arXiv:2602.04993v1 [math.DS] 4 Feb 2026

# 冻结过程中广义区间交换变换与其逆变换之间共轭映射正则性的惊人差异

KRZYSZTOF FRĄCZEK 和 ŁUKASZ KOTLEWSKI

摘要。若 Rauzy–Veech 组合是 8-完全的，广义区间交换变换（GIETs）与区间交换变换（IETs）半共轭。当这种半共轭是同胚时，一个基本问题是理解共轭映射及其逆映射的正则性。与通常认为它们的 Hölder 正则性会同时退化的预期相反，我们展示了一种强烈不对称的行为。对于双曲周期型自相似区间交换变换，以及通过冻结（零温）极限得到的自然的一参数中心仿射区间交换变换形变族，共轭映射会变得任意不规则，而其逆映射则始终一致地满足 Hölder 连续性。借助重整化的热力学形式和零温极限，我们得到了不变测度与共形测度的 Hausdorff 维数，以及共轭映射及其逆映射的上确界 Hölder 指数的精确渐近行为。

## 1. 引言

庞加莱和 Herman 提出了支撑一维动力系统的两种基本视角：庞加莱利用横截面和回归映射，将光滑曲面流化为分段区间动力学；而 Herman 的刚性纲领强调，动力系统分类需要对共轭映射的正则性进行定量控制。

广义区间交换变换（GIET）是庞加莱方法的一种现代实现：它们是分段光滑、保定向的区间双射，可作为高亏格曲面上流的回归映射。保勒贝格测度的这类变换是区间交换变换（IET），它们是分段平移映射；而仿射区间交换变换（AIET）构成一个中间类别，其映射为带正斜率的分段线性映射。

Rauzy–Veech 归纳为 GIET 赋予一种重整化方案和一个组合旋转数。根据 Yoccoz 的一项基本定理，具有 8-完全组合旋转数的 GIET $f$ 与具有相同组合结构的区间交换变换 $T$ 半共轭，其间通过连续映射 $h$建立联系。在

2000 数学主题分类。37E05, 37C15, 37A05, 37A40, 37C45, 37C83, 37D35.

不存在游荡区间时，这种半共轭就是共轭。这引出了 Herman 纲领的核心刚性问题：确定共轭 $h$ 及其逆映射 $h^{-1}$的 Hölder 正则性。

虽然 $C^1$-微分同胚自动具有正则性相同的逆映射，但同胚却不存在这种对称性。在低正则性范围内，共轭及其逆映射的 Hölder 性质可能存在显著差异。本文旨在展示一些自然的仿射区间交换变换（AIET）族，其中共轭 $h$ 及其逆映射 $h^{-1}$ 的上确界 Hölder 指数 $\mathfrak{H}$之间的差距可以任意大。具体而言，我们构造了单参数族，其中$h^{-1}$ 保持一致的 Hölder 正则性，而 $\mathfrak{H}(h)$ 则趋于零。

我们研究自相似情形：双曲周期型的区间交换变换（IET） $T$，以及与其 $f$ 拓扑共轭且具有中心对数斜率向量$\omega$的仿射区间交换变换（AIET）。对于固定的区间交换变换（IET） $T$ 和对数斜率向量 $\omega$，相应的仿射区间交换变换（AIET）类记为 Aff$(T,\ \omega)$。在这一情形下， $\mathfrak{H}(h)$、$\mathfrak{H}(h^{-1})$的显式公式，以及不变测度和共形测度的豪斯多夫维数，最近已在 [1], 中给出，其中 $h$ 和 $h^{-1}$ 分别是这些测度的分布函数。

我们在 Rauzy–Veech 重正化的热力学形式框架下重写这些公式，该框架由有限型移位 $X$ 建模，并采用由对数斜率向量确定的局部常值势函数 $\Phi_\omega$ 。令 $m_{\Phi_\omega}$表示与势函数 $\Phi_\omega$相关联、定义在 $X$ 上的 Gibbs测度。按照 [10]和 [5], 中建立的框架，我们使用最大遍历平均 $\Phi_\omega$ 和最小遍历平均 $\underline{\Phi}_\omega$,$\overline{\ }$以及 $\Phi_\omega$-最大化$X(\Phi_\omega)\subset X$ 和 $\Phi_\omega$-最小化 $X(\Phi_\omega)\subset X$ 子移位。这些对象旨在揭示零温极限的结构，即 Gibbs测度族 $m_{t\Phi_\omega}$ 在逆温度参数 $t\to+\infty$下的渐近行为。利用 [5] 中关于局部常值势函数零温极限（亦称冻结机制）的结果，我们描述自相似情形下 AIET 族 $f_{t\omega}\in$ Aff$(T,t\omega)$ 的共轭及其逆映射 $\mathfrak{H}(h_{t\omega}^{-1})$的上确界Hölder指数$\mathfrak{H}(h_{t\omega})$ ，以及不变测度 $\mu_{t\omega}$ 和共形测度 $\nu_{t\omega}$的豪斯多夫维数，在 $t\to+\infty$时的渐近行为。用这种热力学语言，记 $h_{top}$ 为系统的拓扑熵，本文的主要结果可表述如下：

**定理 1.1**。 假设 $T$ 是一种双曲周期型区间交换变换，且 $\omega\in\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ 是一个中心型对数斜率向量。考虑 *AIET* 族 $f_{t\omega}\in \mathrm{Aff}(T,t\omega)$，其中 $t\in\mathbb{R}$。那么，

$$\lim_{t\to+\infty}\mathfrak{H}(h_{t\omega}^{-1})=\frac{h_{top}(\overline{X}(\Phi_\omega))}{h_{top}(X)}=\lim_{t\to+\infty}\dim_H(\nu_{t\omega}),\quad and$$
$$\lim_{t\to+\infty}t\,\mathfrak{H}(h_{t\omega})=\frac{h_{top}(X)}{\overline{\Phi}_\omega-\underline{\Phi}_\omega}<\frac{h_{top}(X)}{\overline{\Phi}_\omega-\int_X\Phi_\omega\,d\,m_{\Phi_0}}=\lim_{t\to+\infty}t\dim_H(\mu_{t\omega}).$$

因此，共轭映射 $h_{t\omega}$（介于 $f_{t\omega}$ 和 $T$ 之间）的 Hölder指数上确界会随着 $t \to +\infty$ 趋于零，其衰减速率可被精确确定。相比之下，逆共轭映射 $h_{t\omega}^{-1}$ 的 Hölder指数上确界始终有一个统一的正下界；正如我们将证明的，该下界等于 $\frac{h_{top}(X(\Phi_\omega))}{h_{top}(X)}$。在最后一节中，我们给出一个具体例子，其中这个常数为正，并计算其值。由此，我们构造了一个具体的单参数仿射区间交换变换族，展现了此前所述的共轭映射与其逆映射之间的正则性差异。

## 2. 广义区间交换变换、仿射区间交换变换及其与区间交换变换的共轭

研究高亏格紧曲面上的流时，考察的主要对象之一是 $g$ 广义区间交换变换（GIET），即区间上的分段光滑（且递增）双射，它们有 $d = 2g+\kappa-1$ 个连续区间，其中 $\kappa$ 是流的奇点（不动点）数量。它们自然地作为此类流的庞加莱截面的首次返回映射出现，也就是说，作为回到一个与流 $I$ 横截的区间的映射。对于每个 GIET $f: I \to I$，我们都关联其组合数据，即一个有限字母表 $\mathcal{A}$，用于标记重排 $(I_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 前的区间和重排$(f(I_\alpha))_{\alpha\in\mathcal{A}}$后的区间；此外还包括一对双射 $\pi = (\pi_t, \pi_b)$，称为置换，用于描述重排 $\pi_t$ 前各区间的位置：$\mathcal{A} \to \{1, \ldots, d\}$ 以及重排 $\pi_b$后的位置：$\mathcal{A} \to \{1, \ldots, d\}$。GIET 的一个关键类别是仿射区间交换变换（AIET），它们是在每个交换区间上具有正的常数导数的分段线性 GIET。如果导数还恒等于 1，那么得到的就是区间交换变换（IET）。这类映射出现在考察保持曲面面积测度的流时。

每个区间交换变换 $T: I \to I$ 都由其组合数据 $\pi$ 和数值数据唯一确定，也就是说，由交换区间 $\lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}_{>0}$ 的长度向量唯一确定，其中 $\lambda_\alpha = |I_\alpha|$ 满足 $\alpha \in \mathcal{A}$。因此，区间交换变换 $T$可由二元组 $(\pi, \lambda)$表示。反过来，每个仿射区间交换变换 $f: I \to I$ 都由二元组 $(\pi, \lambda)$ 以及斜率的对数向量 $\omega = (\omega_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 唯一确定，其中 $\omega_\alpha = \log Df|_{I_\alpha}$ 满足$\alpha \in \mathcal{A}$。因此，仿射区间交换变换 $f$可由三元组 $(\pi, \lambda, \omega)$ 表示。

研究广义区间交换变换的一种主要工具是***Rauzy-Veech*** 归纳。对于每个 GIET $f: I \to I$，若重排$I_{\pi_t^{-1}(d)}$ 前的末区间不同于重排 $f(I_{\pi_b^{-1}(d)})$后的末区间，我们定义 $\mathcal{RV}(f): J \to J$ 为到 $J$ 两个区间中较长者$I\backslash I_{\pi_t^{-1}(d)}$ 或 $I\backslash f(I_{\pi_b^{-1}(d)})$的首次回归映射。如果 $I\backslash I_{\pi_t^{-1}(d)}$ 是两个区间中较长者，那么我们称 $f$ 为底部型，$\pi_b^{-1}(d) \in \mathcal{A}$ 为归纳步骤的获胜者，而$\pi_t^{-1}(d) \in \mathcal{A}$ 为失败者。反之，如果 $I\backslash f(I_{\pi_b^{-1}(d)})$ 是两个区间中较长者，那么我们称 $f$ 为顶部型，$\pi_t^{-1}(d)$ 为归纳

步骤的失败者，而 $\pi_b^{-1}(d)$ 为失败者。如果这一过程可以无限继续，我们称 $f$ 为无限可重整的 。假设 $f$ 是无限可重整的，我们得到一列广义区间交换变换 $\{\mathcal{RV}^k(f)\colon I^{(k)} \to I^{(k)} \mid k \geqslant 0\}$ 以及一列相应的排列 $\{\pi^{(k)}\}_{k\geqslant 0}$。

A*Rauzy* 图 $\mathcal{RG}(\mathcal{A})$是一个有向标记图，其顶点是 $\mathcal{A}$ 的置换，边则从置换指向通过 $\mathcal{RV}$得到的可能像；根据重整化类型，这些边标记为 $t$ 或 $b$ 。对于给定的无限可重整化广义区间交换变换 $f$，将 $\{\pi^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 中连续的项连接起来，在 $\mathcal{RG}(\mathcal{A})$中得到的无限路径 $\gamma(f) = \gamma$称为 $f$的（组合）旋转数。此外，若每个符号 $\alpha \in \mathcal{A}$ 都无限次成为获胜者，我们就称 $\gamma$ 是 8-完全的，见 [15]。

正如 Yoccoz [15,命题 4], 所示，任何无限可重整化区间交换变换的组合旋转数都是 8-完全的。此外，根据 [15], 中的推论 5，对于任意 8-完全路径，至少存在一个与之关联的无限可重整化区间交换变换。接下来，根据 [15], 中的命题 7，任何组合旋转数为 8-完全的广义区间交换变换$f$，都与一个具有相同组合旋转数的区间交换变换 $T$ 半共轭（通过连续映射 $h$: $I \to I$）；也就是说， $h \circ f = T \circ h$。如果该广义区间交换变换没有游荡区间，那么半共轭 $h$ 就是共轭映射（即同胚），见 [15]中命题 7 证明后的备注。这一理论中的关键问题之一是共轭映射在 Hölder 尺度下有多正则（光滑），以及在其存在时，反函数有多正则。本文的主要目标是了解共轭映射与其反函数的正则性差距可以有多大。在共轭映射$h$ 至少是 $C^1$-微分同胚的情况下（这是通常预期的情形），根据反函数导数公式的一个简单论证表明， $h$和 $h^{-1}$ 的最大正则性相同，因此不会出现上述差距。然而，当$h$ 不可微时， $h$ 和 $h^{-1}$的最大正则性之间有何关系便不那么显而易见。本文确定了特定的（单参数）广义区间交换变换族（事实上是仿射区间交换变换族），对于这些变换，随着参数趋于无穷大， $h$ 与 $h^{-1}$ 的正则性差距可以任意增大。

从现在起，我们将主要关注仿射区间交换变换。对于每个区间交换变换 $T = (\pi, \lambda)$和每个 $\omega \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$，我们用 $\mathrm{Aff}(T, \omega)$ 表示与 $T$ 半共轭且具有对数斜率 $\omega$的仿射区间交换变换集合。如 [11, 命题 2.3], 所示，当且仅当 $\langle \omega, \lambda\rangle = 0$时，$\mathrm{Aff}(T, \omega)$ 非空。如果对数斜率向量 $\omega$ 还是一个中心稳定向量（相对于 Kontsevich–Zorich 余循环），那么对于几乎每个区间交换变换 $T$，任意 $f \in \mathrm{Aff}(T, \omega)$ 与$T$之间的半共轭都是同胚；自相似区间交换变换的情形也见 [14, 定理 1] 。另一方面，如果对数斜率向量 $\omega$ 是不稳定向量，那么 $\mathrm{Aff}(T, \omega)$可能存在游荡区间，这意味着半共轭 $h$ 不可逆；自相似区间交换变换的情形见 [3] ，几乎处处成立的区间交换变换的情形见 [11] 。

理解共轭正则性的第一个重要进展，来自 Cobo [6], 提出的一项结果，其形式如下：

对于几乎所有的区间交换变换 $T$，如果 $f \in \mathrm{Aff}(T,\ \omega)$ 通过 $h\colon I \to I$ 与 $T$共轭，且对数斜率向量 $\omega$ 是稳定向量，那么 $h$ 是一个 $C^1$-微分同胚；而如果 $\omega$ 不是稳定向量，那么 $h$ 甚至不是绝对连续函数。 [1]近期发展的方法表明，在 $\omega$ 不稳定的情况下，共轭及其逆（如果存在）都不是赫尔德函数。因此，在研究组合旋转数具有典型性的仿射区间交换变换时，我们不太可能观察到前述 $h$ 与 $h^{-1}$正则性之间的差异，因为这两个函数的上确界Hölder指数要么同时为零，要么同时为 $1+\delta$。

这表明，要观察到这种正则性差异，我们应将研究范围限定在非常特殊的区间交换变换上。从这个角度来看，自相似区间交换变换似乎是最自然的选择，而这也正是我们所采用的方法。

本节最后，值得一提的是 Ghazouani–Ulcigrai [8, 9] 近期取得的突破性成果，该成果研究了区间数较少（即 4 个或 5 个）的情形下，广义区间交换变换与区间交换变换之间共轭映射的正则性。在这种情况下，对于几乎所有的区间交换变换，只要广义区间交换变换满足边界算子消失条件，其共轭映射就是一个$C^{1+\delta}$微分同胚。该条件在从曲面上的极小流出发时自然出现。Berk–Trujillo [2]最近也取得了类似结果：在满足一些其他自然假设的前提下，具有相同且典型的组合旋转数的任意广义区间交换变换之间存在 $C^1$共轭。这两项成果也表明，在典型情形下，即使将视野拓宽至广义区间交换变换及其相互之间的共轭映射，正则性也不存在差异。

## 3. 自相似区间交换变换与相应的仿射区间交换变换

若存在$n \geqslant 1$ 使得 $\mathcal{RV}^n(T)\colon\ I^{(n)} \to I^{(n)}$ 通过由 $R(x) = e^{\rho(T)}x$ 给出的缩放 $R\colon\ I^{(n)} \to I$与 $T\colon\ I \to I$ 共轭，其中 $\rho(T)\colon =\log \frac{|I|}{|I^{(n)}|}$，则 IET $T = (\pi,\ \lambda)$ 是自相似的（或属于周期型）。等价地说，这意味着组合旋转数是一条周期路径。考虑相关的 Rokhlin 塔分解。也就是说，对于每个 $\alpha \in \mathcal{A}$ ，我们将 $q_\alpha^{(n)}$记为区间 $I_\alpha^{(n)}$通过 $T$返回到$I^{(n)}$的首次返回时间，其中 $\{I_\alpha^{(n)}\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$是由 $\mathcal{RV}^n(T)$交换的 $I^{(n)}$的子区间。于是，整个区间 $I$ 被分解为区间塔的不交并：

$$I = \bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \bigsqcup_{i=0}^{q_\alpha^{(n)}-1} T^i I_\alpha^{(n)}. \tag{3.1}$$

此外，该划分比将 $I$ 划分为交换区间的划分更细——区间 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$。设$M(T) = M = [M_{\alpha\beta}]_{\alpha,\ \beta\in\mathcal{A}} \in SL_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z})$为自相似$T$的矩阵，即

$$M_{\alpha\beta} := \#\{0 \leqslant k < q_\alpha^{(n)} \mid T^k(I_\alpha^{(n)}) \subset I_\beta\}.$$

那么，向量 $\lambda$ 是左佩龙-弗罗贝尼乌斯特征向量，而 $e^{\rho(T)}$ 是 $M$的佩龙-弗罗贝尼乌斯特征值。如果矩阵 $M(T)$ 是本原的，恰好有 $g \geqslant 1$ 个模不同于 1 且大于（并小于）1 的实单特征值，以及 $\kappa - 1$ 个单位特征值，我们称 $f$ 属于双曲周期型。回顾一下， $g$ 是亏格， $\kappa$ 是与置换 $\pi$相关的平移曲面的奇点数。此外，每个自相似 IET 都是唯一遍历的。如果 $T$ 属于双曲周期型，那么 $M$ 的右特征向量构成 $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$的一组基；我们恰好有 $g$ 个膨胀特征向量、 $g$个收缩特征向量和 $\kappa - 1$ 个不变（固定）特征向量。

接下来，我们讨论属于 $\mathrm{Aff}(T,\ \omega)$ 的仿射区间交换变换 $f$，其中 $\omega \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ 是 $f$ 的对数斜率向量，而 $T$ 属于双曲周期型。于是，$\langle \omega,\ \lambda \rangle = 0$ 和 $\omega$ 的基分解中都不能包含相应的佩龙-弗罗贝尼乌斯特征向量。我们称 $\omega$ 属于

- 不稳定型，如果其基分解中至少有一个扩张（非佩龙-弗罗贝尼乌斯）特征向量；
- 中心稳定型，如果其基分解中至少有一个不变特征向量，但没有扩张特征向量；
- 稳定型，如果其基分解中只有收缩特征向量。

正如近期在 [1] 中所示，这种分类对于全面理解共轭映射的正则性至关重要。对于区间上的任意函数 $h$，令 $\mathfrak{H}(h)$ 为其上确界 Hölder 指数，即

$$\mathfrak{H}(h) := \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \mid D^{\lfloor \alpha \rfloor} f \text{ is } \{\alpha\}\text{-Hölder}\}.$$

**定理 3.1** (文献 [1]中的定理 1.3 和 1.6)。 设 $f \in \mathrm{Aff}(T, \omega)$ 是一个半共轭于双曲周期型自相似区间交换变换 $T = (\pi, \lambda)$ 的仿射区间交换变换，其对数斜率向量为 $\omega$。设 $h\colon I \to I$ 是 $f$与 $T$之间的半共轭。那么

*(1)* $\mathfrak{H}(h) = \mathfrak{H}(h^{-1}) = 1 + \alpha$ 对于某些 $\alpha \in (0, 1) \cup \{+\infty\}$，如果 $\omega$ 属于稳定型；*(2)* $0 < \mathfrak{H}(h), \mathfrak{H}(h^{-1}) < 1$，如果 $\omega$ 属于中心稳定型；*(3)* $\mathfrak{H}(h) = 0$，即如果 $h$ 属于不稳定型，则其不满足 *Hölder* 连续性。

中心稳定型情形下 Hölder 指数的精确公式将在后文回顾。事实上，如 [1], 所示，中心稳定型情形可归结为中心型情形，也就是说，对数斜率向量 $\omega$ 是右不变的$M\,\omega = \omega$；从现在起，我们将只关注这种情形。

对于任意向量 $\omega \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$，令 $\phi_\omega\colon\ I \to \mathbb{R}$ 为相应的分段常值映射，使得对于 $x \in I_\alpha$，有 $\phi_\omega(x) = \omega_\alpha$。对于任意映射 $\phi\colon\ I \to \mathbb{R}$ 和 $k \geqslant 0$，令 $S_k\phi$ 为其第 $k$ 个 Birkhoff 和，即 $S_k\phi(x) = \sum_{0 \leqslant i < k} \phi(T^i x)$。令

$$\Sigma := \{(\alpha, i) \mid \alpha \in \mathcal{A},\ 0 \leqslant i < q_\alpha^{(n)}\} \tag{3.2}$$

是用于将 $I$ 划分为塔 (3.1) 各区间的字母表参数。对于任意 $(\alpha,\ i) \in \Sigma$ 令 $\beta = \beta(\alpha,\ i) \in \mathcal{A}$ 满足 $T^i I_\alpha^{(n)} \subset I_\beta$，并且

let

$$\omega_{(\alpha,i)} := S_i\phi_\omega|_{I_\alpha^{(n)}} = \sum_{0\leqslant j<i} \omega_{\beta(\alpha,j)}.$$

对于任意 $M$-不变向量 $\omega$，令 $M(\omega) = [M_{\alpha\beta}(\omega)]_{\alpha,\ \beta\in\mathcal{A}}$ 为由下式给出的矩阵：

$$M_{\alpha\beta}(\omega) := \sum_{\substack{0\leqslant i<q_\alpha^{(n)}\\ \beta(\alpha,i)=\beta}} e^{\omega_{(\alpha,i)}}. \tag{3.3}$$

于是 $M(0) = M$，并且由于 $M$ 是本原的，矩阵 $M(\omega)$ 也是本原的。记 $\rho(\omega)$ 为 $M(\omega)$ 的佩龙 - 弗罗贝尼乌斯特征值的对数，并考虑映射 $\rho\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$，其定义为 $\rho(t) := \rho(t\omega)$。

对于任意 $M$-不变向量 $\omega$，令 $f\in\mathsf{Aff}(T,\ \omega)$。设 $\mu_\omega$ 是 $f$ 上的一个不变概率博雷尔测度，$\nu_\omega$ 是 $T$ 的一个 $\phi_\omega$-共形测度；也就是说，$\nu_\omega$ 是 $I$ 上的概率博雷尔测度，使得测度 $(T^{-1})_*\nu_\omega$ 与 $\nu_\omega$ 等价，且拉东-尼科迪姆导数为 $\frac{d(T^{-1})_*\nu_\omega}{d\nu_\omega} = e^{\phi_\omega}$。如 [1], 所示，这两个测度均存在且唯一。此外，它们对于理解 $f$ 与 $T$ 之间的共轭 $h_\omega\colon I\to I$ 起着关键作用。更确切地说，$h_\omega$ 是测度$\mu_\omega$的分布函数，而 $h_\omega^{-1}$是测度 $\nu_\omega$ 的分布函数。此外，[1] 中还得到了这两个测度的豪斯多夫维数的显式公式。

**定理 3.2**（定理 5.2，见 [1]）。设 $T$ 为双曲周期型的区间交换变换，并设 $\omega$ 为右 $M$-不变向量，其中 $M$ 是 $T$的自相似矩阵。则对每个 $t\in\mathbb{R}$，我们有

$$\dim_H(\mu_{t\omega}) = \frac{\rho(0)}{\rho(t)-\rho'(0)t} \quad and \quad \dim_H(\nu_{t\omega}) = \frac{\rho(t)-\rho'(t)t}{\rho(0)}. \tag{3.4}$$

为确定共轭及其逆的上确界Hölder指数，我们仍需描述两个对象：$\Sigma$ 上的一个图，以及该图上的某个边势。设 $\mathcal{G} = (\Sigma,\ \mathcal{E})$ 为一个有向图，其顶点集为 $\Sigma$（由 (3.2) 定义），其边由下式给出

$$((\beta,j),(\alpha,i))\in\mathcal{E} \iff \beta(\alpha,i) = \beta \iff T^iI_\alpha^{(n)}\subset I_\beta.$$

对任意右 $M$-不变向量 $\omega$，设 $\vartheta_\omega\colon\ \mathcal{E}\to\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 为由下式给出的边势

$$\vartheta_\omega((\beta,j),(\alpha,i)) := -\log\frac{\nu_\omega(T^iI_\alpha^{(n)})}{\nu_\omega(I_\beta)}.$$

接下来，考虑非负数 $\vartheta_\omega$ 和 $\vartheta_\omega$，它们分别是沿图 $\mathcal{G}$ 中的初等回路计算函数 $\vartheta_\omega$ 的平均值的最大值和最小值。这两个量的形式化定义将在稍后更一般的情形下，于第4节给出。

**定理 3.3**（命题 14.3 和 15.3，见 [1]）。设 $T$ 是一个双曲周期型的区间交换变换，且 $\omega$ 是一个右 $M$-不变向量，其中 $M$ 是 $T$ 的自相似矩阵。那么，

$$\mathfrak{H}(h_\omega) = \frac{\rho(0)}{\overline{\vartheta}_\omega} \in \big(0, \dim_H(\mu_\omega)\big) \text{ and } \mathfrak{H}(h_\omega^{-1}) = \frac{\underline{\vartheta}_\omega}{\rho(0)} \in \big(0, \dim_H(\nu_\omega)\big). \tag{3.5}$$

本文的主要目标是精确确定其渐近行为

$$\dim_H(\mu_{t\omega}), \quad \dim_H(\nu_{t\omega}), \quad \mathfrak{H}(h_{t\omega}), \quad \mathfrak{H}(h_{t\omega}^{-1})$$

当 $t$ 趋于无穷时。为此，我们将运用由图 $\mathcal{G}$确定的有限型移位的热力学形式方法，并结合经典论文 [5] 中关于冻结的结果。

## 4. 热力学形式与零温区间

本节主要依据 [13], [12] 和 [5]，介绍有限型移位的热力学形式及温度趋于零时吉布斯测度的行为的基本信息。

设 $\Sigma$ 为一个有限字母表，$\mathcal{G} = (\Sigma, \mathcal{E})$ 为一个连通的非周期有向图，其顶点集为 $\Sigma$，边集为 $\mathcal{E}$。记由图 $\mathcal{G}$确定的有限型移位（有$\diamondsuit\diamondsuit$型移位）为 $X = X(\mathcal{G}) \subset \Sigma^{\mathbb{Z}}$。更确切地说，$x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$ 当且仅当 $(x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{E}$ 对任意 $n \in \mathbb{Z}$成立。记$\sigma : X \to X$ 为 $X$上的左移位映射。该映射是拓扑混合的。

对于任意势函数 $\Phi : X \to \mathbb{R}$ 和 $k \geqslant 0$，令

$$S_k\Phi(x) = \sum_{0\leqslant i<k} \Phi(\sigma^i x).$$

我们将讨论由定义在边集上的边势函数 $\Phi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ 所确定的一类特定势函数。于是相应的势函数$\Phi : X \to \mathbb{R}$ 由 $\Phi(x) := \Phi(x_0, x_1)$ 给出，其中 $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$。此后，我们只考虑这种类型的势函数。对任意 $k \geqslant 1$, 令 $\mathrm{Per}_k(X)$为 $X$ 中周期为 $k$的周期序列集合。该集合与图 $\mathcal{G}$中长度为 $k$ 的闭路径集合一一对应。势函数 $\Phi : X \to \mathbb{R}$ 的拓扑压力 定义为

$$P(\Phi, X) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \sum_{x\in \mathrm{Per}_k(X)} e^{S_k\Phi(x)}.$$

回想一下，零压力 $P(0, X)$ 等于移位 $\sigma : X \to X$的拓扑熵$h_{top}(X)$ 。

令 $\mathcal{M}(\Phi)$ 为由下式给出的非负矩阵 $[\mathcal{M}_{ab}(\Phi)]_{a,b\in\Sigma}$

$$\mathcal{M}_{ab}(\Phi) = \begin{cases} e^{\Phi(a,b)} & \text{if } (a, b) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.1}$$

由于图 $\mathcal{G}$ 是连通且非周期的，矩阵 $\mathcal{M}(\Phi)$ 是本原的（其 $m$次幂对于某个自然数 $m$为正矩阵）。此外，$\mathcal{M}(0)$ 是

图 $\mathcal{G}$的邻接矩阵。记 $\varrho(\Phi)$ 为矩阵 $\mathcal{M}(\Phi)$的佩龙-弗罗贝尼乌斯特征值（谱半径）的对数。于是

(4.2)
$$\varrho(\Phi) = \lim_{k\to\infty} \log \sqrt[k]{\operatorname{tr} \mathcal{M}^k(\Phi)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \sum_{x\in \mathrm{Per}_k(X)} e^{S_k\Phi(x)} = P(\Phi, X).$$

对于每个 $x \in X$ 以及整数 $m \leqslant n$，令 $x[m,\ n] = x_m \dots x_n \in \Sigma^{n-m+1}$。对于任意字 $y = y_0 \dots y_{k-1} \in \Sigma^k$，令 $[y] \subset X$ 为如下给出的圆柱集

$$[y] := \{x \in X \mid x[0, k-1] = y\}.$$

一个概率Borel $\sigma$-不变测度 $m_\Phi$ 是势函数 $\Phi$ 的Gibbs测度：$X \to \mathbb{R}$ 如果存在常数 $C > 1$ 使得

$$C^{-1} \leqslant \frac{m_\Phi\big([x[0, k-1]]\big)}{\exp\big(S_k\Phi(x) - kP(\Phi, X)\big)} \leqslant C \quad \text{for all} \quad x \in X,\ k \in \mathbb{N}.$$

由于该势函数是Hölder连续的，Gibbs测度 $m_\Phi$ 是唯一的，并且在这一特定情形下，当势函数来自边势$\Phi$：$\mathcal{E} \to \mathbb{R}$时，它由如下方式给出：

$$m_\Phi([y_0 \dots y_k]) = e^{-k\varrho(\Phi)} \ell_{y_0}(\Phi) \Big( \prod_{0\leqslant i<k} \mathcal{M}_{y_i y_{i+1}}(\Phi) \Big) r_{y_k}(\Phi), \tag{4.3}$$

对于任意圆柱集 $[y] = [y_0 \dots y_k] \subset X$，其中 $\ell(\Phi)$ 是左佩龙-弗罗贝尼乌斯特征向量，$r(\Phi)$ 是右佩龙-弗罗贝尼乌斯特征向量，使得 $|r(\Phi)| = 1$ 且 $\ell(\Phi)^T r(\Phi) =$1；二者均为正。在本文中，我们将向量等同于单列矩阵。向量的绝对值是其各坐标绝对值之和。

对于任意周期轨道 $x \in$Per$_k(X)$，令

$$\Phi(x[0, k-1]) := S_k\Phi(x) = \sum_{0\leqslant i<k} \Phi(x_i, x_{i+1}),$$

并令

$$\overline{\Phi} := \sup_{k\in\mathbb{N}} \max_{x\in \mathrm{Per}_k(X)} \frac{\Phi(x[0, k-1])}{k} = \max\Big\{ \int_X \Phi \, d\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}(X, \sigma) \Big\},$$

其中 $\mathcal{P}(X,\ \sigma)$ 是 $X$ 上的 Borel $\sigma$-不变测度单纯形。类似地，我们可以定义

$$\underline{\Phi} := \inf_{k\in\mathbb{N}} \min_{x\in \mathrm{Per}_k(X)} \frac{\Phi(x[0, k-1])}{k} = \min\Big\{ \int_X \Phi \, d\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}(X, \sigma) \Big\}.$$

Then

$$\underline{\Phi} = -\overline{(-\Phi)}. \tag{4.4}$$

若 $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$两两不同，则称周期轨道 $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X$ 为初等的，其中 $k =$per$(x)$ 是 $x$ 的最小周期。令 Per$_{el}(X)$

表示初等周期轨道的（有限）集合。那么

$$\overline{\Phi} = \max_{x\in \mathrm{Per}_{el}(X)} \frac{\Phi(x[0,\mathrm{per}(x)-1])}{\mathrm{per}(x)}.$$

初等周期轨道 $x$ 是 $\Phi$–极大化的，若 $\frac{\Phi(x[0,\ \mathrm{per}(x)-1])\ \mathrm{per}(x)}{} = \Phi$。

考虑由满足以下条件的$x \in X$ 构成的 $\Phi$–极大化子移位 $X = X(\Phi) \subset X$：对于每个 $n \in \mathbb{N}$，单词 $x_n\, x_{n+1}$ 都出现在某个初等$\Phi$–极大化周期轨道中。则 $X$ 是由图 $\mathcal{G} = (\Sigma, \mathcal{E})$确定的有限型移位，其中 $\Sigma \subset \Sigma$ 是出现在初等 $\Phi$–极大化周期轨道中的字母表符号子集；并且 $(a,\ b) \in \mathcal{E}$，当且仅当单词 $a\,b$ 出现在某个初等 $\Phi$–极大化周期轨道中。

类似地，我们也可以定义 $\Phi$-极小化子移位 $X(\Phi) \subset X$，方法是使用 $\Phi$ 而不是 $\Phi$。子移位 $X(\Phi)$ 同样是由一个图确定的有限型移位，我们将其记为 $\mathcal{G} = (\Sigma,\ \mathcal{E})$。另一方面，$\Phi$-极小化子移位也可以表示为 $X(\Phi) = X(-\Phi)$。

在 [5]，之后，我们考虑两个边势 $\Phi$，$\Psi:\ \mathcal{E} \to \mathbb{R}$，以及相应的势函数 $\Phi$，$\Psi:\ X \to \mathbb{R}$。对于每个 $t \geqslant 0$，我们处理势函数 $\Psi + t\Phi$ 及其对应的 Gibbs测度 $m_{\Psi+t\Phi}$。文章 [5] 的作者主要目标是研究 Gibbs测度在 $t \to +\infty$ 时的渐近行为；从热力学视角来看，这相当于寻找零温下的平衡态。以下两个结果概述了我们将要用到的 [5] 的主要结果。下文中，我们将使用标准的大 $O$ 记号。

**定理 4.1**（[5]中的定理 1.1）。设 $\mathcal{G} = (\Sigma、\ \mathcal{E})$ 是一个连通有向有限图，且 $X \subset \Sigma^{\mathbb{Z}}$ 是其相关联的有限型移位。对于任意一对边势 $\Phi、\ \Psi:\ \mathcal{E} \to \mathbb{R}$，*Gibbs*测度 $m_{\Psi+t\Phi}、\ t \geqslant 0$ 在 $t \to +\infty$ 时弱收敛到 $X$ 上的一个移位不变测度 $\nu$。此外，存在 $\eta > 0$，使得对于任意圆柱集 $[y] \subset X$，我们有

$$m_{\Psi+t\Phi}([y]) = \nu([y]) + O(e^{-\eta t}). \tag{4.5}$$

注 4.2。若进一步满足 $\Psi = 0$，则应用 [7] 的结果（关于遍历优化的更多细节，请参阅综述 [10]），$\nu$ 是一个 $\Phi$–最大化测度，即

$$\int_X \Phi\, d\nu = \max\Big\{ \int_X \Phi\, d\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}(X,\sigma)\Big\} = \overline{\Phi}. \tag{4.6}$$

我们想强调，文章 [5] 还提供了一种确定极限测度的有效算法；不过，就我们的目的而言，测度的显式形式并非必要。然而，我们需要进一步了解矩阵 $\mathcal{M}(\Psi + t\Phi)$ 的佩龙–弗罗贝尼乌斯特征值$\exp(\varrho(\Psi + t\Phi))$ 在 $t$ 趋于无穷时的渐近行为。

**命题 4.3 (**命题 3，见 [5])。此外，如果我们有 $\Phi = 0$ 和$P(\Psi、\ X(\Phi)) = 0$，那么存在 $\eta > 0$ 使得

$$\exp(\varrho(\Psi + t\Phi)) = 1 + O(e^{-\eta t}).$$

事实上，我们需要以下版本的这一结果。

**命题 4.4**。对于任意一对边势 $\Phi, \Psi\colon\ \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ 存在$\eta > 0$ 使得

$$\varrho(\Psi + t\Phi) = P(\Psi, \overline{X}(\Phi)) + \overline{\Phi}\, t + O(e^{-\eta t}). \tag{4.7}$$

证明。考虑修正后的边势 $\Phi_0 := \Phi - \underline{\Phi}$ 和 $\Psi_0 := \Psi - P(\Psi, \underline{X(\Phi)})$。根据定义，$\Phi_0 = 0$ 和 $\overline{X}(\Phi_0) = X(\Phi)$。因此，

$$P(\Psi_0, \overline{X}(\Phi_0)) = P(\Psi, \overline{X}(\Phi_0)) - P(\Psi, \overline{X}(\Phi)) = 0.$$

根据命题 4.4，我们有 $e^{\varrho(\Psi_0 + t\Phi_0)} = 1 + O(e^{-\eta t})$。另一方面，$\mathcal{M}(\Psi + t\Phi) = e^{P(\Psi,\ \overline{X(\Phi)} + \overline{\Phi}\, t}\mathcal{M}(\Psi_0 + t\Phi_0)$。由此可得

$$e^{\varrho(\Psi + t\Phi)} = e^{P(\Psi, \overline{X}(\Phi)) + \overline{\Phi}\, t} e^{\varrho(\Psi_0 + t\Phi_0)} = e^{P(\Psi, \overline{X}(\Phi)) + \overline{\Phi}\, t}(1 + O(e^{-\eta t})).$$

这就得到，

$$\varrho(\Psi + t\Phi) = P(\Psi, \overline{X}(\Phi)) + \overline{\Phi}\, t + \log(1 + O(e^{-\eta t})) = P(\Psi, \overline{X}(\Phi)) + \overline{\Phi}\, t + O(e^{-\eta t}).$$

□

以下结果给出了 $\varrho(t\Phi)$ 导数极限行为的显式公式。

**命题 4.5.** 对于任意边势 $\Phi\colon\ \mathcal{E} \to \mathbb{R}$，存在 $\eta > 0$，使得

$$\frac{d}{dt}\varrho(t\Phi) = \int_X \Phi\, d\,\nu + O(e^{-\eta t}) = \overline{\Phi} + O(e^{-\eta t}).$$

证明. 根据定义，$e^{\varrho(t\Phi)} = \ell^T(t\Phi)\mathcal{M}(t\Phi)r(t\Phi)$。由此可得

$$\begin{aligned} e^{\varrho(t\Phi)} \tfrac{d}{dt}\varrho(t\Phi) = \frac{d}{dt}e^{\varrho(t\Phi)} &= \ell^T(t\Phi)\frac{d}{dt}\mathcal{M}(t\Phi)r(t\Phi) \\ &= \sum_{a,b \in \Sigma} \ell_a(t\Phi)\frac{d}{dt}\mathcal{M}_{ab}(t\Phi)r_b(t\Phi) \\ &= \sum_{(a,b) \in \mathcal{E}} \ell_a(t\Phi)\frac{d}{dt}\mathcal{M}_{ab}(t\Phi)r_b(t\Phi). \end{aligned}$$

注意，第二个等式可通过使用归一化条件 $\ell(t\Phi)^T r(t\Phi) = 1$ 轻易得到。根据 $\mathcal{M}$ 的定义，对于任意一对 $(a, b) \in \mathcal{E}$，我们有

$$\tfrac{d}{dt}\mathcal{M}_{ab}(t\Phi) = \mathcal{M}_{ab}(t\Phi)\Phi(a, b).$$

根据 (4.3)，对于任意$[a\, b] \subset X$，我们有 $e^{-\varrho(t\Phi)}\ell_a(t\Phi)\mathcal{M}_{ab}(t\Phi)r_b(t\Phi) = m_{t\Phi}([a\, b])$。因此，

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\varrho(t\Phi) &= e^{-\varrho(t\Phi)} \sum_{(a,b) \in \mathcal{E}} \Phi(a, b)\ell_a(t\Phi)\mathcal{M}_{ab}(t\Phi)\, r_b(t\Phi) \\ &= \sum_{(a,b) \in \mathcal{E}} \Phi(a, b) m_{t\Phi}([a\, b]) = \int_X \Phi\, d\, m_{t\Phi}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

由 (4.5) 和 (4.6) 可得

$$\tfrac{d}{dt}\varrho(t\Phi) = \sum_{(a,b)\in\mathcal{E}} \Phi(a,b)\nu([a\,b]) + O(e^{-\eta t}) = \int_X \Phi\, d\,\nu + O(e^{-\eta t}) = \overline{\Phi} + O(e^{-\eta t}).$$

□

## 5. 渐近行为

设 $T\colon I \to I$ 是双曲周期型的一个区间交换变换，由一对 $(\pi,\ \lambda)$确定。设 $\mathcal{G} = (\Sigma,\ \mathcal{E})$ 为第 3 节定义的相应有向图，即

$$\Sigma = \{(\alpha, i) \mid \alpha \in \mathcal{A},\ 0 \leqslant i < q_\alpha^{(n)}\} \quad \text{and} \quad ((\beta, j), (\alpha, i)) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \beta(\alpha, i) = \beta.$$

用 $X = X(\mathcal{G}) \subset \Sigma^{\mathbb{Z}}$ 表示由图 $\mathcal{G}$确定的有限型移位（SFT），并设 $\sigma : X \to X$ 为 $X$上的左移位映射。

对于每个右不变向量 $M\,\omega \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ （$M$ 是 $T$的自相似矩阵），设 $\Phi_\omega$ : $\mathcal{E} \to \mathbb{R}$ 为由下式给出的边势:

$$\Phi_\omega((\beta, j), (\alpha, i)) = \log \frac{\nu_\omega(T^i I_\alpha^{(n)})}{\nu_\omega(I_\alpha^{(n)})}.$$

由于 $\nu_\omega$ 是唯一的 $\phi_\omega$-共形测度，我们有

$$\Phi_\omega((\beta, j), (\alpha, i)) = \log e^{S_i\phi_\omega|_{I_\alpha^{(n)}}} = \omega_{(\alpha,i)}.$$

由此可得

$$\Phi_{t\omega} = t\Phi_\omega \quad \text{for any real } t. \tag{5.1}$$

回想一下，向量 $\omega$ 还确定了另一个边势 $\vartheta_\omega : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ，其定义为

$$\vartheta_\omega((\beta, j), (\alpha, i)) = -\log \frac{\nu_\omega(T^i I_\alpha^{(n)})}{\nu_\omega(I_\beta)}.$$

与第 3 节一样，我们可以将这两个势函数都视为定义在移位空间 $X$上的函数。

**引理 5.1**。 映射 $\vartheta_\omega\colon\ X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 与映射 $(\rho(\omega) - \Phi_\omega)\colon\ X \to \mathbb{R}$上同调等价，也就是说，存在一个连续映射 $g\colon\ X \to \mathbb{R}$，使得
$\vartheta_\omega(x) = \rho(\omega) - \Phi_\omega(x) + g(x) - g(\sigma x)$ 对所有 $x \in X$均成立。

证明。 设 $g : X \to \mathbb{R}$ 是由下式给出的映射

$$g(x) = \log \nu_\omega(I_{\alpha_0}) \quad \text{for any} \quad x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (\alpha_k, i_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in X.$$

由于 $\omega$ 是一个 $M$ 不变向量，根据 [1], 中的引理 2.5，我们有 $R_*(\nu_\omega|_{R^{-1}I}) = e^{-\rho(\omega)}\nu_\omega$，其中 $R\colon\ I^{(n)} \to I$ 是由 $R(x) = e^{\rho_T} x$ 给出的线性缩放，并在区间交换变换 $\mathcal{RV}^n(T)\colon\ I^{(n)} \to I^{(n)}$ 与 $T\colon\ I \to I$ 之间建立了共轭。

由于 $I_\alpha^{(n)} = R^{-1}I_\alpha$，可推出 $\nu_\omega(I_\alpha^{(n)}) = e^{-\rho(\omega)}\nu_\omega(I_\alpha)$。因此，对于任意 $x = (\alpha_k,\ i_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in X$，我们有

$$\begin{aligned}(\vartheta_\omega - (\rho(\omega) - \Phi_\omega))(x) &= \log\frac{\nu_\omega(T^{i_1}I_{\alpha_1}^{(n)})}{\nu_\omega(I_{\alpha_1}^{(n)})} - \log\frac{\nu_\omega(T^{i_1}I_{\alpha_{i_1}}^{(n)})}{\nu_\omega(I_{\alpha_{i_0}})} - \rho(\omega)\\ &= \log\nu_\omega(I_{\alpha_{i_0}}) - \log\nu_\omega(I_{\alpha_1}) = g(x) - g(\sigma x).\end{aligned}$$

□

根据算子 $\Phi \mapsto \Phi$ 和 $\Phi \mapsto \Phi$的定义，结合 (4.4) 和 (5.1)，上面的引理可推出

$$\overline{\vartheta}_{t\omega} = \rho(t\omega) - t\underline{\Phi}_\omega \quad \text{and} \quad \underline{\vartheta}_{t\omega} = \rho(t\omega) - t\overline{\Phi}_\omega \quad \text{for any} \quad t \geqslant 0. \tag{5.2}$$

考虑与边势函数 $\Phi_\omega$相关联（见 (4.1)）的矩阵 $\mathcal{M}(\Phi_\omega) = [\mathcal{M}_{(\beta,\ j)(\alpha,\ i)}(\Phi_\omega)]_{(\beta,\ j),\ (\alpha,\ i)\in\Sigma}$

$$\mathcal{M}_{(\beta,j)(\alpha,i)}(\Phi_\omega) = \begin{cases} e^{\omega(\alpha,i)} & \text{if } \beta(\alpha,i) = \beta \\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{5.3}$$

根据第4节中引入的记号，$\varrho(\Phi_\omega)$ 是矩阵 $\mathcal{M}(\Phi_\omega)$的佩龙-弗罗贝尼乌斯特征值的对数。接下来，我们将证明 $\rho(t) = \rho(t\omega) = \varrho(\Phi_{t\omega})$，从而可以应用热力学形式中的结果，即命题 4.4 和 4.5，来确定 $\rho(t)$ 及其导数的渐近行为。进而，借助公式 (3.4) 和 (3.5)，我们将能够确定不变测度和共形测度的豪斯多夫维数，以及共轭映射及其逆映射的上确界Hölder指数，在参数 $t$ 趋于无穷大时的渐近行为。

**引理 5.2.** 对于任意 $M$-不变向量 $\omega \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$，我们有 $\rho(\omega) = \varrho(\Phi_\omega)$。

证明。回想一下，$\rho(\omega)$ 是矩阵 $M(\omega) = [M_{\alpha\beta}(\omega)]_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}}$ 的佩龙–弗罗贝尼乌斯特征值的对数，该矩阵由 (3.3) 定义。因此，只需证明矩阵 $M(\omega)$ 和 $\mathcal{M}(\Phi_\omega)$的佩龙–弗罗贝尼乌斯特征值相等。首先，我们将给出两个非负矩阵 $E$ 和$D(\omega)$ ，以揭示 $M(\omega)$ 与 $\mathcal{M}(\Phi_\omega)$之间的直接联系，即 $M^T(\omega) = D(\omega)\,E$和 $\mathcal{M}(\Phi_\omega) = E\,D(\omega)$。事实上，令

$$E = [E_{(\beta,j),\alpha}]_{(\beta,j)\in\Sigma,\alpha\in\mathcal{A}} \quad \text{and} \quad D(\omega) = [D_{\beta,(\alpha,i)}(\omega)]_{\beta\in\mathcal{A},(\alpha,i)\in\Sigma}$$

由.....给出

$$D_{\beta,(\alpha,i)}(\omega) = \begin{cases} e^{\omega(\alpha,i)} & \text{if } \beta(\alpha,i) = \beta, \\ 0 & \text{if } \beta(\alpha,i) \neq \beta; \end{cases} \quad \text{and} \quad E_{(\beta,j),\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{if } \beta = \alpha, \\ 0 & \text{if } \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

Then

$$(E\,D(\omega))_{(\beta,j),(\alpha,i)} = \sum_{\gamma\in\mathcal{A}} E_{(\beta,j),\gamma}\,D_{\gamma,(\alpha,i)}(\omega) = D_{\beta,(\alpha,i)}(\omega) = \mathcal{M}(\Phi_\omega)_{(\beta,j),(\alpha,i)},$$

$$(D(\omega)\,E)_{\beta\alpha} = \sum_{(\gamma,k)\in\Sigma} D_{\beta,(\gamma,k)}(\omega)E_{(\gamma,k),\alpha} = \sum_{\substack{0\leqslant k<q_\alpha^{(n)}\\ \beta(\alpha,k)=\beta}} e^{\omega(\alpha,k)} = M_{\alpha\beta}(\omega),$$

因此， $\mathcal{M}(\Phi_\omega) = E\,D(\omega)$ 和 $M^T(\omega) = D(\omega)\,E$。

设 $\nu = (\nu_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}, \theta = (\theta_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}_{>0}$ 分别为矩阵 $M(\omega)$的左、右佩龙-弗罗贝尼乌斯特征向量，其佩龙-弗罗贝尼乌斯特征值为 $e^{\rho(\omega)}$。则向量 $\ell := D^T(\omega)\theta \in \mathbb{R}^{\Sigma}_{\geqslant 0}$ 和 $r := E\nu \in \mathbb{R}^{\Sigma}_{\geqslant 0}$ 分别为矩阵 $\mathcal{M}(\Phi_\omega)$的左、右佩龙-弗罗贝尼乌斯特征向量。事实上，

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\Phi_\omega)r &= \mathcal{M}(\Phi_\omega)E\nu = ED(\omega)E\nu = EM^T\nu = e^{\rho(\omega)}E\nu = e^{\rho(\omega)}r,\\ \ell^T\mathcal{M}(\Phi_\omega) &= \theta^T D(\omega)\mathcal{M}(\Phi_\omega) = \theta^T D(\omega)ED(\omega)\\ &= \theta^T M^T(\omega)D(\omega) = e^{\rho(\omega)}\theta^T D(\omega) = e^{\rho(\omega)}\ell^T.\end{aligned}$$

由此可知，矩阵 $M(\omega)$ 和$\mathcal{M}(\Phi_\omega)$ 的佩龙–弗罗贝尼乌斯特征值相等，证毕。□

现在我们可以证明文章的主要结果了。设$T = (\pi,\lambda)$ 是一个双曲周期型区间交换变换，其自相似矩阵为 $M$。设 $\mathcal{G} = (\Sigma,\mathcal{E})$ 为相应的图，$X \subset \Sigma^{\mathbb{Z}}$为对应的有限型移位。设 $\omega \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ 为一个 $M$-不变向量，相应的边势为 $\Phi_\omega : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$。记 $m_{\Phi_\omega}$ 为与势函数 $\Phi_\omega$相关的 $X$ 上的唯一Gibbs测度。设 $X(\Phi_\omega) \subset X$ 为$\Phi_\omega$-极大化有限型移位。

考虑一个 AIET $f_\omega \in \mathrm{Aff}(T,\ \omega)$，它与区间交换变换 $T$ 通过$h_\omega : I \to I$共轭。记 $\mu_\omega$ 为唯一的 $f_\omega$-不变测度，记 $\nu_\omega$ 为唯一的 $\phi_\omega$-共形测度。

**定理 5.3**。设 $T = (\pi,\lambda)$ 是一个双曲周期型区间交换变换，其自相似矩阵为 $M$。对于任意 $M$-不变向量 $\omega \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$，存在 $\eta > 0$，使得对于 $t \geqslant 0$，有

$$\dim_H(\nu_{t\omega}) = \frac{h_{top}(\overline{X}(\Phi_\omega)) + O(e^{-\eta t})}{h_{top}(X)},$$

$$\dim_H(\mu_{t\omega}) = \frac{h_{top}(X)}{(\overline{\Phi}_\omega - \int_X \Phi_\omega\,d\,m_{\Phi_0})t + h_{top}(\overline{X}(\Phi_\omega)) + O(e^{-\eta t})}.$$

特别地，

$$\lim_{t\to+\infty}\dim_H(\nu_{t\omega}) = \frac{h_{top}(\overline{X}(\Phi_\omega))}{h_{top}(X)}, \quad \lim_{t\to+\infty} t\dim_H(\mu_{t\omega}) = \frac{h_{top}(X)}{\overline{\Phi}_\omega - \int_X \Phi_\omega\,d\,m_{\Phi_0}}.$$

证明。 由 (3.4)，我们有

$$\dim_H(\mu_{t\omega}) = \frac{\rho(0)}{\rho(t) - \rho'(0)t} \quad \text{and} \quad \dim_H(\nu_{t\omega}) = \frac{\rho(t) - \rho'(t)t}{\rho(0)},$$

其中， $\rho(t) = \rho(t\omega)$ 是矩阵 $M(t\omega)$的佩龙-弗罗贝尼乌斯特征值。根据引理 5.2， $\rho(t) = \varrho(\Phi_{t\omega})$，其中 $\varrho(\Phi_{t\omega})$ 是矩阵 $\mathcal{M}(\Phi_{t\omega})$的佩龙-弗罗贝尼乌斯特征值。由于 $\Phi_{t\omega} = t\Phi_\omega$，根据命题 4.4 和 4.5，存在 $\eta > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \rho(t) = \varrho(t\Phi_\omega) &= P(0, \overline{X}(\Phi_\omega)) + \overline{\Phi}_\omega\, t + O(e^{-\eta t}) \\ &= h_{top}(\overline{X}(\Phi_\omega)) + \overline{\Phi}_\omega\, t + O(e^{-\eta t}), \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\rho'(t) = \frac{d}{dt}\varrho(t\Phi_\omega) = \overline{\Phi}_\omega + O(e^{-\eta t}).$$

此外，由（4.2）和（4.8）可得，

$$\rho(0) = P(0, X) = h_{top}(X) \quad \text{and} \quad \rho'(0) = \int_X \Phi_\omega \, d\, m_{\Phi_0}. \tag{5.5}$$

由此可知

$$\begin{aligned} \dim_H(\mu_{t\omega}) &= \frac{h_{top}(X)}{h_{top}(\overline{X}(\Phi_\omega)) + \overline{\Phi}_\omega\, t + O(e^{-\eta t}) - t\int_X \Phi_\omega \, d\, m_{\Phi_0}}, \\ \dim_H(\nu_{t\omega}) &= \frac{h_{top}(\overline{X}(\Phi_\omega)) + \overline{\Phi}_\omega\, t + O(e^{-\eta t}) - t\big(\overline{\Phi}_\omega + O(e^{-\eta t})\big)}{h_{top}(X)}. \end{aligned}$$

这样，稍微减小常数 $\eta > 0$，即可得到定理的主要结论。□

**定理 5.4**。 设 $T = (\pi, \lambda)$ 是一个双曲周期型区间交换变换，其自相似矩阵为 $M$。对于任意 $M$-不变向量 $\omega \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$，存在 $\eta > 0$，使得对于 $t \geqslant 0$，我们有

$$\mathfrak{H}(h_{t\omega}^{-1}) = \frac{h_{top}(\overline{X}(\Phi_\omega)) + O(e^{-\eta t})}{h_{top}(X)}. \tag{5.6}$$

$$\mathfrak{H}(h_{t\omega}) = \frac{h_{top}(X)}{(\overline{\Phi}_\omega - \underline{\Phi}_\omega)t + h_{top}(\overline{X}(\Phi_\omega)) + O(e^{-\eta t})}. \tag{5.7}$$

特别地，

$$\lim_{t\to+\infty} \mathfrak{H}(h_{t\omega}^{-1}) = \frac{h_{top}(\overline{X}(\Phi_\omega))}{h_{top}(X)} \quad \textit{and} \quad \lim_{t\to+\infty} t\,\mathfrak{H}(h_{t\omega}) = \frac{h_{top}(X)}{\overline{\Phi}_\omega - \underline{\Phi}_\omega}.$$

证明。 由 (3.5) 和 (5.2)，我们有

$$\mathfrak{H}(h_{t\omega}) = \frac{\rho(0)}{\overline{\vartheta}_{t\omega}} = \frac{\rho(0)}{\rho(t) - t\underline{\Phi}_\omega} \quad \text{and} \quad \mathfrak{H}(h_{t\omega}^{-1}) = \frac{\underline{\vartheta}_{t\omega}}{\rho(0)} = \frac{\rho(t) - t\overline{\Phi}_\omega}{\rho(0)}. \tag{5.8}$$

鉴于 (5.4) 和 (5.5)，这意味着 (5.6) 和 (5.7)。 □

注 5.5。 要理解在 $t \to -\infty$ 的情况下所考虑量的渐近行为，只需将最后两个定理中的 $\omega$ 替换为 $-\omega$。由于 $\Phi_{-\omega} = -\Phi_\omega$，最小化子移位和最大化子移位互换了角色。综上，我们得到：

$$\lim_{t\to-\infty} \mathfrak{H}(h_{t\omega}^{-1}) = \frac{h_{top}(\underline{X}(\Phi_\omega))}{h_{top}(X)} = \lim_{t\to-\infty} \dim_H(\nu_{t\omega}), \quad \text{and}$$
$$\lim_{t\to-\infty} |t|\,\mathfrak{H}(h_{t\omega}) = \frac{h_{top}(X)}{\overline{\Phi}_\omega - \underline{\Phi}_\omega} < \frac{h_{top}(X)}{\int_X \Phi_\omega \, d\, m_{\Phi_0} - \underline{\Phi}_\omega} = \lim_{t\to-\infty} |t| \dim_H(\mu_{t\omega}).$$

注记 5.6。 定理 5.3 和定理 5.4 告诉我们，当 $t$ 趋于无穷时，测度的豪斯多夫维数以及共轭映射及其逆映射的上确界Hölder指数的极限行为。此外，我们知道，这种行为在正半轴和负半轴上（相对于参数 $t$）都是单调的。事实上，豪斯多夫维数的单调性已在 [1] 的定理 5.3 中得到证明。上确界Hölder指数的单调性则可由 (5.8) 和 (4.8) 轻易推出，因为

$$\tfrac{d}{dt}(\rho(t) - t\underline{\Phi}_\omega) = \rho'(t) - \underline{\Phi}_\omega = \int_X \Phi_\omega \, d\, m_{t\Phi_\omega} - \underline{\Phi}_\omega \geqslant 0,$$
$$\tfrac{d}{dt}(\rho(t) - t\overline{\Phi}_\omega) = \rho'(t) - \overline{\Phi}_\omega = \int_X \Phi_\omega \, d\, m_{t\Phi_\omega} - \overline{\Phi}_\omega \leqslant 0.$$

## 6. 例子

根据定理 5.4 和注记 5.6，我们知道，对于任意双曲周期型区间交换变换 $T$，若 $\omega$ 是其自相似矩阵 $M$ 的不变向量，且 $f_{t\omega} \in \mathrm{Aff}(T,\ t\omega)$，那么共轭映射 $h_{t\omega}$ 在 $f_{t\omega}$ 与 $T$ 之间的上确界Hölder指数会随着 $t \to \infty$ 单调趋于零，并且其衰减速率可精确确定。另一方面，逆共轭 $h_{t\omega}^{-1}$ 的上确界Hölder指数有一个由常数 $\min\left\{\frac{h_{top}(X(\Phi_\omega))}{h_{top}(X)},\ \frac{h_{top}(X(\Phi_\omega))}{h_{top}(X)}\right\}$ 给出的下界。本节给出一个该常数为正的具体例子，并计算其值。由此，我们构造了一个显式的单参数仿射区间交换变换族，其中可以观察到引言中所述的共轭映射及其逆映射正则性之间的差异。

我们先来看一个双曲周期型的五区间交换变换例子，该例子已在 [4]中讨论过。所有计算均使用 Python 完成。考虑 $\mathcal{A} := \{A, B, C, D, E\}$ 以及对称排列

$$\pi = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ E & D & C & B & A \end{pmatrix},$$

以及 Rauzy 图中的一条闭合路径，该路径从 $\pi$ 出发，沿着标记为 ttbbtbtbbbtb 的边前进。相应的自相似矩阵属于

form

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

且是本原的（$M^2$ 为正），并且属于双曲型；这里 $g = 2$ 和 $\kappa = 2$。$M$ 的佩龙-弗罗贝尼乌斯特征值等于

$$\theta_0 := 2 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{15 + 8\sqrt{3}} \approx 5.55,$$

and

$$\lambda = \Big(\sqrt{3}, \frac{3}{2} - \sqrt{3} + \sqrt{15 + 8\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{15 + 8\sqrt{3}}, \\ -1 + \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{15 + 8\sqrt{3}} + \sqrt{3}\sqrt{15 + 8\sqrt{3}}, 1, \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{15 + 8\sqrt{3}}\Big)$$

是其左佩龙-弗罗贝尼乌斯特征向量。那么 $T = (\pi,\ \lambda)$ 是一个双曲周期型（周期为 $n = 12$）的区间交换变换，其自相似矩阵为 $M$。由于 $\kappa = 2$，右侧 $M$- 不变空间是一维的，由$\omega$生成：$= (-1,\ -2,\ -1,\ 2,\ 1)$。于是，相应的矩阵 $M(t\omega)$ 为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & e^{-t} + e^{-2t} \\ 1 & 1 + e^{-t} & 0 & 0 & e^{-t} + e^{-2t} + e^{-3t} \\ 1 & 0 & 1 + e^{-t} & 0 & e^{-t} + e^{-2t} \\ 1 & 0 & e^{2t} + e^{t} + 1 & 1 + e^{-t} & e^{t} + e^{-t} \\ 1 & 0 & e^{t} + 1 & e^{-t} & 1 + e^{-t} \end{pmatrix}.$$

对于任意实数 $t$，考虑一个仿射区间交换变换 $f_{t\omega} \in \mathbf{Aff}(T,\ t\omega)$。由 $f_{t\omega}$ 交换的区间长度由矩阵 $M(t\omega)$的左佩龙-弗罗贝尼乌斯特征向量的坐标给出。对于 $t = 1$，其左归一化佩龙-弗罗贝尼乌斯特征向量近似等于

$$(0.258620, 0.103498, 0.415430, 0.028547, 0.193905).$$

由于 $q_A^{(n)} = 4$、$q_B^{(n)} = 6$、$q_C^{(n)} = 5$、$q_D^{(n)} = 8$和 $q_E^{(n)} = 6$，扩展字母表为

$$\Sigma = \big\{A0,\ A1,\ A2,\ A3,\ B0,\ B1,\ B2,\ B3,\ B4,\ B5,\ C0,\ C1,\ C2,\ C3,\ C4,\\ D0,\ D1,\ D2,\ D3,\ D4,\ D5,\ D6,\ D7,\ E0,\ E1,\ E2,\ E3,\ E4,\ E5\big\}.$$

由于边势 $\Phi_\omega((\beta,\ j),\ (\alpha,\ i))$ 的取值不依赖于

| | $A0$ | $A1$ | $A2$ | $A3$ | $B0$ | $B1$ | $B2$ | $B3$ | $B4$ | $B5$ | $C0$ | $C1$ | $C2$ | $C3$ | $C4$ | $D0$ | $D1$ | $D2$ | $D3$ | $D4$ | $D5$ | $D6$ | $D7$ | $E0$ | $E1$ | $E2$ | $E3$ | $E4$ | $E5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **B** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | $e^{-t}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **C** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | $e^{-t}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | $e^{t}$ | 0 | $e^{2t}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | $e^{t}$ | 0 |
| **D** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $e^{-t}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $e^{-t}$ | 0 | 0 |
| **E** | 0 | $e^{-t}$ | 0 | $e^{-2t}$ | 0 | $e^{-t}$ | 0 | $e^{-2t}$ | 0 | $e^{-3t}$ | 0 | $e^{-t}$ | 0 | 0 | $e^{-2t}$ | 0 | $e^{-t}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $e^{t}$ | 0 | $e^{-t}$ | 0 | 0 | 0 | 1 |

表1. 矩阵的简化版本 $\mathcal{M}(t\Phi_\omega)$

坐标 $j$，矩阵 $\mathcal{M}(t\Phi_\omega)$ 中由 $(\beta,\ j)$索引的所有行，对于 $0 \leqslant j < q_\beta^{(n)}$ 而言都是相同的。因此，为了简化矩阵 $\mathcal{M}(t\Phi_\omega)$ 在表1中的呈现，我们不重复这些相同的行。在此

方式下，我们得到一个简化矩阵，其各行由字母表 $\mathcal{A}$的元素索引。

下一步（这次计算量较大）是确定$\Phi_\omega = 0$、 $\Phi_\omega = -1$，即图 $\mathcal{G} = (\Sigma, \mathcal{E})$中的 $\Phi_\omega$-最大化和 $\Phi_\omega$-最小化初等回路，并识别相应的 $\Phi_\omega$-最大化和 $\Phi_\omega$-最小化子移位 $X(\Phi_\omega)$ 和 $X(\Phi_{\overline{\omega}})$ ，以及它们的图 $\mathcal{G} = (\Sigma, \mathcal{E})$ 和 $\mathcal{G} = (\Sigma, \mathcal{E})$。这些计算的结果包括化简后的顶点集合

$$\overline{\Sigma} = \big\{A0,\ A1,\ A2,\ B0,\ B1,\ B2,\ C0,\ C1,\ C2,\ D5,\ D6,\ D7,\ E3,\ E4,\ E5\big\},$$
$$\underline{\Sigma} = \big\{A2,\ A3,\ B4,\ B5,\ C3,\ C4,\ D0,\ D1,\ D2,\ D3,\ E0,\ E1,\ E2,\ E3\big\},$$

以及分别列于表2和表3中的图 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}$ 的邻接矩阵。于是， $h_{top}(X(\Phi_\omega))$ 和 $h_{top}(X(\Phi_\omega))$ 是对数

| | A0 | A1 | A2 | B0 | B1 | B2 | C0 | C1 | C2 | D5 | D6 | D7 | E3 | E4 | E5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| A1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| A2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| B0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| B1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| B2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| C1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| C2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| D5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| D6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| D7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| E3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| E4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| E5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

表2. $\Phi_\omega$-最大化图的邻接矩阵

| | A2 | A3 | B4 | B5 | C3 | C4 | D0 | D1 | D2 | D3 | E0 | E1 | E2 | E3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| A3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| B4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| B5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| C4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| D0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| D1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| D2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| D3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| E0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| E1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| E2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| E3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

表 3。 $\Phi_\omega$-最小化图的邻接矩阵

邻接矩阵的佩龙-弗罗贝尼乌斯特征值，即 log3。因此，逆共轭的上确界 Hölder指数 $h_{t\omega}^{-1}$有如下下界

$$\frac{h_{top}(\overline{X}(\Phi_\omega))}{h_{top}(X)} = \frac{h_{top}(\underline{X}(\Phi_\omega))}{h_{top}(X)} = \frac{\log 3}{\log \theta_0} \approx 0.64.$$

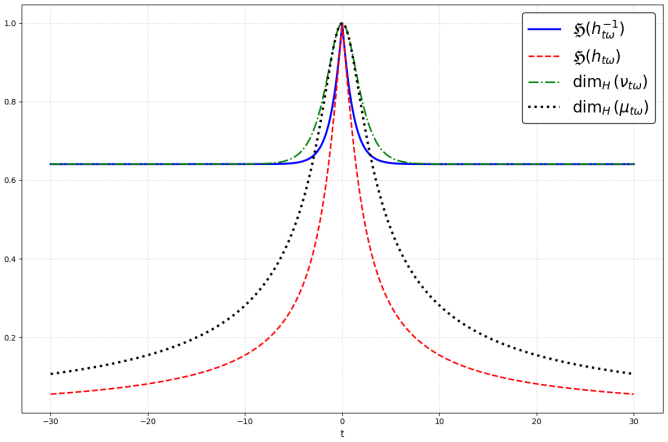



图1. 展示 Hausdorff 维数和 Hölder指数随参数 $t$变化的曲线

最后，图 1 展示了豪斯多夫维数和上确界Hölder指数随参数$t$变化的曲线。读者很容易注意到，所有图形都具有对称性，这并非偶然。通过相当初等的论证可以得出，这种对称性源于定义区间交换变换 $T$的置换 $\pi$ 的对称性。

## 致谢

第一作者获得了 Narodowe Centrum Nauki 项目 2025/57/B/ST1/00704 的部分资助。第二作者获得了 Narodowe Centrum Nauki 项目 2023/50/O/ST1/00045 的部分资助。

## 参考文献

[1] P. Berk、K. Frączek、Ł. Kotlewski、F. Trujillo，关于仿射区间交换变换的测度与半共轭，预印本：https://doi.org/10. 48550/arXiv.2511.05069。[2] P. Berk、F. Trujillo，分段光滑圆周同胚与某些广义区间交换变换的刚性，*Adv. Math.* 441（2024），论文编号109560。[3] X. Bressaud、P. Hubert、A. Maass，自相似仿射区间交换变换中游荡区间的持久性，*Ergodic Theory Dynam. Systems* 30（2010），665–686。[4] J. Brzykcy、K. Frączek，区间交换变换与概率来源系统的不相交性，*Discrete Contin. Dyn. Syst.* 27（2010），53–73。[5] J.-R. Chazottes、J.-M. Gambaudo、E. Ugalde，通过重整化研究一维吉布斯态的零温极限：局部常值势的情形，*Ergodic Theory Dynam. Systems* 31（2011），1109–1161。[6] M. Cobo，与区间交换共轭的分段仿射映射，*Ergodic Theory Dynam. Systems* 22（2002），375–407。[7] J.-P. Conze、Y. Guivarc'h，遍历和的增长与变分原理，雷恩第一大学技术报告，1990。

[8] S. Ghazouani、C. Ulcigrai，亏格二中广义区间交换变换的先验界、仿射影子与叶层刚性，*Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 138（2023），229–366。[9] S. Ghazouani、C. Ulcigrai，可线性化广义区间交换变换的共轭正则性，*Comm. Math. Phys.* 406（2025），论文编号42。
[10] 15 2006 197 224 O.
[11]
Jenkinson，遍历优化，*Discrete Contin. Dyn. Syst.*（），– S. Marmi、P. Moussa、J.-M. Yoccoz，具有游荡区间的仿射区间交换映射。*Proc. Lond. Math. Soc.* 100，（2010），639–669。[12] F. Przytycki、M. Urbański，共形分形：遍历理论方法，伦敦数学学会讲义系列371，剑桥大学出版社，剑桥，2010，x+354 页。[13] D. Ruelle，热力学形式，剑桥大学出版社，剑桥，2004年。[14] F. Trujillo、C. Ulcigrai，具有到区间交换变换的奇异共轭的仿射区间交换映射，即将发表于*Annali Scuola Normale Superiore - Classe di Scienze*（2024），https://doi.org/10.2422/2036-2145。202305_001。[15] J.-C. Yoccoz，区间交换，讲义（2005），可访问：https://www.college-de-france.fr/media/jean-christophe-yoccoz/UPL8726_yoccoz05.pdf

数学与计算机科学学院，尼古拉·哥白尼大学，Chopina 街 12/18 号，87-100 托伦，波兰电子邮箱地址：fraczek@mat.umk.pl 数学与计算机科学学院，尼古拉·哥白尼大学，Chopina 街 12/18 号，87-100 托伦，波兰电子邮箱地址：kotlewskilukasz@mat.umk.pl