0^1\widehat{(\overline{g^n})}_l''(\theta\rho)(1-\rho)d\rho+e^{3i\theta/\varepsilon^2}\int_0^1\widehat{(h^n)}_l''(\theta\rho)(1-\rho)d\rho\\&\left.+e^{-3i\theta/\varepsilon^2}\int_0^1\widehat{(\overline{h^n})}_l''(\theta\rho)(1-\rho)d\rho\right]d\theta-\int_0^\tau\frac{\sin(\omega_l(\tau-\theta))}{\varepsilon^2\omega_l}\widehat{(f^n)}_l(\theta)d\theta.\end{aligned} \tag{4.35}$$

注意到 $f^n|_{s=0}=0$，应用梯形法则的误差估计，得到

$$\left|\int_0^\tau \frac{\sin(\omega_l(\tau-\theta))}{\varepsilon^2\omega_l}\widehat{(f^n)}_l(\theta)d\theta\right| \lesssim \int_0^\tau \frac{\theta(\tau-\theta)}{\varepsilon^2\omega_l}\left|\frac{d^2}{d\theta^2}\left[\sin(\omega_l(\tau-\theta))\widehat{(f^n)}_l(\theta)\right]\right|d\theta.$$

因此，我们可以得到 (4.35) 的如下界

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\xi_l^n}\right| \lesssim & \frac{\tau^2}{\varepsilon^2\omega_l}\int_0^\tau\int_0^1\left[\left|\widehat{(g^n)}_l''(\theta\rho)\right|+\left|\widehat{(\overline{g^n})}_l''(\theta\rho)\right|+\left|\widehat{(h^n)}_l''(\theta\rho)\right|+\left|\widehat{(\overline{h^n})}_l''(\theta\rho)\right|\right]d\rho d\theta\\ &+\frac{\tau^2}{\varepsilon^2\omega_l}\int_0^\tau\left[\left|\widehat{(f^n)}_l''(\theta)\right|+\left|\omega_l\widehat{(f^n)}_l'(\theta)\right|+\left|\omega_l^2\widehat{(f^n)}_l(\theta)\right|\right]d\theta. \end{aligned}\tag{4.36}$$

注意到对 $l=-N/2,...,N/2-1$ 有 $\frac{1}{\varepsilon^2\omega_l}\le 1$，由 (4.36) 可得，对 $0<\tau\le\tau_1$,

$$\begin{aligned}\|\xi^n\|_{H^1}^2 \lesssim & \tau^6\left[\|\partial_{ss}g^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^1)}^2+\|\partial_{ss}h^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^1)}^2+\|\partial_{ss}f^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^1)}^2\right.\\ &\left.+\frac{1}{\varepsilon^4}\|\partial_s f^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^2)}^2+\frac{1}{\varepsilon^8}\|f^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^3)}^2\right].\end{aligned}\tag{4.37}$$

根据定义 (3.11) 和 (2.2)，采用 Sobole夫嵌入定理 [20]，并应用引理 2 中的先验估计 (4.7) 和 (4.8)，我们得到

$$\begin{aligned}\|f^n\|_{H^3} \lesssim & \left\|(r^n)^3+3(r^n)^2\left(e^{is/\varepsilon^2}v^n+e^{-is/\varepsilon^2}\overline{v^n}\right)+3r^n\left(e^{is/\varepsilon^2}v^n+e^{-is/\varepsilon^2}\overline{v^n}\right)^2\right\|_{H^3}\\ \lesssim & \|r^n\|_{H^3}^3+\|r^n\|_{H^3}^2\|v^n\|_{H^3}+\|r^n\|_{H^3}\|v^n\|_{H^3}^2\lesssim\varepsilon^2,\quad 0\le s\le\tau,\end{aligned}$$

由此可得

$$\|f^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^3)}\lesssim\varepsilon^2.\tag{4.38}$$

类似地，我们得到 g^n、 h^n 和 $\partial_s f^n$ 的估计

$$\begin{aligned}&\left\|\partial_s^k g^n\right\|_{L^\infty([0,\tau];H^1)}+\left\|\partial_s^k h^n\right\|_{L^\infty([0,\tau];H^1)}\lesssim\varepsilon^{2-2k},\\ &\|\partial_s f^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^2)}\lesssim 1,\qquad k=1,2.\end{aligned}\tag{4.39}$$

根据定义 (3.11) 和 (2.2)，我们得到 $\partial_{ss}f^n$关于 $0\le s\le\tau$ 的如下估计

$$\begin{aligned}&\|\partial_{ss}f^n\|_{H^1}\\ &\lesssim\left\|\partial_{ss}\left[(r^n)^3+3(r^n)^2\left(e^{is/\varepsilon^2}v^n+e^{-is/\varepsilon^2}\overline{v^n}\right)+3r^n\left(e^{is/\varepsilon^2}v^n+e^{-is/\varepsilon^2}\overline{v^n}\right)^2\right]\right\|_{H^1}.\end{aligned}$$

由 Sobole夫嵌入定理 [20] 以及先前的估计 (4.7) 和 (4.8)，可得

$$\begin{aligned}\left\|\partial_{ss}(r^n)^3\right\|_{H^1} \lesssim & \left\|(r^n)^2\partial_{ss}r^n\right\|_{H^1}+\left\|r^n(\partial_s r^n)^2\right\|_{H^1}\\ \lesssim & \left\|(r^n)^2\partial_{ss}r^n\right\|_{L^2}+\left\|\partial_x((r^n)^2\partial_{ss}r^n)\right\|_{L^2}+\left\|r^n(\partial_s r^n)^2\right\|_{H^1}\\ \lesssim & \|r^n\|_{L^\infty}^2\|\partial_{ss}r^n\|_{L^2}+\left\|\partial_x(r^n)^2\right\|_{L^\infty}\|\partial_{ss}r^n\|_{L^2}\\ &+\|r^n\|_{L^\infty}^2\|\partial_x(\partial_{ss}r^n)\|_{L^2}+\left\|r^n(\partial_s r^n)^2\right\|_{H^1}\\ \lesssim & \|r^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^3)}^2\|\partial_{ss}r^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^1)}\\ &+\|r^n\|_{L^\infty([0,\tau],H^3)}\|\partial_s r^n\|_{L^\infty([0,\tau],H^3)}^2\lesssim\varepsilon^2.\end{aligned}$$

以类似方式处理其他项，可得

$$\|\partial_{ss} f^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^1)} \lesssim \frac{1}{\varepsilon^2}. \tag{4.40}$$

将 (4.38)–(4.40) 代入 (4.37)，得到

$$\|\xi^n\|_{H^1}^2 \lesssim \frac{\tau^6}{\varepsilon^4}. \tag{4.41}$$

同理，注意到 $\frac{|\mu_l|}{\varepsilon^2\omega_l} \leq \frac{1}{\varepsilon}$，可得

$$\|\partial_x \xi^n\|_{H^1}^2 \lesssim \frac{\tau^6}{\varepsilon^6}, \qquad \left\|\dot{\xi}^n\right\|_{H^1}^2 \lesssim \frac{\tau^6}{\varepsilon^8},$$

这就完成了 (4.34) 中的第一个估计。

另一方面，通过应用泰勒展开并截断至一阶项，我们得到

$$\begin{aligned}
\widehat{\xi_l^n} = &-\int_0^\tau \frac{\sin(\omega_l(\tau-\theta))}{\varepsilon^2\omega_l}\theta e^{i\theta/\varepsilon^2}\int_0^1 \widehat{(g^n)}_l'(\theta s)dsd\theta \\
&-\int_0^\tau \frac{\sin(\omega_l(\tau-\theta))}{\varepsilon^2\omega_l}\theta e^{-i\theta/\varepsilon^2}\int_0^1 \widehat{(\overline{g^n})}_l'(\theta s)dsd\theta \\
&-\int_0^\tau \frac{\sin(\omega_l(\tau-\theta))}{\varepsilon^2\omega_l}\theta e^{3i\theta/\varepsilon^2}\int_0^1 \widehat{(h^n)}_l'(\theta s)dsd\theta \\
&-\int_0^\tau \frac{\sin(\omega_l(\tau-\theta))}{\varepsilon^2\omega_l}\theta e^{-3i\theta/\varepsilon^2}\int_0^1 \widehat{(\overline{h^n})}_l'(\theta s)dsd\theta \\
&-\int_0^\tau \frac{\sin(\omega_l(\tau-\theta))}{\varepsilon^2\omega_l}\widehat{(f^n)}_l(\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

因此，我们可以得到上述方程的如下界

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{\xi_l^n}\right| \leq &\frac{\tau}{\varepsilon^2\omega_l}\left[\int_0^\tau\int_0^1 \left|\widehat{(g^n)}_l'(\theta s)\right|dsd\theta + \int_0^\tau\int_0^1 \left|\widehat{(\overline{g^n})}_l'(\theta s)\right|dsd\theta\right. \\
&\left.+\int_0^\tau\int_0^1 \left|\widehat{(h^n)}_l'(\theta s)\right|dsd\theta + \int_0^\tau\int_0^1 \left|\widehat{(\overline{h^n})}_l'(\theta s)\right|dsd\theta\right] \\
&+\frac{1}{\varepsilon^2\omega_l}\int_0^\tau \left|\widehat{(f^n)}_l(\theta)\right|d\theta.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

通过应用柯西–施瓦茨不等式，即

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\tau\int_0^1 \left|\widehat{(g^n)}_l'(\theta s)\right|dsd\theta\right)^2 &\leq \int_0^\tau 1d\theta\cdot\int_0^\tau\left(\int_0^1 \left|\widehat{(g^n)}_l'(\theta s)\right|ds\right)^2 d\theta \\
&\leq \tau\int_0^\tau\int_0^1 \left|\widehat{(g^n)}_l'(\theta s)\right|^2 dsd\theta, \\
\left(\int_0^\tau \left|\widehat{(f^n)}_l(\theta)\right|d\theta\right)^2 \leq \int_0^\tau 1d\theta\cdot\int_0^\tau \left|\widehat{(f^n)}_l(\theta)\right|^2 d\theta &\leq \tau\int_0^\tau \left|\widehat{(f^n)}_l(\theta)\right|^2 d\theta,
\end{aligned}$$

注意到 $\varepsilon^2\omega_l \geq 1$，由 (4.42) 并利用 (4.38)-(4.39) 可得

$$\begin{aligned}
\|\xi^n\|_{H^1}^2 \lesssim &\tau^4\left[\|\partial_s g^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^1)}^2 + \|\partial_s h^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^1)}^2\right] + \tau^2\|f^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^1)}^2 \\
\lesssim &\tau^4 + \tau^2\varepsilon^4.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

同理，可得

$$\|\partial_x \xi^n\|_{H^1}^2 \lesssim \tau^2\varepsilon^2 + \frac{\tau^4}{\varepsilon^2}, \qquad \left\|\dot{\xi}^n\right\|_{H^1}^2 \lesssim \tau^2 + \frac{\tau^4}{\varepsilon^4}.$$

因此，根据能量泛函 (4.6) 的定义，我们得到 (4.34) 中的两个独立估计。□

类似地，对于 (4.30) 中的误差函数，我们有以下估计。

引理 6.（非线性项误差）在假设(A)成立且假设 (4.4) 对 n 成立的条件下（稍后将用归纳法证明），对任意 $0 < \tau \le \tau_1$,

$$\mathcal{E}(\eta^n, \dot{\eta}^n) \lesssim \tau^2 \mathcal{E}(e_N^n, \dot{e}_N^n) + \frac{\tau^2 h^{2m_0}}{\varepsilon^2}, \quad n = 0, 1, ..., \frac{T}{\tau} - 1. \tag{4.44}$$

证明。定义

$$e_g^n(x) = g(v^n(x,0)) - (I_N \mathbf{g}^{n,0})(x), \quad e_h^n(x) = h(v^n(x,0)) - (I_N \mathbf{h}^{n,0})(x), \tag{4.45a}$$

$$e_v^n(x) = v^n(x,0) - (I_N \mathbf{v}^{n,0})(x), \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{4.45b}$$

记

$$\mathbf{e}_g^n = (e_{g,0}^n, e_{g,1}^n, \ldots, e_{g,N}^n)^T,\ \mathbf{e}_h^n = (e_{h,0}^n, e_{h,1}^n, \ldots, e_{h,N}^n)^T,\ \mathbf{e}_v^n = (e_{v,0}^n, e_{v,1}^n, \ldots, e_{v,N}^n)^T,$$

where for $j = 0, 1, \ldots, N$

$$e_{g,j}^n = g(v^n(x_j,0)) - g_j^{n,0}, \quad e_{h,j}^n = h(v^n(x_j,0)) - h_j^{n,0}, \quad e_{v,j}^n = v^n(x_j,0) - v_j^{n,0}.$$

注意到 $|c_l(\tau)| + |p_l(\tau)| \lesssim \tau$对于 $l = -\frac{N}{2}, ..., \frac{N}{2} - 1$, 由 (4.23a) 和 (4.29a) 可得

$$\begin{aligned} \|\eta^n\|_{H^1}^2 \lesssim& \tau^2 \left[\left\|P_N e_g^n\right\|_{H^1}^2 + \|P_N e_h^n\|_{H^1}^2 \right] \\ \lesssim& \tau^2 \left[\left\|I_N \mathbf{e}_g^n\right\|_{H^1}^2 + \|I_N \mathbf{e}_h^n\|_{H^1}^2 \right] + \tau^2 h^{2m_0}, \end{aligned} \tag{4.46}$$

其中我们应用

$$\left\|P_N e_g^n\right\|_{H^1} \le \|P_N g(v^n(x,0)) - I_N g(v^n(x,0))\|_{H^1} + \left\|I_N \mathbf{e}_g^n\right\|_{H^1} \lesssim \left\|I_N \mathbf{e}_g^n\right\|_{H^1} + h^{m_0}, \|P_N e_h^n\|_{H^1} \le \|P_N h(v^n(x,0)) - I_N h(v^n(x,0))\|_{H^1} + \|I_N \mathbf{e}_h^n\|_{H^1} \lesssim \|I_N \mathbf{e}_h^n\|_{H^1} + h^{m_0},$$

其中 $g(v^n(x,0)),\ h(v^n(x,0)) \in H^{m_0+1}(\Omega)$，这是由定义 (3.4b)、(3.12) 以及假设(A)得到的。

采用插值误差 [5] 和索博列夫不等式 [5, 20], ，我们得到

$$\left\|I_N \mathbf{e}_g^n\right\|_{H^1} \lesssim \|I_N \mathbf{e}_v^n\|_{H^1}, \quad \|I_N \mathbf{e}_h^n\|_{H^1} \lesssim \|I_N \mathbf{e}_v^n\|_{H^1}, \tag{4.47}$$

其中，我们利用了在假设 (A) 和 (4.4) 下数值解的受控 l^∞ 范数。

因此，将（4.47）代入（4.46），并注意到初始数据（3.4b）和（3.27a），可得

$$\begin{aligned} \|\eta^n\|_{H^1}^2 &\lesssim \tau^2 \|I_N \mathbf{e}_v^n\|_{H^1}^2 + \tau^2 h^{2m_0} \\ &\lesssim \tau^2 \left[\|I_N u(\cdot, t_n) - (I_N \mathbf{u}^n)(\cdot)\|_{H^1}^2 + \varepsilon^4 \|I_N \partial_t u(\cdot, t_n) - (I_N \dot{\mathbf{u}}^n)(\cdot)\|_{H^1}^2 + h^{2m_0} \right] \\ &\lesssim \tau^2 \left[\|e_N^n\|_{H^1}^2 + \varepsilon^4 \|\dot{e}_N^n\|_{H^1}^2 + h^{2m_0} \right]. \end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\|\partial_x \eta^n\|_{H^1}^2 + \varepsilon^2 \|\dot{\eta}^n\|_{H^1}^2 \lesssim \frac{\tau^2}{\varepsilon^2}\left[\|e_N^n\|_{H^1}^2 + \varepsilon^4 \|\dot{e}_N^n\|_{H^1}^2 + h^{2m_0}\right],$$

至此证明完毕。 □

4.5. 用能量方法证明定理 1。

证明。对于 $n=0$，由初始数据 (3.28) 和假设(A)，我们有

$$\left\|e_N^0\right\|_{H^1} + \varepsilon^2 \left\|\dot{e}_N^0\right\|_{H^1} = \|P_N\phi_1 - I_N\phi_1\|_{H^1} + \|P_N\phi_2 - I_N\phi_2\|_{H^1} \lesssim h^{m_0}.$$

此外，利用三角不等式可知，存在一个与 ε 无关的常数$h_1>0$，使得对于 $0<h\le h_1$ 和 $\tau>0$,

$$\begin{aligned}\left\|I_N \mathbf{u}^0\right\|_{H^1} &\le \|P_N\phi_1\|_{H^1} + \left\|e_N^0\right\|_{H^1} \le C_0 + 1,\\ \left\|I_N \dot{\mathbf{u}}^0\right\|_{H^1} &\le \frac{\|P_N\phi_2\|_{H^1}}{\varepsilon^2} + \left\|\dot{e}_N^0\right\|_{H^1} \le \frac{C_0+1}{\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

因此，(4.3)-(4.4) 对 $n=0$ 成立。

现在假设将 e^n 和 $\dot{e}^n$ 分别替换为 e_N^n 和 $\dot{e}_N^n$ 后，(4.3)-(4.4) 对 $n=0$，1,...,m 均成立，并证明 $n=m+1$ 的情形。利用柯西不等式，由误差方程 (4.32)-(4.33) 可得

$$\begin{aligned}\left|\widehat{(e_N^{n+1})}_l\right|^2 &\le (1+\tau)\left|\cos(\omega_l\tau)\widehat{(e_N^n)}_l + \frac{\sin(\omega_l\tau)}{\omega_l}\widehat{(\dot{e}_N^n)}_l\right|^2 + \frac{1+\tau}{\tau}\left|\widehat{\xi_l^n} - \widehat{\eta_l^n}\right|^2,\\ \left|\widehat{(\dot{e}_N^{n+1})}_l\right|^2 &\le (1+\tau)\left|-\omega_l\sin(\omega_l\tau)\widehat{(e_N^n)}_l + \cos(\omega_l\tau)\widehat{(\dot{e}_N^n)}_l\right|^2 + \frac{1+\tau}{\tau}\left|\widehat{\dot{\xi}_l^n} - \widehat{\dot{\eta}_l^n}\right|^2.\end{aligned}$$

分别将上述两个方程乘以 $(\mu_l^2+\frac{1}{\varepsilon^2})(1+\mu_l^2)$ 和 $\varepsilon^2(1+\mu_l^2)$，然后对 $l=-\frac{N}{2}$, ..., $\frac{N}{2}-1$ 求和，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(e_N^{n+1},\dot{e}_N^{n+1}) &\le (1+\tau)\mathcal{E}(e_N^n,\dot{e}_N^n) + \frac{1+\tau}{\tau}\mathcal{E}(\xi^n-\eta^n,\dot{\xi}^n-\dot{\eta}^n)\\ &\le (1+\tau)\mathcal{E}(e_N^n,\dot{e}_N^n) + \frac{1+\tau}{\tau}\left[\mathcal{E}(\xi^n,\dot{\xi}^n) + \mathcal{E}(\eta^n,\dot{\eta}^n)\right].\end{aligned} \tag{4.48}$$

将引理 5 和引理 6 中的结果代入 (4.48)，可得两个相互独立的估计

$$\mathcal{E}(e_N^{n+1},\dot{e}_N^{n+1}) - \mathcal{E}(e_N^n,\dot{e}_N^n) \lesssim \tau\mathcal{E}(e_N^n,\dot{e}_N^n) + \frac{\tau h^{2m_0}}{\varepsilon^2} + \frac{\tau^5}{\varepsilon^6}, \tag{4.49a}$$

$$\mathcal{E}(e_N^{n+1},\dot{e}_N^{n+1}) - \mathcal{E}(e_N^n,\dot{e}_N^n) \lesssim \tau\mathcal{E}(e_N^n,\dot{e}_N^n) + \frac{\tau h^{2m_0}}{\varepsilon^2} + \tau\varepsilon^2 + \frac{\tau^3}{\varepsilon^2}. \tag{4.49b}$$

对 $n=0$,...,m 求和，并应用离散格朗沃尔不等式[40]，我们得到

$$\mathcal{E}(e_N^{m+1},\dot{e}_N^{m+1}) \lesssim \frac{\tau^4}{\varepsilon^6} + \frac{h^{2m_0}}{\varepsilon^2}, \qquad \mathcal{E}(e_N^{m+1},\dot{e}_N^{m+1}) \lesssim \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2 + \frac{h^{2m_0}}{\varepsilon^2},$$

由定义 (4.6) 可得

$$\begin{aligned}\left\|e_N^{m+1}\right\|_{H^1} + \varepsilon^2\left\|\dot{e}_N^{m+1}\right\|_{H^1} &\lesssim h^{m_0} + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2},\\ \left\|e_N^{m+1}\right\|_{H^1} + \varepsilon^2\left\|\dot{e}_N^{m+1}\right\|_{H^1} &\lesssim h^{m_0} + \tau + \varepsilon^2.\end{aligned} \tag{4.50}$$

结合 (4.50) 和 (4.14)，我们证明了 $n=m+1$ 的 (4.3)。

因此，通过取 (4.3) 的最小值，我们得到了关于 $\varepsilon \in (0,1]$ 的一致误差界

$$\left\|e^{m+1}\right\|_{H^1} + \varepsilon^2 \left\|\dot{e}^{m+1}\right\|_{H^1} \lesssim h^{m_0} + \tau.$$

对于 (4.4)，同样根据三角不等式，存在与 ε 无关的常数 $\tau_2 > 0$ 和 $h_2 > 0$，使得对于 $0 < \tau \le \tau_2$ 和 $0 < h \le h_2$

$$\left\|I_N \mathbf{u}^{m+1}\right\|_{H^1} \le \|u(t_{m+1})\|_{H^1} + \left\|e^{m+1}\right\|_{H^1} \le C_0 + 1,$$
$$\left\|I_N \dot{\mathbf{u}}^{m+1}\right\|_{H^1} \le \|\partial_t u(t_{m+1})\|_{H^1} + \left\|\dot{e}^{m+1}\right\|_{H^1} \le \frac{C_0+1}{\varepsilon^2}.$$

因此，(4.4) 对 $n = m+1$ 也成立，取 $\tau_0 = \min\{\tau_1, \tau_2\}$ 和 $h_0 = \min\{h_1, h_2\}$ 即完成证明。□

注 2. 若初始数据 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 为复值函数，则非线性 Klein–Gordon 方程 (1.1) 的解为复值函数。在这种情况下，时间区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 上的多尺度分解变为 *[5, 28, 41]*

$$u(x, t_n + s) = e^{is/\varepsilon^2} v_+^n(x,s) + e^{-is/\varepsilon^2} \overline{v_-^n(x,s)} + r^n(x,s), \quad 0 \le s \le \tau.$$

那么，本文提出的分解方程构造及相应的数值离散也可以很容易地推广到这种情况 *[5]*。

注 3. 与 *[5]*, 提出的 MTI-FP 方法相比， $\partial_s v^n(x, 0) = 0$ 为本文的 MTI-FP 方法带来了两项优势：(i) 它将正则性要求 $u \in C^1([0,T]; H^{m_0+2})$ 从 *[5]* 放宽至 $u \in C^1([0,T]; H^{m_0+1})$；(ii) 它有助于简化的 MTI-FP 方法 (3.23)-(3.28) 对所有 $0 < \varepsilon \le 1$ 均达到最优空间精度。

注 4. 当 $d = 1$ 时，即在一维情形下，定理 1 无需任何 CFL 条件即可成立。然而，对于 $d = 2$ 或 $d = 3$，由于使用逆不等式 *[5, 6, 38]* 控制数值解的 l^∞ 范数，我们必须施加如下技术条件

$$\tau \lesssim \rho_d(h), \quad \text{with} \quad \rho_d(h) = \begin{cases} 1/|\ln h|, & d = 2, \\ \sqrt{h}, & d = 3. \end{cases}$$

此外，若对 $u(x,t)$ 的正则性采用更强的假设 (B)，即对于 $m_0 \ge 4$

(B) $u \in C^1\left([0,T]; H_p^{m_0+2}(\Omega)\right)$, $\|u\|_{L^\infty([0,T];H^{m_0+2})} + \varepsilon^2 \|\partial_t u\|_{L^\infty([0,T];H^{m_0+2})} \lesssim 1$,

我们可以推导出 H^2-范数下的误差估计，并且上述所有分析都可以轻松推广。在这种情况下，利用以下 Sobolev 不等式 *[5, 20]*，对于 $d = 1$，2，3，无需满足 CFL 条件，

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C \|u\|_{H^2(\Omega)}, \quad \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C \|u\|_{H^2(\Omega)}, \quad 1 < p < 6,$$

其中 Ω 是 d 维空间中的一个有界区域（$d = 1$，2，3）。

注 5. 如第 2 节所述，传输条件还可进一步推广至满足一定正则性要求的广义函数 $\gamma(x)$

$$\partial_s v^n(x,0) = \gamma(x), \quad \textit{with} \quad \gamma(x) \in H^{m_0+1}(\Omega). \tag{4.51}$$

在假设(A)下，采用(4.51)的修正的 MTI-FP 方法可获得定理 1中的相同误差界 (4.3)-(4.5)，上述所有分析也同样成立

。类似地，注意，如果 $\gamma(x) \in H^{m_0}(\Omega)$，MTI-FP 方法的空间精度将降低一个阶，即

$$\|e^n\|_{H^1} + \varepsilon^2 \|\dot{e}^n\|_{H^1} \lesssim h^{m_0-1} + \tau, \quad 0 \le n \le \frac{T}{\tau}.$$

5. A multiscale interpolation in time and its uniformly accurate error bounds

本节介绍一种基于多尺度分解（3.3）的多尺度时间插值，以及通过 MTI-FP（3.23）–（3.28）得到的数值结果。

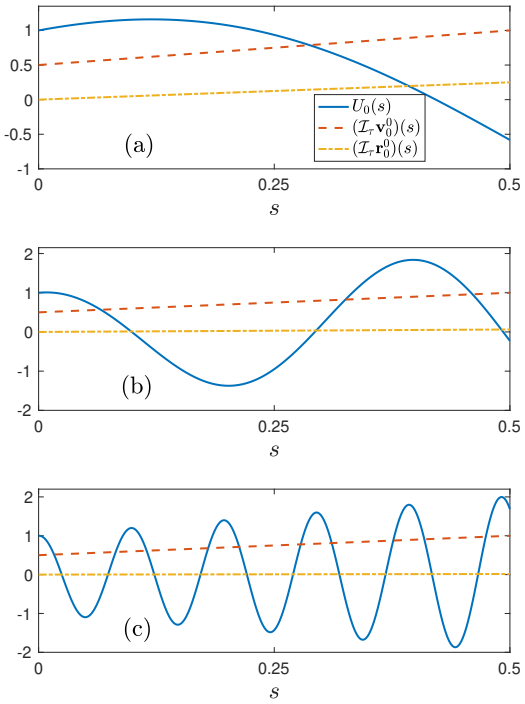


Figure 1. 不同 ε下，多尺度插值（5.4）的示意图：$\tau = 0.5$、 $v^0_{,\,0}{}^0 = 0.5$、 $v^0_{,\,0}{}^1 = 1.0$ 和 $r^0_{,\,0}{}^1 = \varepsilon^2$ ： (a)$\varepsilon = 0.5$, (b) $\varepsilon = 0.25$, 以及 (c) $\varepsilon = 0.125$。

5.1. 时间多尺度插值。令 $\mathcal{I}_\tau$: $C([0,\tau])$（或 $\mathbb{C}^2$） $\to W$:=span$\{1, s\}$ 为线性插值算子，即:

$$(\mathcal{I}_\tau \mathbf{w})(s) = \frac{\tau - s}{\tau} w_0 + \frac{s}{\tau} w_1, \quad 0 \le s \le \tau, \qquad \mathbf{w} = (w_0, w_1)^T \in \mathbb{C}^2, \tag{5.1}$$

$$(\mathcal{I}_\tau w)(s) = \frac{\tau - s}{\tau} w(0) + \frac{s}{\tau} w(\tau), \quad 0 \le s \le \tau, \qquad w \in C([0,\tau]). \tag{5.2}$$

基于 MTI-FP (3.23)-(3.28) 的数值解，记

$$\mathbf{v}_j^n = (v_j^{n,0}, v_j^{n,1})^T \in \mathbb{C}^2, \quad \mathbf{r}_j^n = (0, r_j^{n,1})^T \in \mathbb{C}^2, \quad j = 0, 1, \ldots, N, \quad n \ge 0,$$

则可将 $t \geq 0$ 的多尺度时间插值表示为

$$\mathbf{U}(t) = (U_0(t), ..., U_N(t))^T, \quad t \geq 0, \tag{5.3}$$

其中，对于 $j = 0,\ 1,\ ...,\ N$

$$U_j(t_n + s) = e^{is/\varepsilon^2}(\mathcal{I}_\tau \mathbf{v}_j^n)(s) + \text{c.c.} + (\mathcal{I}_\tau \mathbf{r}_j^n)(s), \quad 0 \leq s \leq \tau, \quad n \geq 0, \tag{5.4}$$

with

$$(\mathcal{I}_\tau \mathbf{v}_j^n)(s) = \frac{\tau - s}{\tau} v_j^{n,0} + \frac{s}{\tau} v_j^{n,1}, \qquad (\mathcal{I}_\tau \mathbf{r}_j^n)(s) = \frac{s}{\tau} r_j^{n,1}, \qquad 0 \leq s \leq \tau.$$

为清晰展示上述多尺度插值(5.4)，图1绘出了不同 ε 下的 $U_0(s)$、$(\mathcal{I}_\tau \mathbf{v}_0^0)(s)$ 和 $(\mathcal{I}_\tau \mathbf{r}_0^0)(s)$，其中 $\tau = 0.5$, $v^0,\ _0{}^0 = 0.5$, $v^0,\ _0{}^1 = 1.0$ 和 $r^0,\ _0{}^1 = \varepsilon^2$ 。

5.2. 一致精确误差界。对于多尺度插值(5.4)，我们有以下误差界。

定理7. 在假设(A)以及定理 1 中得到的 τ_0, h_0 与 ε 无关的条件下，对于任意 $0 < \varepsilon \leq 1$，当 $0 < h \leq h_0$ 和 $0 < \tau \leq \tau_0$ 时，对于$0 \leq t \leq T$，我们有

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t) - (I_N \mathbf{U})(\cdot,t)\|_{H^1} &\lesssim h^{m_0} + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2}, \\ \|u(\cdot,t) - (I_N \mathbf{U})(\cdot,t)\|_{H^1} &\lesssim h^{m_0} + \tau + \varepsilon^2. \end{aligned} \tag{5.5}$$

因此，先取(5.5)中两个误差估计的最小值，再对 $\varepsilon \in (0,1]$，取最大值，可得关于 $\varepsilon \in (0,1]$ 的一致误差估计，如下：

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t) - (I_N \mathbf{U})(\cdot,t)\|_{H^1} &\lesssim h^{m_0} + \max_{0<\varepsilon\leq 1} \min\left\{\frac{\tau^2}{\varepsilon^2}, \varepsilon^2\right\} \\ &\lesssim h^{m_0} + \tau, \qquad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \tag{5.6}$$

证明。利用三角不等式，我们得到

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t) - (I_N \mathbf{U})(\cdot,t)\|_{H^1} &\lesssim \|u(\cdot,t) - (P_N u)(\cdot,t)\|_{H^1} + \|P_N u(\cdot,t) - (I_N \mathbf{U})(\cdot,t)\|_{H^1} \\ &\lesssim h^{m_0} + \|(P_N u)(\cdot,t) - (I_N \mathbf{U})(\cdot,t)\|_{H^1}, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \tag{5.7}$$

对于 $n \geq 0$ 和 $x \in \overline{\Omega}$，定义

$$u_N^\tau(x, t_n + s) := e^{is/\varepsilon^2}(\mathcal{I}_\tau(P_N v^n))(x,s) + \text{c.c.} + (\mathcal{I}_\tau(P_N r^n))(x,s), \quad 0 \leq s \leq \tau, \tag{5.8}$$

那么，对于 $t \in [t_n, t_{n+1}]$ （或 $s \in [0, \tau]$），由 (5.8)、(5.3) 和 (5.4) 可得

$$\begin{aligned} &\|(P_N u)(\cdot, t_n + s) - (I_N \mathbf{U})(\cdot, t_n + s)\|_{H^1} \\ &\lesssim \|(P_N u)(\cdot, t_n + s) - u_N^\tau(\cdot, t_n + s)\|_{H^1} + \|u_N^\tau(\cdot, t_n + s) - (I_N \mathbf{U})(\cdot, t_n + s)\|_{H^1} \\ &\lesssim \|v^n(\cdot,s) - (\mathcal{I}_\tau v^n)(\cdot,s)\|_{H^1} + \|r^n(\cdot,s) - (\mathcal{I}_\tau r^n)(\cdot,s)\|_{H^1} \\ &+ \left\|(P_N v^n)(\cdot,0) - (I_N \mathbf{v}^{n,0})(\cdot)\right\|_{H^1} + \left\|(P_N v^n)(\cdot,\tau) - (I_N \mathbf{v}^{n,1})(\cdot)\right\|_{H^1} \\ &+ \left\|(P_N r^n)(\cdot,\tau) - (I_N \mathbf{r}^{n,1})(\cdot)\right\|_{H^1}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

由前面的估计 (4.7)，对于 $0 \le s \le \tau$ 可得

$$\|v^n(\cdot,s) - (\mathcal{I}_\tau v^n))(\cdot,s)\|_{H^1} \lesssim \tau \|\partial_s v^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^1)} \lesssim \tau, \tag{5.10a}$$

$$\|v^n(\cdot,s) - (\mathcal{I}_\tau v^n)(\cdot,s)\|_{H^1} \lesssim \tau^2 \|\partial_{ss} v^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^1)} \lesssim \frac{\tau^2}{\varepsilon^2}. \tag{5.10b}$$

同样，我们有

$$\begin{aligned} &\|r^n(\cdot,s) - (\mathcal{I}_\tau r^n)(\cdot,s)\|_{H^1} \lesssim \tau, \\ &\|r^n(\cdot,s) - (\mathcal{I}_\tau r^n)(\cdot,s)\|_{H^1} \lesssim \frac{\tau^2}{\varepsilon^2}, \quad 0 \le s \le \tau. \end{aligned} \tag{5.11}$$

由初始数据 (3.4b)、(3.27a) 以及误差估计 (4.3)，我们立即得到

$$\left\|(P_N v^n)(\cdot,0) - (I_N \mathbf{v}^{n,0})(\cdot)\right\|_{H^1} \lesssim h^{m_0} + \tau + \varepsilon^2, \tag{5.12a}$$

$$\left\|(P_N v^n)(\cdot,0) - (I_N \mathbf{v}^{n,0})(\cdot)\right\|_{H^1} \lesssim h^{m_0} + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2}. \tag{5.12b}$$

从 (3.25a) 中的 $(\mathbf{v}^{n,1})_l$ 减去 (3.13) 中的傅里叶系数 $\widehat{(v^n)}_l(\tau)$，注意到 (4.3)，并利用 $|a_l(\tau)| \lesssim 1$ 和 $|c_l(\tau)| \lesssim \tau$，我们得到

$$\begin{aligned} \left\|(P_N v^n)(\cdot,\tau) - (I_N \mathbf{v}^{n,1})(\cdot)\right\|_{H^1} &\lesssim \left\|(P_N v^n)(\cdot,0) - (I_N \mathbf{v}^{n,0})(\cdot)\right\|_{H^1} \\ &\quad + \tau \left(\|g^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^1)} + \left\|I_N \mathbf{g}^{n,0}\right\|_{H^1} \right) \\ &\lesssim \|e_N^n\|_{H^1} + \varepsilon^2 \|\dot{e}_N^n\|_{H^1} + \tau \lesssim h^{m_0} + \tau + \varepsilon^2. \end{aligned} \tag{5.13}$$

另一方面，类似于引理 5 中对局部截断误差的估计，应用泰勒展开和误差界 (4.3)，我们有

$$\begin{aligned} &\left\|(P_N v^n)(\cdot,\tau) - (I_N \mathbf{v}^{n,1})(\cdot)\right\|_{H^1} \\ &\lesssim \left\|(P_N v^n)(\cdot,0) - (I_N \mathbf{v}^{n,0})(\cdot)\right\|_{H^1} + \tau^2 \|\partial_s g^n\|_{L^\infty([0,\tau];H^1)} \\ &\lesssim h^{m_0} + \tau^2/\varepsilon^2. \end{aligned} \tag{5.14}$$

类似地，我们可以得到如下估计

$$\begin{aligned} &\left\|(P_N r^n)(\cdot,\tau) - (I_N \mathbf{r}^{n,1})(\cdot)\right\|_{H^1} \lesssim h^{m_0} + \tau + \varepsilon^2, \\ &\left\|(P_N r^n)(\cdot,\tau) - (I_N \mathbf{r}^{n,1})(\cdot)\right\|_{H^1} \lesssim h^{m_0} + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

将 (5.10)-(5.11)、(5.12)、(5.13)-(5.14) 和 (5.15) 代入 (5.9) 和 (5.8)，我们得到 (5.5) 和 (5.6) 中的误差估计。证明完成。□

6. Numerical results

本节报告数值结果，以验证我们的误差界并展示其尖锐性，同时应用 MTI-FP 方法数值研究非线性 Klein–Gordon 方程 (1.1) 收敛至不同极限模型的收敛速率。

6.1. 精度测试。取 $d=1$、 $\lambda=1$ 和

$$\phi_1(x)=\frac{1}{2}\mathrm{sech}(x^2),\quad \phi_2(x)=\frac{1}{2}e^{-x^2},\quad x\in\mathbb{R}, \tag{6.1}$$

在 (1.1) 中，以及在 (3.1) 中的 $\Omega=(-16,16)$，其值足够大，因此截断误差可以忽略。

记

$$e^{\varepsilon}_{\tau,h}(t_n)=\|u(\cdot,t_n)-I_N\mathbf{u}^n\|_{H^1},\quad e^{*}_{\tau,h}(t_n)=\max_{0<\varepsilon\le 1}\left\{e^{\varepsilon}_{\tau,h}(t_n)\right\},\quad n\ge 0.$$

TABLE 1. 不同 ε 和 h 下的空间误差，其中 $\tau=1\times10^{-6}$

$e^{\varepsilon}_{\tau,h}(1)$	$h_0=1$	$h_0/2$	$h_0/2^2$	$h_0/2^3$
$\varepsilon_0=0.5$	1.63E-01	9.82E-03	2.94E-05	2.16E-09
$\varepsilon_0/2^1$	1.45E-01	1.55E-02	6.02E-05	7.28E-09
$\varepsilon_0/2^2$	7.72E-02	4.26E-03	1.89E-05	3.70E-09
$\varepsilon_0/2^3$	1.48E-01	1.26E-02	9.49E-05	5.02E-09
$\varepsilon_0/2^4$	1.09E-01	1.19E-02	7.63E-05	7.24E-09
$\varepsilon_0/2^5$	1.59E-01	9.71E-03	7.54E-05	6.70E-09
$\varepsilon_0/2^7$	1.67E-01	9.15E-03	4.89E-05	1.49E-08
$\varepsilon_0/2^9$	3.85E-02	1.38E-02	8.05E-05	1.57E-07
$\varepsilon_0/2^{11}$	1.73E-01	8.26E-03	5.14E-05	1.26E-07
$\varepsilon_0/2^{13}$	1.44E-01	8.21E-03	8.75E-05	1.30E-07

由于没有精确解，因此采用多尺度时间积分法（MTI-FP 方法），在良备初值 [5] 、极小网格尺寸 $h=h_e=1/32$ 和时间步长 $\tau=\tau_e=1\times10^{-6}$下，通过数值计算得到“精确”解。表1给出了时间步长 $\tau=\tau_e$ 极小、使时间离散误差可忽略时，MTI-FP 方法 (3.23)-(3.28) 在 $t_n=1$ 处针对不同 ε 和h 得到的空间误差。表2给出了网格 $h=h_e$ 极细、使空间离散误差可忽略时，在 $t_n=1$ 处针对不同 ε 和 τ 得到的时间误差。此外，图2绘出了通过插值 (5.3)-(5.4) 得到的多尺度插值误差 $|u(0,t)-U_{N/2}(t)|$，其中$U_{N/2}(t)$，对应不同的 ε 和 τ 以及 $h=h_e$（或 $N=2^{10}$）。

从表1-2和图2中，我们可以得出以下结论

- 当解光滑时，MTI-FP 方法 (3.23)-(3.28) 在空间上达到谱精度，且对 $\varepsilon\in(0,1]$ 是一致的（参见表 1 ）。当 $\tau\lesssim\varepsilon^2$ 时，该方法在时间上具有二阶精度（参见表2上三角）；当 $\varepsilon\lesssim\sqrt{\tau}$ 时，在时间上具有一阶精度（参见表2下三角）。该方法对 $\varepsilon\in(0,1]$ 在时间上获得一致的一阶收敛阶（参见表2最后一行）。所有这些数值结果证实了我们在定理 1 中的误差界，并表明它们是尖锐的。

- 多尺度插值 (5.3)-(5.4) 关于 $\varepsilon\in(0,1]$ 在时间上一致地具有一阶精度。这些结果证实了我们在定理7中的误差界。

为展示高维情况下所提出的 MTI-FP 方法（3.23）—（3.28）的性能，我们在（1.1）中取 $d=2$、 $\lambda=1$、 $\phi_1(x、y)=\exp(-x^2-(y+2)^2)+\exp(-x^2-(y-2)^2)$ 以及 $\phi_2(x、y)=\exp(-x^2-y^2)$。有界计算区域

TABLE 2. 不同 ε 和 τ下， $h = 1/32$ 的时间误差

$e^{\varepsilon}_{\tau,h}(1)$	$\tau_0 = 0.2$	$\tau_0/2^2$	$\tau_0/2^4$	$\tau_0/2^6$	$\tau_0/2^8$	$\tau_0/2^{10}$	$\tau_0/2^{12}$
$\varepsilon_0 = 0.5$	1.54E-02	9.70E-04	6.01E-05	3.74E-06	2.34E-07	1.47E-08	2.35E-09
rate	—	1.99	2.01	2.00	2.00	1.99	1.33
$\varepsilon_0/2^1$	1.45E-02	4.02E-03	2.64E-04	1.64E-05	1.03E-06	6.44E-08	5.20E-09
rate	—	0.92	1.96	2.00	2.00	2.00	1.82
$\varepsilon_0/2^2$	2.50E-02	6.80E-03	1.25E-03	8.04E-05	4.99E-06	3.11E-07	1.93E-08
rate	—	0.94	1.22	1.98	2.00	2.00	2.00
$\varepsilon_0/2^3$	2.67E-02	6.83E-03	2.01E-03	3.17E-04	2.04E-05	1.27E-06	7.98E-08
rate	—	0.98	0.88	1.33	1.98	2.00	2.00
$\varepsilon_0/2^4$	2.44E-02	6.08E-03	1.53E-03	4.25E-04	6.84E-05	4.52E-06	2.83E-07
rate	—	1.00	1.00	0.92	1.32	1.96	2.00
$\varepsilon_0/2^5$	2.55E-02	6.32E-03	1.57E-03	3.97E-04	1.11E-04	1.75E-05	1.15E-06
rate	—	1.01	1.01	0.99	0.92	1.33	1.97
$\varepsilon_0/2^7$	2.59E-02	6.40E-03	1.58E-03	3.95E-04	9.88E-05	2.51E-05	7.04E-06
rate	—	1.01	1.01	1.00	1.00	0.99	0.92
$\varepsilon_0/2^9$	2.43E-02	6.08E-03	1.51E-03	3.76E-04	9.39E-05	2.35E-05	5.92E-06
rate	—	1.00	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
$\varepsilon_0/2^{11}$	2.62E-02	6.46E-03	1.60E-03	3.98E-04	9.95E-05	2.49E-05	6.22E-06
rate	—	1.01	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
$\varepsilon_0/2^{13}$	2.67E-02	6.59E-03	1.63E-03	4.06E-04	1.01E-04	2.54E-05	6.35E-06
rate	—	1.01	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
$e^{*}_{\tau,h}(1)$	2.67E-02	6.83E-03	2.01E-03	4.25E-04	1.11E-04	2.54E-05	7.04E-06
rate	—	0.98	0.88	1.12	0.97	1.06	0.92

取为 $\Omega = (-20, 20) \times (-20, 20)$。图3展示了针对 $\varepsilon = 1$ 和 $\varepsilon = 0.01$ 数值获得的解u 的时间演化。

6.2. 非线性 Klein–Gordon 方程趋于其极限模型的收敛速率。现在，我们采用所提出的 MTI-FP 方法 (3.23)–(3.28)，数值研究非线性 Klein–Gordon 方程 (1.1) 在不同 γ 下趋于其极限模型非线性薛定谔波方程 (2.10) 的收敛速率，以及非线性薛定谔波方程 (2.10) 在不同 γ 下趋于其极限模型非线性薛定谔方程 (2.8) 的收敛速率。非线性薛定谔波方程 (2.10) 采用指数波积分器傅里叶伪谱 (EWI-FP) 方法 [10, 24] 进行数值求解，非线性薛定谔方程 (2.8) 则采用时间分裂傅里叶伪谱 (TSSP) 方法 [4, 9]进行数值求解。

记 $v_{\rm SW} := v_{\rm SW}(x\ t)$ 为非线性薛定谔波方程 (2.10) 的解， $v_{\rm SE} := v_{\rm SE}(x\ t)$ 为非线性薛定谔方程 (2.8) 的解。定义误差函数

$$e_{\rm SW}(t) = \left\| u(\cdot,t) - \left[e^{it/\varepsilon^2} v_{\rm SW}(\cdot,t) + e^{-it/\varepsilon^2} \overline{v_{\rm SW}(\cdot,t)} \right] \right\|_{H^1},$$
$$e_{\rm WE}(t) = \| v_{\rm SW}(\cdot,t) - v_{\rm SE}(\cdot,t) \|_{H^1}, \qquad t \geq 0.$$

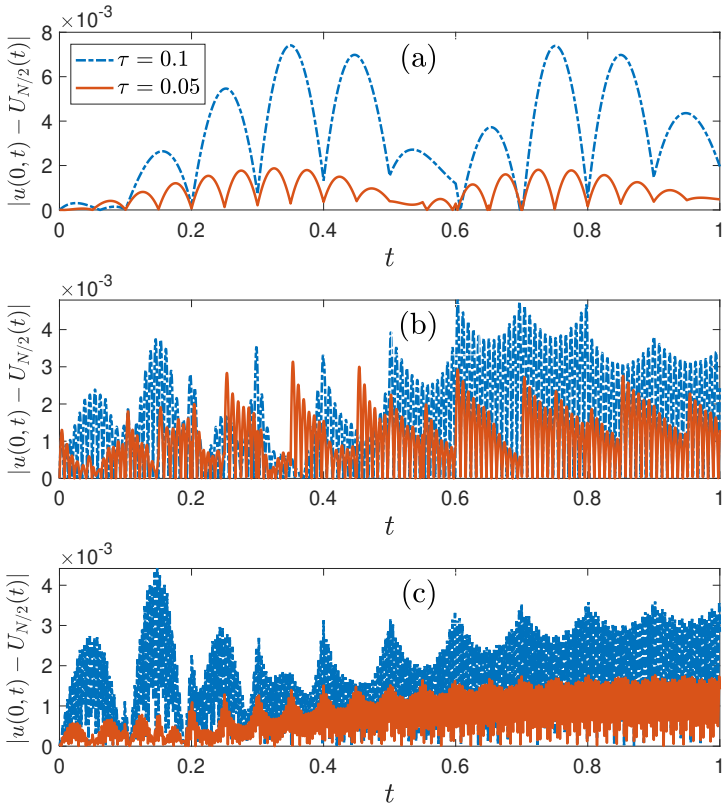


FIGURE 2. 不同 ε 和 τ 取值下，通过多尺度插值 (5.3)-(5.4) 得到的多尺度插值误差 $|u(0,t) - U_{N/2}(t)|$，其中 $U_{N/2}(t)$：(a) $\varepsilon = 0.5$，(b) $\varepsilon = 0.05$，以及 (c) $\varepsilon = 0.005$。

图4绘出了在一维（一维）下的误差 $e_{\rm SW}(t)$，即在 (1.1) 中取 $d = 1$, $\lambda = 1$ 和初始数据 (6.1)，在 (3.1) 中取 $\Omega = (-16, 16)$，并采用非常精细的网格 $h = 1/32$ 和时间步长 $\tau = 1 \times 10^{-6}$，对应 (2.10) 中 $\gamma(x)$ 的不同取值。图5展示了类似设置下的误差 $e_{\rm WE}(t)$。我们还在二维和三维情形下进行了数值研究，结论相似，因此为简洁起见，此处省略细节。

从图 4 和图 5 可以得出以下结论：(i) 对于不同的 γ(x) 选取，非线性 Klein–Gordon 方程 (3.1) 关于 ε 二次收敛到其极限模型非线性薛定谔波方程 (2.10)（且在全局时间范围内成立），即

$$e_{\rm SW}(t) \le C_\gamma \varepsilon^2, \quad t \ge 0, \tag{6.2}$$

其中，正数常量 C_γ 取决于 γ，但与 ε 和时间 t无关。一般而言，当 γ(x) $\equiv 0$时，常量 C_γ 在 γ 的不同取值中取最小值（参见图4）。（ii）对于 γ(x)的不同取值，NLSW (2.10) 关于 ε 以二次速度收敛到其极限模型 NLSE (2.8)，即

$$e_{\rm WE}(t) \le (C_1 + C_2 t)\varepsilon^2, \quad t \ge 0, \tag{6.3}$$

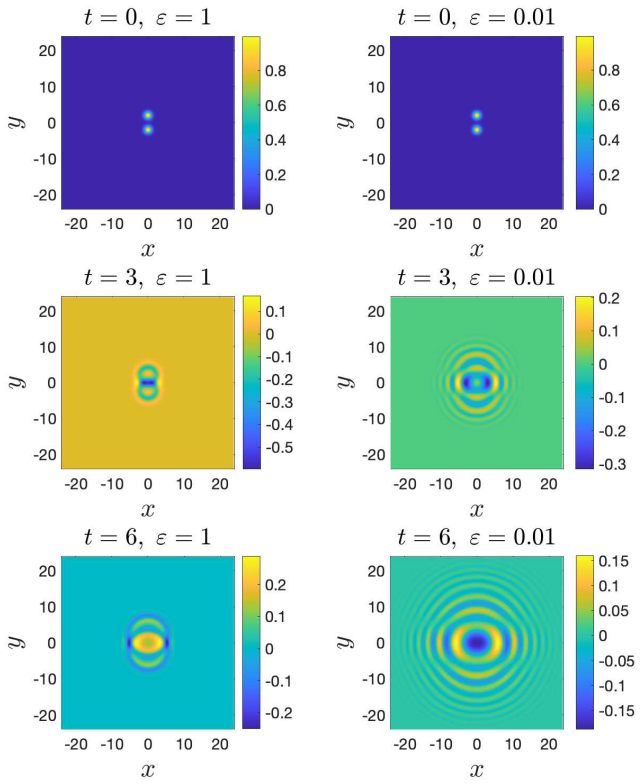


FIGURE 3. 二维非线性 Klein–Gordon 方程（NKGE）（1.1）的解 u 在 $\varepsilon = 1$（左列）和 $\varepsilon = 0.01$（右列）中的动力学。

其中，两个正数常量 C_1 和 C_2 与 ε 和时间 t 无关（参见图5）。

7. CONCLUSION

针对带有无量纲参数 $0 < \varepsilon \leq 1$ 的非线性 Klein-Gordon 方程（NKGE）在非相对论极限区域内的求解，提出并分析了一种一致准确的多尺度时间积分傅里叶伪谱（MTI-FP）方法。该方法基于两个要素设计：（i）在每个时间区间内，按频率对 NKGE 进行多尺度分解，并采用简化的传递条件；（ii）采用指数波积分器进行时间离散，并采用傅里叶伪谱方法进行空间离散。我们为 MTI-FP 方法建立了最优误差界，该方法关于 $\varepsilon \in (0, 1]$ 一致准确。此外，通过在每个时间区间内对多尺度分解中的微观变量进行线性插值，提出了一种多尺度时间插值方法，以获得任意时刻 $t \geq 0$ 的解的一致准确近似。数值结果验证了我们的误差界，展示了其尖锐性，并表明

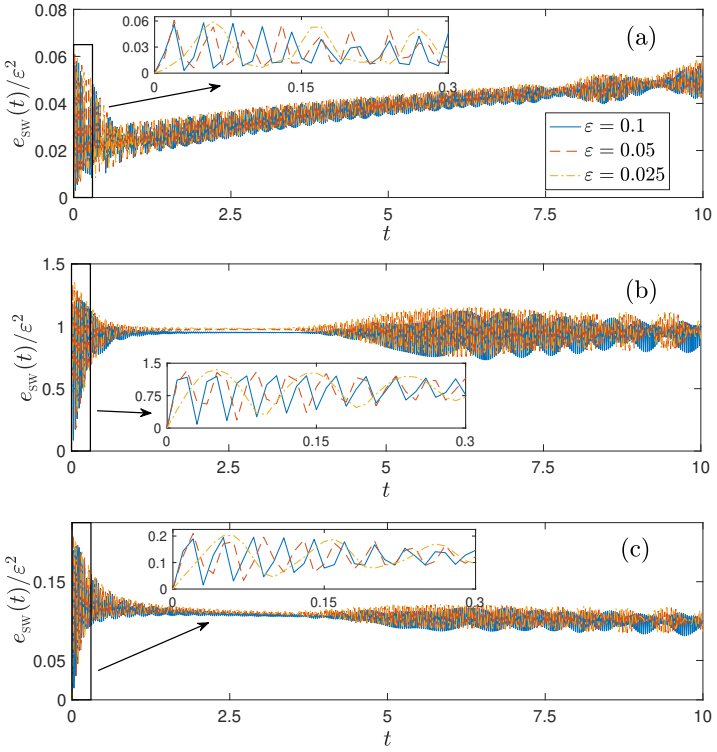


FIGURE 4. 在一维中，具有不同 γ 的非线性 Klein–Gordon 方程 (3.1) 收敛至其极限模型非线性薛定谔波方程 (2.10)：(a) $\gamma(x) \equiv 0$；(b) 将 $\gamma(x)$ 作为良备初值 (2.12)；(c) $\gamma(x) = \frac{3}{2}\lambda i|v_0(x)|^2 v_0(x)$，其中 $v_0(x)$ 由 (2.6) 给出。

在非相对论区域内，NKGE 以二次收敛速率趋近于其不同的极限模型。

FUNDING

作者感谢匿名审稿人提出的宝贵建议。本研究部分获得新加坡教育部 AcRF 一级资助，资助编号为 A-8003584-00-00。

REFERENCES

[1] AHMED, F.（2020）卡鲁扎–克莱因理论中具有线性势的宇宙弦时空背景下的广义Klein–Gordon振子。《欧洲物理学杂志 C》，80，211。[2] BACHELOT, A.（2011）反德西特宇宙学中的Klein–Gordon 方程。《纯粹与应用数学杂志》，96，527–554。[3] BAINOV, D. D. & MINCHEV, E.（1995）非线性Klein–Gordon方程初边值问题整体解的不存在性。《数学物理杂志》，36，756–762。

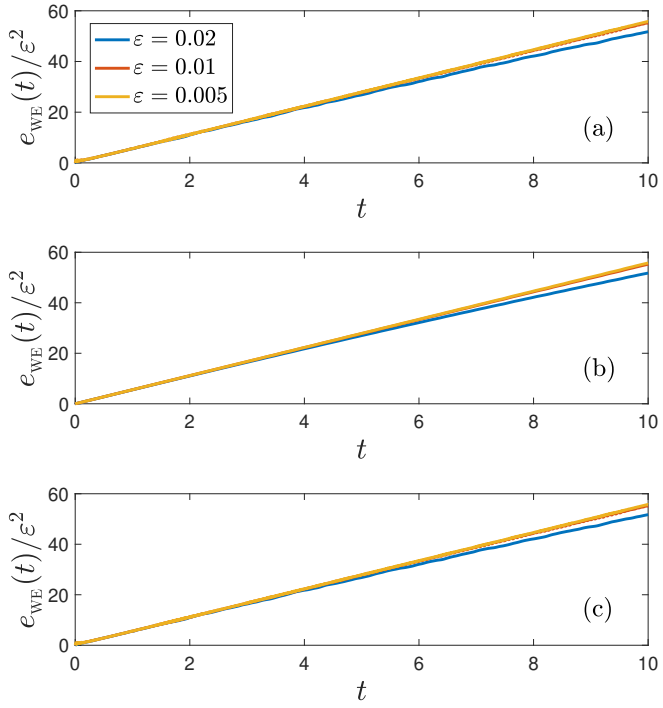


FIGURE 5. 一维中不同 γ 条件下，非线性薛定谔波方程（2.10）收敛至其极限模型非线性薛定谔方程（2.8）：（a） $\gamma(x) \equiv 0$；（b）将 $\gamma(x)$作为良备初值（2.12）；（c） $\gamma(x) = \frac{3}{2}\lambda i|v_0(x)|^2 v_0(x)$，其中 $v_0(x)$由（2.6）给出。

[4] BAO, W., CAI, Y. & FENG, Y. （2023）非线性薛定谔方程时间分裂方法长时间计算的改进一致误差界。《数学计算》，92，1109–1139。[5] BAO, W., CAI, Y. & ZHAO, X. （2014a）非相对论极限区域内Klein–Gordon 方程的一致准确多尺度时间积分伪谱方法。SIAM 数值分析杂志，52，2488–2511。[6] BAO, W. & DONG, X. （2012）非相对论极限区域内Klein–Gordon 方程数值方法的分析与比较。《数值数学》，120，189–229。[7] BAO, W., DONG, X. & ZHAO, X. （2014b）高度振荡二阶微分方程的一致准确多尺度时间积分器。《数学研究杂志》，47，111–150。[8] BAO, W., FENG, Y. & SU, C. （2022）弱非线性非线性Klein–Gordon方程长时间动力学的时间分裂谱方法一致误差界。《数学计算》，91，811–842。[9] BAO, W. & WANG, C. （2024a）半光滑非线性薛定谔方程时间分裂方法的误差估计。《数学计算》，93，1599–1631。[10] BAO, W. & WANG, C. （2024b）低正则性势非线性薛定谔方程指数波积分器的最优误差界

与非线性。《SIAM 数值分析杂志》，62，93–118。[11] Bao, W. & Zhao, X. (2019) 非相对论极限区域内非线性Klein–Gordon方程数值方法的比较。《计算物理学杂志》，398，108886。[12] Bernardi, C. & Maday, Y. (1997) 谱方法。载于《数值分析手册》，5，209–485。[13] Brenner, P. & von Wahl, W. (1981) 非线性波动方程的整体经典解。《数学杂志》，176，87–121。[14] Calvo, M. C. & Schratz, K. (2022) 从经典区域到非相对论极限区域的Klein–Gordon方程一致精度低正则性积分器。《SIAM 数值分析杂志》，60，888–912。[15] Chartier, P., Crouseilles, N., Lemou, M. & Méhats, F. (2015) 高度振荡Klein–Gordon方程和非线性薛定谔方程的一致准确数值格式。《数值数学》，129，211–250。¨,[16] Cohen, D., Hairer, E. & Lubich, C. (2008) 非线性波动方程数值离散中的能量、动量和作用量守恒。《数值数学》，110，113–143。[17] Detweiler, S. (1980) Klein–Gordon方程与旋转黑洞。《物理评论 D》，22，2323。[18] Dong, X., Xu, Z. & Zhao, X. (2014) 非相对论极限区域内非线性Klein–Gordon方程的时间分裂伪谱离散。《计算物理通讯》，16，440–466。[19] Duncan, D. B. (1997) 非线性Klein–Gordon方程的辛有限差分逼近。《SIAM 数值分析杂志》，34，1742–1760。[20] Evans, L. C. (2022) 偏微分方程。美国数学学会，普罗维登斯。[21] Faou, E. & Schratz, K. (2014) 非相对论极限区域内Klein–Gordon方程的渐近保持格式。《数值数学》，126，441–469。[22] Gautschi, W. (1961) 基于三角多项式的常微分方程数值积分。《数值数学》，3，381–397。[23] Hairer, E., Hochbruck, M., Iserles, A. & Lubich, C.(2006) 几何数值积分。《奥伯沃尔法赫报告》，3，805–882。[24] Hochbruck, M. & Ostermann, A. (2010) 指数积分器。《数值学报》，19，209–286。[25] Jiménez, S. & Vázquez, L. (1990) 四种非线性Klein–Gordon方程数值格式的分析。《应用数学与计算》，35，61–94。[26] Lei, Z. & Wu, Y. (2023) 三次非线性Klein–Gordon方程的非相对论极限。arXiv预印本，arXiv:2309.10235。[27] Li, J., Liu, Y., Wu, Y. & Zheng, H. (2025) 非线性Klein–Gordon方程孤波解的稳定性与不稳定性。《泛函分析杂志》，289，110981。[28] Machihara, S., Nakanishi, K. & Ozawa, T. (2002) 非线性Klein–Gordon方程在能量空间中的非相对论极限。《数学年刊》，322，603–621。[29] Maireche, A. (2021) 非交换量子力学对称性下修正中心复势的Klein–Gordon方程解。《斯里兰卡物理学杂志》，22，1。

[30] Masmoudi, N. & Nakanishi, K. (2002) 从非线性Klein–Gordon方程到耦合非线性薛定谔方程组。《数学年刊》，324，359–389。[31] Mauser, N. J., Zhang, Y. & Zhao, X. (2020) 关于旋转非线性克莱因–戈尔登方程：非相对论极限与数值方法。《多尺度建模与仿真》，18，999–1024。[32] Morawetz, C. S. & Strauss, W. A. (1972) 非线性相对论波动方程解的衰减与散射。《纯粹与应用数学通讯》，25，1–31。[33] Najman, B. (1990) 非线性Klein–Gordon方程的非相对论极限。《非线性分析》，15，217–228。[34] Nakamura, M. & Ozawa, T. (2001) Sobolev空间中非线性Klein–Gordon方程的柯西问题。《数理科学研究所出版物》，37，255–293。[35] Ohlsson, T. (2011) 《相对论量子物理学》。剑桥大学出版社，剑桥。[36] Pilkuhn, H. (2006) 原子的克莱因–戈尔登方程。《当代物理学》，47，11–24。[37] Scheider, D. (2020) 三次克莱因–戈尔登方程的呼吸子解。《非线性》，33，7140。[38] Shen, J., Tang, T. & Wang, L. L.(2011) 《谱方法：算法、分析与应用》。施普林格，柏林。[39] Strauss, W. & Vázquez, L. (1978) 非线性Klein–Gordon方程的数值解。《计算物理学杂志》，28，271–278。[40] Tao, T.(2006) 《非线性色散方程与波动方程的局部和整体分析》。美国数学学会，普罗维登斯。[41] Tsutsumi, M. (1984) 二维空间中非线性Klein–Gordon方程的非相对论近似。《非线性分析》，8，637–643。[42] Wang, Y. & Zhao, X. (2022) 非线性Klein–Gordon方程的对称低正则积分器。《数学计算》，91，2215–2245。

Department of Mathematics, National University of Singapore, Singapore 117076, Singapore
Email address: matbaowz@nus.edu.sg

Department of Mathematics, National University of Singapore, Singapore 117076, Singapore
Email address: e1353374@u.nus.edu