arXiv:2602.05003v1 [math.GT] 4 Feb 2026

闭流形手术障碍与渗漏猜想

IAN HAMBLETON 和 OZGUN UNLU

Abstract. 我们完成了对有限基本群的闭定向流形的手术障碍的描述，该描述精确到同伦等价。我们给出了新的例子，展示余维≥ 4中的 Arf 不变量乘积公式存在非平凡障碍；这些例子构成了对20世纪80年代著名的“渗漏猜想”的反例。

1. Introduction

手术正合列 [23, 第 9] 章为流形及其自同构的分类提供了一个框架。在这一理论中，通过研究某些组装映射来计算次数为 1 的正规映射 (f, b) : $N^n \to M^n$ 的手术障碍，从而分析流形拓扑与同伦论之间的关系；其中定义域和值域均为闭流形（见 [16], [17], [7]）。这些障碍取值于代数定义的手术障碍群 $L_n(\mathbb{Z}\pi, w)$，它们仅取决于基本群 $\pi := \pi_1(M)$、定向特征 w: $\pi \to \{\pm 1\}$，以及 $n =$维数模 4 的结果。 L-理论组装映射的像是 $L_n(\mathbb{Z}\pi, w)$ 的子群，由闭流形手术障碍组成（见 [23,定理 13B.3], [6,§2]）。

本文将限于讨论基本群有限的定向流形的手术问题。值得指出的是，著名的 Farrell-Jones 猜想 [2] 为无限基本群的 L理论组装映射提供了迄今最充分的信息，但对有限群 [10] 则没有提供任何信息（参见 [27] ，了解 Farrell-Jones 猜想研究进展的最新综述；另参见，了解一个引人注目的例子）。

基本群有限的闭流形在简单同伦等价意义下的手术障碍 π ，可通过转移到 2-Sylow 子群来确定（参见 [4]）。Wall [26] 和 Taylor-Williams [21] 的上同调公式将手术障碍映射的计算

$$[X, G/TOP] \to L^s_n(\mathbb{Z}\pi)$$

关于某些特征类信息以及两族泛同态的确定:

$$\mathscr{I}^s_j(\pi)\colon H_j(\pi; \mathbb{Z}_{(2)}) \to L^s_j(\mathbb{Z}\pi)_{(2)}$$

and

$$\kappa^s_j(\pi)\colon H_j(\pi; \mathbb{Z}/2) \to L^s_{j+2}(\mathbb{Z}\pi)_{(2)}$$

日期：2026年2月3日。研究部分由 NSERC 探索基金 A4000 资助。第二作者获得了数学科学菲尔兹研究所的支持，并于 2024年7月在麦克马斯特大学持有菲尔兹研究奖学金。

对所有 $j \geq 0$ 定义。注意，计算这些同态等价于确定 L-理论组装映射

$$A_\pi \colon B\pi^+ \wedge \mathbb{L}_0(\mathbb{Z}) \to \mathbb{L}_0^s(\mathbb{Z}\pi)$$

有限基本群的定向流形（参见 [4, §1]）。

我们回顾一下，对于定向流形， $\mathscr{I}_0^s$ 可等同于普通签名，而 κ_0^s 可等同于普通阿尔夫-克尔维尔不变量（通过投影到 $\pi = 1$来定义）。从现在起，我们假设所有 L-群都配备标准定向对合（$g \mapsto g^{-1}$），并在 2 处局部化。根据 [24, 定理 7.4]，这不会造成信息损失，因为对于有限群 π， L-理论中的挠元全都是 2-初级的。

更一般地，设 $U \subseteq Wh$（$\mathbb{Z}\pi$）是一个对合不变子群。那么，可以考虑挠元位于U中的、关于同伦等价的手术障碍。最重要的例子是 $U = \{0\}$ （简单）、 $U = SK_1$（$\mathbb{Z}\pi$）（弱简单）以及 $U = Wh$（$\mathbb{Z}\pi$），相应的障碍群分别为 L^s、 L'和 L^h 。

闭流形手术障碍在 $L_*^U(\mathbb{Z}\pi)$ 中，对于手术达到弱简单同伦等价的情形，在 [4, 定理 A], 中已针对任意 Whitehead 挠率修饰基本确定。

$$SK_1(\mathbb{Z}\pi) \subseteq U \subseteq \mathrm{Wh}(\mathbb{Z}\pi).$$

更确切地说，除了 κ_4^U 之外，所有弱简单泛同态都已计算出来。特别是，对于 $j > 0$，$\mathscr{I}_j^U = 0$（参见 [4, 定理 2.1]，其中给出了略强的结果）。

对于达到简单同伦等价的手术，我们目前还没有泛同态的一般计算。Taylor 和 Williams [22, 定理 4.1] 推广了 Stein [20] 关于手术障碍乘积公式的工作，研究了具有特殊2-Sylow 子群（循环、二面体群、半二面体群和四元数）的有限基本群所对应的泛同态，并获得了关于阿贝尔 2-西洛子群的大部分信息。

我们探讨了有关泛同态的一些未解问题。主要结果如下：

(i) 以群同调为依据，完整确定手术组装映射（针对同伦等价的手术）（定理 E）。(ii) 完整描述阿贝尔群或基本 2-群的单纯闭流形手术障碍（定理 A）。(iii) 描述单纯闭流形手术障碍在$\widehat{}$系数变换映射$L_*^s(\mathbb{Z}\pi) \to L_*^s(\mathbb{Z}_2\pi)$ 下的像（定理 B 和定理 C）。(iv) 给出例子，说明 $\ker \kappa_2^h \neq$ 核κ_2^s (推论 D)。(v) 给出一个例子，说明同态 κ_4^h 可以非零（见推论5.8）。

注记 1.1. 这些结果是通过进一步利用我们合作论文 [4], 中的一个关键要素得到的，即经由二次扩张的 L理论对 $\{\kappa_*^s\}$ 进行提升

环 $R=\mathbb{Z}[\varepsilon]$，其中 $\varepsilon=(1+\sqrt{5})/2$。存在一个自然分解

$$\begin{array}{ccc} H_j(\pi;\,\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\kappa_j^s} & L^s_{j+2}(\mathbb{Z}\pi)^{(2)} \\ & {\scriptstyle\tilde{\kappa}_j^s}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle trf} & \\ & L^s_j(R\pi) & \end{array}$$

w这里 trf 是作用于 L-理论的诱导传递映射（见 [4, 定理 1。16]）。

Morgan-Pardon（未发表，[11, 定理 4.6]）和 Cappell-Shaneson 提出了两个重要例子 [1], ，证明了某些乘积公式的非平凡性

$$(f\times 1, b\times 1)\colon K^{4n+2}\times M^k\to S^{4n+2}\times M^k$$

关于 $L^h_{k+2}(\mathbb{Z}\pi)$ 的手术障碍。在这些乘积中，$(f,\ b)\colon\ K^{4n+2}\to S^{4n+2}$表示一个度为 1 的正规映射，其定义域是 Arf-Kervaire 不变量为 1 的闭拓扑 Kervaire 流形，而 M^k 是一个闭定向流形，且 $\pi_1(M,\ x_0)=\pi$。我们回顾一下，若 $k\equiv 0$ （模 4），且M 的欧拉示性数为偶数，则这些障碍消失（见 [4, 定理 (0.2)(i)]）。

更一般地，也可以考虑 Arf 不变量正规映射 $(f,\ b)\colon\ K^{4n+2}\to S^{4n+2}$ 与非定向流形的扭曲乘积的定向手术障碍（见 [6, §4]）。

这类（扭曲）乘积正规映射在同伦等价意义下的手术障碍，模去普通阿尔夫-克尔维尔不变量的像，有时称为余维 k *Arf* 不变量。一个著名的猜想提出于20世纪80年代:

渗漏猜想。对于 $k\geq 4$，余维 k 的 Arf 不变量均为平凡。

Morgan-Pardon 例子表明 $\kappa^h_2\neq 0$，而 Cappell-Shaneson 例子表明 $\kappa^h_3\neq 0$。一般而言，渗漏猜想等价于（根据手术障碍的上同调公式）所有同态 κ^h_j在 $j\geq 4$上的消失（见 [4, 定理 A]）。然而，下面的定理 E 和推论5.8中的例子表明，这种形式的渗漏猜想是错误的。

这个猜想有一个更精确的版本（推论5.8也否定了这个版本），它涉及扭曲乘积在具有 Arf 不变量的正规映射下的定向手术障碍，模去单纯同伦等价（$f,\ b$）：$K^{4n+2}\to S^{4n+2}$。这些障碍在 L^s_{k+2}（$\mathbb{Z}\pi$）的余维 $k\geq 4$ 上消失，是一个更强的陈述，等价于同态κ^s_j对 $j\geq 4$均消失。下面提出一个自然的问题。

问题。 是否存在一个有限 2-群 π 使得 $\kappa^s_4(\pi)\neq 0$，但 $\kappa^h_4(\pi)=0$？

在第 6b 节，我们通过进一步的 GAP 计算提出了一种肯定回答这一问题的方法，并在命题6.9中给出了一个例子。

1a. 基本 2-群或阿贝尔 2-群的结果。 以下是有限阿贝尔 2-群和基本 2-群（循环群、四元数群、二面体群和半二面体群）的结果。这些情形非常重要，因为它们是确定更一般有限 2-群上的手术障碍的构建模块（比较 [4, 定理 0.3]）。

定理 **m A** ([22], [4]). 假设 π 是阿贝尔群或基本有限 2 群。那么

(i) $\mathscr{I}_j^s = 0$，对于 $j > 0$；*(ii)* κ_0^s 和 κ_1^s 均为（分裂）单射；*(iii)* 对于基本 2 群，$\kappa_2^s = 0$；*(iv)* 对于 $j > 2$，$\kappa_j^s = 0$，除非 π 是四元数群；*(v)* 若 π 是四元数群，则 κ_3^s 是单射，且对于 $j \geq 4$，$\kappa_j^s = 0$。

此外，若 $E \subseteq \pi$ 表示由阶为 ≤ 2 的元素组成的阿贝尔2群 π 的子群，则该序列

$$H_2(E; Z/2) \to H_2(\pi; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\kappa_2^s} L_0^s(\mathbb{Z}\pi)$$

是正合列。此外，核 $\kappa_2^s(\pi)$ =核 $\kappa_2^h(\pi)$ 及其像同构。

记号：我们用 $H^n(A) := H^n(\mathbb{Z}/2; A)$ 表示以 a$\mathbb{Z}/2$-模 A 为系数的 Tate 上同调。

注 1.2。这些结果细化了 Taylor-Williams [22] 中证明的结果：我们将说明如何从 [4] 中的信息推导出这些结果。κ_*^s 与 κ_*^h 之间的差异，部分可由中间比较序列衡量

$$\cdots \to H^{n+1}(SK_1(\mathbb{Z}\pi)) \xrightarrow{\partial} L_n^s(\mathbb{Z}\pi) \to L'_n(\mathbb{Z}\pi) \to H^n(SK_1(\mathbb{Z}\pi)) \to \dots$$

其中 $L'_*(\mathbb{Z}\pi)$ 表示带有 Wh′($\mathbb{Z}\pi$) :=Wh($\mathbb{Z}\pi$)/$SK_1(\mathbb{Z}\pi)$ 中挠装饰的弱简单 L-理论。从 L'_* 到 L_*^h 的过渡由正合列给出

$$0 \to L'_{2k}(\mathbb{Z}\pi) \to L^h_{2k}(\mathbb{Z}\pi) \to \mathrm{Wh}'(\mathbb{Z}\pi) \otimes \mathbb{Z}/2 \to L'_{2k-1}(\mathbb{Z}\pi) \to L^h_{2k-1}(\mathbb{Z}\pi) \to 0$$

这归功于Wall [25, 第 78]页。特别地，这表明在偶数维中，对任意有限群，κ_{2j}^h 决定κ'_{2j}（即核 κ'_{2j} = 与核 κ_{2j}^h 及其像同构）。

定理A的最后一部分表明，对 π 有限阿贝尔2-群，一个更强的结论成立，即 $\kappa_2^s(\pi)$ 的像与自然映射 ∂: $H^1(SK_1(\mathbb{Z}\pi)) \to L_0^s(\mathbb{Z}\pi)$的像的交集为零。

1b. 关于2-进同态的结果。接下来我们集中讨论这些复合：

$$\bar{\kappa}_j^s \colon H_j(\pi; \mathbb{Z}/2) \to L^s_{j+2}(\mathbb{Z}\pi) \xrightarrow{\rho_2} L^s_{j+2}(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$$

是泛同态在由 ρ: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ 诱导的映射下映入2-进L-群的复合。回想一下，手术障碍的计算基于借助如下形式的正合列，将2-进信息与整数信息分离

$$\cdots \to L_{j+1}(\mathbb{Z}\pi \to \widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \to L_j(\mathbb{Z}\pi) \to L_j(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \to \dots$$

带有适当的挠装饰（见 Wall [25, 1。2]）。相对 L-群具有更好的归纳和检测性质（见 [25, 2。1], [5]），我们可以利用这些性质，根据其 2-进像获取关于积分 κ_*-同态的信息（见引理 3.4）。在下一个结果中，令 $s_r \colon H_{2^{r+2}}(\pi;\ \mathbb{Z}/2) \to H_4(\pi;\ \mathbb{Z}/2)$，对 $r > 0$，表示上同调中迭代平方映射的 Hom 对偶。

定理 B。对于任意有限的2-群 π，*2*-进通用同态

$$\bar{\kappa}_j^s \colon H_j(\pi; \mathbb{Z}/2) \to L^s_{j+2}(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$$

对于 $j \neq 2$，其确定方式如下：

(i) $\bar{\kappa}_0^s$ 和 $\bar{\kappa}_1^s$ 是分裂单射。*(ii)* 若 $j>0$，则当 $j\neq 2^l$时，$\bar{\kappa}_j^s=0$，对于 $l\geq 1$。*(iii)* 对于 $r\geq 0$，$\bar{\kappa}_{2^{r+2}}^s=\bar{\kappa}_4^s\circ s_r$，且 $\bar{\kappa}_i^s$ 在$i\geq 4$的整数同调像上消失。

此外，对于 $j\equiv 0$ (模 2)，自然映射 $L'_{j+2}(\mathbb{Z}\pi)\to L'_{j+2}(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)\oplus L'_{j+2}(\mathbb{Z}\pi^{\mathrm{ab}})$ 检测到 κ'_j: $H_j(\pi;\mathbb{Z}/2)\to L'_{j+2}(\mathbb{Z}\pi)$ 的像。

注 1.3. 同态 $\bar{\kappa}'_2$: $H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)\to L'_0(\mathbb{Z}_2\pi)$ 的计算见命题 3.5。特别地，$\kappa'_2(\pi)$ 非零当且仅当 $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))\neq 0$。附录 A 中列出了满足 $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))\neq 0$ 的 ≤ 128 阶 2-群（一个必要条件是 π 为非阿贝尔）。更多信息请参见定理 C，了解 $\bar{\kappa}_2^s$。

1c. **关于简单同伦等价的手术结果**。现在我们解决 [4] 中的一些未决问题。回顾一下，在 Ranicki-Rothenberg 序列中有一个边界映射 ∂: $H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))\to \widehat{\ }\widehat{\ }L_0^s(\mathbb{Z}_2\pi)$，它通过改变 Whitehead挠率的挠装饰来比较 $L_*^s(\mathbb{Z}_2\pi))$ 与 $L'_*(\mathbb{Z}_2\pi)$。

定理 C。设 π 是一个有限 *2*-群。假设以下条件成立：

(i) 边界映射 ∂: $H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))\to L_0^s(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$ 非零。*(ii)* $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))=0$。

那么 $\kappa_2^s(\pi)$ 非零，且 $\bar{\kappa}'_2(\pi)=0$。如果 $H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))\to L_0^s(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$ 是单射，那么$\mathrm{Im}\{\bar{\kappa}_2^s(\pi)$: $H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)\to L_0^s(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)\}\cong H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))$。

推论 D. 存在有限的2-群 π，使得核 $\kappa_2^s(\pi)\subsetneq$ 核 $\kappa_2^h(\pi)$.

注 1.4. 这回答了 Kasprowski、Nicholson 和 Vesel´a 提出的一个问题 [9, 1.5]，其中，[9, 定理 C] 表明，存在这样的例子意味着存在同伦等价但不同伦等价（即使经过稳定化）的闭光滑 4-流形。

在第 4 节中，我们给出若干满足定理 C 条件的群的例子 π （见例子4.12）。在这些群中，有满足推论 D 的例子，其中核 $\kappa_2^s(\pi)\subsetneq$ 核 $\kappa_2^h(\pi)$，与 Morgan-Pardon 例子形成对照：$\pi=\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/4$，其中 $\kappa_2^h(\pi)\neq 0$。在第 4b 节中，我们详细介绍小群库 $\pi=SG[128,1377]$ 中的群，其中记号 $SG[i,j]$ 表示j^{th} 阶为 i 的群（见例子列表4.13）。

1d. **关于渗漏猜想的结果**。最后，我们将关于手术的原始“渗漏猜想”（至同伦等价）归结为群同调中的一项明确计算，并给出一个反例。

在下述陈述中，令 s_*: $H_4(\pi;\mathbb{Z}/2)\to H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)$ 表示 Sq^2: $H^2(\pi;\mathbb{Z}/2)\to H^4(\pi;\mathbb{Z}/2)$ 的对偶同态，并令 β: $H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)\to H^0(\pi^{\mathrm{ab}})$ 表示由 Bockstein 诱导的映射。此外，短正合列

$$0\to \mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)\to \overline{I(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)}\to \pi^{\mathrm{ab}}\to 0$$

诱导出一个（满射）余边界映射 δ: $H^0(\pi^{\mathrm{ab}})\to H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))$。关于符号说明，请参见 [14, 第 163] 页。

定理 E. 设 π 是一个有限 2-群，并设

$$\lambda_4(\pi) := \delta \circ \beta \circ s_* \colon H_4(\pi;\mathbb{Z}/2) \to H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)).$$

则同态 $\kappa'_4(\pi) \neq 0$ 当且仅当 $\lambda_4(\pi) \neq 0$。此外，$\kappa'_4(\pi)$ 在整数同调 $H_4(\pi;\mathbb{Z}) \to H_4(\pi;\mathbb{Z}/2)$的像上为零。

第 5c 节的5c，推论 5.8中给出了一个例子，说明存在一个阶为 16384 的有限 2-群，使得 $\kappa'_4(\pi) \neq 0$（因而 $\kappa^s_4(\pi) \neq 0$。计算机研究表明，这类最小例子的阶应为 ≥ 512。

推论 1.5。对于同伦等价，渗漏猜想在手术中是错误的。对于 $l \geq 2$，存在非平凡的余维 k *Arf* 不变量问题，其余维为 $k = 2^l$。

注 1.6。在第5节中，我们通过交换图（见命题3.10）推导出定理 E 中的显式公式：

$$\begin{array}{ccc} H_4(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\lambda_4(\pi)} & H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \\ \downarrow{\scriptstyle \kappa'_4(\pi)} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ L'_2(\mathbb{Z}\pi) & \xrightarrow{\rho_2} & L'_2(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \end{array}$$

其中边界映射 ∂ 是单射。这将原始渗出猜想（即对于 $j \geq 4$，有 $\kappa^h_j = 0$）归结为一个显式的群同调计算，也就是计算映射 $\lambda_4(\pi)$。注意到存在一个单射 $L'_2(\mathbb{Z}\pi) \to L^h_2(\mathbb{Z}\pi)$，因此 $\kappa^h_4 \neq 0$ 当且仅当 $\kappa'_4 \neq 0$，所以只需确定 $\kappa'_4(\pi)$。

Contents

1. 引言 1
2. 阿贝尔群或基本 2-群 7
3. 2-进通用同态 8
4. κ_2 13
5. 定理 E 的证明 17
6. 关于 $\kappa_4(\pi)$ 的更多信息 24
附录 A。关于 $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2G))$ 的一些 GAP 计算 29
附录 B。关于 $H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))$ 的一些 GAP 计算 31
附录 C。用于检验猜想 6.1 的一些 GAP 代码 34
参考文献 35

致谢。我们谨感谢 Larry Taylor 近期与我们进行的有益交流，也感谢多年来与我们的朋友和合作者、已故的 Bruce Williams[†]共同开展的所有工作。我们还感谢 David Green 和 Simon King 提供有关有限 2-群上同调的有用信息，并感谢 Bob Oliver 在 $SK_1(\mathbb{Z}_2\pi)$方面给予的帮助。

†1945年8月17日－2018年1月11日

2. Abelian or basic 2-groups

我们首先概述一些关于群环 K-理论的结果（关于相关文献，一份方便的参考指南是 [14]）。回顾一下，存在一个短正合列

$$0 \to SK_1(\mathbb{Z}\pi) \to \mathrm{Wh}(\mathbb{Z}\pi) \to \mathrm{Wh}'(\mathbb{Z}\pi) \to 0$$

其中 $SK_1(\mathbb{Z}\pi) = \ker\{K_1(\mathbb{Z}\pi) \to K_1(\mathbb{Q}\pi)\}$，并且

$$\mathrm{Wh}(\mathbb{Z}\pi) = K_1(\mathbb{Z}\pi)/SK_1(\mathbb{Z}\pi) \oplus \{\pm 1\} \oplus \pi^{\mathrm{ab}}.$$

商 $\mathrm{Wh}'(\mathbb{Z}\pi)$ 是有限生成的无挠群，其秩等于 π 的不可约实表示数与有理表示数之差。此外，我们有一个短正合列

$$0 \to Cl_1(\mathbb{Z}\pi) \to SK_1(\mathbb{Z}\pi) \to SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \to 0$$

其中 $SK_1(\mathbb{Z}_2\pi) = \ker\{K_1(\mathbb{Z}_2\pi) \to K_1(\mathbb{Q}_2\pi)\}$。

这些不同的 K-群的 Tate 上同调出现在 Rothenberg 序列中，这些序列联系了 L 理论的各种形式，即 L^s、L' 和 L^h。以下是我们需要的一些事实（对于阶为 2 的幂的 π）：

- [14, 14.2; 14.4] $SK_1(\mathbb{Z}\pi) = 0$ 若 π 是基本群或初等阿贝尔群。
- [14, 8.6] 存在自然同构 $\Theta_\pi\colon SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \cong H_2(\pi;\mathbb{Z})/H_{\text{阿贝尔 2-群}}(\pi)$。对合 $g \mapsto g^{-1}$ 在 $SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$ 上诱导由 -1 给出的乘法。若 π 是阿贝尔群，则 $SK_1(\mathbb{Z}\pi) = Cl_1(\mathbb{Z}\pi)$。
- [13, 命题 13] $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) = 0$ 若 π 是基本群或阿贝尔群。
- [14, 8.7] 转移 $trf\colon SK_1(R_2\pi) \to SK_1(\mathbb{Z}_2\pi)$ 是一个同构。

定理 *A* 的证明。由于对于任意基本群或阿贝尔 2-群，$SK_1(\mathbb{Z}\pi) = 0$，因此我们有$L^s_*(\mathbb{Z}\pi) = L'_*(\mathbb{Z}\pi)$ 且 $\kappa^s_*(\pi) = \kappa'_*(\pi)$。于是，(i) 部分由 [4, 定理 2.1]立即得出：这实质上就是 [22, 定理 1.2 和 4.1]中的论证。

（ii）由自然性和 [4, 定理 0.3(ii)], 得出；（iv）和（v）中的消失结果则由 [4, 定理 6.8] 通过应用 L-理论转移得出。对于 π四元数情形，Cappell-Shaneson 例子表明 $\kappa^s_3(\pi)$是单射。

接下来考察（iii）。根据 Wall [25, §5.2]中的计算，当 π 是基本 2-群时，$L'_0(\mathbb{Z}\pi)$是无挠的，因为 $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) = 0$。由此可得$\kappa^s_2(\pi) = \kappa'_2(\pi) = 0$。

剩下要考察的是 π为阿贝尔时的$\kappa^s_2(\pi) = \kappa'_2(\pi)$。我们可以写成 $\pi = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_r$，其中 $C_i \cong \mathbb{Z}/2^{k_i}$。于是存在一个满射 $\bigoplus H_1(C_i;\,\mathbb{Z}/2) \to H_1(\pi;\,\mathbb{Z}/2)$，并且

$$H_2(\pi;\mathbb{Z}/2) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} H_2(C_i;\mathbb{Z}/2) \oplus \bigoplus_{i<j} H_1(C_i;\mathbb{Z}/2) \otimes H_1(C_j;\mathbb{Z}/2). \tag{2.1}$$

一般而言，若 π 是秩为 r、含有 s 个二阶直和项的阿贝尔 2-群，则

$$L'_0(\mathbb{Z}\pi) = \Sigma \oplus \left(2^r - r - 1 - \binom{s}{2}\right) \cdot \mathbb{Z}/2 \tag{2.2}$$

由 [25,Theor 理 3.3.2]。特别地，对于 π 循环或 $\pi = C_2 \times C$，$L'_0(\mathbb{Z}\pi)$是无挠的 $_2$.

首先，假设 π 是秩为 ≥ 2的初等阿贝尔群，并令 $\gamma = C_2 \times C_2$ 为 π的子群，其中 i_*: $\gamma \to \pi$ 为包含映射。于是

$$\kappa_2'(i_*(x)) = i_*(\kappa_2'(x)) \in \mathrm{Im}\{L_0'(\mathbb{Z}\gamma) \xrightarrow{i_*} L_0'(\mathbb{Z}\pi)\}.$$

但是 $\kappa_2'(\gamma) = 0$，由于 $L_0'(\mathbb{Z}\gamma)$ 无挠，因此 $\kappa_2'(i_*(x)) = 0$。由于$H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)$中的每个上同调类都是由秩为 ≤ 2 的子群诱导的上同调类之和，且对于循环群，$\kappa_2^s = 0$，所以对于初等阿贝尔 2-群，$\kappa_2^s(\pi) = 0$。

对于 π 任意阿贝尔群，我们同样可以只考虑满足 $\kappa_2'(x)$ =0 的元素 $x \in H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)$，它们是由秩为 2 的子群诱导的上同调类之和。若 π 的秩为 r 且有 s 个二阶直和项，则可写为 $\pi = \pi_1 \times \pi_2$，其中 $\pi_1 = C_\times \cdots \times C_s$ 是初等阿贝尔群，而 $\pi_2 = C_1' \times \ldots C_{r-s}'$ 由阶为 ≥ 4 的因子组成。我们将 $\{\alpha_i\}$记为 $H_1(C_i;\mathbb{Z}/2)$ 的生成元，将 $\{\beta_j\}$ 记为 $H_1(C_j';\mathbb{Z}/2)$ 的生成元。根据公式 (2.1)，我们可以假设

$$x = \sum a_{ij}(\alpha_i \otimes \beta_j) + \sum b_{kl}(\beta_k \otimes \beta_l) \in H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)$$

模去 $H_2(E;\mathbb{Z}/2)$ 的像。注意，这些上同调类是 $H_2(\pi;\mathbb{Z})$ 中整数同调类的约化。对于每个子群 $\gamma = C_i \times C_j'$或 $\gamma = C_k' \times C_l'$，都有$H_2(\gamma;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$，而 Morgan-Pardon 例子在 $L_0'(\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/4) \cong\mathbb{Z}/2$ 中的非平凡性通过投影表明，对于所有这类群，$\kappa_2'(\gamma)$ 是一个同构。

由于存在独立投影 $\{p_\gamma\colon \pi \to \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4\}$，使得对 $\gamma' \neq \gamma$ 有 $p_\gamma(\gamma') = 1$，由自然性可得 $x \equiv 0$ (模 $H_2(E;\mathbb{Z}/2)$)，从而证明了正合性。

为证明定理 A 的最后一部分，考虑下图

$$\begin{array}{ccccc} H_2(E;Z/2) & \xrightarrow{\kappa_2^s} & L_0^s(ZE) & \xrightarrow{\cong} & L_0'(ZE) \\ \downarrow{\scriptstyle i_*} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_*} \\ H_2(\pi;Z/2) & \xrightarrow{\kappa_2^s} & L_0^s(\mathbb{Z}\pi) & \longrightarrow & L_0'(\mathbb{Z}\pi) \end{array}$$

$$H_2(\pi;Z/2) \xrightarrow{\kappa_2'} L_0'(\mathbb{Z}\pi)$$

若对某个 $x \in H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)$，有 $\kappa_2^s(x) \neq 0$，但 $\kappa_2'(x) = 0$，则存在 $y \in H_2(E;\mathbb{Z}/2)$，使得 $i_*(y) = x \in H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)$。但此时 $\kappa_2^s(x) = \kappa_2^s(i_*(y)) = i_*(\kappa_2^s(y)) = 0$，因为对初等阿贝尔 2-群有$\kappa_2^s = 0$。若 $\kappa_2'(x) \neq 0$，则正合列

$$\cdots \to H^1(SK_1(\mathbb{Z}\pi)) \to L_0^s(\mathbb{Z}\pi) \to L_0'(\mathbb{Z}\pi) \to \ldots$$

表明 $\kappa_2^s(\pi)$ 的像与 $H^1(SK_1(\mathbb{Z}\pi))$ 的像的交集为零。这就完成了证明。□

3. The 2-adic universal homomorphisms

关于 2-adic κ同态的信息见 [4, §7] 和 Milgram- Oliver [12]。我们将在下文回顾这些结果。

3a. 2-**adic** κ_2^s **同态**。

定理 3.1 (Milgram-Oliver [12])。 设 π 是一个有限 2-群。存在一个交换图：

$$\begin{array}{ccc} H_2(\pi;\mathbb{Z})] & \xrightarrow{\theta} & H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \\ \downarrow{\scriptstyle \kappa_2^s} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ L_0^s(\mathbb{Z}\pi) & \xrightarrow{\rho_2} & L_0^s(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \end{array}$$

其中 ρ_2 是到 *2-adic* L-群的自然映射。

推论 3.2。 若 π 是阿贝尔群，则 $\bar{\kappa}_2^s(\pi)$: $H_2(\pi;\ \mathbb{Z}/2) \to L_0^s(\mathbb{Z}_2\pi)$ 为零。

Oliver 在 [13, 定理 3] 中证明存在一个自然同构

$$\theta\colon H_2(\pi;\mathbb{Z})/H_2^{\mathrm{ab}}(\pi) \xrightarrow{\cong} SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$$

其中 $H_2^{\mathrm{ab}}(\pi) \subset H_2(\pi;\mathbb{Z})$ 表示由阿贝尔子群经归纳映射得到的 π的像。此外，Oliver 证明，由 $g \mapsto g^{-1}$诱导的标准对合在 $SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$ 上等于乘以 -1 （见 [14, 定理 8.6]），因此 $H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \cong SK_1(\mathbb{Z}_2\pi) \otimes \mathbb{Z}/2$。

引理 3.3. $L_0'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \cong H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))$ 以及 $L_2'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))$。

证明。 我们有 Ranicki-Rothenberg 序列

$$\cdots \to L_{n+1}^h(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \to H^n(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \to L_n'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \to L_n^h(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \to \dots$$

以及计算 $L_n^h(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) = \mathbb{Z}/2$，对于偶数 n，由判别式或 Arf 不变量检测；对于奇数 n，则有 $L_n^h(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) = 0$ （详见 [25, §1.2] 和 [8, §2、定理 3.1]，其中介绍了“圆形” L-群的背景及其与手术障碍群的关系）。因此，我们得到同构 $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \to L_0'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$，以及分裂单射$H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \to L_0'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$，其余核 $\mathbb{Z}/2$ 由 Arf 不变量检测。

类似地，我们有一个正合列

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \to H^0(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \to L_3'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \to 0$$

以及 $H^0(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \xrightarrow{\cong} L_1'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$。 □

定理 C 的证明。 根据假设，我们有 $L_0'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \cong H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) = 0$，以及序列中的边界映射 ∂

$$\cdots \to L_1'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \to H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \xrightarrow{\partial} L_0^s(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \to L_0'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \to \dots$$

非零（且为满射）。由于 $\bar{\kappa}_2^s(\pi) = \rho_2 \circ \kappa_2^s(\pi)$ 和 $\bar{\kappa}_2^h(\pi)$ 经由 $\bar{\kappa}_2'(\pi) = 0$，定理 C 的结论可由定理 3.1 直接推出。□

关于 L-理论中挠元的下一个观察将用于定理 B、推论 D 和定理 E 的证明。注意，映射 $L_*(\mathbb{Z}\pi) \to L_*(\mathbb{R}\pi)$ 的核和余核均有限，而 $L_*(\mathbb{R}\pi)$ 可由多重符号检测到（见 [24, §7], [25, §2.2]）。

引理 3.4. 对于 π 一个有限的2群，$L_{2k}'(\mathbb{Z}\pi)$的扭子群可由自然映射 $L_{2k}'(\mathbb{Z}\pi) \to L_{2k}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \oplus L_{2k}'(\mathbb{Z}\pi^{\mathrm{ab}})$检测。

证明。我们先考虑 k 为偶数的情形。设 $x \in$ 核$\{L_0'(\mathbb{Z}\pi) \to L_0'(\mathbb{Z}_2\pi) \oplus L_0'(\mathbb{Z}\pi^{\mathrm{ab}})$ 是一个扭元素。在长正合列中

$$\cdots \to L_1'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \xrightarrow{\psi_1} L_1'(\mathbb{Z}\pi \to \widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \xrightarrow{\partial} L_0'(\mathbb{Z}\pi) \to L_0'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \to \dots$$

一个扭元素 $x \in \ker\{L_0'(\mathbb{Z}\pi) \to L_0'(\mathbb{Z}_2\pi)\}$ 是某个扭元素 $y \in L_1'(\mathbb{Z}\pi \to \mathbb{Z}_2\pi)$ 的像 $\partial(y) = x$。根据 Wall [25, 5.2.2]，相对L-群的扭子群是若干个 $\mathbb{Z}/2$ 的直和，每个有理群代数 $\mathbb{Q}\pi$ 的简单因子类型 O 对应一个。我们可以应用二次生成定理 [5, 定理 1.B.7 & 例 1.B.8 (iii)]，证明 $L_1'(\mathbb{Z}\pi \to \mathbb{Z}_2\pi)$ 的扭子群由 π 的基本子商的相对 L-群中扭元素的像生成。

由于线性类型 O 表示由映射 $\pi \to \pi^{\mathrm{ab}}$ 确定，我们只需考虑（非阿贝尔）二面体子商。然而，Wall 群$L_0'(\mathbb{Z}D(2^r))$，$r \geq 3$ 是无挠的 [25, 定理 5.2.3]。由此可知，$y \in L_1'(\mathbb{Z}\pi \to \mathbb{Z}_2\pi)$ 属于 ψ_1 的像，因此 $\partial(y) = x = 0$。

对于 k 奇数的情形，类似的论证适用于 $L_2'(\mathbb{Z}\pi)$，因为相对群 $L_3'(\mathbb{Z}\pi \to \mathbb{Z}_2\pi)$ 是由若干个 $\mathbb{Z}/2$在类型为 Sp的表示上的副本相加而成，因此由四元数子商生成。然而，对于 $r \geq 3$，$L_2'(\mathbb{Z}Q(2^r)) \cong \mathbb{Z}/2$ 可由平凡群 [25, 定理 5.2.3] 检测，结论由此得出。□

3b. **2-adic κ_2' 同态**。

命题 3.5 ([4, 7.2])**.** 设 π 是一个有限的 2-群。存在一个交换图：

$$\begin{array}{ccccc} H_2(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\beta} & H^0(\pi^{\mathrm{ab}}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \\ \downarrow{\scriptstyle \kappa_2'} & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ L_0'(\mathbb{Z}\pi) & & \xrightarrow{\qquad\qquad \rho_2 \qquad\qquad} & & L_0'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \end{array}$$

注 3.6。我们将把这个图表提升到 $R\pi$，并使用分解 $\kappa_j^s = trf \circ \widetilde{\kappa}_j^s$，其中 $\widetilde{\kappa}_j^s$：$H_j(\pi;\mathbb{Z}/2) \to L_j^s(R\pi)$，且 trf：$L_j^s(R\pi) \to L_{j+2}^s(\mathbb{Z}\pi)$。二次扩张环 $R = \mathbb{Z}[\varepsilon]$，满足 $\varepsilon = (1+\sqrt{5})/2$，具有以下重要性质：$\varepsilon + \bar{\varepsilon} = 1$ 和$\varepsilon\bar{\varepsilon} = -1$（见 [4, 定理 1.16]）。

以下计算将会用到（特别是对于二阶的 $\pi = C_2$）。详细内容见 [4, 3。3, 3.11, 4.5, 4.11]:

(i) $L_i^{\tilde{Y}}(\widehat{R}_2\pi) \cong L_i^{\tilde{Y}}(\widehat{R}_2) \oplus H^0(\pi^{\mathrm{ab}})$; (ii) $L_i^{\tilde{Y}}(\widehat{R}_2) = \mathbb{Z}/2, 0, 0, \mathbb{Z}/2$;
(iii) $L_3^{\tilde{Y}}(R\pi \to \widehat{R}_2\pi) = (\mathbb{Z}/2)^{s_2}$，其中 s_2 统计 $\mathbb{Q}\pi$ 中的 O 型因子；(iv) $L_1^{\tilde{Y}}(R\pi \to \widehat{R}_2\pi) = (\mathbb{Z}/2)^{s_0}$，其中 s_0 统计 $\mathbb{Q}\pi$ 中的 Sp 型因子；(v) $L_i^{\tilde{Y}}(R) = \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2, 0, \mathbb{Z}/2$; (vi) $L_i^{\tilde{Y}}(R[C_2]) = (\mathbb{Z}/2)^2, (\mathbb{Z}/2)^3, \mathbb{Z}/2, 0$.

对于 $A = R$ 或 $\widehat{R}_2$、$\tilde{}$和 Y，圆扭转装饰 $Y = R^\times \oplus \pi^{\mathrm{ab}} \oplus SK_1(A\pi) \subseteq K_1(A\pi)$ 表示除去 $K_1(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$ 后所得的商。在定理 B 的证明中，我们还需要圆简单扭转装饰 $V = \widehat{R}_2^\times \oplus \pi^{\mathrm{ab}} \subseteq K_1(\widehat{R}_2\pi)$ 以及手术群 $L_*^s(\widehat{R}_2\pi) := L_*^{\tilde{V}}(\widehat{R}_2\pi)$。

命题 *3.5* 的证明。 论证将分为两部分。首先，我们断言以下图表

$$\begin{array}{ccc} H_2(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\beta} & H^0(\pi^{\mathrm{ab}}) \\ {\scriptstyle \tilde{\kappa}_2'}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \tau} \\ L_2^{\tilde{Y}}(R\pi) & \xrightarrow{\rho_2} & L_2^{\tilde{Y}}(\widehat{R}_2\pi) \end{array} \tag{3.7}$$

交换，其中 β: $H_2(\pi;\ \mathbb{Z}/2) \to H^0(\pi^{\mathrm{ab}}) = \{[g] \in \pi^{\mathrm{ab}} :\ [g^2] = 1\}$ 由Bockstein诱导，而 τ 由判别式诱导。由2进检测定理 [4, 定理 3.4]及自然性，只需证明该图表对二阶的 $\pi = C_2$ 交换。此时，$L_2^{\tilde{Y}}(R\pi) \cong \mathbb{Z}/2$同构地映到 $L_2^{\tilde{Y}}(\widehat{R}_2\pi) = \mathbb{Z}/2$上，因为$\tilde{\psi}_3$: $L_3^{\tilde{Y}}(\widehat{R}_2\pi) \to L_3^{\tilde{Y}}(R\pi \to \widehat{R}_2\pi)$是同构（见 [4,定理 4.10]），且 $\pi = C_2$具有两个 O 型表示。映射 β 是同构，判别式τ: $L_2^{\tilde{Y}}(\widehat{R}_2\pi) \to H^0(\pi^{\mathrm{ab}})$也是同构。因此该图表对所有有限 2-群均交换。

接下来我们考虑下图（适用于任意有限 2-群）：

$$\begin{array}{ccc} H^0(\pi^{\mathrm{ab}}) & & \\ {\scriptstyle\cong}\uparrow{\scriptstyle\tau} & \overset{\tilde{\delta}}{\searrow\!\cong} & \\ L_2^{\tilde{Y}}(\widehat{R}_2\pi) & \xleftarrow[\partial]{\cong} & H^1(\mathrm{Wh}^{\tilde{Y}}(\widehat{R}_2\pi)) \\ \downarrow{\scriptstyle trf} & & \downarrow{\scriptstyle trf} \\ L_0'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) & \xleftarrow[\partial]{} & H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \end{array} \tag{3.8}$$

其中，映射 δ 是由图表中的上方序列在 Tate 上同调中诱导的余边界（见 [13, 定理 2]）：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Wh}^{\tilde{Y}}(\widehat{R}_2\pi) & \longrightarrow & \overline{I(\widehat{R}_2\pi)} & \longrightarrow & \pi^{\mathrm{ab}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) & \longrightarrow & \overline{I(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)} & \longrightarrow & \pi^{\mathrm{ab}} & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{3.9}$$

由于 $\overline{\varepsilon + \bar{\varepsilon}} = 1$，我们有 $H^*(I(R_2\pi)) = 0$ 因此 δ 是一个同构。由自然性，$\delta = trf \circ \tilde{\delta}$: $H^0(\pi^{\mathrm{ab}}) \to H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))$。结合上文的图表（3.7）和（3.8），证明即告完成。 □

定理 *B* 的证明。 （ii）和（iii）部分可直接由定理 6.8], 中所列提升 $\tilde{\kappa}_*^s$ 的性质推出，因为 $L_*^{\tilde{Y}}(\widehat{R}_2\pi)$ 可由 $\pi \to \pi^{\mathrm{ab}}$ 检测（根据定理 3.4]），而对于阿贝尔群，$L_*^s(\widehat{R}_2\pi) = L_*^{\tilde{Y}}(\widehat{R}_2\pi)$（因为转移 trf: $SK_1(\widehat{R}_2\pi) \xrightarrow{\sim} SK_1(\mathbb{Z}_2\pi)$ 由 [14, 8.7] 可知是同构）。对于（i）部分，注意到 κ_1^s 由循环群生成／检测，且 [25, 3.3] 表明，对于循环 2-群，$L_3'(\mathbb{Z}\pi) \cong L_3'(\mathbb{Z}_2\pi)$。最后

这一结论可由引理 3.4 得出。满足所有所需条件的群的一些例子 π 见推论4.9。 □

推论 D 的证明。第一步是找到一个群 π，使其满足定理 C 中列出的条件。这将表明 $\kappa_2^s(\pi) \neq 0$ 且 $\bar{\kappa}_2^h(\pi) = 0$。根据引理 3.4，同态 $\kappa_2'(\pi)$ 可由映射 $L_0'(\mathbb{Z}\pi) \to L_0'(\mathbb{Z}\pi^{\mathrm{ab}})$ 检测。然而，根据自然性，$\kappa_2'(\pi)$ 在 $L_0'(\mathbb{Z}\pi^{\mathrm{ab}})$ 中的像等于 $\kappa_2'(\pi^{\mathrm{ab}})$ 的像。根据定理 A，我们可以得出结论：只要 π^{ab} 是初等阿贝尔群，就有 $\kappa_2'(\pi^{\mathrm{ab}}) = \kappa_2^h(\pi^{\mathrm{ab}}) = 0$，结论随之成立。例 4.13 列出了满足推论 D 的 128 阶群。

□

3c. **2-adic κ′2 κ_4'同态**。在下图中，s_*: $H_4(\pi;\,\mathbb{Z}/2) \to H_2(\pi;\,\mathbb{Z}/2)$ 表示模 2 上同调中映射 Sq^2 的克罗内克对偶。

命题 3.10 ([4, 7。3])。设 π 是一个有限2群。存在一个交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} H_4(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{s_*} & H_2(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\beta} & H^0(\pi^{\mathrm{ab}}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \\ & \searrow^{\kappa_4'} & & & & \swarrow_{\partial} & \\ & & L_2'(\mathbb{Z}\pi) & \xrightarrow{\rho_2} & L_2'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) & & \end{array} \tag{3.11}$$

证明。论证与 κ_2' 图表的论证类似。我们首先将其提升为 R上的图表，此时只需验证 $\pi = C_2$的交换性。

$$\begin{array}{ccccc} H_4(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{s_*} & H_2(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\beta} & H^0(\pi^{\mathrm{ab}}) \\ & \searrow^{\kappa_4'} & & & \uparrow{\scriptstyle \tau} \\ & & L_0^{\tilde{Y}}(R\pi) & \xrightarrow{\rho_2} & L_0^{\tilde{Y}}(\widehat{R}_2\pi) \end{array} \tag{3.12}$$

在这个关于 $\pi = C_2$的图表中，映射 $L_0^{\tilde{Y}}(R\pi) \cong (\mathbb{Z}/2)^2$到 $L_0^{\tilde{Y}}(\widehat{R}_2\pi) = (\mathbb{Z}/2)^2$是一个同构（因为$\mathbf{Q}\pi$ 没有类型为 Sp的因子），其中一个直和项由平凡群 $L_0^{\tilde{Y}}(R) = \mathbb{Z}/2$检测到。注意，判别式映射 τ: $L_0^{\tilde{Y}}(\widehat{R}_2\pi) \to H^0(\pi^{\mathrm{ab}})$由投影 $\pi \to \pi^{\mathrm{ab}}$ 诱导（对于 $\pi = C_2$，它就是恒等映射）。由于平凡群上的 $\kappa_4'(\pi)$的像为零，且映射 s_* 和 β 都是同构，该图表交换。

证明的其余部分使用了一个与（3.8）类似的图表：

$$\begin{array}{ccc} H^0(\pi^{\mathrm{ab}}) & \overset{\tilde{\delta}}{\underset{\cong}{\searrow}} & \\ \uparrow{\scriptstyle \tau} & & \\ L_0^{\tilde{Y}}(\widehat{R}_2\pi) & \xleftarrow[\partial]{} & H^1(\mathrm{Wh}^{\tilde{Y}}(\widehat{R}_2\pi)) \\ \downarrow{\scriptstyle trf} & & \downarrow{\scriptstyle trf} \\ L_2'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) & \xleftarrow[\partial]{} & H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \end{array} \tag{3.13}$$

和二 图（3.9）以及在 trf 下的自然性，从而完成论证 . □

4. Non-vanishing examples for κ_2

本节将建立一些条件，用以验证定理 C 和推论 D 的陈述。我们应当指出，当 $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) = 0$ 时，我们得到 $\bar{\kappa}_2'(\pi) = 0$，因此 $\bar{\kappa}_2^s(\pi)$ 的像包含于 ∂ 的像中：$H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \to L_0^s(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$。由于 θ：$H_2(\pi;\mathbb{Z}) \to H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))$ 是满射，我们得到 $\bar{\kappa}_2^s(\pi) \neq 0$ 当且仅当 $\mathrm{Im}\ \partial \neq 0$。

4a. 构造例子的群论条件。在此定义一个集合 $\Lambda(\alpha)$ 以及两个映射 u_α 和 δ^α，适用于任意中心扩张

$$\sigma \rightarrowtail \widetilde{\pi} \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} \pi$$

其中 $\widetilde{\pi}$ 是一个 2-群。给定这样的扩张，取任意满群同态f：$F \to \widetilde{\pi}$ 其中 F是一个自由群。令 R 为复合 $\alpha \circ f$的核。由于 $f(R) \subseteq \sigma \subseteq Z(\widetilde{\pi})$，我们有 $f([F,R]) = 1$，因此得到一个从 $F/[F,R]$ 到 $\widetilde{\pi}$的良定义同态。令 u_α 表示此映射在 $\pi \wedge \pi$上的限制，其中 $\pi \wedge \pi = [F,F]/[F,R]$ (见 [19] 中命题 11.4.16 的证明)。映射

$$u_\alpha \colon \pi \wedge \pi \to \widetilde{\pi}$$

限制为一个群同态

$$\delta^\alpha \colon H_2(\pi;\mathbb{Z}) = \frac{R \cap [F,F]}{[F,R]} \to \sigma\,.$$

设 q_1, q_2 属于 π，且 $\widehat{q}_1, \widehat{q}_2$ 是它们在 F中的提升。那么 $[\widehat{q}_1, \widehat{q}_2]$ 属于 $[F,F]$，并定义了 $\pi \wedge \pi$ 中的一个元素 $q_1 \wedge q_2$，它仅依赖于 q_1, q_2。若进一步假设 $q_1 q_2 = q_2 q_1$，则有 $q_1 \wedge q_2$ 属于 $H_2(\pi;\mathbb{Z})$。现在我们按如下方式定义 $H_2(\pi;\mathbb{Z})$ 的子集 $\Lambda(\alpha)$：

$$\Lambda(\alpha) = \{\, q_1 \wedge q_2 \mid q_1, q_2 \in \pi \text{ and } q_1 q_2 = q_2 q_1 \,\}\,.$$

我们有

$$SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\widetilde{\pi}) \cong \frac{\ker(\delta^\alpha)}{\langle \ker(\delta^\alpha) \cap \Lambda(\alpha) \rangle}$$

根据第 (i) 部分 中引理 22 的结论。以下是 Oliver 的一个结果的特例。

定理 4.1 ([13, 命题 16])。设 $\widetilde{\pi}$ 是一个 2群，且 $\sigma \rightarrowtail \widetilde{\pi} \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} \pi$ 是一个中心群扩张。假设 $1 \neq \sigma \subseteq [\widetilde{\pi}, \widetilde{\pi}]$ 且 $\sigma \cap \Omega(\alpha) = 1$，其中

$$\Omega(\alpha) = \{\, [\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2] \mid \widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2 \in \widetilde{\pi} \text{ and } \alpha([\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2]) = 1 \,\}\,.$$

则 $SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\widetilde{\pi}) \overset{\alpha_*}{\twoheadrightarrow} SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$ 不是满射。特别地，这意味着 $SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \neq 0$。

证明。令 ι：$\pi \to \pi$ 表示恒等映射。那么 $1 \rightarrowtail \pi \overset{\iota}{\twoheadrightarrow} \pi$ 也是一个中心群扩张。任取一个满群同态 f：$F \to \widetilde{\pi}$，其中 F 是一个自由群。那么映射 $\alpha \circ f$：$F \to \pi$ 也是满射。因此，根据定义，我们有 $\Lambda(\iota) = \Lambda(\alpha)$，它们是 $\pi \wedge \pi$的子集。我们还有 $\alpha \circ u_\alpha = u_\iota$，因此 $\alpha \circ \delta^\alpha = \delta^\iota$。令 q_1, q_2为 π中的两个元素，使得 $q_1 q_2 = q_2 q_1$，并令 $\widehat{q}_1, \widehat{q}_2$为它们在 F中的提升。那么我们有 $u_\alpha(q_1 \wedge q_2) = u_\alpha([\widehat{q}_1, \widehat{q}_2]) = [u_\alpha(\widehat{q}_1)\ u_\alpha(\widehat{q}_2)] \in \Omega(\alpha)$。因此 $\Lambda(\alpha) \subseteq u_\alpha^{-1}(\Omega(\alpha))$。此外，$\sigma \subset [\widetilde{\pi}, \widetilde{\pi}]$，因此 σ 属于 δ^α的像。我们还有 $\sigma \neq 1$，因此 $\ker(\delta^\alpha) \subsetneqq \ker(\delta^\iota)$。这意味着

$$\Lambda(\iota) \cap \ker(\delta^\iota) \subseteq u_\alpha^{-1}(\Omega(\alpha)) \cap u_{\widetilde{\alpha}}^{-1}(\sigma) \subseteq u_{\widetilde{\alpha}}^{-1}(\Omega_p \cap \sigma) = u_{\widetilde{\alpha}}^{-1}(1) = \ker(\delta^\alpha) \subsetneqq \ker(\delta^\iota)$$

因此，由复合给出的映射 α_*

$$SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\widetilde{\pi}) \cong \frac{\ker(\delta^\alpha)}{\langle \ker(\delta^\alpha) \cap \Lambda(\alpha) \rangle} \to \frac{\ker(\delta^\iota)}{\langle \ker(\delta^\alpha) \cap \Lambda(\alpha) \rangle} \to \frac{\ker(\delta^\iota)}{\langle \ker(\delta^\iota) \cap \Lambda(\iota) \rangle} \cong SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$$

不是满射。 □

注 4.2。定理 4.1 最后一部分的"逆命题"成立：如果 $SK_1(\mathbb{Z}_2\pi) \neq 0$，那么存在一个适当的 π 中心扩张，使得 SK_1 不是满射。为验证这一点，令 $H_2(\pi) \rightarrowtail \bar{\pi} \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} \pi$ 是 π的一个 Schur 覆盖。注意， $SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\bar{\pi}) = 0$。令$\sigma_0 = H_2(\pi) \cap [\bar{\pi}, \bar{\pi}]$，且 $\sigma_1 = \langle c \in H_2(\pi) \,|\, c$是 $\bar{\pi}\rangle$中的一个换位子。注意，我们有 $\sigma_0 = H_2(\pi)$，并且根据 [13]中的命题 16， σ_0/σ_1 是非平凡的。由于 σ_0 是一个阿贝尔群，存在一个元素 z 属于 σ_0，并且存在一个子群 T 属于 σ_0，使得 z 不属于 T， σ_1 是 T 的一个子群，并且 σ_0/T 是 $\mathbb{Z}/2$。现在定义 $\sigma = H_2(\pi)/T = \mathbb{Z}/2$ 和$\widetilde{\pi} = \bar{\pi}/T$。那么 $\sigma \rightarrowtail \widetilde{\pi} \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} \pi$ 满足定理 4.1 的假设。

定理 4.3。 设 $\widetilde{\pi}$ 是一个2-群，且 $\sigma \rightarrowtail \widetilde{\pi} \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} \pi$ 是一个中心群扩张，使得$1 \neq \sigma \subseteq [\widetilde{\pi}, \widetilde{\pi}]$。假设 π 中每个与其逆元共轭的元素，都提升为 $\widetilde{\pi}$ 中具有相同性质的某个元素，并且 $H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\widetilde{\pi})) \overset{\alpha_*}{\twoheadrightarrow} H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))$ 不是满射。那么映射 $H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \to L^s_0(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$ 非平凡。

证明。 在 [12], 中的命题 3.1 的证明表明，在上述假设下，映射 $H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \to L^s_0(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$ 的核中的任意元素都属于映射 $H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\widetilde{\pi})) \overset{\alpha_*}{\twoheadrightarrow} H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))$ 的像。因此，当 α_* 不是满射时，映射 $H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \to L^s_0(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$ 非平凡。□

4b. 一个不消失的 κ^s_2 例子。在本小节中，令 $\widetilde{\pi}$ 为小群库中的 8177^{th}256 阶群， π 为 1377th 128 阶群。群 $\widetilde{\pi}$ 是由以下表示给出的 256 阶群

$$\widetilde{\pi} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \,|\, r \in R \rangle$$

其中 R 包含关系 $x_1^2 = x_5x_6x_8$、 $x_2^2 = x_5x_6$、 $x_3^2 = x_5$、 $x_4^2 = x_8$、 $x_i^2 = 1$ ，适用于 $i \in \{5, 6, 7, 8\}$、 $[x_1, x_2] = x_5$、 $[x_1, x_3] = x_6$、 $[x_1, x_4] = x_8$、 $[x_2, x_3] = x_7$、 $[x_2, x_4] = 1$, 并且$[x_i, x_j] = 1$当 i， j均属于 $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$或 i属于 $\{1, 2\}$且 j属于 $\{5, 6, 7, 8\}$时成立。于是， $\widetilde{\pi}$的中心 $Z(\widetilde{\pi})$ 等于交换子群 $[\widetilde{\pi}, \widetilde{\pi}]$，并由 x_5， x_6， x_7， x_8生成。定义

$$\sigma = \langle x_7x_8 \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \text{ and } \pi = \widetilde{\pi}/\sigma$$

设 α 为从 $\widetilde{\pi}$ 到 π的自然商：则我们有一个中心扩张

$$\sigma \rightarrowtail \widetilde{\pi} \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} \pi$$

使得 $\sigma \subseteq [\widetilde{\pi}, \widetilde{\pi}]$。设Ω($\alpha$)为该集合

$$\Omega(\alpha) = \{\, [\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2] \;|\; \widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2 \in \widetilde{\pi} \text{ and } \alpha([\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2]) = 1 \,\}$$

则下面的引理表明，Ω(α)不包含 x_7x_8。

引理 4.4. $\sigma \cap \Omega(\alpha) = 1$

证明。 设 $n_1, m_1, n_2, m_2, n_3, m_3, n_4, m_4 \in \{0,1,2,3\}$ 则有

$$[\, x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}x_4^{n_4}\,,\, x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3}x_4^{m_4}\,] = x_5^{q_5}x_6^{q_6}x_7^{q_7}x_8^{q_8}$$

其中

$$\begin{aligned} q_5 &\equiv n_1m_2 + n_2m_1 \pmod 2,\\ q_6 &\equiv n_1m_3 + n_3m_1 \pmod 2,\\ q_7 &\equiv n_2m_3 + n_3m_2 \pmod 2,\\ q_8 &\equiv n_1m_4 + n_4m_1 \pmod 2. \end{aligned}$$

我们只需证明不存在这样的 n_1， m_1， n_2， m_2， n_3， m_3， n_4， $m_4 \in \{0,1,2,3\}$，使得 $q_5 \equiv 0$（模 4），$q_6 \equiv 0$（模 2），$q_7 \equiv 1$（模 2），且 $q_8 \equiv 1$（模 2）。反设存在这样的情况。设 n_1 为偶数。由于 q_8 为奇数，因此 m_1 为奇数。所以，由于 q_5为偶数， n_2 为偶数。因此，由于 q_7 为奇数， n_3 为奇数。这与 q_6 为偶数矛盾。因此 n_1 为奇数。同理， m_1 为奇数。由于 q_5 为偶数，因此 $m_2 \equiv n_2$ （模 2）。我们还有，由于 q_6 为偶数， $m_3 \equiv n_3$ （模 2）。于是 $q_7 \equiv 2n_2m_3$ （模 2）。这就产生了矛盾。□

因此，根据定理 4.1，我们知道映射 $SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\widetilde{\pi}) \overset{\alpha_*}{\to} SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$ 不是满射。

引理 4.5。 $H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\widetilde{\pi})) \overset{\alpha_*}{\to} H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))$ 不是满射。

证明。 考虑中心扩张 $Z(\pi)\rightarrowtail\pi \overset{p}{\twoheadrightarrow} \pi/Z(\pi)$。我们知道 $SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$ 是 $\ker(\delta^p)$ 的一个商。由于 $\ker(\delta^p) \subseteq H_2(\pi/Z(\pi);\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2)^4$, ，我们知道 $SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$ 的指数为 2。因此 $H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\widetilde{\pi})) \overset{\alpha_*}{\to} H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))$ 不是满射。□

因此，根据下面的引理可知，中心扩张 $\sigma\rightarrowtail\widetilde{\pi} \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} \pi$ 满足定理4.3中的所有假设。

引理4.6。 π 中所有与其逆元共轭的元素，在 $\widetilde{\pi}$ 中都有满足相同性质的提升。

证明。 设 $ghg^{-1} = x_7x_8h^{-1}$ 对于某个 g， h 属于 $\widetilde{\pi}$。那么 $[g,h]h^2 = x_7x_8$。为了证明这不可能，只需考虑这样的情形： $g = x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}x_4^{n_4}$且$h = x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3}x_4^{m_4}$，其中 n_1， m_1， n_2， m_2， n_3， m_3， n_4， $m_4 \in \{0,1,2,3\}$。在这种情形下，我们有

$$[g,h]h^2 = [\, x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}x_4^{n_4}\,,\, x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3}x_4^{m_4}\,](x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3}x_4^{m_4})^2 = x_5^{q_5}x_6^{q_6}x_7^{q_7}x_8^{q_8}$$

其中

$$\begin{aligned} q_5 &\equiv n_1m_2 + n_2m_1 + m_1m_2 + m_1 + m_2 + m_3 \pmod 2,\\ q_6 &\equiv n_1m_3 + n_3m_1 + m_1m_3 + m_1 + m_2 \pmod 2,\\ q_7 &\equiv n_2m_3 + n_3m_2 + m_2m_3 \pmod 2,\\ q_8 &\equiv n_1m_4 + n_4m_1 + m_1m_4 + m_1 + m_4 \pmod 2. \end{aligned}$$

因此，只需证明不存在这样的 $n_1, m_1, n_2, m_2, n_3, m_3, n_4, m_4 \in \{0,1,2,3\}$，使得 $q_5 \equiv 0$（模 4）、$q_6 \equiv 0$（模 2）、$q_7 \equiv 1$（模 2）和 $q_8 \equiv 1$（模 2）。反设存在。假设 m_1 为偶数。那么 m_4 为奇数，且 n_1 为偶奇数，因为 q_8 为奇数。因此 m_2 为偶数，因为 q_6 为偶数。因此 m_3 为偶数，因为 q_5 为偶数。这就产生了矛盾。

这与 q_7 为奇数矛盾。因此 m_1 为奇数。假设 n_1 为偶数。那么 n_2、m_3 的奇偶性不同，因为 q_5 为偶数。因此 n_2m_3 为偶数。这意味着 m_2 和 n_3+m_3 为奇数。但这与 q_6 为偶数矛盾。因此 n_1 为奇数。于是 n_3 和 m_2 的奇偶性不同，因为 q_6 为偶数。因此 n_3m_2 为偶数。所以 n_2+m_2 和 m_3 为奇数，因为 q_7 为奇数。这与 q_5 为偶数矛盾。因此结论成立。□

因此，由定理 4.3 映射 $H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \to L^s_0(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$ 非平凡。现在，为完成这个例子，我们证明以下引理。

引理 4.7. $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) = 0$

证明。 注意

$$H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \cong \frac{\langle g \in \pi_{\mathrm{ab}} \mid g^2=1\rangle}{\langle g \mid g \sim g^{-1}\rangle} \cong \frac{\langle [x_1],[x_2],[x_3],[x_4]\rangle}{\langle [x_1],[x_1x_2],[x_3],[x_4]\rangle} \cong 0 \tag{4.8}$$

因为我们有如下关系

(i) $(x_2x_3x_4)x_1(x_2x_3x_4)^{-1} = x_1^{-1}$
(ii) $(x_2x_4)(x_1x_2)(x_2x_4)^{-1} = (x_1x_2)^{-1}$
(iii) $(x_3x_4)(x_1x_2x_3)(x_3x_4)^{-1} = (x_1x_2x_3)^{-1}$, and
(iv) $x_1x_4x_1^{-1} = x_4^{-1}$ □

推论 4.9。 群 $\pi = SG[128, 1377]$ 具有这样的性质：$\kappa^s_2(\pi) \neq 0$ 和 $\bar{\kappa}'_2(\pi) = 0$。此外，π^{ab} 是初等阿贝尔群，且 $\kappa^h_2(\pi) = 0$。

证明。第一个性质由引理 4.5、引理 4.7 和定理 4.3 得出，它们验证了定理 C 的条件。直接观察可知，π^{ab} 是初等阿贝尔的，因此 $\kappa'_2(\pi^{\mathrm{ab}}) = 0$。由于 $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) = 0$，我们有 $\bar{\kappa}'_2(\pi) = 0$，而定理 B 蕴含 $\kappa'_2(\pi) = 0$。因此 $\kappa^h_2(\pi) = 0$，且 $\ker \kappa^s_2 \subsetneq \ker \kappa^h_2$。□

注 4.10。 设 π 是一个阶不超过 64 的 2-群，且 $\sigma \rightarrowtail \widetilde{\pi} \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} \pi$ 是满足定理4.1的假设的中心群扩张 $SK_1(\mathbb{Z}_2\pi)$ 非零。由注 4.2，不失一般性，我们可以假设 $\sigma = \mathbb{Z}/2$属于这个中心群扩张。然后通过 GAP 计算（见附录 B），我们证明π 的阶为 64，其群编号为 149、150、151、170、171、172、177 或 182。此外，$H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) = 0$ 对列表中的群成立。

我们可以问，这些群是否能嵌入一个同时满足定理 4.1和定理 4.3的中心扩张。

注记 4.11。 设 π 为 i阶为 64 的第 i 个群，其中 i 是前述列表中的一个数（4.10）。通过 GAP 计算（见附录B，列表 6），我们证明 $SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \cong \mathbb{Z}/2$。因此，不存在任何满足定理 4.1及定理 4.3假设的中心群扩张 $\sigma \rightarrowtail \widetilde{\pi} \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} \pi$，其中 $\sigma \cong \mathbb{Z}/2$。

我们预期，对于列表（4.10）中的所有群，$0 = \bar{\kappa}^s_2(\pi)$：$H_2(\pi;\ \mathbb{Z}/2) \to L^s_0(\mathbb{Z}_2\pi)$。若此结论成立，则不存在任何阶为 ≤ 64 、满足 $\bar{\kappa}^s_2(\pi) \neq 0$ 的群 π。注意，所有这些群都有 $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) = 0$，因此 $\bar{\kappa}'_2(\pi) = 0$。

例 4.12. 满足定理 4.1 和定理4.3 假设的 128 阶群之间的扩张的完整列表如下：

(287，1327), (288，1328), (290，1330), (693，3996), (692，3998), (704，4010), (703，4012), (668，4054), (667，4055), (670，4056), (568，4255), (579，4312), (676，4316), (725，4372), (1375，7736), (1376，8129), (1377，8177), (1547，9240), (1549，9242), (1576，10060)

其中，列表中的数对 (i, j) 表示第 j 个 256 阶群有一个商同构于第 i 个 128 阶群，并且将其视为 $\mathbb{Z}/2$ 扩张时，它满足定理 4.1 和定理 4.3 中的条件。除 (568, 4255) 外，所有这些数对也满足引理 4.7 的结论。因此，根据上述列表，我们可以得到满足定理 C 条件的极小例子（阶均为 128）的完整列表。对于上述列表中的所有群，通过 GAP 计算（见附录 B），$SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \cong H_2(\pi;\mathbb{Z})/H_2^{\mathrm{ab}}(\pi) \neq 1$，并且除 (1547, 9240)、(1549, 9242)、(1576, 10060) 之外，均有 $SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) = \mathbb{Z}/2$。最后三个则有 $SK_1(\mathbb{Z}_2\pi) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$。

例4.13。 列表（4.12）中阶为 128 且具有初等阿贝尔化的群如下：

(1375，7736), (1376，8129), (1377，8177), (1547，9240), (1549，9242), (1576，10060)。这些群都满足推论 D。

注14.14。令 π 为 $U_3(4)$ 的 Sylow 2-子群，它在小群库中的编号为 $SG[64, 245]$ 。那么 $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) = 0$。由于 π 没有满足定理 4.1 假设的 $\mathbb{Z}/2$ 扩张，我们知道根据注 4.2，$H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) = 0$ 。因此，我们无法使用针对 π 的方法来判定 $\kappa_2^s(\pi) \neq 0$ 是否成立。因此，进一步研究 $SK_1(\mathbb{Z}\pi)$ 十分重要。

问题。 目前我们没有足够的信息了解子群 $Cl_1(\mathbb{Z}\pi) \subseteq SK_1(\mathbb{Z}\pi)$，因而无法有效计算 Ranicki-Rothenberg 正合序列中的映射

$$\cdots \to H^1(SK_1(\mathbb{Z}\pi)) \to L_0^s(\mathbb{Z}\pi) \to L_0'(\mathbb{Z}\pi) \to H^0(SK_1(\mathbb{Z}\pi)) \to \dots$$

或 Tate 上同调中的正合列

$$\cdots \to H^0(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \to H^1(Cl_1(\mathbb{Z}\pi)) \to H^1(SK_1(\mathbb{Z}\pi)) \to H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \to \dots$$

这仍是未来的一项挑战（参见 [14, 定理 9.6]）。以下是一些示例问题：

(i) 令 π 为 $U_3(4)$ 的 Sylow 2-子群。映射 $H^1(SK_1(\mathbb{Z}\pi)) \to L_2^s(\mathbb{Z}\pi)\widehat{\ }$是否非平凡？对于这个群，$\bar{\kappa}_2^s(\pi) = 0$，因为 $SK_1(\mathbb{Z}_2\pi) = 0$。(ii) 令 π 为列表 (4.12) 中、但不在 (4.13) 中的一个群。$\kappa_2'(\pi) \neq 0$ 是否成立？对于这些群，$\ker \kappa_2^s(\pi) = \ker \kappa_2^h(\pi)$ 是否成立？(iii) 更一般地，是否存在这样的例子：$\bar{\kappa}_2^s(\pi) = 0$，但 $\kappa_2^s(\pi) \neq 0$？(iv) 是否存在满足 $\ker\kappa_2^s(\pi) \subsetneq \ker \kappa_2^{Cl_1}(\pi)$ 的例子？

5. The proof of Theorem E

我们将关于手术的原始“渗漏猜想”在同伦等价意义下化归为群同调中的一个明确计算。作为应用，我们给出了该猜想的一个反例（见第5c节），但我们仍远未系统地理解如何

生成这类例子。是否存在无穷多个具有非平凡κ_4' 的有限 2-群? 对于任意有限 2-群 π，我们引入了如下记号

$$\lambda_4(\pi) := \delta \circ \beta \circ s_* \colon H_4(\pi;\mathbb{Z}/2) \to H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))$$

对于该复合映射，其中 s_*: $H_4(\pi;\mathbb{Z}/2) \to H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)$ 表示与 Sq^2: $H^2(\pi;\mathbb{Z}/2) \to H^4(\pi;\mathbb{Z}/2)$ 对偶的同态，而 β: $H_2(\pi;\mathbb{Z}/2) \to H^0(\pi^{\mathrm{ab}})$ 是由 Bockstein 诱导的。此外，短正合列

$$0 \to \mathrm{Wh}'(\mathbb{Z}\pi) \to \overline{I(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)} \to \pi^{\mathrm{ab}} \to 0$$

诱导出一个（满射）余边界映射 δ: $H^0(\pi^{\mathrm{ab}}) \to H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))$。记号参见 [14, 第 163]页。

定理 E 的证 明。根据命题 3.10，我们有一个交换图表 :

$$\begin{array}{ccc} H_4(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\lambda_4(\pi)} & H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \\ \downarrow{\scriptstyle \kappa_4'(\pi)} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ L_2'(\mathbb{Z}\pi) & \xrightarrow{\rho_2} & L_2'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \end{array}$$

其中边界映射 ∂ 是单射。由引理 3.4可知， $L_2'(\mathbb{Z}\pi)$ 的扭子群可由自然映射检测

$$\rho_2 \oplus p_* \colon L_2'(\mathbb{Z}\pi) \to L_2'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \oplus L_2'(\mathbb{Z}\pi^{\mathrm{ab}})$$

由 ρ_2 和投影 p: $\pi \to \pi^{\mathrm{ab}}$诱导。此外，对于阿贝尔群，复合映射 $\rho_2 \circ \kappa_4' = 0$ 是.....，因为 $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) = 0$，且 ρ_2 对 π 阿贝尔 ..... 是单射（见 [25, 5.2.2]）。

因此， $\kappa_4'(\pi)$ 的计算可归结为确定 $\lambda_4(\pi$，而$\kappa_4'(\pi$在整数同调类上消失这一事实可由推论 5.5得出。最后，存在一个单射 $L_2'(\mathbb{Z}\pi) \to L_2^h(\mathbb{Z}\pi)$，因此 $\kappa_4^h \neq 0$ 当且仅当 $\kappa_4' \neq 0$，所以只需确定 $\kappa_4'(\pi)$。这将原始渗出猜想（即 $\kappa_j^h = 0$，对于 $j \geq 4$）归结为一个显式的群同调计算，也就是计算映射 $\lambda_4(\pi)$。□

5a. $\beta \circ s_* \neq 0$**的必要条件**。

定义 5.1。 对于任意非平凡循环子群的 $\pi^{\mathrm{ab}} = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_n$ 内直和， $H^0(\pi^{\mathrm{ab}})$ 的相应基 $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ 是由 $1 \leq i \leq n$中二阶元素 $v_i \in C_i$ 组成的线性无关集。

在 π^{ab} 的任何此类分解中， C_i的阶以及相同阶的循环子群的数量，都是 π的不变量。然而，因子 $C_i \subseteq \pi^{\mathrm{ab}}$ 作为 π的子群并不唯一。

引理 5.2。 设 $H^1(Wh'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \neq 0$。那么存在 π^{ab}的循环子群 $\{C_i\}$，使得 $\pi^{\mathrm{ab}} = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_n$，其中 $H^0(\pi^{\mathrm{ab}})$的相应基 $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$满足:

(i) 对于某个 $k \leq n$，集合 $\{\delta(v_1) \ldots, \delta(v_k)\}$ 是 $H^1(Wh'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))$ 的一组基;
(ii) 集合 $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\} \subseteq \mathcal{B}$ 是 K 的一组基。

证明。令 $\{C_i \mid 1 \le i \le n\}$ 表示 π^{ab} 的一族循环子群，它们给出一个内直和分解。对于每个因子，选取一个生成元，使得 $C_i = \langle g_i \rangle$。如果 $|C_i| = m_i$，对于 $1 \le i \le n$，我们可以选择排序，使得 $m_1 \ge m_2 \ge \cdots \ge m_n > 1$。

设 $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$，其中 $0 < m \le n$，是 $W := H^1(Wh'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \cong (\mathbb{Z}/2)^m$ over $\mathbf{F}_2$ 的一组基。相对于 $V := H^0(\pi^{\mathrm{ab}})$ 的基 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，我们可以将线性映射 $\delta\colon V \to W$ 表示为一个秩为 m 的 $m \times n$ 矩阵 $M = (a_{ij})$，使得

$$w_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_j \ .$$

通过行变换，我们可以假设 M 处于简化行阶梯形。此外，我们还可以进行形如 $\mathrm{col}_j \to \mathrm{col}_j + \mathrm{col}_i$ 的初等列变换，只要 $j > i$。例如，若 row_i 在第 k 列有其首个非零元素，且对于某个 $j > k$ 有 $a_{ij} = 1$，则我们可以将因子 $C_j = \langle g_j \rangle$ 替换为 $C_j' = \langle g_j g_k^t \rangle$，其中 $t = m_k/m_j$。重复这些列变换后，我们可以假设 M 在每一行中都只有一个非零元素。通过重新排列循环因子，我们得到所需形式的相应基 $\mathcal{B}$。□

设 π 是一个 2-群，使得对于某个 $\widehat{x} \in H_4(\pi;\ \mathbb{Z}/2)$，有 $\beta \circ s_*(\widehat{x}) \neq 0$。令 $\pi^{\mathrm{ab}} = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_n$ 为 π^{ab} 的一个分解，其具有引理 5.2 中给出的性质。如有必要，通过重新排列循环因子，我们可以假设 $p_*(\beta \circ s_*(\widehat{x})) \neq 0 \in H^0(C_1;\ \mathbb{Z}/2)$，其中 $p\colon \pi \to C_1$ 表示投影到第一个因子。特别地，从 π 到 π^{ab} 的自然投影下，$C_2 \oplus \cdots \oplus C_n$ 的原像 $N \le \pi$ 包含 K 的原像。

令 g_1 为 π 中的一个元素，使得 $[g_1]$ 在 π^{ab} 中生成 C_1。令 $\widehat{C}_1$ 表示由 g_1 生成的 π 的子群。由于 v_1 属于 C_1，存在正整数 r 使得 $[g_1]^r = v_1$。因此，g_1^r 在 π 中不与其逆元共轭。所以，g_1 的阶严格大于 $2r$。这意味着 $|C_1| > |C_1|$。另请注意，π/N 是一个循环群，并且 $|\pi/N| = |C_1|$。现在令 $p\colon \pi \to \pi/N$ 表示自然投影，并考虑图表

$$\begin{array}{ccccc} H_4(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{s_*} & H_2(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\beta} & H^0(\pi^{\mathrm{ab}}) \\ \downarrow{\scriptstyle p_*} & & \downarrow{\scriptstyle p_*} & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ H_4(\pi/N;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{s_*} & H_2(\pi/N;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\beta} & H^0(\pi/N) \end{array} \tag{5.3}$$

由于 π/N 是循环的，下面一行中的映射 s_* 和 β 都是同构。因此我们有 $p_* \circ \beta \circ s_*(\widehat{x}) \neq 0$，从而 $p_*\colon H_4(\pi;\ \mathbb{Z}/2) \to H_4(\pi/N;\ \mathbb{Z}/2)$ 非零（反之亦然）。因此 $p_*\colon H_2(\pi;\ \mathbb{Z}/2) \to H_2(\pi/N;\ \mathbb{Z}/2)$ 也非零。对偶地，这意味着 $p^*\colon H^2(\pi/N;\ \mathbb{Z}/2) \to H^2(\pi;\ \mathbb{Z}/2)$ 非零。

我们可以将最后这一点概括如下：

引理 5.4. 若 $(\beta \circ s_*)(\widehat{x}) \neq 0$，其中 $\widehat{x} \in H_4(\pi;\mathbb{Z}/2)$，则存在一个循环商 $p\colon \pi \to C_1$，使得 $0 \neq p_*(\widehat{x}) \in H_4(C_1;\ \mathbb{Z}/2)$。此外，

(i) $0 \neq \widehat{x} \cap \theta \in H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)$，其中 $\theta = p^*(\bar{\theta}) \in H^2(\pi;\mathbb{Z}/2)$ 是 $H^2(C_1;\mathbb{Z}/2)$的生成元的拉回。

(ii) 若 $\pi/N = C_1 \cong \mathbb{Z}/2$，则有 $\theta = \phi^2$ 其中 $\phi = p^*(\phi_1) \in H^1(\pi;\mathbb{Z}/2)$ 是生成元 $\phi_1 \in H^1(C_1;\mathbb{Z}/2)$的拉回。

推论 5.5. 若 $\widehat{x} \in \mathrm{Im}\{H_4(\pi;\mathbb{Z}) \to H_4(\pi;\mathbb{Z}/2)\}$，则 $(\beta \circ s_*)(\widehat{x}) = 0$。

证明. 若 $\widehat{x} \in \mathrm{Im}\{i_*\colon H_4(\pi;\mathbb{Z}) \to H_4(\pi;\mathbb{Z}/2)\}$，则复合映射 $p_* \circ i_*$ 可经由$H_4(\pi/N;\mathbb{Z}) = 0$ 分解，对任意循环商 π/N均成立。因此，由引理 5.4，$p_*(\widehat{x}) = 0$以及 $(\beta \circ s_*)(\widehat{x}) = 0$。□

5b. 关于 $\delta \circ \beta \circ s_* \neq 0$ 的一个充分条件。 我们假设 $H^1(Wh'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \neq 0$ 且

$$\pi^{\mathrm{ab}} = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_n$$

是一个满足引理 5.2 条件的内直和。我们称其为 π^{ab} 的适配分解。设 $p\colon \pi \to C_1$ 是相对于 π^{ab} 的一个适配分解的第一因子投影，并设 $N =$核 p。由于 $[\pi,\pi] \leq N$，我们有一个自然映射 $N/[\pi,\pi] \to \pi^{\mathrm{ab}}$。若 $H^1(Wh'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \neq 0$，则 $\delta(v_1) \neq 0$，且 $K =$核 δ 包含在诱导映射 $H^0(N/[\pi,\pi]) \to H^0(\pi^{\mathrm{ab}})$ 的像中。下面的引理给出了 $\delta \circ \beta \circ s_* \neq 0$ 的一个充分条件。

引理 5.6。 设 $p\colon \pi \to C_1$ 是相对于 π^{ab} 的一个适配分解的第一因子投影，使得 $\delta(v_1) \neq 0$，并设 $N =$ 核 p。若 $p^*(x) \neq 0$，其中某个 $x \in H^4(\pi/N;\ \mathbb{Z}/2)$，则 $(\delta \circ \beta \circ s_*)(\widehat{x}) \neq 0$，其中某个 $\widehat{x} \in H_4(\pi;\ \mathbb{Z}/2)$。

证明。首先，注意到 $H^4(\pi/N;\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$，因此 $p_*\colon H_4(\pi;\mathbb{Z}/2) \to H_4(\pi/N;\mathbb{Z}/2)$ 非零，当且仅当 $p^*\colon H^4(\pi/N;\mathbb{Z}/2) \to H^4(\pi;\mathbb{Z}/2)$ 非零。因此，存在 $x \in H^4(\pi/N;\mathbb{Z}/2)$ 意味着存在 $\widehat{x} \in H_4(\pi;\mathbb{Z}/2)$，使得 $0 \neq p_*(\widehat{x}) \in H_4(\pi/N;\mathbb{Z}/2)$。

其次，注意对于所有 $\widehat{z} \in H^0(\pi^{\mathrm{ab}})$，当 $p_*(\widehat{z}) \neq 0$时，我们有 $\delta(\widehat{z}) \neq 0$。为说明这一点，令 $L := $核$\, p_* \subset H^0(\pi^{\mathrm{ab}})$，$\bar{L} := L/K \cap L$，并考虑图表

(5.7)
$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K \cap L & \longrightarrow & L & \longrightarrow & \bar{L} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & H^0(\pi^{\mathrm{ab}}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(Wh(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_*} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K/K \cap L & \longrightarrow & H^0(\pi/N) & \longrightarrow & V & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

注意到 $H^0(N/[\pi,\pi]) = L$，因此根据构造有 $K \subseteq L$。于是 $K \cap L = K$,$K/K \cap L = 0$，且 $H^0(\pi/N) \cong V$，因此 $L \cong \bar{L}$。现在我们断言，对于$\widehat{z} = \beta \circ s_*(\widehat{x})$，有 $p_*(\widehat{z}) \neq 0$。由于根据假设 $\pi/N = C_1$ 是循环群，结合图表（5.3）以及复合映射 $\beta \circ s_*\colon H_4(\pi/N;\mathbb{Z}/2) \to H^0(\pi/N)$ 是同构这一事实，即可得出该结论。因此 $(\delta \circ \beta \circ s_*)(\widehat{x}) \neq 0$。□

5c. **一个关于 $\delta\circ\beta\circ s_*\neq 0$ 的例子。**设 $V\overset{i}{\rightarrowtail}\pi\overset{\alpha}{\twoheadrightarrow}W$是一个群扩张， M是一个 π-模。那么我们有 Lyndon-Hochschild-Serre 谱序列 $\{E_r^{n,m}(\alpha,M)\ d_r\}$，其收敛到 $H^*(\pi;M)$，且其第二页为：

$$E_2^{n,m}(\alpha,M)=H^n(W;H^m(V;M)).$$

令 $\pi:=G$ **(16384)** 为由以下表示给出的阶为 $2^{14}=16384$ 的群 n

$$\pi=\langle x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6,z_7\,|\,r\in R\rangle$$

其中 R 包含关系 $x_i^2=z_i$, $z_i^2=1$, $[x_i,z_j]=1$, $[z_i,z_j]=1$, $[x_i,x_1]=1$ ，对所有 i, $j\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $[x_i,x_j]=1$ 均成立，对所有 $i\in\{2,3\}$, $j\in\{4,5,6,7\}$, $[x_i,x_j]=1$ 均成立，对所有 $i\in\{4,5\}$, $j\in\{6,7\}$, $[x_2,x_3]=z_1$, $[x_4,x_5]=z_2$, $[x_6,x_7]=z_3$均成立。注意，我们有一个中心群扩张 $V\overset{i}{\rightarrowtail}\pi\overset{\alpha}{\twoheadrightarrow}W$，其中两者

$$V=\langle z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6,z_7\rangle\cong(\mathbb{Z}/2)^7$$

and

$$W=\pi/V=\langle[x_1],[x_2],[x_3],[x_4],[x_5],[x_6],[x_7]\rangle\cong(\mathbb{Z}/2)^7$$

是初等阿贝尔的（参见 [15]，了解此情形下谱序列计算的信息）。

推论 5.8. 群 $\pi=G(16384)$ 具有 $\kappa_4'(\pi)\neq 0$。

证明。 我们先记录一项 GAP 计算，它表明

$$H^1(\mathrm{Wh}'(\hat{\mathbb{Z}}_2\pi))\cong\frac{\{g\in\pi_{\mathrm{ab}}\,|\,g^2=1\}}{\langle g\,|\,g\sim g^{-1}\rangle}\cong\frac{\langle[x_1],[x_2],[x_3],[z_4],[z_5],[z_6],[z_7]\rangle}{\langle[z_4],[z_5],[z_6],[z_7]\rangle}\cong(\mathbb{Z}/2)^3$$

群扩张 $V\overset{i}{\rightarrowtail}\pi\overset{\alpha}{\twoheadrightarrow}W$的 Lyndon-Hochschild-Serre 谱序列表明

$$E_2^{0,1}(\alpha,\mathbb{Z}/2)=H^1(V;\mathbb{Z}/2)=V^*=\mathrm{Hom}(V,\mathbb{Z}/2)=\langle\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5,\zeta_6,\zeta_7\rangle$$

其中 $\zeta_i=z_i^*$对于 $i\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$。考虑

$$H^1(W;\mathbb{Z}/2)=W^*=\langle X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6,X_7\rangle$$

其中 $X_i=[x_i]^*$ 对于 $i\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$。我们有

$$\begin{aligned}d_2(\zeta_1)&=X_1^2+X_2X_3\\d_2(\zeta_2)&=X_2^2+X_4X_5\\d_2(\zeta_3)&=X_3^2+X_6X_7\\d_2(\zeta_4)&=X_4^2\\d_2(\zeta_5)&=X_5^2\\d_2(\zeta_6)&=X_6^2\\d_2(\zeta_7)&=X_7^2\end{aligned}$$

令 I_2 为由 d_2 的像生成的理想。于是我们有

$$\begin{aligned}d_3(\zeta_1^2)&=X_2^2X_3+X_2X_3^2+I_2\\d_3(\zeta_i^2)&=0+I_2\end{aligned}$$

对所有 i 属于 $\{2,3,4,5,6,7\}$。令 I 为从 $H^*(W;\ \mathbb{Z}/2)\ =E^{*,0\,2}(\alpha,\mathbb{Z}/2)$ 到 $H^*(\pi;\ \mathbb{Z}/2)$ 的边同态的核。由下文引理 5.9 可知， X_1^4 不属于 I。我们有

$$X_2^4 = (d_2(\zeta_2))^2 + X_5^2 d_2(\zeta_4)$$

$$X_3^4 = (d_2(\zeta_3))^2 + X_6^2 d_2(\zeta_7)$$

因此，对于所有 i 属于 $\{2,3,4,5,6,7\}$， X_i^4 都属于 I。

如第 5b 节所示，设 $N = \langle z_1、\ x_2、\ x_3、\ x_4、\ x_5、\ x_6、\ x_7\rangle$，并令 $p\colon\ \pi \to \pi/N$ 表示商映射。由于 d_2 是单射， $H^1(W;\ \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\alpha^*} H^1(\pi;\ \mathbb{Z}/2)$ 是一个同构，并且存在唯一的上同调类 $\bar{X}^1 \in H^1(\pi;\mathbb{Z}/2)$，使得 $p^*(\bar{X}_1)\ = \alpha^*(X_1)\ \in H^1(\pi;\ \mathbb{Z}/2)$。为在引理 5.6 中使用，我们令 $x := \bar{X}_1^4 \in H^4(\pi/N;\ \mathbb{Z}/2)$。下面的结果验证了 X_1^4 不属于理想 I，因此 $0 \neq p^*(x)\ \in H^4(\pi;\mathbb{Z}/2)$，这意味着对于某个 $\widehat{x} \in H_4(\pi;\mathbb{Z}/2)$， $\delta \circ \beta \circ s_*(\widehat{x})\ \neq 0$。□

引理 5.9. 设

$$\alpha = X_1^2 + X_2X_3,$$

$$\beta = X_2^2 + X_4X_5,$$

$$\gamma = X_3^2 + X_6X_7,$$

$$\theta = X_2^2X_3 + X_2X_3^2$$

属于 $R = \mathbb{F}_2[X_1, X_2, \ldots, X_7]$。则 X_1^4 不在由 α、 β、 γ、 θ、 X_4^2、X_5^2、 X_6^2、 X_7^2、 $X_4^2X_5 + X_4X_5^2$、 $X_6^2X_7 + X_6X_7^2$ 生成的理想中。

证明。 反设。则

$$X_1^4 = f\alpha + g\beta + h\gamma + k\theta + z \tag{5.10}$$

对 R 中的某些 f、 g、 h、 k，以及对由元素 X_4^2、 X_5^2、 X_6^2、X_7^2、 $X_4^2X_5 + X_4X_5^2$、 $X_6^2X_7 + X_6X_7^2$ 生成的理想中的某个 z。假设 m_1、 m_2、 ..... 、 m_k 是 X_1、 X_2、 ..... 、 X_7 中互不相同的单项式。在证明的其余部分，当我们写

$$w = c_1m_1 + c_2m_2 + \cdots + c_km_k + \bigstar$$

这将意味着

$$w = c_1m_1 + c_2m_2 + \cdots + c_km_k + \widetilde{w}$$

对于某个没有 m_1、 m_2..... m_k 项的 $\widetilde{w}$ 。在证明的其余部分，系数$\{c_i\}$是 $\mathbb{F}_2$中的元素。假设

$$f = c_1X_1^2 + c_2X_2X_3 + c_3X_2^2 + c_4X_3^2 + c_5X_4X_5 + c_6X_6X_7 + \bigstar,$$

and

$$g = c_7X_1^2 + c_8X_3^2 + c_9X_2X_3 + c_{10}X_6X_7 + \bigstar$$

and

$$h = c_{11}X_1^2 + c_{12}X_2^2 + c_{13}X_2X_3 + c_{14}X_4X_5 + \bigstar$$

and

$$k = c_{15}X_2 + c_{16}X_3 + \bigstar$$

令 m 为 X_1中的一个单项式， X_2、……、 X_7。我们将用（m）表示通过考虑 c_i中单项式 m 的系数而得到的方程5.10。

$$\begin{aligned}
1 &= c_1 && (X_1^4)\\
0 &= c_2+c_8+c_{12}+c_{15}+c_{16} && (X_2^2X_3^2)\\
0 &= c_3+c_9+c_{15} && (X_2^3X_3)\\
0 &= c_4+c_{13}+c_{16} && (X_2X_3^3)\\
0 &= c_5+c_7 && (X_1^2X_4X_5)\\
0 &= c_5+c_9 && (X_2X_3X_4X_5)\\
0 &= c_1+c_2 && (X_1^2X_2X_3)\\
0 &= c_8+c_{14} && (X_3^2X_4X_5)\\
0 &= c_3+c_7 && (X_1^2X_2^2)\\
0 &= c_4+c_{11} && (X_1^2X_3^2)\\
0 &= c_6+c_{11} && (X_1^2X_6X_7)\\
0 &= c_6+c_{13} && (X_2X_3X_6X_7)\\
0 &= c_{10}+c_{12} && (X_2^2X_6X_7)\\
0 &= c_{10}+c_{14} && (X_4X_5X_6X_7)
\end{aligned}$$

由上面最后 10 个方程，我们有 $c_1=c_2$ 以及 $c_3=c_5=c_7=c_9$ 以及 $c_4=c_6=c_{11}=c_{13}$ 以及 $c_8=c_{10}=c_{12}=c_{14}$。由第一个方程，我们得到 $c_1=c_2=1$。现在由第二个方程，我们得到 $0=1+c_{15}+c_{16}$，因为 $c_8=c_{12}$。由第三个方程，我们得到$c_{15}=0$，因为 $c_3=c_9$。由第四个方程，我们得到 $c_{16}=0$，因为 $c_4=c_{13}$。因此$0=1+c_{15}+c_{16}=1+0+0=1$。这是一个矛盾。□

注 5.11. 通过 GAP 计算，我们已验证 $\kappa_4'(\pi)=0$ 对所有阶为 ≤ 256 的初等被初等 2-群成立，并且对大约三分之一阶为 512 的此类群成立。

5d. 一个具有 $\beta\circ s_*\neq 0$ 和 $\delta\circ\beta\neq 0$的例子。 这里给出一个例子，说明 $\beta\circ s_*$ 和 $\delta\circ\beta$ 都可能非零，但复合映射 $\delta\circ\beta\circ s_*=0$。这样的例子说明了寻找满足 $\kappa_4'(\pi)\neq 0$的群的困难。谱序列计算采用与上文相同的方法

令 π 为 256 阶群，在小群库中标识为 $SG[256,9039]$。它由以下表示给出

$$\pi=\langle x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\,|\,r\in R\rangle$$

其中 R 包含关系 $x_1^2=x_5x_7x_8$, $x_2^2=x_6$, $x_3^2=x_5x_6$, $x_4^2=x_5x_6$, $x_5^2=x_6^2=x_7^2=x_8^2=1$, $[x_1,x_2]=x_5$, $[x_1,x_3]=x_6$, $[x_1,x_4]=x_8$, $[x_2,x_3]=x_7$, $[x_2,x_4]=x_5$,$[x_3,x_4]=1$，且对每个 $i\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$都有 $[x_i,x_5]=[x_i,x_6]=[x_i,x_7]=[x_i,x_8]$。注意，我们有一个中心群扩张 $V\overset{i}{\rightarrowtail}\pi\overset{\alpha}{\twoheadrightarrow}W$，其中

$$V=Z(\pi)=[\pi,\pi]=\langle x_5,x_6,x_7,x_8\rangle\cong\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2$$

and

$$W=\pi^{\mathrm{ab}}=\pi/[\pi,\pi]=\langle[x_1],[x_2],[x_3],[x_4]\rangle\cong\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2.$$

另请注意，附录A 中的 GAP 代码表明

$$H^1(\mathrm{Wh}'(\hat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \cong \frac{\{g \in \pi^{\mathrm{ab}} \mid g^2 = 1\}}{\langle g \mid g \sim g^{-1}\rangle} \cong \frac{\langle [x_1],[x_2],[x_3],[x_4]\rangle}{\langle [x_1]+[x_2],[x_2]+[x_3],[x_3]+[x_4]\rangle} \cong \mathbb{Z}/2.$$

考虑群扩张$V \overset{i}{\rightarrowtail} \pi \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} W$ 的 Lyndon-Hochschild-Serre 谱序列，我们得到

$$E_2^{0,1}(\alpha, \mathbb{Z}/2) = H^1(V;\mathbb{Z}/2) = V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{Z}/2) = \langle \zeta_5, \zeta_6, \zeta_7, \zeta_8\rangle$$

其中，对于 $i \in \{5,6,7,8\}$， $\zeta_i = x_i^*$。考虑

$$H^1(W;\mathbb{Z}/2) = W^* = \langle X_1, X_2, X_3, X_4\rangle$$

其中，对于 $i \in \{1,2,3,4\}$， $X_i = [x_i]^*$。我们使用 GAP 程序得到以下结果：有

$$\begin{aligned} d_2(\zeta_5) &= X_1^2 + X_1X_2 + X_2X_4 + X_3^2 + X_4^2 \\ d_2(\zeta_6) &= X_1X_3 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 \\ d_2(\zeta_7) &= X_1^2 + X_2X_3 \\ d_2(\zeta_8) &= X_1^2 + +X_1X_4. \end{aligned}$$

令 I_2 为 d_2的像。则有

$$\begin{aligned} d_3(\zeta_5^2) &= X_1^2X_2 + X_1X_2^2 + X_2^2X_4 + X_2X_4^2 + I_2 \\ d_3(\zeta_6^2) &= X_1^2X_3 + X_1X_3^2 + I_2 \\ d_3(\zeta_7^2) &= X_2^2X_3 + X_2X_3^2 + I_2 \\ d_3(\zeta_8^2) &= X_1^2X_4 + X_1X_4^2 + I_2 \end{aligned}$$

令 I为边同态 $H^*(W;\mathbb{Z}/2) = E^{*,0\,2}(\alpha,\mathbb{Z}/2)$ 到 $H^*(\pi;\mathbb{Z}/2)$ 的核。很容易验证，$X_2^4 + X_3^4$和 $X_3^4 + X_4^4$不属于 I。同样容易验证， X_1^4 和 $X_2^4 + X_3^4 + X_4^4$ 属于 I。因此，s_* 在 $H_4(\pi;\mathbb{Z}/2)$中的像由上同调类 $X_2^2 + X_3^2 + I$ 和$X_3^2 + X_4^2 + I$的对偶生成。

由此可知， $\beta \circ s_*$ 的像由 $[x_2] + [x_3]$ 和 $[x_3] + [x_4]$生成，因此在 $H^0(\pi^{ab})$中非零。此外，对于 $\{1,2,3,4\}$中的所有 i， $\delta \circ \beta([x_i]) \neq 0$，这意味着$\delta \circ \beta \circ s_* = 0$。

6. 关于 More information about $\kappa_4(\pi)$

在定理 E 中，我们给出了一个明确的代数条件，用于检验满足 $\kappa_4'(\pi) \neq 0$ 的非零例子，而推论 1.5 给出了这样一个例子，其中群 π 是初等阿贝尔群的初等阿贝尔扩张。我们首先提出一个猜想，针对不满足该假设时 $\kappa_4'(\pi)$ 的消失情形。在最后几节中，我们展示如何得到更多非零 κ_4^s 例子（见命题6.7、命题 6.9以及注 6.10）。

6a. 关于 $\kappa_4'(\pi)$ 的一个猜想。注意，若 $\kappa_4'(\pi) \neq 0$，则由定理 E 可知，群 π 对应的复合 $\delta \circ \beta \circ s_* \neq 0$。特别地，若对于某个$\widehat{x} \in H_4(\pi; \mathbb{Z}/2)$，有 $\delta \circ \beta \circ s_*(\widehat{x}) \neq 0$，则由引理 5.4 可知，必存在一个循环商 $p\colon \pi \to \pi/N = C_1$，使得 $0 \neq p_*(\widehat{x}) \in H_4(C_1; \mathbb{Z}/2)$。以下猜想的动机是试图证明：若 $\kappa_4'(\widehat{x}) \neq 0$，则 C_1 必为二阶。

问题。如果 $\kappa_4'(\pi) \neq 0$，是否可以推出 π^{ab} 是初等阿贝尔群?

如果 π^{ab} 在内直和分解中具有阶为 ≥ 4 的循环因子，那么我们可以使用滤过方法来研究映射 $\delta \circ \beta \circ s_*$。

猜想 6.1。设 $N \lhd T \trianglelefteq W \lhd \pi$ 是2-群 π 的一列递增正规子群，使得 π/N 是循环群，$T/N \cong \mathbb{Z}/2$ 且 $\pi/W \cong \mathbb{Z}/2$。令 $i\colon W \to \pi$ 为包含映射，令 $p\colon \pi \to \pi/N$ 为自然商映射。假设这些映射

- $p_*\colon H_4(\pi; \mathbb{Z}/2) \to H_4(\pi/N; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$，并且
- $(p \circ i)_*\colon H_2(W; \mathbb{Z}/2) \to H_2(\pi/N; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$

都非零，但$(p \circ i)_*\colon H_4(W; \mathbb{Z}/2) \to H_4(\pi/N; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$ 为零。于是，$T - N$ 中元素的 π-共轭类的数量为奇数。

注 6.2。在附录 C 中，我们提供了一些 GAP 代码，用于检验这个猜想。包含此类递增子群序列的最小群为 $SG[32, 8]$，$SG[64, 13]$ 和$SG[64, 14]$。在这些群中，每个这样的子群递增序列 $T - N$ 都有奇数个 π-共轭类，从而验证了该猜想。

回顾公式：

$$H^1(\mathrm{Wh}'(\hat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \cong \frac{\{[g] \in \pi^{\mathrm{ab}} : [g]^2 = 1\}}{\langle [g] : g \sim g^{-1} \rangle} \cong S/C,$$

其中 $S = \{g \in \pi \,|\, g^2 \in [\pi, \pi]\}$ 和 $C = \langle g \in S \,|\, g \sim g^{-1}$ 或 $g \in [\pi, \pi] \rangle$。现在令

$$T = \langle g \in S \,|\, g \in C, \text{ or } t^2 = g \text{ for some } t \in \pi \rangle,$$

并注意到 T/C 是 $H^1(\mathrm{Wh}'(\hat{}\mathbb{Z}_2\pi))$ 的子群。例如，当 $\pi = SG(32, 4)$ 时，我们有 $S = T$。

定理 6.3。设 π 是一个有限 2-群。假设猜想 6.1 成立，并且 $\kappa_4'(H) = 0$，对 H 的每个真子群 π都成立。那么 $\kappa_4'(\pi)$ 的像与 T/C 的交集是平凡的。

证明。反设结论不成立。那么存在一个元素 $\widehat{x} \in H_4(\pi; \mathbb{Z}/2)$，以及 π^{ab} 的一个适配分解，使得在第一因子投影 $p\colon \pi \to C_1$ 下有 $0 \neq p_*(\beta \circ s_*(\widehat{x}))$，且 $\delta(v_1) \neq 0$ 属于 T/C。令 N 如第 5b 节所述。由于 v_1 属于 T，π/N 是一个阶至少为 4 的循环群。事实上，存在一个递增序列 $N \lhd T \trianglelefteq W \lhd \pi$，其中各项都是 2-群 π 的正规子群。注意，根据引理 5.4，$p_*\colon H_4(\pi; \mathbb{Z}/2) \to H_4(\pi/N; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$非零，因为 $\delta(v_1) \neq 0$。

此外，$(p \circ i)_*\colon H_2(W; \mathbb{Z}/2) \to H_2(\pi/N; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$ 非零，因为复合 te

$$H_2(T; \mathbb{Z}/2) \to H_2(\pi; \mathbb{Z}/2) \to H^0(\pi^{\mathrm{ab}}) \to H^0(\pi/N)$$

是满射，且 $H^0(T/N) \cong H^0(\pi/N)$。这利用了这样一个事实：$H_2(T; \mathbb{Z}/2) \to H_2(\pi; \mathbb{Z}/2)$ 可分解为经过映射 $H_2(W; \mathbb{Z}/2) \to H_2(\pi; \mathbb{Z}/2)$，以及由包含映射

$$H_2(T/N; \mathbb{Z}/2) \cong H_2(W/N; \mathbb{Z}/2) \cong H_2(\pi/N; \mathbb{Z}/2)$$

诱导的同构。

但是 $(p\circ i)_*\colon\ H_4(W;\mathbb{Z}/2)\to H_4(\pi/N;\mathbb{Z}/2)\cong\mathbb{Z}/2$ 为零，因为 $\kappa_4'(W)=0$。于是，$T-N$ 中元素的 π-共轭类的个数为奇数。考虑在 $T-N$ 中元素的 π-共轭类集合上由取逆元所给出的作用。该作用必定有一个不动点，从而与 $\delta(v_1)\neq 0$相矛盾。□

推论 6.4. 假设猜想 6.1成立，并且 π^{ab} 没有二阶直因子。则 $\kappa_4'(\pi)=0$。

6b. **余维二扭曲图**。 下面给出一种寻找例子的方法，使得 $\kappa_4^s\neq 0$，但 $\kappa_4'=0$。我们寻找一个具有某些性质的有限 2-群 π 。为简单起见，我们限于使得 π^{ab} 的指数为二的群 π 。由 [13, 定理 3] 可知，存在一个自然同构

$$\omega\colon H_2(\pi;\mathbb{Z})/H_2^{\mathrm{ab}}(\pi)\xrightarrow{\cong}SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$$

其中 $H_2^{\mathrm{ab}}(\pi)\subseteq H_2(\pi;\mathbb{Z})$ 表示从 π 的阿贝尔子群归纳得到的像，而边界映射 $\partial\colon H^1(SK_(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))\to L_{2i}(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$，其中 $i=0,\ 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$。

定义 6.5。设 π 是一个非阿贝尔有限 2-群，$\theta\in H^2(\pi;\mathbb{Z}/2)$ 是一个上同调类。若有以下条件成立，则称这一对 $(\pi,\ \theta)$ 是相容的 。

(i) 阿贝尔化 π^{ab} 的指数为二。(ii) 由 $\theta\in H^2(\pi;\mathbb{Z}/2)$ 分类的中心扩张 $1\to\sigma\to\tilde{\pi}\to\pi\to 1$，连同 $\sigma=\langle t\rangle\cong\mathbb{Z}/2$，定义一个二重覆盖 $\alpha\colon\tilde{\pi}\to\pi$。要求 $t\in[\tilde{\pi},\tilde{\pi}]$。(iii) $H^1(Wh'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\tilde{\pi}))=0$.^ ^ ^(iv) $SK_1(\mathbb{Z}_2\pi)\neq 0$，但映射 $SK_1(\mathbb{Z}_2\tilde{\pi})\to SK_1(\mathbb{Z}_2\pi)$ 为零。(v) 边界映射 $\partial\colon H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))\to L_0(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$ 是单射。(vi) 存在一个类 $\widehat{x}\in H_4(\pi;\mathbb{Z}/2)$，使得 $0\neq\widehat{z}=\widehat{x}\cap\theta\in H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)$ 是一个整系数上同调类 $\widehat{z}_1\in H_2(\pi;\mathbb{Z})$ 在 $\widehat{z}=i_*(\widehat{z}_1)$ 下的像。(vii) 对于像 $[\widehat{z}_1]\in H_2(\pi;\mathbb{Z})/H_2^{\mathrm{ab}}(\pi)$，有 $1\neq\omega([\widehat{z}_1])\in SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$。

注6.6. 或者，根据上同调 Bockstein 同态的对偶性，对于条件 (vi)，我们需要一个类 $z\in H^2(\pi;\mathbb{Z}/2)$，使得 $\beta^*(z)\neq 0$ and $z\cup\theta\neq 0$。

Pr命题 6.7. 如果 (π,θ) 是一个相容对，那么 $\kappa_4^s(\pi)\neq 0$ 且 $\kappa_4'(\pi)=\qquad\qquad 0.$

证明。 首先注意到，根据条件 (iii)，$H^1(Wh'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))=0$ 。因此，根据定理 E 和条件 (i)，$\kappa_4'(\pi)=0$ 。此外，根据条件 (iv)、(v)，以及将定理 C 应用于 $\widehat{z}=\widehat{x}\cap\theta\in H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)$，有 $\kappa_2^s(\widehat{z})\neq 0$ 。

我们有一个中心扩张 $1\to\sigma\to\tilde{\pi}\to\pi\to 1$，使得 $\sigma\subset[\tilde{\pi},\tilde{\pi}]$，并且根据条件 (ii)，在投影映射下有 $H^0(\tilde{\pi}^{\mathrm{ab}})\cong H^0(\pi^{\mathrm{ab}})$。上同调类 $\theta\in H^2(\pi;\mathbb{Z}/2)$ 定义了一个圆丛

$$S^1\to Y\to K(\pi,1)$$

它在基本群上诱导出给定的中心扩张（见 [23, 第128-131]页）。当且仅当 θ 是某个整系数上同调类的像时，该圆丛才是可定向的；等价地，$\beta^*(\theta)=0$，其中 $\beta^*\colon H^2(\pi;\mathbb{Z}/2)\to H^3(\pi;\mathbb{Z})$ 是上同调中的 Bockstein 同态。

因此，我们得到一个余维 2 扭曲图表：

$$
\begin{array}{ccccc}
H_4(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\bar{\kappa}_4^s} & L_2^s(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) & & \\
\downarrow{\scriptstyle \cap\theta} & & & \searrow^{a} & \\
H_2(\pi;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\bar{\kappa}_2^s} & L_0^s(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) & \xrightarrow{b} & L_2^s(\widehat{\mathbb{Z}}_2\tilde{\pi}\to\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)
\end{array}
\tag{6.8}
$$

根据 Ranicki-Rothenberg比较序列，我们断言，该图表中的映射 b 在 κ_2^s 限制到$H_2(\pi;\mathbb{Z})\subseteq H_2(\pi;\mathbb{Z}/2)$所得像上是单射。我们有一个正合列

$$\cdots\to L_{n+3}^s(\tilde{\pi}\to\pi)\to LS_n(\Phi)\to L_n^s(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)\to L_{n+2}^s(\tilde{\pi}\to\pi)\to\dots$$

由圆丛（见 [23, p127]）产生。在我们的设定中，

$$LS_n(\Phi)=LN_n(\tilde{\pi}\to\pi)\cong L_n^s(\widehat{\mathbb{Z}}_2\tilde{\pi},\beta,t),$$

而这个长正合列可以识别为如下序列

$$\cdots\to L_3^s(\widehat{\mathbb{Z}}_2\tilde{\pi}\to\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)\xrightarrow{\partial}L_0^s(\widehat{\mathbb{Z}}_2\tilde{\pi},\beta,t)\xrightarrow{\alpha_*}L_0^s(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)\xrightarrow{b}L_2^s(\widehat{\mathbb{Z}}_2\tilde{\pi}\to\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$$

其中 $(\mathbb{Z}_2\tilde{\pi},\beta,t)$ 是诱导的扭曲反结构，中间映射由投影 $\alpha\colon\tilde{\pi}\to\pi$ 诱导（见 Ranicki [18, p805,808]）。在我们的假设下，$H^1(Wh'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\tilde{\pi}))=0$，由条件 (iii) 可知，而 $\tilde{\pi}^{\mathrm{ab}}\cong\pi^{\mathrm{ab}}$ 蕴含 $H^1(Wh'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))=0$。因此，$L_0^s(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)\cong H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))$，且 $L_0^s(\widehat{\mathbb{Z}}_2\tilde{\pi},\beta,t)\cong H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\tilde{\pi}))$（见 [8, §8]）。由于映射 $SK_1(\mathbb{Z}_2\tilde{\pi})\to SK_1(\mathbb{Z}_2\pi)$ 为零，我们得出 $\alpha_*=0$ 和 b 是单射。

由于 $0\neq\kappa_2^s(\hat{z})=\kappa_2^s(i_*(\hat{z}_1))\in L_0^s(\mathbb{Z}_2\pi)$，因此根据扭转图表的交换性以及映射 b 的单射性，$\kappa_4^s(\hat{x})\neq0$。□

6c. **一个满足命题 6.7 的假设的例子。** 我们可以使用 GAP 搜索满足定义 6.5 中条件的例子。对于阶不超过 128 的有限 2-群，我们将采用 Green 和 King 的上同调计算 [3] (参见网页 https://users.fmi.uni-jena.de/cohomology/)。谱序列计算采用与前几节相同的方法。

命题 6.9. 存在一个相容对 (π,θ) 对应于 $\pi=SG[128,1376]$。

证明。令 $\tilde{\pi}$ 为 256 阶群，在小群库中标识为 $SG[256,8129]$。我们将使用该群的以下表示

$$\tilde{\pi}=\left\langle \tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\tilde{x}_4,\tilde{x}_5,\tilde{x}_6,\tilde{x}_7,\tilde{x}_8\,|\,r\in\tilde{R}\right\rangle$$

其中 $\tilde{R}$ 包含关系 $\tilde{x}_1^2=\tilde{x}_6\tilde{x}_7$、$\tilde{x}_2^2=\tilde{x}_6$、$\tilde{x}_4^2=\tilde{x}_5$、$\tilde{x}_3^2=\tilde{x}_5^2=\tilde{x}_6^2=\tilde{x}_7^2=\tilde{x}_8^2=1$、$[\tilde{x}_1,\tilde{x}_2]=\tilde{x}_8$、$[\tilde{x}_1,\tilde{x}_3]=\tilde{x}_5\tilde{x}_6\tilde{x}_8$、$[\tilde{x}_1,\tilde{x}_4]=1$、$[\tilde{x}_2,\tilde{x}_3]=\tilde{x}_7$、$[\tilde{x}_2,\tilde{x}_4]=1$、$[\tilde{x}_3,\tilde{x}_4]=\tilde{x}_5$，并且 $[\tilde{x}_i,\tilde{x}_5]=[\tilde{x}_i,\tilde{x}_6]=[\tilde{x}_i,\tilde{x}_7]=[\tilde{x}_i,\tilde{x}_8]=1$ 对每个 $i\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$都成立。

设 π 为 128 阶群，在小群库中标识为 $SG[128,1376]$。该群具有如下表示

$$\pi=\langle x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\,|\,r\in R\rangle$$

其中 R 包含关系 $x_1^2 = x_6x_7$、 $x_2^2 = x_6$ $x_4^2 = x_5$、 $x_3^2 = x_5^2 = x_6^2 = x_7^2 =$1、 $[x_1, x_2] = x_5$、 $[x_1, x_3] = x_6$、 $[x_1, x_4] = 1$、 $[x_2, x_3] = x_7$、 $[x_2, x_4] = 1$、 $[x_3, x_4] = x_5$，以及对每个 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 都成立的 $[x_i, x_5] = [x_i, x_6] = [x_i, x_7] = 1$。现在，我们定义一个满群同态 α，将 $\tilde{\pi}$ 映射到 π，具体为分别将 $\tilde{x}_1$、 $\tilde{x}_2$、 $\tilde{x}_3$、 $\tilde{x}_4$、 $\tilde{x}_5$、 $\tilde{x}_6$、 $\tilde{x}_7$、 $\tilde{x}_8$ 映射到x_1、 x_2、 x_3、 x_4、 x_5、 x_6、 x_7、 x_5。该群同态的核为

$$\sigma = \langle \tilde{x}_5\tilde{x}_8 \rangle \cong \mathbb{Z}/2.$$

因此，我们有一个中心扩张

$$1 \to \sigma \to \tilde{\pi} \xrightarrow{\alpha} \pi \to 1.$$

Let

$$\tilde{V} = Z(\tilde{\pi}) = [\tilde{\pi}, \tilde{\pi}] = \langle \tilde{x}_5, \tilde{x}_6, \tilde{x}_7, \tilde{x}_8 \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$$

and

$$V = Z(\pi) = [\pi, \pi] = \langle x_5, x_6, x_7 \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$$

and

$$\tilde{W} = \tilde{\pi}^{\mathrm{ab}} = \tilde{\pi}/[\tilde{\pi}, \tilde{\pi}] = \langle [\tilde{x}_1], [\tilde{x}_2], [\tilde{x}_3], [\tilde{x}_4] \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$$

and

$$W = \pi^{\mathrm{ab}} = \pi/[\pi, \pi] = \langle [x_1], [x_2], [x_3], [x_4] \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$$

其中 α 诱导了一个从 $\tilde{\pi}^{\mathrm{ab}}$ 到 π^{ab} 的同构，并将 $[\tilde{x}_i]$ 映射到 $[x_i]$，对所有属于 $\{1, 2, 3, 4\}$的 i均成立。现在，当

$$(g, x) \in \{(1, \tilde{x}_3), (\tilde{x}_3\tilde{x}_4, \tilde{x}_4), (\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_4, \tilde{x}_2\tilde{x}_3), (\tilde{x}_2\tilde{x}_4, \tilde{x}_1\tilde{x}_3), \}.$$

因此， $[\tilde{x}_3]$、 $[\tilde{x}_4]$、 $[\tilde{x}_2\tilde{x}_3]$和 $[\tilde{x}_1\tilde{x}_3]$在 H^1(Wh′(ˆ$\mathbb{Z}_2\tilde{\pi}$))中均为零，并且我们有

$$H^1(\mathrm{Wh}'(\hat{\mathbb{Z}}_2\tilde{\pi})) \cong H^1(\mathrm{Wh}'(\hat{\mathbb{Z}}_2\pi)) \cong 0.$$

因此，条件 (iii) 成立，而条件 (iv) 可由ˆ附录B中的 GAP 计算立即得出，这些计算表明 $SK_1(\mathbb{Z}_2\pi) \cong \mathbb{Z}/2$。条件 (v) 可通过应用定理4.1 和定理4.3 (见列表 L2)。

现在我们得到相应的 Lyndon-Hochschild-Serre 谱序列，其

$$\begin{aligned} d_2(\tilde{X}_5) &= \tilde{X}_1\tilde{X}_3 + \tilde{X}_3\tilde{X}_4 + \tilde{X}_4^2 \\ d_2(\tilde{X}_6) &= \tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_1\tilde{X}_3 + \tilde{X}_2^2 \\ d_2(\tilde{X}_7) &= \tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2\tilde{X}_3 \\ d_2(\tilde{X}_8) &= \tilde{X}_1\tilde{X}_2 + \tilde{X}_1\tilde{X}_3. \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} d_2(X_5) &= X_1X_2 + X_3X_4 + X_4^2 \\ d_2(X_6) &= X_1^2 + X_1X_3 + X_2^2 \\ d_2(X_7) &= X_1^2 + X_2X_3 \end{aligned}$$

假设 I 表示由 $d_2(X_5)$ $d_2(X_6)$ $d_2(X_7)$ 生成的、在˜ ˜Steenrod 运算下封闭的理想。注意 α^* 将 $d_2(X_5)$ 映到 $d_2(X_5) + d_2(X_8)$。因此

$$\theta = [X_1X_2 + X_1X_3] \in H^2(\pi; \mathbb{Z}/2)$$

是对应于该中心扩张的上同调类

$$1 \to \sigma \to \tilde{\pi} \to \pi \to 1.$$

现取

$$z = [X_3X_4] \in H^2(\pi; \mathbb{Z}/2).$$

于是 $\theta \cup z \neq 0$ 属于 $H^4(\pi; \mathbb{Z}/2)$，并选取$\hat{}x \in H_4(\pi; \mathbb{Z}/2)$，使得$\hat{}x \cap (\theta \cup z) \neq 0$。于是($\hat{}x \cap \theta$) $\cap\, z = 1$，且对于上同调类$\hat{}z = \hat{}x \cap \theta$，我们有$\hat{}z \cap z = \hat{}z \cap [X_3X_4] = 1$。

现在 $H_2(\pi; \mathbb{Z})$的指数为二（由GAP计算得到），且$\mathrm{Sq}^1(z) \neq 0$（通过使用GAP软件包SINGULAR），因此

$$0 \neq \beta^*(z) \in H^3(\pi; \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(\pi, \mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

由对偶性，存在唯一的上同调类$\hat{}z_1 \in H_2(\pi; \mathbb{Z})$，使得 $i_*(\hat{}z_1) = \hat{}z$。

。接下来我们断言，上同调类 $\hat{}z_1$ 不属于子群 $H_2^{\mathrm{ab}}(\pi) \subseteq H_2(\pi, \mathbb{Z})$。令 $q_*\colon H_2(\pi; \mathbb{Z}) \to H_2(\pi^{\mathrm{ab}}; \mathbb{Z})$ 表示由商 $q\colon \pi \to \pi^{\mathrm{ab}}$ 诱导的自然映射。那么我们有公式

$$H_2(\pi^{\mathrm{ab}}; \mathbb{Z}) = \bigoplus_{1 \le i < j \le 4} \mathbb{Z}/2 \cdot e_{ij} \cong (\mathbb{Z}/2)^6.$$

q_* 的像由 $\{e_{12}+e_{34}, e_{14}, e_{24}\}$ 生成，而 $H_2^{\mathrm{ab}}(\pi)$ 在 q_* 下的像中只有基元素 e_{14} 和 e_{24}，因为 $\langle x_1, x_4\rangle \cong \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4$ 和 $\langle x_2, x_4\rangle \cong \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4$，但 $[x_1, x_2] = [x_3, x_4] = x_5$。

由于 $z = [X_3X_4] \in H^2(\pi; \mathbb{Z}/2)$，我们有 $z = q^*(X_3X_4)$，因此

$$q_*(\hat{z}) \cap (X_3X_4) = \hat{z} \cap q^*(X_3X_4) = \hat{z} \cap [X_3X_4] = 1.$$

我们有 $(e_{12} + e_{34}) \cap (X_3X_4) = 1$, $e_{14} \cap (X_3X_4) = 0$, $e_{24} \cap (X_3X_4) = 0$。因此，对于某些常数 c_1, c_2，有 $q_*(\hat{}z_1) = (e_{12} + e_{34}) + c_1e_{14} + c_2e_{24}$。所以，$\hat{}z_1 \notin H_2^{\mathrm{ab}}(\pi)$，并且我们有$\omega([\hat{}z_1]) \neq 0$，这正是条件(vii)所要求的。更多信息请参阅网页：

https://users.fmi.uni-jena.de/cohomology/128web/128gp1376.html

以了解 $\pi = SG[128, 1376]$的上同调环。 □

注 6.10. 例子4.12中的群列表可作为进一步例子的潜在源。定义 6.5 中的条件 (iii)、(iv) 和 (v) 已在 4b节中针对群 $\pi = SG[128, 1377]$ 及其 2-扩张 $\tilde{\pi} = SG[256, 8177]$进行了明确验证。利用上述方法，不难验证其余条件，从而得出 $\kappa_4^s(\pi) \neq 0$，但 $\kappa_4'(\pi) = 0$。

Appendix A. Some GAP computations for $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2G))$

以下代码将群 G 作为输入，并输出 $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2G))$。它利用了这一事实：

$$H^1(\mathrm{Wh}'(\hat{\mathbb{Z}}_2G)) \cong \frac{\{g \in G_{\mathrm{ab}} \mid g^2 = 1\}}{\langle g \mid g \sim g^{-1}\rangle} \cong \frac{S}{C}$$

其中 $S = \{g \in G \mid g^2 \in [G,G]\}$和 $C = \langle g \in S \mid g \sim g^{-1}$或 $g \in [G,G]\rangle$这里，变量 `Sq in Comm` 中载入了一个元素列表，这些元素生成 S；变量`Conj to inverse` 中载入了生成群 C的元素。

```
H1_Wh_素数: =函数(G)
局部 Comm_G,g,Sq_属于_Comm,Conj_到_逆元;
        Comm_G:=换位子子群(G,G);
        Sq_属于_Comm:=[];
        Conj_到_逆元:=List(Comm_G);
        对于 g属于G执行
             若不满足(g^2属于 Comm_G) 则继续; fi;
             Add(Sq_属于_Comm,g);
             若 (g^(-1) 属于 g^G) 则Add(Conj_至_inverse,g); fi;
        od;
        返回 Group(Sq_属于_Comm)/Group(Conj_至_inverse);

结束;;
```

LISTING 1. 计算 $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2 G))$ 的函数

这里可以按如下方式获取一个群列表 G，其中 $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2 G))$ 非零:

```
当n 属于 [2,4,8,16,32,64,128] 时执行
   对于 i 属于 [1..NumberSmallGroups( n )] 时执行
        G:=SmallGroup(n,i);
        H:=H1_Wh_素数(G);
        若 Size(H)>1则Print("[",n,",",i,",",秩(H1_Wh_prime(G)),"],          "); fi;
   od;
od;
```

LISTING 2. 列出非零 $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2 G))$ 群的代码

上述列表的结果如下所示。请注意，`[s,i,r]` 出现在列表中意味着 $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2 SG[s,i])) \cong (\mathbb{Z}/2)^{\oplus r}$。

```
[32,4,1], [32,13,1], [64,3,1], [64,15,1], [64,27,1], [64,28,1], [64,46,1],
[64,48,1], [64,57,1], [64,62,1], [64,63,1], [64,64,2], [64,78,1], [64,81,1],
[64,82,3], [64,84,1], [64,106,1], [64,113,1], [64,162,1], [64,164,1],
[128,27,1], [128,43,1], [128,44,1], [128,45,1], [128,49,1], [128,56,1],
[128,76,1], [128,85,1], [128,99,1], [128,100,1], [128,101,1], [128,104,1],
[128,129,1], [128,130,1], [128,156,1], [128,158,1], [128,166,1], [128,172,1],
[128,174,1], [128,175,2], [128,177,1], [128,180,1], [128,183,1], [128,184,1],
[128,294,1], [128,298,1], [128,300,1], [128,302,1], [128,340,1], [128,348,1],
[128,457,1], [128,458,1], [128,476,1], [128,477,2], [128,478,2], [128,479,1],
[128,481,1], [128,484,1], [128,499,1], [128,502,1], [128,506,1], [128,539,1],
[128,549,1], [128,550,1], [128,551,1], [128,552,1], [128,553,1], [128,554,1],
[128,555,1], [128,556,1], [128,557,1], [128,558,1], [128,559,1], [128,560,1],
[128,561,1], [128,562,1], [128,563,1], [128,564,1], [128,565,1], [128,566,1],
[128,567,2], [128,568,1], [128,569,1], [128,570,1], [128,571,2], [128,572,3],
[128,573,2], [128,576,1], [128,578,1], [128,585,1], [128,649,1], [128,651,1],
[128,652,1], [128,656,1], [128,658,1], [128,659,1], [128,680,1], [128,762,1],
[128,766,1], [128,767,1], [128,772,1], [128,803,1], [128,804,1], [128,805,2],
[128,806,2], [128,807,1], [128,808,1], [128,809,2], [128,810,1], [128,811,2],
```

```
[128,812,1], [128,813,1], [128,814,1], [128,816,1], [128,817,1], [128,824,1],
[128,826,1], [128,828,1], [128,829,1], [128,831,1], [128,832,1], [128,833,2],
[128,834,1], [128,835,1], [128,836,3], [128,889,1], [128,895,1], [128,897,1],
[128,898,1], [128,965,1], [128,967,1], [128,970,1], [128,971,1], [128,999,1],
[128,1011,1], [128,1013,1], [128,1014,2], [128,1015,1], [128,1122,1],
[128,1126,1], [128,1132,3], [128,1133,1], [128,1215,1], [128,1235,1],
[128,1236,1], [128,1303,1], [128,1602,1], [128,1639,1], [128,1650,1],
[128,1818,1], [128,1821,1]
```

Listing 3. 以上列表的输出

AppendixB. Some GAP computations for $H^1(SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi))$

给定一个 2-群 G，以下函数可找出元素 g，它们属于交换子群 $[G,G]$，且 g 的阶为 2，$\langle g\rangle \hookrightarrow G \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} G/\langle g\rangle$ 是一个中心群扩张，且 g 不属于 $\Omega(\alpha)$ $= \{\,[\widetilde{g}_1,\widetilde{g}_2] \mid \widetilde{g}_1,\widetilde{g}_2 \in G$ 并且 $\alpha([\widetilde{g}_1,\widetilde{g}_2]) = 1\,\}$。因此，根据定理4.1，若设 $\pi := G/\langle g\rangle$，即可得到阶为 ≤ 128 的有限 2-群的例子，其中$\backsim SK_1(\mathbb{Z}_2\pi) \neq 0$。该函数还可判定定理 4.3 中的附加条件是否满足。

```
一些_商群_具有_非零_SK1：=function(G) local G 中的_换位子_列表_、_ZG_与_CommG 的交集、g、h、_子群_列表、带有_额外_条件的_列表、额外_条件_成立、_群标识 gr、_h 波浪号、_h 波浪号_集合、来自_覆盖群的_同态、G_除以_g 的商群、_存在_提升；G 中的_换位子_列表_：_[]; for g in G do for h in G do G 中的_换位子_列表_：_Union(G 中的_换位子_列表,[g^(-1)*h^(-1)*g*h]); od; od; _子群_列表：=[][]; 带有_额外_条件的_列表：=[][]; ZG_与_CommG 的交集：=Intersection(Center(G),CommutatorSubgroup(G,G)); for g in ZG_与_CommG 的交集 do if not(Order(g)=2)then continue; fi; if g in G 中的_换位子_列表 then continue; fi; _群标识 gr:=IdGroup(G/Group(g)); if id_gr in _子群_列表 then continue; fi; Add(_子群_列表,IdGroup(G/Group(g))); 来自_覆盖群的_同态：=NaturalHomomorphismByNormalSubgroup(G,Group(g)); G_除以_g 的商群：=Image(hom_from_cover); _额外条件_成立：=true; for h in G_除以_g 的商群 do if h^(-1) in h^G_除以_g 的商群 then h_tilde_set：=PreImages(hom_from_cover,h); _存在_提升：=false; for h_tilde inh_tilde_集合 do if h_tilde^(-1) in h_tilde^G then
```

```
_存在_提升：=true; break; fi; od; _额外条件_成立：= 额外_条件_成立 and _存在_提升; fi; od; if _额外条件_成立 then _带有_额外_条件的=列表：_Union(_带有_额外[条件的列表,_群标识 gr]); fi; od; return [_子群_列表,_带有_额外_条件的列表]; end;;
```

LISTING 4. 列出群的商群 π G 使得 $SK_1(\mathbb{Z}_2\pi) \neq 0$

然后，可以找到所有阶不超过 128 且满足定理 π 4.1 的判据 的 2-群列表 L1，因此有 $SK_1(\mathbb{Z}_2\pi)$ 非零。列表 L2 则包含 L1 中同时满足定理 4.3 中额外条件的那些群。

```
L1:=[]; L2:=[]; 覆盖列表_of_2_：=[]; 对于大小_Gin [8,16,32,64,128,256] ，对索引_G in [1..NumberSmallGroups( size_G )] 执行 G:=SmallGroup(size_G,index_G); 函数结果_of_func:=一些_商群_具有_非零_SK1(G)；包含_with_SK1_非零的列表：=函数结果_of_func[1]；满足_which_额外_条件_的列表：=函数结果_of_func[2]；如果 Size(List_with_SK1_非零)=0 ，则继续。fi；Add(List_of_2_covers,[size_G,index_G,List_with_SK1_非零]); L1:=Union(L1,List_with_SK1_非零); L2:=Union(L2,List_which_satisfy_额外_条件); od; od;
```

LISTING 5. 用于按上述方式生成列表 L1 和 L2 的代码

此处我们展示上述代码的结果。

```
gap> L1;
[ [ 64, 149 ], [ 64, 150 ], [ 64, 151 ], [ 64, 170 ], [ 64, 171 ], [ 64, 172 ],
[ 64, 177 ], [ 64, 178 ], [ 64, 182 ], [ 128, 36 ], [ 128, 37 ], [ 128, 38 ],
[ 128, 39 ], [ 128, 40 ], [ 128, 41 ], [ 128, 138 ], [ 128, 139 ], [ 128, 144 ],
[128, 145 ], [ 128, 227 ], [ 128, 228 ], [ 128, 229 ], [ 128, 242 ], [128, 243 ],
[ 128, 244 ], [ 128, 245 ], [ 128, 246 ],[ 128, 247 ], [ 128, 265 ], [ 128, 266 ],
[ 128, 267 ], [ 128, 268 ], [128, 269 ], [ 128, 287 ], [ 128, 288 ], [ 128, 289 ],
[ 128, 290 ], [ 128, 291 ], [ 128, 292 ], [ 128, 293 ], [ 128, 301 ], [ 128, 324 ],
[ 128, 325 ], [ 128, 326 ], [ 128, 417 ], [ 128, 418 ], [ 128, 419 ], [ 128, 420 ],
[ 128, 421 ], [ 128, 422 ], [ 128, 423 ], [ 128, 424 ], [ 128, 425 ], [ 128, 426 ],
[ 128, 427 ], [ 128, 428 ], [ 128, 429 ], [ 128, 430 ], [ 128, 431 ], [ 128, 432 ],
[ 128, 433 ], [ 128, 434 ], [ 128, 435 ], [ 128, 436 ], [ 128, 446 ], [ 128, 447 ],
```

```
[ 128, 448 ], [ 128, 449 ], [ 128, 450 ], [ 128, 451 ], [ 128, 452 ], [ 128, 453 ],
[ 128, 454 ], [ 128, 455 ], [ 128, 541 ], [ 128, 543 ], [ 128, 568 ], [ 128, 570 ],
[ 128, 579 ], [ 128, 581 ], [ 128, 626 ], [ 128, 627 ], [ 128, 629 ], [ 128, 667 ],
[ 128, 668 ], [ 128, 670 ], [ 128, 675 ], [ 128, 676 ], [ 128, 678 ], [ 128, 691 ],
[ 128, 692 ], [ 128, 693 ], [ 128, 695 ], [ 128, 703 ], [ 128, 704 ], [ 128, 705 ],
[ 128, 707 ], [ 128, 724 ], [ 128, 725 ], [ 128, 727 ], [ 128, 950 ], [ 128, 951 ],
[ 128, 952 ], [ 128, 975 ], [ 128, 976 ], [ 128, 977 ], [ 128, 982 ], [ 128, 983 ],
[ 128, 987 ], [ 128, 1345 ], [ 128, 1346 ], [ 128, 1347 ], [ 128, 1348 ],
[ 128, 1349 ], [ 128, 1350 ], [ 128, 1351 ], [ 128, 1352 ], [ 128, 1353 ],
[ 128, 1354 ], [ 128, 1355 ], [ 128, 1356 ], [ 128, 1357 ], [ 128, 1358 ],
[ 128, 1359 ], [ 128, 1360 ], [ 128, 1361 ], [ 128, 1362 ], [ 128, 1363 ],
[ 128, 1364 ], [ 128, 1365 ], [ 128, 1366 ], [ 128, 1367 ], [ 128, 1368 ],
[ 128, 1369 ], [ 128, 1370 ], [ 128, 1371 ], [ 128, 1372 ], [ 128, 1373 ],
[ 128, 1374 ], [ 128, 1375 ], [ 128, 1376 ], [ 128, 1377 ], [ 128, 1378 ],
[ 128, 1379 ], [ 128, 1380 ], [ 128, 1381 ], [ 128, 1382 ], [ 128, 1383 ],
[ 128, 1384 ], [ 128, 1385 ], [ 128, 1386 ], [ 128, 1387 ], [ 128, 1388 ],
[ 128, 1389 ], [ 128, 1390 ], [ 128, 1391 ], [ 128, 1392 ], [ 128, 1393 ],
[ 128, 1394 ], [ 128, 1395 ], [ 128, 1396 ], [ 128, 1397 ], [ 128, 1398 ],
[ 128, 1399 ], [ 128, 1544 ], [ 128, 1545 ], [ 128, 1546 ], [ 128, 1547 ],
[ 128, 1548 ], [ 128, 1549 ], [ 128, 1550 ], [ 128, 1551 ], [ 128, 1552 ],
[ 128, 1553 ], [ 128, 1554 ], [ 128, 1555 ], [ 128, 1556 ], [ 128, 1557 ],
[ 128, 1558 ], [ 128, 1559 ], [ 128, 1560 ], [ 128, 1561 ], [ 128, 1562 ],
[ 128, 1563 ], [ 128, 1564 ], [ 128, 1565 ], [ 128, 1566 ], [ 128, 1567 ],
[ 128, 1568 ], [ 128, 1569 ], [ 128, 1570 ], [ 128, 1571 ], [ 128, 1572 ],
[ 128, 1573 ], [ 128, 1574 ], [ 128, 1575 ], [ 128, 1576 ], [ 128, 1577 ],
[ 128, 1783 ], [ 128, 1784 ], [ 128, 1785 ], [ 128, 1786 ], [ 128, 1864 ],
[ 128, 1865 ], [ 128, 1866 ], [ 128, 1867 ], [ 128, 1880 ], [ 128, 1881 ],
[ 128, 1882 ], [ 128, 1893 ], [ 128, 1894 ], [ 128, 1903 ], [ 128, 1904 ],
[ 128, 1924 ], [ 128, 1925 ], [ 128, 1926 ], [ 128, 1927 ], [ 128, 1928 ],
[ 128, 1929 ], [ 128, 1945 ], [ 128, 1946 ], [ 128, 1947 ], [ 128, 1948 ],
[ 128, 1949 ], [ 128, 1950 ], [ 128, 1951 ], [ 128, 1966 ], [ 128, 1967 ],
[ 128, 1968 ], [ 128, 1969 ], [ 128, 1970 ], [ 128, 1971 ], [ 128, 1972 ],
[ 128, 1983 ], [ 128, 1984 ], [ 128, 1985 ], [ 128, 1986 ], [ 128, 1987 ],
[ 128, 1988 ] ]
gap> L2;
[ [ 128, 287 ], [ 128, 288 ], [ 128, 290 ], [ 128, 568 ], [ 128, 579 ], [ 128, 667 ],
[ 128, 668 ], [ 128, 670 ], [ 128, 676 ], [ 128, 692 ], [128, 693 ], [ 128, 703 ],
[ 128, 704 ], [ 128, 725 ], [ 128, 1375 ], [ 128, 1376 ], [ 128, 1377 ],
[ 128, 1547 ], [ 128, 1549 ], [ 128, 1576 ] ]
```

LISTING 6. 上面列出的 L1 和 L2 的输出

然后可以通过以下函数计算实际的 $SK_1(\mathbb{Z}_2\pi)$。

```
SK1:=函数(G)
局部同态_从_SC_到_G, SC, K, Comm_SC, List_of_换位子, s1, s2, h, SC_b,
K_b, iso; 同态_从_SC_到_G:=Schur 覆盖满同态(G); SC_b:=源(hom_from_
SC_to_G); K_b:=核(hom_from_SC_to_G); iso:=置换群同构( SC_b ); SC:= 像
( iso ); K:=像( iso , K_b);
```

```
Comm_SC：=换位子子群(SC,SC)；List_of_换位子：=[]；对于 SC 中的
s1，执行 对于 SC 中的 s2，执行 h：=s1*s2*(s1^(-1))*(s2^(-1))；如果
h 不在 List_of_换位子 中且（h 在 K 中），则将 h 添加到 List_of_换位
子 中；fi；od；od；返回 群标识(交集(Comm_SC,K)/群(List_of_换位
子))；结束；；
```

Listing 7. 计算给定群的 $SK_1(\mathbb{Z}_2\pi)$ 的函数 π

Appendix C. Some GAP code to test Conjecture 6.1

```
LoadPackage("HAP"); 对于 n 属于 [2,4,8,16,32]，执行 for i in [1..
NumberSmallGroups( n )] do G:=SmallGroup(n,i); if IsAbelian(G) thencontinue;
fi; Sb_G:=List(ConjugacyClassesSubgroups(G), Representative); Normal_Sb_G:=
Filtered(Sb_G, x -> IsNormal(G,x)); Cyclic_Quo:=Filtered(Normal_Sb_G, x ->
IsCyclic(G/x)); conj_G:=List(ConjugacyClasses(G),Representative); for N in Cyclic_
Quo do if Size(G)<4*Size(N)then continue; fi; W:=Filtered(Cyclic_Quo, x ->
IsSubgroup(x,N)and Size(G)=2*Size(x))[1]; T:=Filtered(Cyclic_Quo, x ->
IsSubgroup(x,N)and Size(x)=2*Size(N))[1]; p:=
NaturalHomomorphismByNormalSubgroup(G,N); G_N:=Image(p); poi:=
GroupHomomorphismByFunction(W,G_N,x->Image(p,x));; H_2_poi:=
GroupHomology(poi,2,2); if Size(Image(H_2_poi))=1 then continue; fi; H_4_poi:=
GroupHomology(poi,4,2); if Size(Image(H_4_poi))>1 then continue; fi; H_4_p:=
GroupHomology(p,4,2); if Size(Image(H_4_p))=1 then continue; fi; conj_cl:=
Filtered(conj_G,x -> (x in T) and not(x in N)); Print("\n","Asequence N < T <=
W < G = SG[",n,",",i,"]", " that satisfy hypothesis of conjecture is \n", [
N,T,W,G] ,"\n", "For this sequence the number of conjugacy classes in T-N is ",
Size(conj_cl),"\n", "They are represented by the elements: ", conj_cl,"\n"); od; od;
od;
```

Listing 8. 用于寻找满足该猜想假设的例子的代码。

上面的 GAP 代码表明，包含这种递增序列的最小群是 $SG[32,8]$、$SG[64,13]$ 和 $SG[64,14]$。在这些群中，每个这样的子群递增序列 $T-N$ 都具有奇数个 π-共轭类。然而，对于这些群而言，这并不是关于 κ_4' 的新信息，因为 $H^1(\mathrm{Wh}'(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)) = 0$。

References

[1] S. E. Cappell and J. L. Shaneson, 《闭流形渗流问题的一个反例》, 《代数拓扑》, 奥胡斯1978（奥胡斯大学奥胡斯研讨会论文集，1978）, 《数学讲义》, 第763卷, Springer, 柏林, 1979年, 第627–634页。[2] F. T. Farrell and L. E. Jones, 《代数 K理论中的同构猜想》, 《美国数学会杂志》6（1993）, 249–297。[3] D. J. Green and S. A. King, 《所有阶为128的群的上同调环的计算》, 《代数杂志》325（2011）, 352–363。[4] I. Hambleton, R. J. Milgram, L. Taylor, and B. Williams, 《有限基本群下的手术》, 《伦敦数学学会会刊》（第3辑）56（1988）, 349–379。[5] I. Hambleton, L. Taylor, and B. Williams, 《 K理论与 L理论的检测定理》, 《纯粹与应用代数杂志》63（1990）, 247–299。[6] I. Hambleton, 《闭流形上的手术障碍与惯性子群》, 《数学论坛》24（2012）, 911–929。[7] I. Hambleton and E. K. Pedersen, 《识别 K理论和 L理论中的组装映射》, 《数学年刊》328（2004）, 27–57。[8] I. Hambleton and L. R. Taylor, 《有限群手术障碍群计算指南》, 《手术理论综述》第1卷, 《数学年刊研究丛书》第145卷, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 2000年, 第225–274页。[9] D. Kasprowski, J. Nicholson, and S. Vesel´a, 《4维流形上的稳定等价关系》, 2024年。[10] W. L¨uck, 《组装映射》, 《同伦论手册》, CRC出版社/Chapman Hall数学手册丛书, CRC出版社, 博卡拉顿, 佛罗里达州, [2020] ©2020年, 第851–890页。[11] R. J. Milgram and A. Ranicki, 《非单连通手术问题的一些乘积公式》, 《美国数学会汇刊》297（1986）, 383–413。[12] R. J. Milgram and R. Oliver, $SK_1(\hat{}\mathrm{Z}_2[\pi])$与手术, 《数学论坛》2（1990）, 51–72。[13] R. Oliver, SK_1 有限群环的理论。II, 《斯堪的纳维亚数学杂志》47（1980）, 195–231。[14] , 《有限群的怀特海德群》, 《伦敦数学会讲义系列》第132卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1988年。[15] J. Pakianathan and E. Yal␣cın, 《博克斯坦闭2群扩张与二次映射的上同调》, 《代数杂志》357（2012）, 34–60。[16] F. Quinn, 《手术的几何表述》, 《流形拓扑学》（佐治亚大学雅典分校研究所会议论文集，佐治亚州雅典，1969年）, Markham Publishing Co., 伊利诺伊州芝加哥, 1970年, 第500–511页。[17] A. A. Ranicki, 《手术代数理论与拓扑流形》, 《剑桥数学专著》第102卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1992年。[18] A. Ranicki, 《手术代数理论中的正合列》, 《数学札记》第26卷, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州; 东京大学出版社, 东京, 1981年。[19] D. J. S. Robinson, 《群论教程》, 《数学研究生教材》第80卷, Springer-Verlag, 纽约, 1993年。[20] E. Stein, 《球面上仅有一个不动点的光滑作用》, 《美国数学会通报》82（1976）, 49–50。[21] L. R. Taylor and E. B. Williams, 《手术空间：公式与结构》, 《代数拓扑》, 滑铁卢1978（滑铁卢大学滑铁卢会议论文集，安大略省滑铁卢，1978）, Springer, 柏林, 1979年, 第170–195页。[22] , 《闭流形上的手术》, 预印本, 1980年。

[23] C. T. C. Wall, 《紧流形上的手术》，伦敦数学学会专著，第1号，学术出版社，伦敦—纽约，1970年。[24] , 厄米形式分类。*V.* 全局环，《数学发明》**23** （1974），261–288。[25] ，厄米形式分类。*VI.* 群环，《数学年刊》（第2辑）**103** （1976），1–80。[26] ,手术障碍公式，《拓扑学》**15** （1976），189–210。[27] S. Weinberger，《存在具有无限渗流的有限表示群》，《杜克数学杂志》**49** （1982），1129–1133。

Department of Mathematics, McMaster University, Hamilton, Ontario L8S 4K1, Canada电子邮箱地址: hambleton@mcmaster.ca

Department of Mathematics, Bilkent University, Ankara, Turkey 06800电子邮箱地址: unluo@fen.bilkent.edu.tr