arXiv:2602.05005v1 [math.NA] 4 Feb 2026

利用利普曼–施温格方程的几何贴合伽辽金方法研究分形非均匀体的声散射

J.Bannister[a],D. P. Hewett[a],A. Gibbs[a][a]伦敦大学学院数学系，英国伦敦

2026年2月6日

摘要

我们提出并分析了一种用于 $\mathbb{R}^n$,$n = 2$,3维时谐声散射的数值方法，研究对象是一类具有分形边界的非均匀体（可穿透散射体）。该方法基于利普曼–施温格体积分方程的Galerkin离散化，在几何相容网格上采用不连续分片多项式逼近空间；网格由自身具有分形边界的单元构成。首先，我们针对完全任意的非均匀体（对非均匀体边界或网格单元边界均不作正则性假设），为该方法的 h版和 p版提供半离散适定性分析与误差分析。我们证明了积分方程解的收敛估计，以及散射场和远场模式计算等线性泛函的超收敛估计，并阐明非均匀体边界的正则性和折射率的正则性如何影响所预言的收敛速率。随后，我们专门研究非均匀体为“n-吸引子”的情形，即满足开集条件且具有非空内部的迭代函数系统的分形吸引子，并说明如何利用非均匀体的自相似性生成几何相容网格。对于采用分片常数逼近的 h版，我们还给出了奇异求积公式，并通过全离散误差分析加以论证，从而使该方法能够实际实现。我们给出了二维算例的数值结果，验证了理论结果，并表明，与以较光滑的预分形近似替代分形非均匀体的同类方法相比，我们的方法精度显著更高。

关键词： 波散射、利普曼–施温格方程、体积积分方程 n, 分形、迭代函数系统

数学主题分类（2020年）： 28A80,45A05,65R20

1 引言

对一个非均匀体的散射进行模拟，是计算波传播中的标准问题。非均匀体是空间中的一个紧致区域，其折射率不同于均匀背景介质。以往的大多数研究（例如 [29, 58, 79, 78, 24, 12, 47, 32, 3, 40, 45, 4]）都假设非均匀体的边界光滑，或至少分段光滑。然而，在实际应用中，常会遇到边界极不光滑的非均匀体，其几何结构复杂且具有多尺度特征，用分形来建模可能更为准确。大气物理学中一个推动我们开展这项工作的具体例子，是云中冰晶对电磁辐射的散射。了解这一现象，对于通过成像方法确定云的组成，以及估算气候建模中的地球辐射平衡都至关重要 [9]。在这里，一项主要的计算挑战是模拟以下对象的散射：

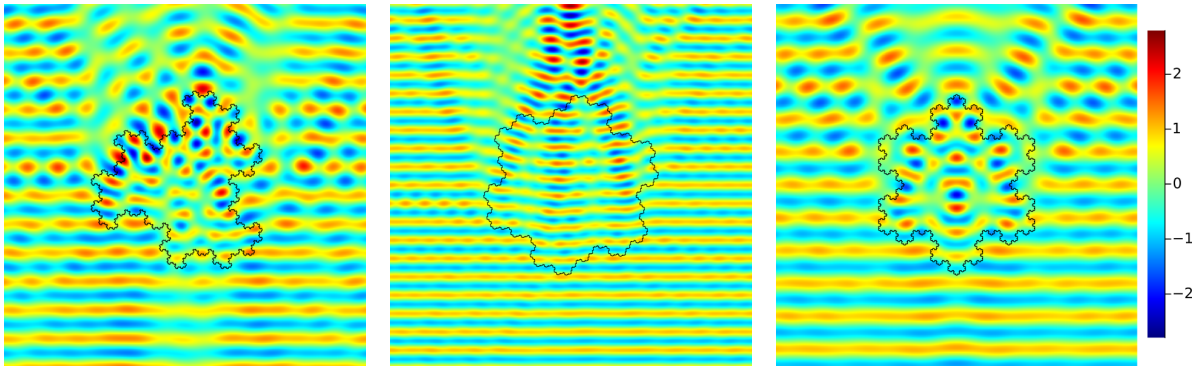


图 1：平面波被 Fudgeflake、Gosper Island 和科赫雪花散射，其中每个非均匀体上的折射率均为常数。详情见 §6。

大型冰晶聚集体，它们被观察到呈现出极其复杂的分形状形状 [77, 25, 72]。

作为迈向此类应用的第一步，本文提出并分析一种用于 $\mathbb{R}^n$、 $n = 2$，3 中时谐声学散射的数值方法，该散射由具有分形边界的非均匀体引起。我们所考虑的问题是求一个散射场 u^s ，使其满足外向 Sommerfeld辐射条件和非齐次亥姆霍兹方程

$$\Delta u^s + k^2(1 + \mathfrak{m})u^s = -f \tag{1}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中，其中 $k > 0$ 为波数， f 为紧支撑源项（与入射波相关）， $\mathfrak{m}$ 为折射率扰动；我们假设该扰动有界，且支撑于一个紧集

$$K := \operatorname{supp} \mathfrak{m}, \tag{2}$$

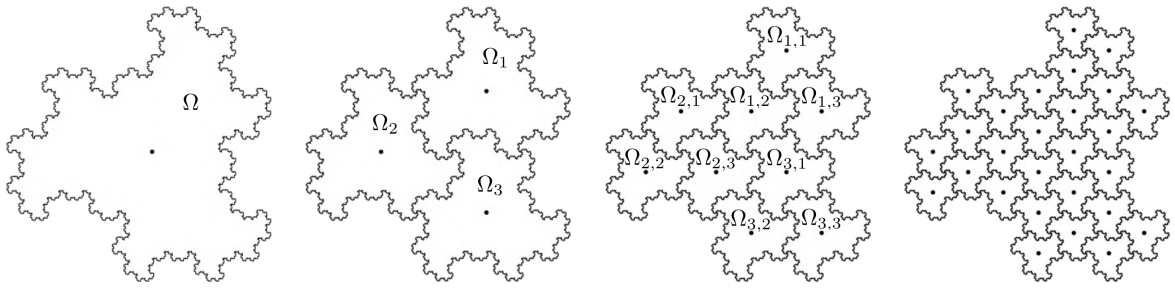
我们将其称为非均匀体。这是可穿透障碍物声散射的标准模型 [29, 第 8]，章；在二维情况下，它还可用于模拟具有某种极化 [60, 注 2.5]的类似电磁散射问题。

我们的方法基于将式 (1) 按标准方式重新表述为体积分方程，这通常被称为利普曼–施温格方程（LSE）——例如参见 [58, 30]和 [29, 第 8 节2], 以及下文的式 (13)–(14)。近年来，人们开发了许多高效的 LSE求解器（例如 [78, 24, 12, 47, 32, 3, 40, 45, 4]），其基础分别是 Galerkin、配置法和 Nystr¨om 离散化。然而，这些方法都假设 $\mathfrak{m}$ 要么是整体光滑的，要么是在光滑或分片光滑界面上不连续。相比之下，我们的方法能够高效处理一类具有分形边界的非均匀体。

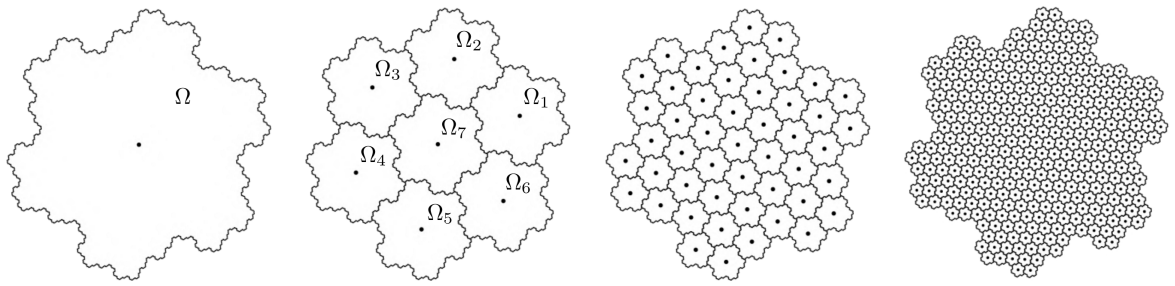
作为我们所考虑问题类型的示例，图 1 展示了使用我们的方法计算得到的总场图：入射平面波在 $\mathbb{R}^2$ 中被 Fudgeflake、Gosper Island 和科赫雪花散射。这三个对象都具有豪斯多夫维数严格介于 1 和 2 之间的分形边界（详情见 §5 和 §6）。在这些图中， $\mathfrak{m}$ 在非均匀体 K上取非零常数值，这意味着总折射率 $1 + \mathfrak{m}$ 会在一条分形曲线上发生不连续跳变。

我们的方法基于 LSE 的 Galerkin离散化，在几何相容网格上使用不连续分片多项式逼近空间，例如图2所示的网格。我们所说的“几何相容”，是指非均匀体的分形边界由网格精确捕捉，不涉及任何几何近似。这必然需要使用具有分形边界的网格单元。

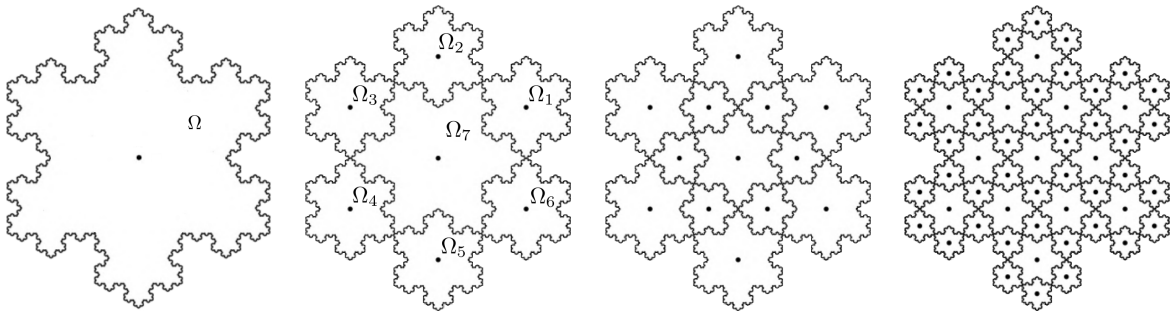
我们考虑几何相容网格的动机，是为了避免其他方法所产生的与几何相关的近似误差。图 3 以 K 科赫雪花为例展示了两种这样的替代方法。在图 3(a) 中，我们展示了一种“非拟合”方法，其中 K 被嵌入一个包围盒中，并使用均匀笛卡尔网格对该包围盒进行剖分。许多体积积分方程求解器（例如 [78, 40, 83, 2, 57, 74, 36, 35, 44]）以及针对类似电磁问题的所谓离散偶极近似



(a) Fudgeflake 的均匀网格



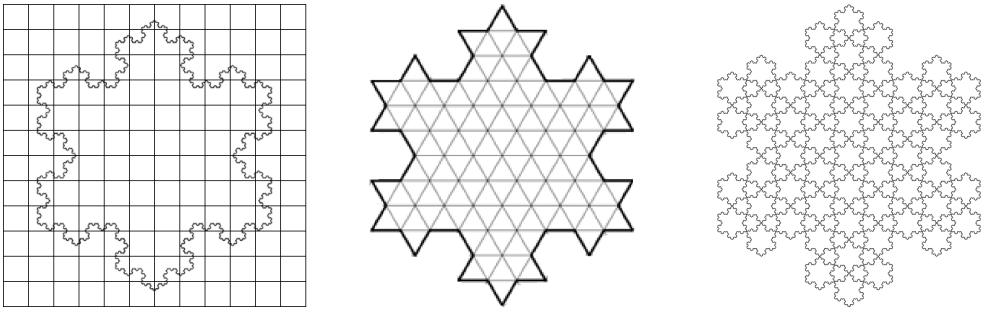
(b) Gosper Island 的均匀网格。



(c) 科赫雪花的拟一致网格。

图2：Fudgeflake、Gosper Island 和科赫雪花的几何相容网格示例——详情见§5。在 (a) 和 (b) 中，网格是均匀的，因为相应的迭代函数系统是齐次的（所有相似变换具有相同的压缩因子）；而在 (c) 中，网格是拟一致的。

（DDA）方法都采用了这种方法， [39, 66, 84], 因为它能够利用基于快速傅里叶变换的矩阵向量乘积，实现快速求解器。然而，由于网格不符合 ∂K 的几何形状，因此在与 ∂K 发生非平凡相交的网格单元上进行精确数值求积可能颇具挑战。即使 ∂K 是光滑的，也会出现这一问题；而当 ∂K 为分形时，问题尤其严重，因为随着 $h \to 0$ 的增大，此类网格单元的数量增长速度会快于光滑情形（参见例如科赫雪花情形的[7, 方程 (3.7)] ）。在图 3(b) 中，我们展示了一种“半拟合”方法，其中 K 由一个多边形“预分形”近似（即图 4 所示标准预分形近似序列中的第三个），并使用三角形单元进行剖分，网格宽度 h与预分形中的最短边长相当。在某些情况下（包括图 3(b) 所示的情形），仍然可以在此类网格上构造基于快速傅里叶变换的求解器（参见例如 [8]）。然而，以这种方式截断 ∂K 的分形几何，会导致比用多边形近似光滑区域时更严重的解误差；其原因同样在于∂K的分形性。特别是，这意味着 K 与其多边形近似之间的集合差的体积通常随着 $h \to 0$ 的增大而比光滑情形衰减得更慢（参见下文附录A中科赫雪花情形的公式 (194)）。最后，在图 3(c) 中，作为对比，我们展示了本文采用的“拟合”或“几何相容”策略，其中 K 被精确地剖分，不对 ∂K作任何近似，使用



(a) 包围盒　　(b) 预分形　　(c) 几何相容

图3：科赫雪花的不同离散化。本文研究的是(c)中的“几何相容”方法，采用含有分形单元的网格。

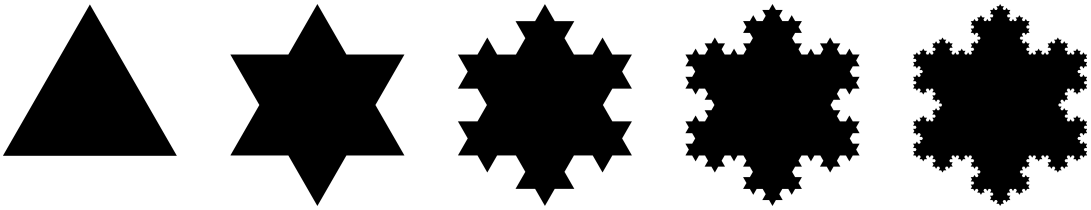


图4：科赫雪花的前五个预分形近似。

一种由具有分形边界的单元构成的准均匀网格。这种方法不会产生前两种方法中的几何近似误差，因此人们可能会认为它能提供更准确的近似。本文的一项关键成果是通过理论和数值研究证明，事实确实如此。不过，读者可能会合理地追问：实际中如何生成此类网格，以及如何在其上进行精确的数值求积。本文的另一项关键成果是证明，对于某一类分形非均匀体（包括图1和图2所示的那些），可以构造此类网格并在其上实施数值求积，使我们的方法处理分形非均匀体时达到的精度，基本上与使用经典单纯形几何相容网格离散化多边形/多面体非均匀体时所能达到的精度相同。

本文概述如下。§2 中我们介绍问题表述，并讨论适定性和解的正则性方面的基本问题。具体而言，在 §2.1 中，我们证明 (1) 的适定性，并回顾其作为适定的利普曼–施温格方程的等价重述。对于光滑的 $\mathfrak{m}$ 和/或光滑的 K，这是经典结果；我们在此的创新贡献是阐明，这些经典结果对于本质上任意的$\mathfrak{m}$ 和 K同样成立。在 §2.2 中，我们证明 LSE 在有界区域上的限制是适定的；在 §2.3 中，我们阐明相关积分算子的映射性质如何取决于 $\mathfrak{m}$ 和 K的正则性。在 §2.4 中，我们讨论当 (1) 对散射问题建模时出现的若干简化。

在 §3 中，我们为受限 LSE 引入伽辽金方法，并从抽象层面进行分析。在 §3.1 中，我们对该方法进行半离散分析，适用于完全任意的 K以及完全任意的几何相容网格。我们考察h阶和 p阶收敛，并利用近期在 [46] 中提出的 h显式和 p显式分片多项式逼近结果，证明积分方程解的收敛估计，以及散射场和远场模式取值的超收敛估计；其收敛速率明确取决于 $\mathfrak{m}$和 K的正则性。在 §3.3 中，我们为本方法的全离散分析提供一个框架，只要实现时能采用精度足够高的求积规则，该框架便适用。

在 §4 中，我们进一步专门讨论 K 属于某一类紧集的情形，我们将其称为“n-吸引子”（沿用 [16] 的说法）。如下文定义 4.4 所述，若一个紧集的豪斯多夫维数为 n，且它是满足开集条件的迭代函数系统（IFS）的吸引子，则称其为 n-吸引子。关于 IFS 吸引子的基础理论

由 [48] 建立， [62], 中可以找到许多例子，其中包括图 1 所示的三个例子。这些集合通常具有分形边界，并且集合本身具有一定的自相似性，即它们等于有限个更小的相似副本的并集。在 §4.1 中，我们将展示如何利用这种自相似性构造准一致的几何相容网格，如图 2 所示；这些网格通过采用自身具有分形边界的单元，完整地刻画 K 的几何形状。在注释 4.8 中我们指出，当 $\mathfrak{m}$ 并非整体光滑时，与图 3(a) 所示的“包围盒”方法相比，我们的几何相容方法在散射场和远场方向图的计算中能实现更高阶的半离散超收敛。在 §4.2 中，我们将展示如何进一步利用自相似性，结合近期在 [37, 38] 中提出的结果，为几何相容网格上的奇异积分推导精确的求积规则。为简便起见，本节仅讨论分片常数近似，以及 $\mathfrak{m}$ 在 K 上为常数的情形。在 §4.3 中，我们将对该方法进行全离散误差分析；本文的主要结果定理 4.23 给出了求积参数所需满足的条件，以保证全离散解以与半离散解相同的速率收敛。

在 §5 中，我们详细介绍图 1 所示的三个算例；在 §6 中，我们报告这些算例的数值结果，以验证我们的理论分析，并表明与图 3(b) 所示的类似基于预分形的方法相比，我们的方法可显著降低误差。在附录A中，我们对预分形方法进行半离散误差分析；在附录B中，我们汇总了一些基本的几何引理。

在本引言的结尾，我们指出，对具有分形边界/界面的区域上的偏微分方程进行分析和数值求解是一个十分活跃的研究领域。近期有许多研究涉及泊松方程 [1, 81, 51, 18, 17, 54, 53],亥姆霍兹方程 [8, 23, 21], 修正亥姆霍兹方程 [28], 热方程 [55, 52, 20],斯托克斯方程 [19, 56] 静磁问题 [31], 的基于预分形的近似，以及拉普拉斯算子的谱问题 [64, 63]。本文采用的几何相容方法建立在近期发表于 [15, 14, 16] 的相关工作之上，该工作研究了亥姆霍兹方程狄利克雷问题的数值求解。我们还提及近期一项关于分形上的高阶求积公式的相关研究 [49] ；该研究补充了文献 [37, 38], 的结果，我们预计它将与本方法在较高多项式次数下的实际实现相关（$p \geq 1$）。最后，我们指出，近期已有研究探讨了非利普希茨延拓域中透射问题的变分公式 [26], ，并以更早的相关工作 [27] 为基础。

2 问题表述、适定性与正则性

本节定义全空间问题（FSP），并证明其适定性以及它与利普曼–施温格方程（LSE）的等价性。对于光滑或分段光滑的折射率，这些结果已广为人知（例如参见 [29, §8]）；本文旨在阐明，对于支撑在任意紧支撑非均匀体中的任意有界折射率，这些结果实际上仍然成立。随后，我们考虑将 LSE 限制在一个有界集合上的情形，并研究折射率及其支撑的正则性如何影响所得积分算子及其伴随算子的映射性质。

全文中，我们采用以下基本假设：

$$n = 2, 3, \quad k > 0, \quad f \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n), \quad \text{and } \mathfrak{m} \in L^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n).$$

我们还回顾一下记号 $K := \operatorname{supp} \mathfrak{m}$，其中 $\operatorname{supp} \mathfrak{m}$ 表示 $\mathfrak{m}$的本质支撑。我们的适定性结果将在以下附加的标准假设下陈述： $\Im[\mathfrak{m}(x)] \geq 0$ 对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$成立。为简便起见，我们将其简记为 $\Im[\mathfrak{m}] \geq 0$。对于集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ ，我们用 E° 表示其内部，用 E 表示其闭包，用 ∂E 表示其边界，用 $|E|$ 表示其勒贝格测度（若 E 可测）。

我们的分析是在分数阶 Sobolev 空间的框架下进行的。对于 $s \in \mathbb{R}$ ，我们用$H^s(\mathbb{R}^n)$表示通常的 Bessel 势 Sobolev 空间；它与经典 Sobolev 空间 $W^s_2(\mathbb{R}^n)$（该空间通过弱导数的平方可积性来定义）相一致（范数等价），其中 $s \in \mathbb{N}_0$。特别地， $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$。我们将 $H^s_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$记为具有紧支集的 $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$的集合，并将 $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$记为满足以下条件的广义函数 u 的集合：对每个 $\chi \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$，均有 $\chi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$（拓扑性质参见例如 [67, §2.6]

这些空间）。对于非空开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 以及 $s \geq 0$，我们定义 $H^s(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : u = U|_\Omega$ 对某个 $U \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$成立；这是一个希尔伯特空间，其范数为$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \min \|U\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$，其中最小值取遍所有满足 $U|_\Omega = u$的 $U \in H^s(\mathbb{R}^n)$。当 Ω 为利普希茨域且 $r \in \mathbb{N}_0$ 时，空间 $H^r(\Omega)$与空间 $W^r(\Omega)$相一致（范数等价）；后者由 $L^2(\Omega)$中弱导数的阶数不超过 r 且属于 $L^2(\Omega)$的函数组成。然而，对于非利普希茨域 Ω，空间 $H^r(\Omega)$可能是 $W^r(\Omega)$的真子集 [22, §1.1.1]。

2.1 全空间问题与 Lippmann–Schwinger 方程

定义 2.1（全空间问题（FSP））。求解 $u^s \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，使其满足非齐次亥姆霍兹方程

$$\Delta u^s + k^2(1+\mathfrak{m})u^s = -f, \quad in\ \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

以及 *Sommerfeld*辐射条件（辐射条件）

$$\frac{\partial u^s}{\partial r}(x) - iku^s(x) = o\left(\frac{1}{r^{(n-1)/2}}\right), \quad uniformly\ as\ r := |x| \to \infty. \tag{4}$$

注 2.2。若 u^s 满足（3），则根据标准椭圆正则性结果（例如 *[33, §6.3.1，定理 3]*），有 $u^s \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，因此由 *Sobolev*嵌入定理（回忆 $n = 2, 3$），可得 $u^s \in C^0(\mathbb{R}^n)$。此外，若 $R > 0$使得以原点为中心的开球 B_R同时包含 K和支撑 f，则 $u^s|_{B_R{}^c} \in C^\infty(\overline{B_R{}^c})$，因此可在经典意义下理解 $\partial u^s/\partial r$，并据此施加辐射条件（4）。

注 2.3（利普希茨情形下的传输问题）。设 $K = \Omega$，其中 Ω 是某个有界利普希茨开集$\Omega \subset \mathbb{R}^n$。则根据 *[59,* 引理 *4.19]*，*FSP*（3）-（4）等价于以下传输问题：

$$\begin{aligned} \Delta u^s + k^2(1+\mathfrak{m})u^s &= -f|_\Omega \quad in\ \Omega, \\ \Delta u^s + k^2 u^s &= -f|_{\overline{\Omega}^c} \quad in\ \overline{\Omega}^c, \\ \gamma^+ u^s &= \gamma^- u^s \quad on\ \partial\Omega, \\ \partial_n^+ u^s &= \partial_n^- u^s \quad on\ \partial\Omega, \end{aligned} \tag{5}$$

以及辐射条件 (4)，其中 $\gamma^\pm$ 和 $\partial_n^\pm$分别表示 $\partial\Omega$ 上的外部（+）/内部（−）狄利克雷迹和诺伊曼迹。因此，*FSP* (3)-(4) 将传输问题 (4)-(5) 推广到了非利普希茨非均匀体。

定理 2.4 (全空间问题适定性)。假设 $\Im[\mathfrak{m}] \geq 0$。则存在唯一的$u^s \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 满足 (3)-(4)。

证明。为证明唯一性，假设 u^s 满足 (3)-(4)，其中 $f = 0$，并取足够大的 $R > 0$，使得 supp(m) $\subset B_R$（以原点为中心、半径为 R 的开球）。在 B_R 中应用格林第一恒等式可得 $\langle \partial_n^- u^s, \gamma^- u^s\rangle_{\partial B_R} = \int_{B_R} |\nabla u^s|^2 - k^2(1+\mathfrak{m})|u^s|^2$。由于 u^s 在 ∂B_R 的某个邻域内满足 $\Delta u^s + k^2 u^s = 0$，因此在 ∂B_R上有 $\partial_n^+ u^s = \partial_n^- u^s$ 和$\gamma^+ u^s = \gamma^- u^s$，从而 $\Im[\langle \partial_n^+ u^s, \gamma^+ u^s\rangle_{\partial B_R}] = -k^2 \int_{B_R} \Im[\mathfrak{m}]|u^s|^2 \leq 0$，再由[59, 引理 9.9] $u^s = 0$ 可知 $B_R{}^c$中成立。最后，令 $R' > R$，并注意到 $u^s|_{B_{R'}}$ 属于 $H^1_0(B_{R'})$，在 $B_{R'}$ 中满足 (3)，其中 $f = 0$，且在 $B_{R'} \setminus B_R$ 上为零，因此根据唯一延拓原理（例如，[42, 定理 2.1]），$B_{R'}$中有 $u^s = 0$。因此 $\mathbb{R}^n$上有 $u^s = 0$。

为证明存在性，令 $R > 0$ 满足 B_R 包含 supp(m) 和 supp(f)，并考虑 er 如下问题：求 $u \in H^1(B_R)$，使得

$$a_R(u,v) := \int_{B_R} \nabla u \cdot \overline{\nabla u} - k^2(1+\mathfrak{m})u\overline{v} - \langle T_R\gamma^- u, \gamma^- v\rangle_{\partial B_R} = \int_{B_R} f\overline{v}, \qquad \forall v \in H^1(B_R), \tag{6}$$

其中，T_R：$H^{1/2}(\partial B_R) \to H^{-1/2}(\partial B_R)$ 表示在无穷远处满足辐射条件的 $\Delta u + k^2 u = 0$ 在 $B_R{}^c$ 外部 Dirichlet 问题的狄利克雷到诺伊曼映射，而 $H^{\pm 1/2}(\partial B_R)$

表示标准的边界 Sobolev 空间。仿照 [41, 引理 3.3], 的论证，我们注意到，若 u 满足 (6)，则函数

$$u^{\mathrm{s}} := \begin{cases} u, & \text{on } B_R, \\ U, & \text{on } \overline{B_R}^c, \end{cases} \tag{7}$$

其中， U 表示上述外部 Dirichlet 问题的解，其在 ∂B_R上的 Dirichlet 数据等于 $\gamma^- u$ ，并满足式 (3)–(4)。由柯西-施瓦茨不等式、 T_R ： $H^{1/2}(\partial B_R) \to H^{-1/2}(\partial B_R)$ 的有界性以及 $\mathfrak{m} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$这一事实可知，半双线性型 $a_R(\cdot,\cdot)$在 $H^1(B_R)$上连续。此外，它满足一个 G˚arding 不等式，因为对于 $u \in H^1(B_R)$，由 $\Re[-\langle T_R\gamma^- u, \gamma^- v\rangle_{\partial B_R}] \geq 0$ 这一事实（例如参见 [41, 引理 3.2]）可知

$$\Re[a_R(u,u)] \geq \|\nabla u\|^2_{L^2(B_R)} - k^2\|\Re[1+\mathfrak{m}]\|_{L^\infty(B_R)}\|u\|^2_{L^2(B_R)} \geq \|\nabla u\|^2_{H^1(B_R)} - \beta\|u\|^2_{L^2(B_R)}, \tag{8}$$

其中， $\beta := k^2\|\Re[1+\mathfrak{m}]\|_{L^\infty(B_R)}+1$。型 $a_R(\cdot,\cdot)$也是单射的，因为若 $u \in H^1(B_R)$且对每个 $v \in H^1(B_R)$ 都有 $a_R(u,v) = 0$，那么按式 (7) 定义的 u^{s} 满足式 (3)–(4)，其中 $f = 0$（参见 [41, 引理 2.3]）。因此，由唯一性可知 $u^{\mathrm{s}} = 0$ 在 $\mathbb{R}^n$上成立，从而 $u = u^{\mathrm{s}}|_{B_R} = 0$。最后，由于 $H^1(B_R)$紧嵌入 $L^2(B_R)$，我们可推得式 (6) 存在一个解（例如使用 [71, 定理 5.18]），进而由式 (7)可得式 (3)–(4)的一个解。 □

令 Φ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中亥姆霍兹方程的出射基本解，即

$$\Phi(x,y) := \frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k|x-y|), \quad n=2, \quad \text{and} \quad \Phi(x,y) := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad n=3,$$

其中 $H_0^{(1)}$ 表示第一类 0 阶汉克尔函数。注意，对于 $n = 2,3$， $\Phi(x,\cdot) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$。令 $\mathcal{V}$ 表示由下式定义的声学牛顿势

$$\mathcal{V}\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,y)\psi(y)\,dy, \qquad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{and} \quad \psi \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n). \tag{9}$$

对于任意 $s \in \mathbb{R}$， $\mathcal{V}$ 可延拓为连续算子（参见例如 [59, Cor. 6.5, Eqn (6.10)], 结合 [67,Thm 2.6.7]）

$$\mathcal{V} : H^s_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n) \to H^{s+2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \tag{10}$$

并且（参见例如 [59,p197]）

$$(\Delta + k^2)\mathcal{V}\psi = \mathcal{V}(\Delta + k^2)\psi = -\psi, \qquad \psi \in H^s_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

我们定义 $\mathcal{M}_{\mathfrak{m}} : L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \to L^2_K := \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \mathrm{supp}(u) \subset K\}$ （一个连续算子），其定义为

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{m}}\psi(x) := \mathfrak{m}(x)\psi(x), \qquad \psi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n). \tag{12}$$

以下等价性定理是 [29, 定理 8.3] 的推广。

定理 2.5 (FSP-LSE 等价性)。 若 $u^{\mathrm{s}} \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 满足 *FSP* (3)-(4) ，则$u^{\mathrm{s}} \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$ 以及 u^{s} 满足利普曼–施温格方程（*LSE*）

$$u^{\mathrm{s}} = \mathcal{V}f + k^2\mathcal{V}\mathcal{M}_{\mathfrak{m}}u^{\mathrm{s}}, \tag{13}$$

i.e.

$$u^{\mathrm{s}}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(y) + k^2\mathfrak{m}(y)u^{\mathrm{s}}(y)\big)\,\Phi(x,y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{14}$$

反之，若 $u^{\mathrm{s}} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 满足 *LSE* (13)，则 $u^{\mathrm{s}} \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$ 以及 u^{s}满足 *FSP* (3)-(4)。

证明。 假设 $u^{\mathrm{s}} \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 满足 (3)-(4)。那么， $\Delta u^{\mathrm{s}} + k^s u^{\mathrm{s}} = -f - k^2 \mathfrak{m} u^{\mathrm{s}}$ 作为 $L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$ 中的等式成立；我们已在备注 2.2 中指出， $u^{\mathrm{s}} \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$。因此，取 $R > 0$ 使得 B_R 包含 K 和 $\mathrm{supp}(f)$，在 B_R 中应用格林表示定理（例如参见 [29, 定理 2.1] 以及[29, 定理 8.2]之后的注释，其中论证了 [29, 定理 2.1] 对于 $H^2(B_R)$ 中的单元也成立；这些内容在 [7,定理 2.3.1]中有展开），可得

$$
\begin{aligned}
u^{\mathrm{s}}(x) = &\int_{B_R} \big(f(y) + k^2 \mathfrak{m}(y) u^{\mathrm{s}}(y)\big)\, \Phi(x,y)\, \mathrm{d}y, \\
&- \int_{\partial B_R} \partial^-_{n(y)} u^{\mathrm{s}}\, \gamma^- \Phi(x,y) - \gamma^- u^{\mathrm{s}}\, \partial^-_{n(y)} \Phi(x,y) \mathrm{d}s(y), \qquad x \in B_R.
\end{aligned}
$$

由于 u^{s} 满足辐射条件 (4)，一个标准论证（例如参见 [29, 定理 2.5]）表明，当 $R \to \infty$时，关于 ∂B_R 的积分趋于零，由此得到 (14)。

现在假设 $u^{\mathrm{s}} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 满足 (13)。那么，根据 (10) 和 Sobolev嵌入定理， $u^{\mathrm{s}} \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$；根据 (11)， u^{s} 满足 (3)；而由于 Φ满足辐射条件（例如参见 [59,第 282] 页）， u^{s} 满足 (4)。 □

推论 2.6 (LSE适定性)。 设 $\Im[\mathfrak{m}] \geq 0$。那么，*LSE* (13) 有唯一解 u^{s}，该解与 *FSP* (3)-(4)的唯一解一致。

LSE (13) 可视为一种“直接”的积分方程表述，因为未知量 u^s 是散射场。也可以考虑一种等价的“间接”表述。

命题 2.7 （LSE-ILSE 等价性）。 如果 $u^{\mathrm{s}} \in L^2_{\mathrm{loc}}$（$\mathbb{R}^n$） 满足 *LSE* （13），则$\sigma^{\mathrm{s}} := f + k^2 \mathcal{M}_{\mathfrak{m}} u^{\mathrm{s}} \in L^2_{\mathrm{comp}}$（$\mathbb{R}^n$） 满足间接 *LSE*（*ILSE*）

$$
\sigma^{\mathrm{s}} = f + k^2 \mathcal{M}_{\mathfrak{m}} \mathcal{V} \sigma^{\mathrm{s}}, \tag{15}
$$

and

$$
u^{\mathrm{s}} = \mathcal{V} \sigma^{\mathrm{s}}. \tag{16}
$$

反之，如果 $\sigma^{\mathrm{s}} \in L^2_{\mathrm{comp}}$（$\mathbb{R}^n$）满足 （15），则由（16）定义的 u^{s} 满足 *LSE* （13），以及 $\sigma^{\mathrm{s}} = f + k^2 \mathcal{M}_{\mathfrak{m}} u^{\mathrm{s}}$。

证明。 由直接计算即可得出。 □

2.2 受限 LSE

现在，我们将 LSE（13）和 ILSE（15）限制在有界集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上，作为进行数值离散化的步骤。集合 Ω 可以是例如非均匀体K、其内部，或包含它的更大集合（例如包围盒，参见图 3(a)）。

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界且可测。我们定义限制算子 $|_\Omega : L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \to L^2(\Omega)$（连续算子）：$(u|_\Omega)(x) := u(x)$，其中 $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 且 $x \in \Omega$；并定义零延拓算子 $\mathcal{Z}_\Omega : L^2(\Omega) \to L^2(\mathbb{R}^n)$（有界算子）：

$$
(\mathcal{Z}_\Omega \phi)(x) := \begin{cases} \phi(x), & \text{for } x \in \Omega, \\ 0, & \text{for } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases} \qquad \phi \in L^2(\Omega),
$$

并注意，对于所有 $\phi \in L^2(\Omega)$，$(\mathcal{Z}_\Omega \phi)|_\Omega = \phi$。接着，我们定义 $\mathcal{V}_\Omega : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 和$\mathcal{V}^*_\Omega : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$（均为有界算子）：

$$
\mathcal{V}_\Omega := |_\Omega \circ \mathcal{V} \circ \mathcal{M}_{\mathfrak{m}} \circ \mathcal{Z}_\Omega, \qquad \mathcal{V}^*_\Omega := |_\Omega \circ \mathcal{M}_{\mathfrak{m}} \circ \mathcal{V} \circ \mathcal{Z}_\Omega, \tag{17}
$$

它们的积分表示为

$$
\mathcal{V}_\Omega \phi(x) = \int_\Omega \Phi(x,y) \mathfrak{m}(y) \phi(y)\, \mathrm{d}y, \qquad \mathcal{V}^*_\Omega \phi(x) = \mathfrak{m}(x) \int_\Omega \Phi(x,y) \phi(y)\, \mathrm{d}y,
$$

$\phi \in L^2(\Omega)$。

注意， $\mathcal{V}^*_\Omega$ 是 $\mathcal{V}_\Omega$的伴随算子（相差一个复共轭），具体而言，

$$
(\mathcal{V}_\Omega \phi, \psi) = (\phi, \overline{\mathcal{V}^*_\Omega \overline{\psi}}), \qquad \phi, \psi \in L^2(\Omega). \tag{18}
$$

引理 2.8 ($\mathcal{V}_\Omega$ 和 $\mathcal{V}_\Omega^*$的紧性)。 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界且可测。则$\mathcal{V}_\Omega : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 和 $\mathcal{V}_\Omega^* : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 均为紧算子。

证明。设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是任意一个有界开集，满足 $D \supset \Omega$。则 $\mathcal{V}_\Omega$ 可写为 $\mathcal{V}_\Omega = |_{D\to\Omega} \circ |_D \circ \mathcal{V} \circ \mathcal{M}_\mathfrak{m} \circ \mathcal{Z}_\Omega$，其中 $|_{D\to\Omega}$ 表示从 $L^2(D)$ 到 $L^2(\Omega)$ 的限制算子。复合映射 $\mathcal{V} \circ \mathcal{M}_\mathfrak{m} \circ \mathcal{Z}_\Omega$ 是从 $L^2(\Omega)$ 到 $\to H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 的连续映射，因此根据 [67, 定理 2.6.7(c)] ，对于每个 $\chi \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$，映射 $\phi \mapsto \chi(\mathcal{V}(\mathcal{M}_\mathfrak{m}(\mathcal{Z}_\Omega(\phi))))$ 是从 $L^2(\Omega)$ 到 $\to H^2(\mathbb{R}^n)$ 的有界映射。通过选择满足 $\chi \equiv 1$ 于 D 上的 χ，我们可以得到 $|_D \circ \mathcal{V} \circ \mathcal{M}_\mathfrak{m} \circ \mathcal{Z}_\Omega$ 从 $L^2(\Omega)$ 到 $\to H^2(D)$ 的有界性；而所声称的紧性随即由嵌入 $H^2(D)$ 到 $\subset L^2(D)$ 的紧性（例如参见 [59, 定理 3.27]）以及 $|_{D\to\Omega}$ 的有界性： $L^2(D) \to L^2(\Omega)$ 得出。 $\mathcal{V}_\Omega^*$ 的紧性由伴随性质 (18) 得出。 □

以下命题给出了 LSE 与 ILSE 等价于其限制版本的条件。两个命题均假设 $|K \setminus \Omega| = 0$, 这保证 Ω“足够大”，使得 $\mathfrak{m}$ 由其在 Ω 上的取值所确定，从而特别地

$$\text{if } |K \setminus \Omega| = 0 \text{ then } \mathcal{Z}_\Omega \circ |_\Omega \circ \mathcal{M}_\mathfrak{m} = \mathcal{M}_\mathfrak{m} \circ \mathcal{Z}_\Omega \circ |_\Omega = \mathcal{M}_\mathfrak{m} \text{ on } L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n). \tag{19}$$

此外，若 $|K \setminus \Omega| = 0$，则对某个 $m \in L^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$，我们可以写成 $\mathfrak{m} = m\chi_\Omega$，其中 χ_Ω 是 Ω 的特征函数，这一事实将在 §2.3 中使用（尤其参见 (28)）。

命题 2.9 (LSE-RLSE 等价性). 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界且可测，且$|K \setminus \Omega| = 0$。假设 u^s 满足 *LSE* (13)。则 $\tilde{u} := u^\mathrm{s}|_\Omega$ 满足受限*LSE*（*RLSE*）：

$$(\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}_\Omega)\tilde{u} = \mathcal{V}f|_\Omega. \tag{20}$$

反之，假设 $\tilde{u} \in L^2(\Omega)$ 满足 *RLSE* (20)。则

$$u^\mathrm{s} := \mathcal{V}f + k^2\mathcal{V}(\mathcal{M}_\mathfrak{m}(\mathcal{Z}_\Omega(\tilde{u}))) \tag{21}$$

满足 *LSE* (13) 以及 $u^\mathrm{s}|_\Omega = \tilde{u}$。

证明。 第一个陈述可通过直接计算得到，将 $|_\Omega$ 应用于 (13) 并利用 (19)。对于第二个陈述，将 (21) 限制在 Ω 上并与 (20) 结合，得到 $u^\mathrm{s}|_\Omega = \tilde{u}$。将其与 (21) 和 (19) 结合，证明 u^s 满足 (13)。 □

命题 2.10 (ILSE-RILSE 等价性)。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界且可测，满足$|K \setminus \Omega| = 0$ 以及 $|\operatorname{supp} f \setminus \Omega| = 0$。假设 σ^s 满足 *ILSE* (15)。则 $\sigma := \sigma^\mathrm{s}|_\Omega$满足受限 *ILSE*（*RILSE*）：

$$(\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}_\Omega^*)\sigma = f|_\Omega. \tag{22}$$

反之，假设 $\sigma \in L^2(\Omega)$ 满足 *RILSE* (22)。则

$$\sigma^\mathrm{s} := \mathcal{Z}_\Omega(\sigma) \tag{23}$$

满足 *ILSE* (15) 以及 $\sigma^\mathrm{s}|_\Omega = \sigma$。

证明。 第一个陈述可通过直接计算得到，注意到关于 Ω 的假设蕴含 $\mathcal{Z}_\Omega(\sigma^\mathrm{s}|_\Omega) = \sigma^\mathrm{s}$。对于第二个陈述，我们首先注意到 $\sigma^\mathrm{s}|_\Omega = (\mathcal{Z}_\Omega\sigma)|_\Omega = \sigma$。然后，将 $\mathcal{Z}_\Omega$ 应用于 (22) 并利用 (19)，以及 $\mathcal{Z}_\Omega(f|_\Omega) = f$ 这一事实（这是因为$|\operatorname{supp} f \setminus \Omega| = 0$），即可得到 (15)。 □

推论 2.11 （RLSE 和 RILSE 的适定性）。 设 $\Im[\mathfrak{m}] \geq 0$。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界 *ed* 且关于 $|K \setminus \Omega| = 0$ 可测。那么对任意 $g, \tau \in L^2(\Omega)$，方程

$$(\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}_\Omega)u = g \quad \textit{and} \quad (\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}_\Omega^*)\sigma = \tau \tag{24}$$

都存在唯一解 $u, \sigma \in L^2(\Omega)$。

证明。 根据引理 2.8，算子 $(\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}_\Omega)$ 是零指标的 Fredholm 算子，因此要证明它可逆，只需证明它是单射。为此，假设 $u \in L^2(\Omega)$ 满足带有 $g = 0$ 的式 (24)。那么根据命题 2.9，函数 $u^\mathrm{s} := k^2\mathcal{V}(\mathcal{M}_\mathfrak{m}(\mathcal{Z}_\Omega(u)))$ 满足带有 $f = 0$ 的 LSE (13)，并且 $u^\mathrm{s}|_\Omega = u$。由推论 2.6 可得 $u^\mathrm{s} = 0$，因此 $u = u^\mathrm{s}|_\Omega = 0$ 也成立。利用伴随关系 (18)，可得 $(\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}_\Omega^*)$ 可逆。 □

2.3 解的正则性

§2.1–§2.4 的结果表明，对于一般的 $\mathfrak{m} \in L^\infty_{\mathrm{comp}}$（其中 $K = \operatorname{supp}\mathfrak{m}$ 是一般的紧集），只要 $\Im[\mathfrak{m}] \geq 0$，FSP (3)–(4) 就是适定的。这些结果还表明，在任意满足 $|K \setminus \Omega| = 0$ 的有界可测集 Ω 上，FSP 都可以等价地表述为 RLSE (20)–(21)；若再假设 $|\operatorname{supp} f \setminus \Omega| = 0$，则也可以表述为 RILSE (22)–(23)。现在我们考察，对 $\mathfrak{m}$ 和 Ω 施加额外的正则性假设，会如何影响 FSP、RLSE 和 RILSE 解的光滑性。

我们将用 Sobolev 乘子的语言陈述正则性假设。对于函数 $\tau \in L^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$ 和 $s \in \mathbb{R}$，我们称 τ 是 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 上的 Sobolev 乘子，并记作 $\tau \in \mathfrak{M}(H^s(\mathbb{R}^n))$，如果逐点乘法 $\phi \mapsto \tau\phi$ 定义了一个从 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 到 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子（例如参见 [69, 65]）。一个标准结果（例如参见 [68, 引理 7]）表明

$$\text{if } \ 0 < s < t \ \text{ then } \ \mathfrak{M}(H^t(\mathbb{R}^n)) \subset \mathfrak{M}(H^s(\mathbb{R}^n)). \tag{25}$$

回顾 $\mathfrak{m} \in L^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$，令

$$s_{\mathfrak{m}} := \sup\{s \geq 0 : \mathfrak{m} \in \mathfrak{M}(H^s(\mathbb{R}^n))\} \in [0, \infty]. \tag{26}$$

给定一个有界可测集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，令

$$s_\Omega := \sup\{s \geq 0 : \chi_\Omega \in \mathfrak{M}(H^s(\mathbb{R}^n))\} \in [0, \infty], \tag{27}$$

并且若 $|K \setminus \Omega| = 0$，从而对某个 $m \in L^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$ 有 $\mathfrak{m} = m\chi_\Omega$，令

$$s_{\mathfrak{m},\Omega} := \sup\{s \geq 0 : \mathfrak{m} = m\chi_\Omega \text{ for some } m \in \mathfrak{M}(H^s(\mathbb{R}^n))\} \in [0, \infty]. \tag{28}$$

由 (25)，若 $0 \leq s < s_{\mathfrak{m}}$，则 $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}(H^s(\mathbb{R}^n))$。当 $s_{\mathfrak{m}} < \infty$ 时，无法保证 $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}(H^{s_{\mathfrak{m}}}(\mathbb{R}^n))$；然而，若 $s_{\mathfrak{m}} = 0$，则 $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}(H^{s_{\mathfrak{m}}}(\mathbb{R}^n)) = \mathfrak{M}(L^2(\mathbb{R}^n))$，因为 $\mathfrak{m} \in L^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$。类似地，若 $0 \leq s < s_\Omega$，则 $\chi_\Omega \in \mathfrak{M}(H^s(\mathbb{R}^n))$，而 $\chi_\Omega \in \mathfrak{M}(H^{s_\Omega}(\mathbb{R}^n))$ 未必成立；但若 $s_\Omega = 0$，则必有 $\chi_\Omega \in \mathfrak{M}(H^{s_\Omega}(\mathbb{R}^n)) = \mathfrak{M}(L^2(\mathbb{R}^n))$。类似地，若 $0 \leq s < s_{\mathfrak{m},\Omega}$，则存在 $m \in \mathfrak{M}(H^s(\mathbb{R}^n))$ 使得 $\mathfrak{m} = m\chi_\Omega$；若 $s_{\mathfrak{m},\Omega} < \infty$，则未必存在 $m \in \mathfrak{M}(H^{s_{\mathfrak{m},\Omega}}(\mathbb{R}^n))$ 使得 $\mathfrak{m} = m\chi_\Omega$，但若 $s_{\mathfrak{m},\Omega} = 0$，则必存在 $m \in \mathfrak{M}(H^{s_{\mathfrak{m},\Omega}}(\mathbb{R}^n)) = \mathfrak{M}(L^2(\mathbb{R}^n))$ 使得 $\mathfrak{m} = m\chi_\Omega$（只需取 $m = \mathfrak{m}$）。

注 2.12. 我们来讨论某些情况下 $s_{\mathfrak{m}}$、s_Ω 和 $s_{\mathfrak{m},\Omega}$ 的取值：

(i) 若 $s' \in \mathbb{N}$ 且 $\mathfrak{m} \in C^{s'}\text{-comp}(\mathbb{R}^n)$，则对 $|s| \leq s'$ 有 $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}(H^s(\mathbb{R}^n))$（例如参见 [59, 定理 3.20]），因此 $s_{\mathfrak{m}} \geq s'$，且对任意非空有界可测集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，都有 $s_{\mathfrak{m},\Omega} \geq s'$。*(ii)* 若 $\mathfrak{m} \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$，则 $s_{\mathfrak{m}} = \infty$，且对任意非空有界可测集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，都有 $s_{\mathfrak{m},\Omega} = \infty$。*(iii)* 若 Ω 是非空有界开集，则 $s_\Omega \leq 1/2$，且 $\chi_\Omega \notin \mathfrak{M}(H^{1/2}(\mathbb{R}^n))$。这由 [68, 引理 3.2] 得出（另请参见此前列出的参考文献）。*(iv)* 若 Ω 是非空有界 Lipschitz 开集，则 $s_\Omega = 1/2$；事实上，$\chi_\Omega \in \mathfrak{M}(H^s(\mathbb{R}^n))$ 当且仅当 $|s| < 1/2$（例如参见 [16, 命题 3.2]，其依据是 [76, 命题 5.1 和 5.3]）。在这种情况下，$\chi_\Omega \notin \mathfrak{M}(H^{s_\Omega}(\mathbb{R}^n))$。*(v)* 对任意 $\mathfrak{m} \in L^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$ 及任意非空有界可测集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，都有 $s_{\mathfrak{m},\Omega} \geq s_{\mathfrak{m}}$，因为 $m = \mathfrak{m}$ 是定义 $s_{\mathfrak{m},\Omega}$ 的集合中 m 的一个有效取值。*(vi)* 若对于某个 $m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 且某个非空有界开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，有 $\mathfrak{m} = m\chi_\Omega$，则 $s_{\mathfrak{m}} = s_\Omega$；事实上，$\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}(H^s(\mathbb{R}^n))$ 当且仅当 $\chi_\Omega \in \mathfrak{M}(H^s(\mathbb{R}^n))$。此外，$s_{\mathfrak{m},\Omega} = \infty$。鉴于第 *(iii)* 点，这种情况下 $s_{\mathfrak{m}} < s_{\mathfrak{m},\Omega}$。此外，根据第 *(iv)* 点，若 Ω 是 Lipschitz 开集，则这种情况下 $\mathfrak{m} \notin \mathfrak{M}(H^{s_{\mathfrak{m}}}(\mathbb{R}^n))$。*(vii)* 设 $\mathfrak{m}$ 和 Ω 如第 *(vi)* 点所述，并设 Ω' 是一个有界开集，满足 $\Omega \subset \Omega'$。则 $s_{\mathfrak{m},\Omega'} = s_{\mathfrak{m}} = s_\Omega \in [0, 1/2]$；然而，正如第 *(vi)* 点所述，$s_{\mathfrak{m},\Omega} = \infty$。 —

下文将在某些涉及符号 $s^-_{\mathfrak{m}}$ 的命题 P 成立这一假设下证明结果，例如“$s \leq s^-_{\mathfrak{m}}$”或“$u \in H^{s^-_{\mathfrak{m}}}(\mathbb{R}^n)$”。这表示：若将 P 中的 $s^-_{\mathfrak{m}}$ 替换为任意 $s \in [0, s_{\mathfrak{m}})$，则该结果成立；并且，若 $s_{\mathfrak{m}} < \infty$ 和 $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}(H^{s_{\mathfrak{m}}}(\mathbb{R}^n))$ 成立，则将 P 中的 $s^-_{\mathfrak{m}}$ 替换为 $s_{\mathfrak{m}}$ 时，该结果也成立。涉及符号 s^-_Ω 和 $s^-_{\mathfrak{m},\Omega}$ 的命题也应作类似理解。

以下引理是 (10) 和 (12) 的直接推论。

引理 2.13 （$\mathcal{V}\circ\mathcal{M}_{\mathfrak{m}}$ 的映射性质）。 设 $s\geq 0$。则 $\mathcal{V}\circ\mathcal{M}_{\mathfrak{m}}$： $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\to H^{\min(s,s^-_{\mathfrak{m}})+2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$是连续的。

因此，我们得到以下基本正则性结果。

引理 2.14 (FSP/LSE解的正则性)。 设 $0\leq s\leq s^-_{\mathfrak{m}}$, $f\in H^s_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$, $\Im[\mathfrak{m}]\geq 0$. 那么，*FSP* (3)-(4) （等价地，*LSE* (13)）的解满足 $u^s\in H^{s+2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$。

证明。 $s=0$ 的情形已由定理 2.4、定理 2.5 和推论 2.6 涵盖。 $s>0$ 的情形可通过反复应用 (13) 和引理 2.13 得出。 □

现在我们证明 Ω 为有界开集时算子 $\mathcal{V}_\Omega$ 和 $\mathcal{V}^*_\Omega$ 的映射性质。 $\mathcal{V}^*_\Omega$ 的性质与 $\mathcal{V}_\Omega$ 不同，因为体势和乘法算子的应用顺序相反。由于 $\mathcal{V}_\Omega$和 $\mathcal{V}^*_\Omega$ 定义在 $L^2(\Omega)$上，因此考察它们在空间$H^s(\Omega)\subset L^2(\Omega)$（其中 $s\geq 0$）中的映射性质是很自然的。我们还将考察 $\mathcal{V}^*_\Omega$ 在以下空间中的映射性质

$$H^s_{\mathrm{ze}}(\Omega):=\{\phi\in H^s(\Omega):\mathcal{Z}_\Omega(\phi)\in H^s(\mathbb{R}^n)\},\quad s\geq 0,$$

配备范数

$$\|\phi\|_{H^s_{\mathrm{ze}}(\Omega)}:=\|\mathcal{Z}_\Omega(\phi)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)},\quad \phi\in H^s_{\mathrm{ze}}(\Omega).$$

我们注意到， $H^s_{\mathrm{ze}}(\Omega)\subset H^s(\Omega)$ 是一个希尔伯特空间，与闭子空间 $\mathring{H}^s(\Omega):=\{u\in H^s(\mathbb{R}^n):\ u=0$ 在 Ω 上几乎处处成立$^c\}$ of $H^s(\mathbb{R}^n)$ 酉同构（例如参见 [22, 注 3.1]），并且$H^s_{\mathrm{ze}}(\Omega)$ 连续嵌入于 $H^s(\Omega)$，且

$$\|\phi\|_{H^s(\Omega)}\leq\|\phi\|_{H^s_{\mathrm{ze}}(\Omega)},\qquad \phi\in H^s_{\mathrm{ze}}(\Omega). \tag{29}$$

我们注意到， $H^s_{\mathrm{ze}}(\Omega)=H^s(\Omega)$（范数等价）当且仅当 $\mathcal{Z}_\Omega: H^s(\Omega)\to H^s(\mathbb{R}^n)$ 有界，而这当且仅当 $\chi_\Omega\in\mathfrak{M}(H^s(\mathbb{R}^n))$。后一等价关系成立，是因为对于 $u\in L^2(\mathbb{R}^n)$， $\chi_\Omega u=\mathcal{Z}_\Omega(u|_\Omega)$，并且对于 $\phi\in H^s(\Omega)$， $\mathcal{Z}_\Omega(\phi)=\chi_\Omega\mathcal{E}^s_\Omega(\phi)$；其中 $\mathcal{E}^s_\Omega: H^s(\Omega)\to H^s(\mathbb{R}^n)$ 是 $H^s(\Omega)$ 上的“最小范数延拓算子”，它将 $\phi\in H^s(\Omega)$ 映射到唯一的 $\phi\in H^s(\mathbb{R}^n)$，使得 $\phi|_\Omega=u$ 且$\|\phi\|_{H^s(\Omega)}=\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$（例如参见 [22, 第 3.1 节4]）。我们还注意到， $H^0(\Omega)=H^0_{\mathrm{ze}}(\Omega)=L^2(\Omega)$。

引理 2.15 ($\mathcal{V}_\Omega$ 和 $\mathcal{V}^*_\Omega$的映射性质)。 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开集，且$|K\setminus\Omega|=0$。对于 $s\geq 0$，以下算子是有界的:

$$\mathcal{V}_\Omega: H^s(\Omega)\to H^{\min(s,s^-_{\mathfrak{m}})+2}(\Omega), \tag{30}$$
$$\mathcal{V}^*_\Omega: H^s(\Omega)\to H^{\min(\min(s,s^-_\Omega)+2,s^-_{\mathfrak{m},\Omega})}(\Omega), \tag{31}$$
$$\mathcal{V}^*_\Omega: H^s_{\mathrm{ze}}(\Omega)\to H^{\min(s+2,s^-_{\mathfrak{m}})}_{\mathrm{ze}}(\Omega). \tag{32}$$

若 $\Im[\mathfrak{m}]\geq 0$，则以下算子有界可逆:

$$\mathcal{I}-k^2\mathcal{V}_\Omega: H^s(\Omega)\to H^s(\Omega),\qquad 0\leq s\leq s^-_{\mathfrak{m}}+2, \tag{33}$$
$$\mathcal{I}-k^2\mathcal{V}^*_\Omega: H^s(\Omega)\to H^s(\Omega),\qquad 0\leq s\leq \min(s^-_\Omega+2,s^-_{\mathfrak{m},\Omega}), \tag{34}$$
$$\mathcal{I}-k^2\mathcal{V}^*_\Omega: H^s_{\mathrm{ze}}(\Omega)\to H^s_{\mathrm{ze}}(\Omega),\qquad 0\leq s\leq s^-_{\mathfrak{m}}. \tag{35}$$

证明。 算子 $\mathcal{V}_\Omega$ 定义为 $\mathcal{V}_\Omega:=|_\Omega\circ\mathcal{V}\circ\mathcal{M}_{\mathfrak{m}}\circ\mathcal{Z}_\Omega$。 然而，由于 $|K\setminus\Omega|=0$，对于 $s\geq 0$，其在 $H^s(\Omega)$ 上的作用可等价地表示为 $\mathcal{V}_\Omega=|_\Omega\circ\mathcal{V}\circ\mathcal{M}_{\mathfrak{m}}\circ\mathcal{E}^s_\Omega$，其中 $\mathcal{E}^s_\Omega$ 是上文所述的最小范数延拓算子。于是，由引理 2.13 得到式 (30)。对于式 (33)，设某个 $0\leq s\leq s^-_{\mathfrak{m}}+2$ 满足 $g\in H^s(\Omega)$。根据推论 2.11，存在唯一的 $u\in L^2(\Omega)$，使得 $u=g+k^2\mathcal{V}_\Omega u$。 反复应用后一个等式和式 (30)，可得 $u\in H^s(\Omega)$。

算子 $\mathcal{V}^*_\Omega$ 定义为 $\mathcal{V}^*_\Omega:=|_\Omega\circ\mathcal{M}_{\mathfrak{m}}\circ\mathcal{V}\circ\mathcal{Z}_\Omega$。根据式 (29) 后的讨论，$\mathcal{Z}_\Omega: H^s(\Omega)\to H^s(\mathbb{R}^n)$ 对 $0\leq s\leq s^-_\Omega$ 有界。此外，若 $0\leq t\leq s^-_{\mathfrak{m},\Omega}$，则存在函数 m 使得 $\mathfrak{m}=m\chi_\Omega$，其中乘以 m 是从 $H^t_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 到 $H^t(\mathbb{R}^n)$ 的连续算子。于是 $|_\Omega\circ\mathcal{M}_{\mathfrak{m}}=|_\Omega\circ\mathcal{M}_m$，其中 $\mathcal{M}_m$ 表示乘以 m的算子，因此对于$0\leq t\leq s^-_{\mathfrak{m},\Omega}$，有 $|_\Omega\circ\mathcal{M}_{\mathfrak{m}}: H^t_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\to H^t(\Omega)$。另一方面

$\mathcal{Z}_\Omega$：$H^s_{\mathrm{ze}}(\Omega) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ 对所有 $s \geq 0$ 都有界；根据式 (19)，假设$|K \setminus \Omega| = 0$ 意味着 $\mathcal{Z}_\Omega \circ |_\Omega \circ \mathcal{M}_{\mathfrak{m}} = \mathcal{M}_{\mathfrak{m}}$：$H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ 对$0 \leq s \leq s^-_{\mathfrak{m}}$ 连续。结合这些观察与式 (10)，即可得到式 (31) 和 (32)。对于式 (34) 和 (35)，根据推论 2.11，我们知道，对于每个 $\tau \in L^2(\Omega)$，都存在唯一的$\sigma \in L^2(\Omega)$，使得 $\sigma = \tau + k^2\mathcal{V}^*_\Omega\tau$。然后，对后一方程以及式 (31)/(32) 反复应用，即可得到式 (34)/(35)。 □

下面的例子展示了当 $\mathfrak{m} \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$ 时的经典情形（例如，[4]）。非光滑的 $\mathfrak{m}$ 将在 §4 中讨论。

例 2.16。假设 $\mathfrak{m} \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\Im[\mathfrak{m}] \geq 0$，且 Ω 是一个有界开集，并且 $|K \setminus \Omega| = 0$。那么下列算子有界可逆：

$$\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}_\Omega : H^s(\Omega) \to H^s(\Omega), \qquad 0 \leq s < \infty, \tag{36}$$

$$\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}^*_\Omega : H^s(\Omega) \to H^s(\Omega), \qquad 0 \leq s \leq s^-_\Omega + 2 \leq 5/2, \tag{37}$$

$$\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}^*_\Omega : H^s_{\mathrm{ze}}(\Omega) \to H^s_{\mathrm{ze}}(\Omega), \qquad 0 \leq s < \infty. \tag{38}$$

2.4 散射问题与总场公式

设 u^{i} 为一个入射场，即一个满足 C^∞ 且满足 $\Delta u^{\mathrm{i}} + k^2 u^{\mathrm{i}}$ 的函数 $= 0$ 于某个开集 $D^{\mathrm{i}} \subset \mathbb{R}^n$ 中，且 $K \subset D^{\mathrm{i}}$。那么我们将具有以下条件的 FSP (3)-(4) 称为

$$f := k^2\mathfrak{m}u^{\mathrm{i}} \tag{39}$$

关于 u^{i} 的散射问题。假设 $\Im[\mathfrak{m}] \geq 0$，我们将由此得到的 (3)-(4) 的唯一解 u^{s} 称为散射场，并注意到总场 $u^{\mathrm{t}} := u^{\mathrm{i}} + u^{\mathrm{s}}$ 满足方程 $\Delta u^{\mathrm{t}} + k^2(1 + \mathfrak{m})u^{\mathrm{t}} = 0$，其中 D^{i}。入射场的例子包括平面波 $u^{\mathrm{i}}(x) := e^{ik\vartheta\cdot x}$，其中 $\vartheta \in \mathbb{R}^n$ 为单位方向向量，且 $D^{\mathrm{i}} = \mathbb{R}^n$；以及点源 $u^{\mathrm{i}}(x) := \Phi(x,\ x_0)$，其中某个 $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus K$，且 $D^{\mathrm{i}} = \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$。

在此背景下，给定一个有界可测集 Ω，使得 $\Omega \supset D^{\mathrm{i}}$，将 (39) 代入 RLSE (20)，并在等式两边加上 $u^{\mathrm{i}}|_\Omega$，可得 $u := u^{\mathrm{t}}|_\Omega = \tilde{u} + u^{\mathrm{i}}|_\Omega$（即总场在 Ω 上的限制）属于 $L^2(\Omega)$，且满足右端项经过修改的 RLSE：

$$(\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}_\Omega)u = u^{\mathrm{i}}|_\Omega. \tag{40}$$

如果 $|K \setminus \Omega| = 0$，那么根据推论 2.11，(40) 有唯一解 u；并且根据命题 2.9，所得场可利用 (21) 写成 u 的形式，从而得到

$$u^{\mathrm{s}} = k^2\mathcal{V}(\mathcal{M}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{Z}_\Omega(u))) \qquad \text{in } \mathbb{R}^n, \tag{41}$$

$$u^{\mathrm{t}} := u^{\mathrm{i}} + k^2\mathcal{V}(\mathcal{M}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{Z}_\Omega(u))) \qquad \text{in } D^{\mathrm{i}}. \tag{42}$$

与散射场公式 (20)-(21) 相比，RLSE 的总场公式 (40)-(41) 的一个优点是，我们无需计算 $\mathcal{V}f$。为完整起见，注意在假设 (39) 成立时，RILSE (22) 变为

$$(\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}^*_\Omega)\sigma = k^2\mathfrak{m}|_\Omega u^{\mathrm{i}}|_\Omega. \tag{43}$$

3 体积积分方法 (VIM)

在第 §2.2 节中，我们证明了 FSP/LSE 可以等价地表述为 RLSE 或 RILSE。任一种表述都可以作为数值离散的起点，但为简洁起见，我们将仅讨论 RLSE 的离散化

$$(\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}_\Omega)u = g. \tag{44}$$

以下我们假设

$$\Im[\mathfrak{m}](x) \geq 0 \text{ a.e. on } \mathbb{R}^n, \tag{45}$$

并且

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ is bounded and open, with } |K \setminus \Omega| = 0. \tag{46}$$

下述结果是推论 2.11 的直接推论。

推论 3.1 (RLSE 的变分问题). 在假设(45) 与(46)下，积分方程(44) 具有唯一解 $u \in L^2(\Omega)$，该解可刻画为如下变分问题的唯一解：求 $u \in L^2(\Omega)$ 使得

$$b(u,v) = F(v), \quad \forall v \in L^2(\Omega), \tag{47}$$

其中，对于 u、$v \in L^2(\Omega)$，

$$b(u,v) := \left(\left(\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}_\Omega\right)u, v\right)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left(u(x) - k^2 \int_\Omega \Phi(x,y)\mathfrak{m}(y)u(y)\,\mathrm{d}y\right)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x$$

and

$$F(v) := (g,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega g(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x.$$

为求解（47），我们采用基于 Ω 网格上的分片多项式近似的 Galerkin 体积分方法（VIM）。

定义 3.2 （网格）。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为非空、有界开集。若非空、有界开集的有限集合族 $\mathcal{T} = \{T\}$ 均为 Ω 的子集，则称其为 Ω 的一个网格，当且仅当

$$T \cap T' = \emptyset \text{ for } T \neq T' \quad \text{and} \quad \left|\Omega \setminus \bigcup_{T\in\mathcal{T}} T\right| = 0.$$

我们将 $\mathcal{T}$ 的网格宽度定义为 $h :=$ 最大值$_{T\in\mathcal{T}}$直径（T）。

给定 Ω 和 $h > 0$，我们总能找到 Ω 的一个网格 $\mathcal{T}$，其网格宽度为 $\leq h$；例如，可以考虑一组直径为 $\leq h$ 的二进立方体与 Ω 的交集。

定义 3.3 （分片多项式空间 V_N）。给定 Ω 的一个网格 $\mathcal{T}$ 以及 $p \in \mathbb{N}_0$，我们将 $\mathcal{T}$ 上总次数至多为 p 的分片多项式函数空间记为

$$V_N := \{v \in L^2(\Omega) : v|_T \text{ is a polynomial of total degree} \leq p \text{ for each } T \in \mathcal{T}\} \subset L^2(\Omega), \tag{48}$$

并将 $P_N\colon L^2(\Omega) \to V_N$ 记为投影到 V_N上的 L^2-正交投影。

定义 3.4 (Galerkin VIM)。 我们的 ***Galerkin VIM*** 如下：求 $u_N \in V_N$ 使得 *at*

$$b(u_N, v_N) = F(v_N), \quad \forall v_N \in V_N, \tag{49}$$

或者等价地，

$$(\mathcal{I} - k^2 P_N \mathcal{V}_\Omega)u_N = P_N g. \tag{50}$$

设 $\{\psi_j\}_{j=1}^N$ 是 V_N的一个 L^2-标准正交基。于是，记 $u_N = \sum_{j=1}^N c_j\psi_j$，VIM (49) 等价于求解以下关于 $\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_N)^T \in \mathbb{C}^N$ 的线性系统

$$A\mathbf{c} = \mathbf{g}, \tag{51}$$

其中 $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N \in \mathbb{C}^{N\times N}$ 和 $\mathbf{g} = (g_1,\ldots,g_N)^T \in \mathbb{C}^N$ 由下式给出

$$A_{ij} = \delta_{ij} - k^2 \int_\Omega\int_\Omega \Phi(x,y)\mathfrak{m}(y)\psi_j(y)\overline{\psi_i(x)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x, \qquad g_i = \int_\Omega g(x)\overline{\psi_i(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{52}$$

注 3.5 （散射场与总场近似）。 在*§2.4*所讨论的散射问题中，我们有 $g = u^{\mathrm{i}}|_\Omega$ 和 $u = u^{\mathrm{t}}|_\Omega$。于是，若 u_N 求解（49），则可将 u_N 代入（41），从而得到散射场 u^{s} 与总场 u^{t}的近似 u_N^{s} 和 u_N^{t}，即

$$u_N^{\mathrm{s}} := k^2\mathcal{V}(\mathcal{M}(\mathcal{Z}_\Omega(u_N))), \qquad \text{in } \mathbb{R}^n, \tag{53}$$

$$u_N^{\mathrm{t}} := u^{\mathrm{i}} + k^2\mathcal{V}(\mathcal{M}(\mathcal{Z}_\Omega(u_N))), \qquad \text{in } D^{\mathrm{i}}. \tag{54}$$

3.1 抽象半离散误差分析

现在，我们对满足（46）的任意Ω上的任意网格，对我们的Galerkin VIM进行半离散误差分析。为表述简洁起见，我们将同时给出Galerkin VIM的 h版本与 p版本的结果，其定义如下：

$$\underline{h\text{-version}}\text{: fix } p \in \mathbb{N}_0 \text{ and consider a sequence of meshes of } \Omega \text{ with associated meshwidths } h \to 0; \tag{55}$$

$$\underline{p\text{-version}}\text{: fix a mesh of } \Omega \text{ with some meshwidth } h > 0 \text{ and let } p \to \infty. \tag{56}$$

我们的分析遵循积分方程投影方法分析的经典途径，其历史综述例如可见于 [5, §3]。然而，要将这一途径应用于当前情形，我们需要某些经典文献中尚未提供的结果。

我们首先指出以下取自 [46]的 h 与 p 显式最佳逼近结果。（命题 3.6 的 $p = 0$、 $r = 1$ 版本已见于 [16, 推论 3.25]。）我们强调，命题 3.6 对任意区域上的任意网格均成立。

命题 3.6（最佳逼近结果，[46, 推论 2.7]）。设 n、$r \in \mathbb{N}$，并设 $h_0 > 0$。存在仅依赖于 n、 r 和 h_0 的常数 $C > 0$，使得若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为任意非空有界开集， $\mathcal{T} = \{T\}$ 为 Ω 的任意网格，其网格宽度为 $h \in (0, h_0]$，$p \geq r - 1$ 与 $0 \leq s \leq r$，则

$$\min_{v_N \in V_N} \|v - v_N\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\frac{Ch}{p+1}\right)^s \|v\|_{H^s(\Omega)}, \qquad v \in H^s(\Omega). \tag{57}$$

定理 3.7 (半离散收敛)。设 $\mathfrak{m}$ 和 Ω 满足(45) 和(46)，并假设对于某个 $0 \leq s \leq s_{\mathfrak{m}}^- + 2$，$g \in H^s(\Omega)$ 。那么，(44) 的唯一解满足$u \in H^s(\Omega)$。当 h充分小时（对于 h-版本），或 p 充分大时（对于 p- 版本），离散问题 (49) 有唯一解 $u_N \in V_N$，并且

$$\|u - u_N\|_{L^2(\Omega)} = O\left(\frac{h^{\min(p+1,s)}}{(p+1)^s}\right), \quad as\ h \to 0\ \ or\ \ p \to \infty. \tag{58}$$

证明。正如引理 2.8 和推论 2.11 中所指出的，算子 $\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}_\Omega$: $L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 是单射，且是恒等算子的紧扰动，因此 (44) 有唯一解 $u \in L^2(\Omega)$。在关于g 和 s 的既定假设下，$u \in H^s(\Omega)$ 这一事实由引理 2.15（具体而言，由 (33)）得出。根据假设，我们要么有一个固定的最大多项式次数 p，以及一列 Ω 的网格，其对应网格宽度h 趋于零；要么有一个网格宽度为 h 的固定网格，并考察多项式次数 $p \to \infty$ 时的极限。无论哪种情况，相应的逼近空间序列 V_N 在 $L^2(\Omega)$ 中构成稠密序列，这可由以下标准论证得出。设 $v \in L^2(\Omega)$，且 $\varepsilon > 0$。那么，根据 $L^2(\Omega)$ 中 $C^\infty_{\mathrm{comp}}(\Omega)$ 的稠密性以及推论 3.5], 存在 $\phi \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(\Omega)$，使得 $\|u - \phi\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon/2$；由命题 3.6，我们可以找到充分小的$h > 0$ 和网格 $\mathcal{T}$，其网格宽度为 $\leq h$ （对于 h-版本），或者找到充分大的 p （对于 p-版本），使得 $\|\phi - P_N\phi\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon/2$，因此根据三角不等式$\|u - P_N\phi\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$。于是，根据 [5, 定理 3.1.1 和引理 3.1.2]，存在 $C_{qo} > 0$和 $h_0 > 0$（或 $p_0 \in \mathbb{N}_0$），使得对于每个 $0 < h \leq h_0$（或每个 $p \geq p_0$），算子 $\mathcal{I} - k^2 P_N \mathcal{V}_\Omega$ 在 $L^2(\Omega)$ 上可逆，并且

$$\|(\mathcal{I} - k^2 P_N \mathcal{V}_\Omega)^{-1}\| \leq C_{qo}, \tag{59}$$

离散问题 (49) 有唯一解 $u_N \in V_N$，并且

$$\|u - u_N\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{qo} \|u - P_N u\|_{L^2(\Omega)}, \tag{60}$$

由此根据命题 3.6 可得 (58)。 □

在实际应用中，人们通常关心的是对 u的有界线性泛函的求值，而不是 u 本身。回顾一下，若 J 是定义在 $L^2(\Omega)$ 上的有界线性泛函，则根据里斯表示定理，存在 $\mathfrak{j} \in L^2(\Omega)$，使得

$$J(v) = (v, \bar{\mathfrak{j}}) = \int_\Omega \mathfrak{j}(y) v(y)\, \mathrm{d}y, \qquad v \in L^2(\Omega). \tag{61}$$

每当 J 具有这种形式时，根据柯西-施瓦茨不等式可得

$$|J(u) - J(u_N)| \le \|u - u_N\|_{L^2(\Omega)} \|\mathfrak{j}\|_{L^2(\Omega)}, \tag{62}$$

从而 $J(u_N)$ 收敛到 $J(u)$ 的速度至少与 u_N 收敛到 u 一样快。在附加假设下，我们可以证明超收敛。

定理 3.8（泛函的半离散超收敛）。 在定理 *3.7* 的假设下，设或者 $\mathfrak{j} \in H^t(\Omega)$ 对某个 $0 \le t \le \min(s^- \Omega + 2, s^-_{\mathfrak{m}}, \Omega)$，或者 $\mathfrak{j} \in H^t_{\mathrm{ze}}(\Omega)$ 对某个 $0 \le t \le s^-_{\mathfrak{m}}$。则

$$|J(u) - J(u_N)| = O\left(\frac{h^{\min(p+1,s)+\min(p+1,t)}}{(p+1)^{s+t}} \right), \quad as \ h \to 0 \ \ or \ \ p \to \infty. \tag{63}$$

证明。 情形 $t = 0$ 已由定理 3.7 和 (62) 涵盖。对于情形 $t > 0$，我们引入对偶问题：给定形如 (61) 的泛函 J，求 $\zeta \in L^2(\Omega)$，使得

$$b(v, \zeta) = J(v), \qquad \forall v \in L^2(\Omega). \tag{64}$$

由 (18)，(64) 等价于方程

$$(\mathcal{I} - k^2 \mathcal{V}^*_\Omega)\overline{\zeta} = \mathfrak{j}.$$

因此，由引理 2.15，若或者 $\mathfrak{j} \in H^t(\Omega)$ 对某个 $0 \le t \le \min(s^- \Omega + 2, s^-_{\mathfrak{m}}, \Omega)$，或者 $\mathfrak{j} \in H^t_{\mathrm{ze}}(\Omega)$ 对某个 $0 \le t \le s^-_{\mathfrak{m}}$，则 (64) 的解 ζ 满足 $\zeta \in H^t(\Omega)$（回顾 $H^t_{\mathrm{ze}}(\Omega)$ 对 $t \ge 0$ 连续嵌入于 $H^t(\Omega)$）。由 (47) 和 (49)，我们有 Galerkin 正交性，即

$$b(u - u_N, v_N) = 0, \qquad \text{for all } v_N \in V_N. \tag{65}$$

由此得到

$$\begin{aligned} |J(u) - J(u_N)| = |b(u - u_N, \zeta)| &= |b(u - u_N, \zeta - P_N\zeta)| \\ &\le \|\mathcal{I} - k^2 \mathcal{V}_\Omega\|_{L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)} \|u - u_N\|_{L^2(\Omega)} \|\zeta - P_N\zeta\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

由此，利用定理 3.7 和命题 3.6 可得 (63)。 □

通过调整 [70] 中的论证（另见 [5, §3.4.1]），我们也可以证明“迭代” Galerkin 解的超收敛。

定理 3.9 (迭代 Galerkin 解的半离散超收敛)。 在定理 *3.7* 的假设下，将迭代 *Galerkin* 解定义为

$$u_N^{(1)} := g + k^2 \mathcal{V}_\Omega u_N. \tag{66}$$

Then

$$\|u - u_N^{(1)}\|_{L^2(\Omega)} = O\left(\frac{h^{\min(p+1,s)+\min(p+1,t)}}{(p+1)^{s+t}} \right), \quad as \ h \to 0 \ \ or \ \ p \to \infty, \tag{67}$$

其中

$$t = \max(\min(s^-_\Omega + 2, s^-_{\mathfrak{m},\Omega}), s^-_{\mathfrak{m}}).$$

证明。 我们沿用 [70, 定理 1] 的证明思路。为便于表述，我们引入一些额外的记号，定义 $\mathcal{V}^*$ Ω：$L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$，使得 $\mathcal{V}^*$ $\Omega(\overline{\phi}) := \mathcal{V}^*_\Omega(\phi)$ 对于 $\phi \in L^2(\Omega)$ 成立。根据 (18)，它是 $\mathcal{V}_\Omega : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 的伴随算子。由 (44) 和 (66) 可得

$$\begin{aligned} \|u - u_N^{(1)}\|_{L^2(\Omega)} = k^2 \|\mathcal{V}_\Omega(u - u_N)\|_{L^2(\Omega)} &= k^2 \sup_{0 \ne \phi \in L^2(\Omega)} \frac{|(\mathcal{V}_\Omega(u - u_N), \phi)|}{\|\phi\|_{L^2(\Omega)}} \\ &= k^2 \sup_{0 \ne \phi \in L^2(\Omega)} \frac{|(u - u_N, \overline{\mathcal{V}}^*_\Omega \phi)|}{\|\phi\|_{L^2(\Omega)}}. \end{aligned} \tag{68}$$

对于 $0 \le t \le \min(s^- \Omega + 2, \overline{s^-_{\mathfrak{m}}}, \Omega)$，由引理 2.15 可知 $\mathcal{V}^*_\Omega\colon L^2(\Omega) \to H^t(\Omega)$ 有界，这意味着 $\mathcal{V}^* \Omega\colon L^2(\Omega) \to H^t(\Omega)$ 也有界，且范数相同。注意，若 $\mathcal{V}^* \Omega \phi = 0$，则 $(u - u_N, \mathcal{V}^* \Omega \phi) = 0$；结合上述结果与 (68)，可得

$$\begin{aligned}
\|u - u_N^{(1)}\|_{L^2(\Omega)} &\le k^2 \sup_{\substack{\phi \in L^2(\Omega) \\ \overline{\mathcal{V}}^*_\Omega \phi \neq 0}} \frac{|(u - u_N, \overline{\mathcal{V}}^*_\Omega \phi)|}{\|\phi\|_{L^2(\Omega)}} \\
&\le k^2 \|\overline{\mathcal{V}}^*_\Omega\|^{-1}_{L^2(\Omega) \to H^t(\Omega)} \sup_{\substack{\phi \in L^2(\Omega) \\ \overline{\mathcal{V}}^*_\Omega \phi \neq 0}} \frac{|(u - u_N, \overline{\mathcal{V}}^*_\Omega \phi)|}{\|\overline{\mathcal{V}}^*_\Omega \phi\|_{H^t(\Omega)}} \\
&\le k^2 \|\overline{\mathcal{V}}^*_\Omega\|^{-1}_{L^2(\Omega) \to H^t(\Omega)} \sup_{0 \neq \psi \in H^t(\Omega)} \frac{|(u - u_N, \psi)|}{\|\psi\|_{H^t(\Omega)}}. \qquad (69)
\end{aligned}$$

在对 t 作出相同假设的情况下，引理 2.15 还意味着 $\mathcal{I} - k^2 \mathcal{V}^*_\Omega\colon H^t(\Omega) \to H^t(\Omega)$ 可逆，因此 $\mathcal{I} - k^2 \mathcal{V}^* \Omega\colon H^t(\Omega) \to H^t(\Omega)$ 也可逆。因此，对每个 $\psi \in H^t(\Omega)$，都存在 $\varphi \in H^t(\Omega)$，使得 $(\mathcal{I} - k^2 \mathcal{V}^* \Omega)\varphi = \psi$；并且，由于 $(\mathcal{I} - k^2 \mathcal{V}_\Omega)\colon L^2(\Omega) \to \overline{L}^2(\Omega)$ 可逆，且满足 Galerkin 正交性 (65)，

$$\begin{aligned}
(u - u_N, \psi) &= ((\mathcal{I} - k^2 \mathcal{V}_\Omega)^{-1}(\mathcal{I} - k^2 \mathcal{V}_\Omega)(u - u_N), \psi) \\
&= ((\mathcal{I} - k^2 \mathcal{V}_\Omega)(u - u_N), (\mathcal{I} - k^2 \overline{\mathcal{V}}^*_\Omega)^{-1} \psi) \\
&= ((\mathcal{I} - k^2 \mathcal{V}_\Omega)(u - u_N), \varphi) \\
&= b(u - u_N, \varphi) \\
&= b(u - u_N, \varphi - P_N \varphi) \\
&\le \|\mathcal{I} - k^2 \mathcal{V}_\Omega\|_{L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)} \|u - u_N\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi - P_N \varphi\|_{L^2(\Omega)}. \qquad (70)
\end{aligned}$$

将此结果与 (69) 结合，再应用定理 3.7 和命题 3.6，即得 (67)。

对于 $0 \le t \le s^-_{\mathfrak{m}}$，我们采用类似的论证，不过是在 $H^t_{\mathrm{ze}}(\Omega)$ 空间的背景下。由引理 2.15 可得，$\mathcal{V}^* \Omega\colon L^2(\Omega) \to H^t_{\mathrm{ze}}(\Omega)$ 有界；再利用 (29)，得到 (69) 的如下修正版：

$$\begin{aligned}
\|u - u_N^{(1)}\|_{L^2(\Omega)} &\le k^2 \|\overline{\mathcal{V}}^*_\Omega\|^{-1}_{L^2(\Omega) \to H^t_{\mathrm{ze}}(\Omega)} \sup_{0 \neq \psi \in H^t_{\mathrm{ze}}(\Omega)} \frac{|(u - u_N, \psi)|}{\|\psi\|_{H^t_{\mathrm{ze}}(\Omega)}} \\
&\le k^2 \|\overline{\mathcal{V}}^*_\Omega\|^{-1}_{L^2(\Omega) \to H^t_{\mathrm{ze}}(\Omega)} \sup_{0 \neq \psi \in H^t_{\mathrm{ze}}(\Omega)} \frac{|(u - u_N, \psi)|}{\|\psi\|_{H^t(\Omega)}}. \qquad (71)
\end{aligned}$$

根据引理 2.15，我们还可推得 $\mathcal{I} - k^2 \mathcal{V}^* \Omega\colon \overline{H}^t_{\mathrm{ze}}(\Omega) \to H^t_{\mathrm{ze}}(\Omega)$ 是可逆的。因此，对于每个 $\psi \in H^t_{\mathrm{ze}}(\Omega)$，存在 $\varphi \in H^t_{\mathrm{ze}}(\Omega) \subset H^t(\Omega)$，使得 $(\mathcal{I} - k^2 \mathcal{V}^* \Omega)\varphi = \psi$，随后结合 (71) 与 (70)、定理 3.7 及命题 3.6 得到 (67)，即可像前一种情况中那样完成证明。

□

3.2 散射问题的应用

现在我们考虑 §3.1 中结果在 §2.4 所讨论的散射问题中的应用。在该问题中，我们利用 u^{i}这一入射场求解 (44)，其中 $g := u^{\mathrm{i}}|_\Omega$，而 u 表示总场 u^{t} 在 Ω 上的限制。在此背景下，两个重要的泛函为：

- 散射场泛函 *scattered field functional* $J_{\mathrm{SF}} u \quad 41^{x_0} \quad 61 \quad = k^2 \mathfrak{m} \quad \Phi^{x_0} u =$，对于观测点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，其定义为 $J_{\mathrm{SF}}() s(x_0)$；回顾 ( ) 可知，它具有如下形式 ( )，其中 $\mathfrak{j}(y)$ (y) (x_0, y)；

- 对于观测方向 $\hat{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$，由式（61）给出的远场模式泛函 $J_{\mathrm{FFP}\hat{x}}$ 为 $\mathfrak{j}(y) = ck^{(1+n)/2} \mathfrak{m}(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\hat{x} \cdot y}$，其中常数 c 仅取决于 n （例如参见[29,§2.5, §3.5]）；

我们还要指出，在此情形下，定义的迭代 Galerkin 解 $u_N^{(1)}$ 满足 (66)
$u_N^{(1)} = u_N^{\mathrm{t}}|_\Omega = u_N^{\mathrm{s}}|_\Omega + u^{\mathrm{i}}|_\Omega$，其中 $u_N^{\mathrm{t}}|_\Omega$ 和 $u_N^{\mathrm{s}}|_\Omega$ 由 (53) 和 (54) 定义，因此

$$\|u - u_N^{(1)}\|_{L^2(\Omega)} = \|u^{\mathrm{s}} - u_N^{\mathrm{s}}\|_{L^2(\Omega)} = \|J_\cdot^{\mathrm{SF}}(u) - J_\cdot^{\mathrm{SF}}(u_N)\|_{L^2(\Omega)}. \qquad (72)$$

推论 3.10 (散射问题的半离散分析)。 设 $\mathfrak{m}$ 和 Ω 满足(45) 和(46)，设对于某个入射场 u^{i}，$g = u^{\mathrm{i}}|_{\Omega}$ 在包含Ω的开集 D^{i} 上，并设

$$s := s^{-}_{\mathfrak{m}} + 2 \text{ and } t := \max(\min(s^{-}_{\Omega} + 2, s^{-}_{\mathfrak{m},\Omega}), s^{-}_{\mathfrak{m}}). \tag{73}$$

于是：

(i) (44) 的解满足 $u \in H^s(\Omega)$；对于足够小的 h （ h 版本）或足够大的 p （ p 版本），*Galerkin VIM* 解 u_N 存在且满足 (58)；*(ii)* 远场模式泛函 $J^{\mathrm{FFP}}_{\hat{x}}$ 满足 (63)，且对 $\hat{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$ 一致成立。*(iii)* 散射场泛函 $J^{\mathrm{SF}}_{x_0}$ 也满足 (63)，且对 $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus K_\varepsilon$ 一致成立，其中 $K_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, K) < \varepsilon\}$，对每个 $\varepsilon > 0$ 均成立。*(iv)* $\|u - u_N^{(1)}\|_{L^2(\Omega)} = \|u^{\mathrm{s}} - u^{\mathrm{s}}_N\|_{L^2(\Omega)} = \|J^{\mathrm{SF}}_{\cdot}(u) - J^{\mathrm{SF}}_{\cdot}(u_N)\|_{L^2(\Omega)}$ 满足 (67)。

证明。 由于入射场 u^{i} 在包含 Ω 的开集 D^{i} 中为 C^∞，对每个 $s \geq 0$ 都有 $g = u^{\mathrm{i}}|_{\Omega} \in H^s(\Omega)$，因此 (i) 部分由定理 3.7 得证。

对于 (ii) 部分，我们首先注意到，对于所有 $t \geq 0$，函数 $y \mapsto \Phi^\infty(\hat{x}, y) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\hat{x}\cdot y}$ 都是$H^t(\Omega)$ 的一个元素；并且对于任意 $t \geq 0$，范数 $\|\Phi^\infty(\hat{x}, \cdot)\|_{H^t(\Omega)}$ 均可一致地（相对于 $\hat{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$）有界。因此 $\mathfrak{j}(y) = ck^{(1+n)/2}\mathfrak{m}(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\hat{x}\cdot y}$ 满足

$$\mathfrak{j} \in H^t(\Omega) \text{ for all } 0 \leq t \leq s^{-}_{\mathfrak{m},\Omega}, \text{ and } \mathfrak{j} \in H^t_{\mathrm{ze}}(\Omega) \text{ for all } 0 \leq t \leq s^{-}_{\mathfrak{m}}, \tag{74}$$

并且，在 (74) 中考虑的所有情形下，$\|\mathfrak{j}\|_{H^t(\Omega)}$ 均可一致地（相对于 $\hat{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$）有界，因此由定理 3.8 可得 (ii) 部分。

对于 (iii) 部分，我们同样注意到，由于函数 $\Phi(x_0, \cdot)$ 的光滑性，函数 $\mathfrak{j}(y) = k^2\mathfrak{m}(y)\Phi(x_0, y)$ 满足 (74)；并且在 (74) 中考虑的所有情形下，对于每个 $\varepsilon > 0$，范数$\|\mathfrak{j}\|_{H^t(\Omega)}$ 均可一致地（相对于 $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus K_\varepsilon$）有界，因此由定理 3.8 也可得 (iii) 部分。

最后，根据（72），由定理 3.9 可得第 (iv) 部分。 □

注 3.11 ($J^{\mathrm{SF}}_{x_0}$在 K 上的逐点超收敛。 推论 *3.10* 的第 *(iii)* 部分给出了 $J^{\mathrm{SF}}_{x_0}$在 $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus K$ 上的逐点超收敛估计。对于 $x_0 \in K$也可以推导出此类估计，但由于 $\Phi(x_0, \cdot)$中的奇异性，其超收敛速率可能低于 $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus K$ 的情况。

通过标准计算可以证明，若 $t < 2 - n/2$，则对于每个 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，都有 $\Phi(x_0, \cdot) \in H^t_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$。由此可知，对于每个 $x_0 \in \mathbb{R}^n$， $\mathfrak{j}(y) = k^2\mathfrak{m}(y)\Phi(x_0, y)$ 满足

$$\begin{aligned} &\mathfrak{j} \in H^t(\Omega) \text{ for all } 0 \leq t \leq s^{-}_{\mathfrak{m},\Omega},\ t < 2 - n/2, \\ &\text{and } \mathfrak{j} \in H^t_{\mathrm{ze}}(\Omega) \text{ for all } 0 \leq t \leq s^{-}_{\mathfrak{m}},\ t < 2 - n/2. \end{aligned} \tag{75}$$

此外，在（*75*）中考虑的所有情况下，$\|\mathfrak{j}\|_{H^t(\Omega)}$ 均可一致地关于 $x_0 \in \mathbb{R}^n$从上方有界。因此，由定理 *3.8* 可知， $J^{\mathrm{SF}}_{x_0}$一致地关于 $x_0 \in \mathbb{R}^n$满足 (63)，其中 t 可替换为集合中的任意元素

$$\{t : t \leq \max(\min(s^{-}_{\Omega} + 2, s^{-}_{\mathfrak{m},\Omega}), s^{-}_{\mathfrak{m}}),\ t < 2 - n/2\}. \tag{76}$$

推论 *3.10* 的第 *(iv)* 部分表明，如果考虑 $J^{\mathrm{SF}}_{x_0}$ 的 L^2 收敛，而非逐点收敛，则可以去掉限制 $t < 2 - n/2$。

在下面的例子中，我们讨论这些结果对于例 2.16 中所考虑的光滑 $\mathfrak{m}$ 的经典情形有何启示。此处提及收敛速率时，我们指的是推论 3.10 中考虑的范数。因此，对于 u，我们指的是 Ω 上的 L^2 误差；对于 $J^{\mathrm{FFP}}_{\hat{x}}$，我们指的是对 $\hat{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$ 一致的逐点误差；对于 $J^{\mathrm{SF}}_{x_0}$，我们指的是对任意 $\varepsilon > 0$，关于 $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus K_\varepsilon$ 一致的逐点误差，以及 Ω 上的 L^2 误差。我们指出，非光滑 $\mathfrak{m}$ 的例子将在 §4 中讨论。

例 3.12。 假设 $\mathfrak{m} \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\Im[\mathfrak{m}] \geq 0$，且 Ω 是一个有界开集，并满足 $|K \setminus \Omega| = 0$。那么，由 (73) 定义的 s 和 t 满足 $s = t = \infty$，因此：

- 对于 h-版本的 *VIM*，我们得到代数收敛，其中 $O(h^{p+1})$是 u的误差，而$O(h^{2(p+1)})$ 是 $J_{\mathrm{FFP}\hat{x}}$ 和 $J_{\mathrm{SF}x_0}$ 的误差；
- 对于 p版本的 *VIM*，我们具有超代数收敛性，即当 u, $J_{\mathrm{FFP}\hat{x}}$ 和 $J_{\mathrm{SF}x_0}$ 时，误差为 $O((p+1)^{-\infty})$。

3.3 抽象全离散误差分析

假设利用求积规则将（51）中的矩阵和右端项近似为 $A \approx \tilde{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$和 $\mathbf{g} \approx \tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{C}^N$。于是，我们寻求 $\tilde{\mathbf{c}} = (\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_N)^T \in \mathbb{C}^N$，使得

$$\tilde{A}\tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{g}}, \tag{77}$$

并定义全离散近似

$$\tilde{u}_N := \sum_{j=1}^{N} \tilde{c}_j \psi_j \in V_N. \tag{78}$$

等价地，我们寻求 $\tilde{u}_N \in V_N$ 作为下列方程的解

$$\tilde{b}(\tilde{u}_N, v_N) = \tilde{F}(v_N), \qquad v_N \in V_N, \tag{79}$$

其中，$\tilde{b}(\tilde{u}_N, v_N) := \mathbf{d}^T \tilde{A} \tilde{\mathbf{c}}$，且 $\tilde{F}(v_N) := \mathbf{d}^T \tilde{\mathbf{g}}$，对于 $v_N = \sum_{j=1}^{N} d_j \psi_j \in V_N$以及 $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_N)^T$。

在计算出 $\tilde{u}_N$ 之后，还可以考虑对形如 (61)、作用于 $\tilde{u}_N$ 的线性泛函 J 作数值求积近似。我们注意到，这样一个泛函 J 在 $v_N = \sum_{j=1}^{N} d_j \psi_j \in V_N$ 上的作用可以写成 $J(v_N) = \mathbf{j}^T \mathbf{d}$，其中 $\mathbf{j} \in \mathbb{C}^N$ 由下式定义

$$j_i = J(\psi_i) = \int_{T_i} \mathfrak{j}(y)\psi_i(y)\,\mathrm{d}y, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{80}$$

若用数值求积将 $\mathbf{j}$ 近似为 $\mathbf{j} \approx \tilde{\mathbf{j}} \in \mathbb{C}^N$，则可得到全离散泛函近似 $\tilde{J}(v_N) := \tilde{\mathbf{j}}^T \mathbf{d}$。

全离散解与全离散泛函求值中的误差可借助斯特朗引理进行分析（例如 [67, 定理 4.2.11]）。此外，正如第二类积分方程的标准情形（参见例如 [5, §3.6]），全离散系统具有良好的条件数。

定理 3.13（全离散收敛性、条件数与超收敛）. 在定理 *3.7* 的假设下：

(i) 如果 $\|A - \tilde{A}\|_2 \to 0$ 和 $\|\mathbf{g} - \tilde{\mathbf{g}}\|_2 \to 0$ 满足 $h \to 0$（对于 h 版本）或 $p \to \infty$（对于 p 版本），那么当 h 足够小时，或 p 足够大时，系统 (77) 可逆，其中

$$\|u - \tilde{u}_N\|_{L^2(\Omega)} \to 0, \quad as\ h \to 0\ \ or\ \ p \to \infty, \tag{81}$$

and

$$\kappa_2(\tilde{A}) = \|\tilde{A}\|_2 \|\tilde{A}^{-1}\|_2 = O(1), \quad as\ h \to 0\ \ or\ \ p \to \infty; \tag{82}$$

(ii) 如果

$$\|A - \tilde{A}\|_2\ \ and\ \ \|\mathbf{g} - \tilde{\mathbf{g}}\|_2\ \ are\ \ O\left(\frac{h^{\min(p+1,s)}}{(p+1)^s}\right), \quad as\ h \to 0\ \ or\ \ p \to \infty, \tag{83}$$

then

$$\|u - \tilde{u}_N\|_{L^2(\Omega)} = O\left(\frac{h^{\min(p+1,s)}}{(p+1)^s}\right), \quad as\ h \to 0\ \ or\ \ p \to \infty; \tag{84}$$

(iii) 在定理 *3.8* 的假设下，若

$$\|A-\tilde{A}\|_2,\ \ \|\mathbf{g}-\tilde{\mathbf{g}}\|_2\ \ and\ \ \|\mathbf{j}-\tilde{\mathbf{j}}\|_2\ \ are\ \ O\left(\frac{h^{\min(p+1,s)+\min(p+1,t)}}{(p+1)^{s+t}}\right),\quad as\ \ h\to 0\ \ or\ \ p\to\infty, \tag{85}$$

then

$$|J(u)-\tilde{J}(\tilde{u}_N)|=O\left(\frac{h^{\min(p+1,s)+\min(p+1,t)}}{(p+1)^{s+t}}\right),\quad as\ \ h\to 0\ \ or\ \ p\to\infty. \tag{86}$$

证明。 对于 (i) 和 (ii)，我们首先注意到，对于 $v_N, w_N \in V_N$,

$$|b(v_N,w_N)-\tilde{b}(v_N,w_N)|\le\|A-\tilde{A}\|_2\|v_N\|_{L^2(\Omega)}\|w_N\|_{L^2(\Omega)}, \tag{87}$$

and

$$|F(v_N)-\tilde{F}(v_N)|\le\|\mathbf{g}-\tilde{\mathbf{g}}\|_2\|v_N\|_{L^2(\Omega)}. \tag{88}$$

那么，在 (i) 的假设下，由 [67, 定理 4.2.11]可知，当 h 充分小时（或 p充分大时），系统 (77) 可逆，且

$$\begin{aligned}\|u-\tilde{u}_N\|_{L^2(\Omega)}&\lesssim\min_{v_N\in V_N}\left(\|u-v_N\|_{L^2(\Omega)}+\|A-\tilde{A}\|_2\|v_N\|_{L^2(\Omega)}\right)+\|\mathbf{g}-\tilde{\mathbf{g}}\|_2\\&\le\|u-P_Nu\|_{L^2(\Omega)}+\|A-\tilde{A}\|_2\|P_Nu\|_{L^2(\Omega)}+\|\mathbf{g}-\tilde{\mathbf{g}}\|_2\\&\le\|u-P_Nu\|_{L^2(\Omega)}+\|A-\tilde{A}\|_2\|u\|_{L^2(\Omega)}+\|\mathbf{g}-\tilde{\mathbf{g}}\|_2,\end{aligned} \tag{89}$$

这是因为$\|P_Nu\|_{L^2(\Omega)}\le\|u\|_{L^2(\Omega)}$。由 (89) 和命题 3.6 可得，若$\|A-A\|_2\to 0$ 且 $\|\mathbf{g}-\tilde{}\mathbf{g}\|_2\to 0$，则$\|u-\tilde{u}_N\|_{L^2(\Omega)}\to 0$；同时，(83) 蕴含 (84)。

为证明条件数结论 (82)，通过标准论证（例如 [5, 定理 3.1.1，引理 3.1.2，§3.6]），可以证明当 h充分小时（或 p充分大时），$\|A\|_2$ 和 $\|A^{-1}\|_2$ 均有上界，且该上界与 h（分别与 p）无关。当 $\|A-\tilde{A}\|_2\to 0$ 且 $\|\mathbf{g}-\tilde{}\mathbf{g}\|_2\to 0$ 时， $\|\tilde{A}\|_2$ 和 $\|\tilde{A}^{-1}\|_2$ 也满足同样的结论，这可通过标准的扰动论证得出，例如使用 [5, 定理 A.1]。

对于 (iii)，为证明 (86)，我们首先使用三角不等式进行估计

$$|J(u)-\tilde{J}(\tilde{u}_N)|\le\underbrace{|J(u)-J(u_N)|}_{(I)}+\underbrace{|J(u_N)-\tilde{J}(u_N)|}_{(II)}+\underbrace{|\tilde{J}(u_N)-\tilde{J}(\tilde{u}_N)|}_{(III)}. \tag{90}$$

令 $\mu:=h^{\min(p+1,s)+\min(p+1,t)}\overline{(p+1)^{s+t}}$。根据定理 3.8，我们知道 (I) 是 $O(\mu)$。对于 (II)，利用 (50)、(59)、$\|P_Ng\|_{L^2(\Omega)}\le\|g\|_{L^2(\Omega)}$</style} 这一事实以及 (85) 中的第三个假设，可得

$$|J(u_N)-\tilde{J}(u_N)|\le\|\mathbf{j}-\tilde{\mathbf{j}}\|_2\|u_N\|_{L^2(\Omega)}\lesssim\|\mathbf{j}-\tilde{\mathbf{j}}\|_2\|g\|_{L^2(\Omega)}=O(\mu). \tag{91}$$

最后，对于 (III)，我们可以估计

$$|\tilde{J}(u_N)-\tilde{J}(\tilde{u}_N)|\le\|\tilde{\mathbf{j}}\|_2\|u_N-\tilde{u}_N\|_{L^2(\Omega)}\lesssim\|\mathrm{j}\|_{L^2(\Omega)}\|u_N-\tilde{u}_N\|_{L^2(\Omega)}, \tag{92}$$

其中，我们利用 (85) 中的第三个假设来估计 $\|\tilde{\mathbf{j}}\|_2\le\|\mathbf{j}\|_2+\|\mathbf{j}-\mathbf{j}\|_2\lesssim\|\mathbf{j}\|_2=\|\mathrm{j}\|_{L^2(\Omega)}$。然后，根据 [67] 第 235 页顶部的论证（其中使用了 [67, Eqn (4.156)]），当 h 足够小时（或 p 足够大时），我们可以利用 (87) 和 (88) 进行估计

$$\begin{aligned}\|u_N-\tilde{u}_N\|_{L^2(\Omega)}&\lesssim\sup_{0\neq v_N\in V_N}\frac{|b(u_N,v_N)-\tilde{b}(u_N,v_N)|+|F(v_N)-\tilde{F}(v_N)|}{\|v_N\|_{L^2(\Omega)}}\\&\le\left(\|A-\tilde{A}\|_2\|u_N\|_{L^2(\Omega)}+\|\mathbf{g}-\tilde{\mathbf{g}}\|_2\right),\end{aligned} \tag{93}$$

根据（85）中的前两个假设以及（59），有 $O(\mu)$，这给出了$\|u_N\|_{L^2(\Omega)}$ 的一致有界性，与（91）中一样。 □

4 迭代函数系统与 n-吸引子

现在，我们将讨论一类非均匀体，并称之为“n-吸引子”（沿用 [16]的说法）。我们先回顾迭代函数系统（IFS）的概念及一些相关概念。我们的参考资料包括 Hutchinson 的开创性论文 [48], 和 Falconer 的教科书[34]。我们注意到，IFS 的标准定义涉及一般的压缩映射；而这里我们只考虑压缩相似变换。下文中，$\dim_{\mathrm{H}}(E)$表示集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的豪斯多夫维数（见 [34, §3]）。

定义 4.1 (迭代函数系统（IFS）)。设 $n, M \in \mathbb{N}$ 满足 $M \geq 2$。迭代函数系统 （*IFS*）是由映射构成的集合族 $\{s_1, s_2, \ldots, s_M\}$，对于每个$i = 1, \ldots, M$, s_i： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是如下形式的压缩相似变换

$$s_i(x) = \rho_i A_i x + \delta_i, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{94}$$

其中压缩因子为 $\rho_i \in (0,1)$， $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$为正交矩阵，$\delta_i \in \mathbb{R}^n$为平移向量。

定义 4.2 （开集条件（OSC））。若存在非空开集 $O \subset \mathbb{R}^n$，使得对于所有满足 $i \neq j$ 的 $i, j = 1, \ldots M$，都有 *IFS* $\{s_1, \ldots, s_M\}$ 满足开集条件（*OSC*），即 $s_i(O) \cap s_j(O) = \emptyset$，且 $\cup_{i=1}^{M} s_i(O) \subset O$。

定理 4.3 （IFS 吸引子与分形维数）。设 $\{s_i\}_{i=1}^{M}$ 是一个 *IFS*。则存在唯一的非空紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$, 称为该 *IFS* 的吸引子，使得

$$K = \bigcup_{i=1}^{M} s_i(K). \tag{95}$$

此外，若开集条件成立，则 K 的豪斯多夫维数 $d = \dim_{\mathrm{H}}(K)$ 等于该 *IFS* 的相似维数，后者定义为下列方程的唯一正解

$$\sum_{i=1}^{M} \rho_i^d = 1. \tag{96}$$

证明。见 [48,定理 3.1、定理 5.3]。 □

定义 4.4 （n-吸引子）。若非空紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是某个满足开集条件的 *IFS* 的吸引子，且其相似维数（即 (96) 的解）以及 K 的豪斯多夫维数均等于 n，则称 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为 n-吸引子。

n-吸引子的概念与“分形镶嵌”的概念密切相关——例如参见 [6, 43, 73, 50, 10]。特别地，“齐次” n-吸引子（即所有压缩因子均相等的吸引子）的集合，与 [6] 中定义的紧“M-rep 铺砌”集合重合（见 [16, 注 2.3]）。我们将在 §5 中研究一些 n-吸引子的例子。关于 n-吸引子的一些基本性质，可参见 [16, 命题 2.8]；这里我们着重介绍一些对我们尤其重要的性质。

命题 *4.5*。设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 n-吸引子，并设 $\Omega := K^\circ$。则： $|K| > 0$; $\Omega \neq \emptyset$; $\Omega = K$; $\partial\Omega = \partial K$; $\dim_{\mathrm{H}}(\partial K) = \dim_{\mathrm{H}}(\partial\Omega) \in [n-1, n)$, 因此特别有 $|\partial K| = |\partial\Omega| = 0$; 开集条件成立，且 $O = \Omega$; $|s_i(K) \cap s_j(K)| = 0$ 对 $i \neq j \in \{1, \ldots, M\}$。

以下结果也与此相关，该结果在 [16], 中得到证明，讨论的是 n-吸引子内部的特征函数的乘子性质。我们注意到，对于命题 4.6 中考虑的情形，判定 $\chi_\Omega \in \mathfrak{M}(H^{s_\Omega}(\mathbb{R}^n))$ 是否成立似乎是一个未解决问题。

命题 4.6 ([16, 推论 3。4])。令 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 表示一个 n-吸引子的内部。则$s_\Omega = (n-d)/2$ 以及 $\chi_\Omega \in \mathfrak{M}(H^s(\mathbb{R}^n))$ 对于 $|s| < (n-d)/2$成立，其中 $d :=$维数$_{\mathrm{H}}(\partial\Omega) \in [n-1, n)$是 $\partial\Omega$的豪斯多夫维数。

结合命题 4.6 与第 §3 节的结果，当非均匀体 K 为 n-吸引子时，我们可以为 Galerkin VIM 推导出半离散收敛结果。作为示例，我们考虑 $\mathfrak{m}$ 在该非均匀体上为常数的情形，如图 1 所示。结合推论 3.10、命题 4.6 和注 2.12(vi)即可得到以下结果。

推论 4.7 (半离散收敛于一个 n-吸引子)。 设 Ω 为 n-吸引子的内部，设 $\mathfrak{m} = m\chi_\Omega$，其中 $m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 且 $\Im[m] \geq 0$，并设 $d :=$ 维数 $_{\mathrm{H}}(\partial\Omega)$。则

$$s_{\mathfrak{m}} = s_\Omega = \tfrac{n-d}{2} \quad and \quad s_{\mathfrak{m},\Omega} = \infty, \tag{97}$$

以下算子有界可逆：

$$\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}_\Omega : H^s(\Omega) \to H^s(\Omega), \qquad 0 \leq s \leq (\tfrac{n-d}{2})^- + 2, \tag{98}$$
$$\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}_\Omega^* : H^s(\Omega) \to H^s(\Omega), \qquad 0 \leq s \leq (\tfrac{n-d}{2})^- + 2, \tag{99}$$
$$\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}_\Omega^* : H^s_{\mathrm{ze}}(\Omega) \to H^s_{\mathrm{ze}}(\Omega), \qquad 0 \leq s \leq (\tfrac{n-d}{2})^-, \tag{100}$$

并且推论 *3.10* 的结论在以下条件下成立

$$s = t = (\tfrac{n-d}{2})^- + 2. \tag{101}$$

特别地，对于 Ω 上的 h-版本 *VIM*，我们有 $O(h^{\min(p+1,(\frac{n-d}{2})^- +2)})$ 误差，其中 u，以及 $O(h^{2\min(p+1,(\frac{n-d}{2})^- +2)})$ 误差，其中 $J^{\mathrm{FFP}}_{\hat{x}}$ 和 $J^{\mathrm{SF}}_{x_0}$（其含义见例 *3.12* 前的说明）。

注释 4.8 (包围盒上的半离散收敛)。 设 $\mathfrak{m}$、Ω 和 d 如推论 *4.7* 中所述。设 $\underline{\Omega'}$ 是一个有界开集（例如包围盒），满足 $\Omega \subset \Omega'$。那么，根据命题 *4.6* 和注释 *2.12*(vii)

$$s_{\mathfrak{m},\Omega'} = s_\Omega = \tfrac{n-d}{2}, \tag{102}$$

以下算子有界可逆：

$$\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}_{\Omega'} : H^s(\Omega') \to H^s(\Omega'), \qquad 0 \leq s \leq (\tfrac{n-d}{2})^- + 2, \tag{103}$$
$$\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}^*_{\Omega'} : H^s(\Omega') \to H^s(\Omega'), \qquad 0 \leq s \leq (\tfrac{n-d}{2})^-, \tag{104}$$
$$\mathcal{I} - k^2\mathcal{V}^*_{\Omega'} : H^s_{\mathrm{ze}}(\Omega') \to H^s_{\mathrm{ze}}(\Omega'), \qquad 0 \leq s \leq (\tfrac{n-d}{2})^-. \tag{105}$$

并且，将 Ω 替换为Ω' 后，推论 *3.10* 的结论在以下条件下成立

$$s = (\tfrac{n-d}{2})^- + 2 \quad and \quad t = (\tfrac{n-d}{2})^-. \tag{106}$$

特别地，对于Ω' 上的 h-版本 *VIM*，我们有 $O(h^{\min(p+1,(\frac{n-d}{2})^- +2)})$ 误差（针对 u）以及 $O(h^{\min(p+1,(\frac{n-d}{2})^- +2)+(\frac{n-d}{2})^-})$ 误差（针对 $J^{\mathrm{FFP}}_{\hat{x}}$ 和 $J^{\mathrm{SF}}_{x_0}$；其含义见例 *3.12* 之前的说明）。

将此结果与推论 *4.7* 中的结果比较可知，对于这一 $\mathfrak{m}$ 选择，在Ω 上应用我们的 *Galerkin VIM*（采用“几何相容”方法，如图 *3(c)* 所示），与在Ω' 上采用相同方法（采用“包围盒”方法，如图 *3(a)* 所示）相比，线性泛函的收敛速率有所提高。

现在，我们考虑在一个 n-吸引子上实际实现我们的 Galerkin VIM。§4.1 讨论几何相容网格的生成，§4.2 讨论数值求积公式。我们在 §4.3（具体而言，在定理 4.23）中结合这两节的结果，并针对分片常数近似情形，对我们的方法进行全离散误差分析。

4.1 为 n-吸引子划分网格

对于一个 n-吸引子 K，$|K| > 0$ 和 $|s_i(K) \cap s_j(K)| = 0$ 对 $i \neq j \in \{1, \ldots, M\}$成立这一事实通常称为 K 的“自相似性”（例如，参见 [48, §5]）。结合式 (95)，这意味着 K 可以分解为 M 个更小的 K副本的并，且这些副本之间的重叠测度为零。这会使相应的内部 $\Omega := K^\circ$ 分解为 Ω 的M 个互不相交的较小副本，且

$$\left|\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{M} s_i(\Omega)\right| = 0, \qquad s_i(\Omega) \cap s_j(\Omega) = \emptyset,\ i \neq j \in \{1, \ldots, M\}. \tag{107}$$

因此， $\{s_i(\Omega)\}_{i=1}^M$ 构成了一个符合定义 3.2 意义下的 Ω 网格。分解式 (107) 可以递归应用，以生成由与 Ω 相似且直径任意小的单元组成的 Ω 网格。为描述这类网格，我们采用 [48]的向量指标记法。

定义 4.9 (向量指标)。 设 $\{s_i\}_{i=1}^M$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个迭代函数系统。给定 $l \in \mathbb{N}$ 和 $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_l) \in \{1, \ldots, M\}^l$，我们定义

$$s_{\boldsymbol{m}}(x) := s_{m_1} \circ s_{m_2} \circ \ldots \circ s_{m_l}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{108}$$

它是一个压缩相似变换，其压缩因子为

$$\rho_{\boldsymbol{m}} := \prod_{i=1}^{l} \rho_{m_i},$$

其中，对于每个 $i = 1, \ldots, l$， ρ_{m_i} 表示映射 s_{m_i} 的压缩因子。给定 $E \subset \mathbb{R}^n$，我们定义 $E_{\boldsymbol{m}} := s_{\boldsymbol{m}}(E)$。当 $l = 1$ 时，即 $\boldsymbol{m} = (i)$ 对某个 $i \in \{1, \ldots N\}$ 成立时，我们将 $s_{\boldsymbol{m}}(E) = s_i(A)$ 简记为 E_i。为方便起见，我们还定义 $s_\emptyset$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的恒等映射， $\rho_\emptyset := 1$ 且 $E_\emptyset := E$。最后，我们定义

$$\mathcal{I} := \{\emptyset\} \cup \left(\bigcup_{l \in \mathbb{N}} \{1, \ldots, M\}^l \right). \tag{109}$$

在分析中，我们将反复用到以下显然的缩放结果。

引理 4.10 (缩放性质)。 设 K 是一个具有迭代函数系统 $\{s_i\}_{i=1}^M$ 的 n-吸引子，且 Ω: $=K^\circ$。那么，对于任意 $\boldsymbol{m} \in \mathcal{I}$,

$$\operatorname{diam}(\Omega_{\boldsymbol{m}}) = \rho_{\boldsymbol{m}} \operatorname{diam}(\Omega) \tag{110}$$

and

$$|\Omega_{\boldsymbol{m}}| = \rho_{\boldsymbol{m}}^n |\Omega| = \left(\frac{\operatorname{diam}(\Omega_{\boldsymbol{m}})}{\operatorname{diam}(\Omega)} \right)^n |\Omega|. \tag{111}$$

我们将重点关注以下定义中描述的拟一致网格。

定义 4.11 (L_h 指标集与 L_h 网格)。 设 K 为一个 n-吸引子，且 $\Omega := K^\circ$。给定 $h > 0$，我们定义 L_h 指标集 为 $L_h(\Omega) = \{\emptyset\}$，当 $h \geq \operatorname{diam}(\Omega)$ 时，并定义为

$$L_h(\Omega) := \{\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_l) \in \mathcal{I} : \operatorname{diam}(\Omega_{\boldsymbol{m}}) \leq h \text{ and } \operatorname{diam}\left(\Omega_{(m_1, \ldots, m_{l-1})}\right) > h\} \tag{112}$$

当 $h < \operatorname{diam}(\Omega)$时，将$\Omega_{(m_1, \ldots, m_{l-1})}$ 替换为 $\Omega_\emptyset = \Omega$，当 $l = 1$时。我们将 $\{\Omega_{\boldsymbol{m}}\}_{\boldsymbol{m} \in L_h(\Omega)}$称为 L_h 网格Ω的网格。

命题 4.12 (L_h 网格性质)。 设 K 为一个 n-吸引子，$\Omega := K^\circ$ 且

$$\rho_{\min} := \min_{i=1, \ldots, M} \rho_i. \tag{113}$$

假设 $h \in (0, \operatorname{diam}(\Omega)]$。则该 L_h 网格 $\{\Omega_{\boldsymbol{m}}\}_{\boldsymbol{m} \in L_h(\Omega)}$ 是 Ω 的一个网格（依定义 *3.2* 的含义）。此外，该网格的单元满足

$$\rho_{\min} h < \operatorname{diam}(\Omega_{\boldsymbol{m}}) \leq h, \qquad \boldsymbol{m} \in L_h(\Omega), \tag{114}$$

and

$$\left(\frac{\rho_{\min} h}{\operatorname{diam}(\Omega)} \right)^n |\Omega| \leq |\Omega_{\boldsymbol{m}}| \leq \left(\frac{h}{\operatorname{diam}(\Omega)} \right)^n |\Omega|, \qquad \boldsymbol{m} \in L_h(\Omega), \tag{115}$$

且网格中的单元数 $N = \#L_h(\Omega)$ 满足

$$\left(\frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{h} \right)^n \leq N < \left(\frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{\rho_{\min} h} \right)^n. \tag{116}$$

证明。 由反复应用 (107) 可知， $\{\Omega_{\boldsymbol{m}}\}_{\boldsymbol{m}\in L_h(\Omega)}$ 构成 Ω 的一个网格——参见 [49, 第 5.1 节1] 中的结果。(114) 中的界由 $L_h(\Omega)$ 的定义立即得出；由于

$$|\Omega| = \sum_{\boldsymbol{m}\in L_h(\Omega)} |\Omega_{\boldsymbol{m}}| = |\Omega| \sum_{\boldsymbol{m}\in L_h(\Omega)} \left(\frac{\operatorname{diam}(\Omega_{\boldsymbol{m}})}{\operatorname{diam}(\Omega)}\right)^n, \qquad \text{so that} \quad 1 = \sum_{\boldsymbol{m}\in L_h(\Omega)} \left(\frac{\operatorname{diam}(\Omega_{\boldsymbol{m}})}{\operatorname{diam}(\Omega)}\right)^n,$$

由 (114) 可得

$$N\left(\frac{\rho_{\min} h}{\operatorname{diam}(\Omega)}\right)^n \le 1 = \sum_{\boldsymbol{m}\in L_h(\Omega)} \left(\frac{\operatorname{diam}(\Omega_{\boldsymbol{m}})}{\operatorname{diam}(\Omega)}\right)^n \le N\left(\frac{h}{\operatorname{diam}(\Omega)}\right)^n,$$

由此立即得到 (116)。 □

实际上， L_h 网格可以通过利用迭代函数系结构对 Ω 反复细分来构造——参见 [49, 第 5.1 节中给出的算法。1], 该算法保证在有限步内终止，步数随 h [49,备注 5.1] 中所述的量减小而呈对数增长。此外，由于 L_h 网格中单元的直径只能取自一个离散集合（即 Ω 的直径乘以压缩因子的所有可能幂次乘积，参见 (110)），因此不同的 L_h网格至多有可数多个。事实上，对于任意 n吸引子，都存在一个递减序列 $(h_l)_{l\in\mathbb{N}_0}$，当 $l\to\infty$ 时趋于零，且满足 $h_0 = \operatorname{diam}(\Omega)$，使得对于每个 $l\in\mathbb{N}$， L_{h_l} 网格都是$L_{h_{l-1}}$ 网格的严格细化，并且

$$L_h(\Omega) = L_{h_l}(\Omega) \quad \text{for } h\in[h_l, h_{l-1}). \tag{117}$$

我们强调， L_h 网格由一系列单元组成，其边界通常是分形的 l.
图2中给出了一些示例。

4.2 数值求积——分片常数情形

为实现我们的 VIM，我们需要计算线性系统 (51) 中出现的积分 (52)。为简单起见，我们关注非均匀体上的折射率为常数的情形，其中

$$\mathfrak{m} = m\chi_\Omega, \qquad \text{for some } m\in\mathbb{C} \text{ with } \Im[m]\ge 0. \tag{118}$$

我们还将讨论范围限定在采用分片常数基函数 ($p=0$) 的 h 版本 VIM。

在这些假设下，若 L_h 网格中的单元按 $\{\Omega_{\boldsymbol{m}(1)}, \ldots, \Omega_{\boldsymbol{m}(N)}\}$ 编号，其中 $N = \#L_h(\Omega)$（回顾 (116)），我们使用以下基： V_N

$$\psi_j = |\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}|^{-1/2}\chi_{\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}}, \qquad j = 1,\ldots,N. \tag{119}$$

因此，待计算的积分（52）为：对于 $i,j=1,\ldots,N$,

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \frac{mk^2}{|\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}|^{1/2}|\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}|^{1/2}} \int_{\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}}\int_{\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}} \Phi(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x, \qquad g_i = \frac{1}{|\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}|^{1/2}} \int_{\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}} u^{\mathrm{i}}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{120}$$

我们对(120)的求值方法是将奇异性消减与 [37, 38] 的自相似技术相结合，从而将矩阵 A 中出现的（弱）奇异积分写成“常规”积分（即具有光滑被积函数的积分）。这些常规积分可用复合重心求积公式求值。以下定义和结果来自 [37, 38],中定义和结果的特例，其中考虑了更一般的分形上的测度。我们指出， [49] 中最近提出并分析的高阶求积公式可在下文中替代复合重心求积公式，但至少对于分片常数情形，复合重心求积公式已足以满足我们的目的。

4.2.1 复合重心规则

我们首先回顾 [37]中所考虑的复合重心求积公式的定义与收敛理论。设 K 是一个 n-吸引子，并令$\Omega := K^\circ$。给定可测函数 $F:$ 凸包$(\Omega) \to \mathbb{C}$ 以及某个 $h_q > 0$，我们定义该积分的复合重心求积公式近似

$$I_\Omega[F] := \int_\Omega F(x)\,\mathrm{d}x \tag{121}$$

by

$$Q_\Omega^{h_q}[F] := \sum_{\boldsymbol{m}\in L_{h_q}(\Omega)} |\Omega_{\boldsymbol{m}}|\, F(x_{\boldsymbol{m}}), \tag{122}$$

其中，对于 $\boldsymbol{m} \in \mathcal{I}$， $x_{\boldsymbol{m}}$ 是 $\Omega_{\boldsymbol{m}}$的重心，定义为

$$x_{\boldsymbol{m}} := \frac{1}{|\Omega_{\boldsymbol{m}}|}\int_{\Omega_{\boldsymbol{m}}} x\,\mathrm{d}x. \tag{123}$$

我们回顾一下，式（122）中出现的权重 $|\Omega_{\boldsymbol{m}}|$ 的公式已在式（111）中给出。可以证明（见 [37,命题 3.3]）

$$x_{\boldsymbol{m}} = s_{\boldsymbol{m}}(x_\Omega),$$

其中 x_Ω 表示 Ω 的重心，其公式为

$$x_\Omega = \left[I - \sum_{j=1}^{M} \rho_j^{n+1} A_j\right]^{-1} \left(\sum_{j=1}^{M} \rho_j^n \delta_j\right), \tag{124}$$

其中 I 表示 $n \times n$ 单位矩阵。

现在假设 K' 是另一个 n-吸引子，$\Omega' := (K')^\circ$，且 $G : \mathrm{Hull}(\Omega)\times\mathrm{Hull}(\Omega') \to \mathbb{C}$是可测的。那么对于二重积分

$$I_{\Omega,\Omega'}[G] := \int_\Omega\int_{\Omega'} G(x,x')\,\mathrm{d}x\mathrm{d}x' \tag{125}$$

我们定义迭代复合重心近似

$$Q_{\Omega,\Omega'}^{h_q}[G] := \sum_{\boldsymbol{m}\in L_{h_q}(\Omega)}\ \sum_{\boldsymbol{m}'\in L_{h_q}(\Omega')} |\Omega_{\boldsymbol{m}}||\Omega'_{\boldsymbol{m}'}|\, G(x_{\boldsymbol{m}}, x'_{\boldsymbol{m}'}). \tag{126}$$

下述定理汇集了 [37, 第 3], 节的结果，在被积函数满足适当光滑性假设的情况下，为上述近似给出误差估计。此处及后文中，我们定义，对于 $h_q > 0$,

$$\mathrm{Hull}(\Omega, h_q) := \bigcup_{\boldsymbol{m}\in L_{h_q}(\Omega)} \mathrm{Hull}(\Omega_{\boldsymbol{m}}) \subset \mathrm{Hull}(\Omega).$$

命题 4.13. 设 $h_q > 0$，并假设 $f : U \to \mathbb{C}$ 二阶可微，其中 U是包含凸包$(\Omega\ h_q)$的某个开集。那么

$$\left|I_\Omega[F] - Q_\Omega^{h_q}[F]\right| \le \frac{nh_q^2}{2}|\Omega| \sup_{x\in\mathrm{Hull}(\Omega,h_q)} \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ |\alpha|=2}} \left|D^\alpha F(x)\right|. \tag{127}$$

假设 $G:\ U \times U' \to \mathbb{C}$二阶可微，其中 U如上所述，且 U'是包含凸包(Ω', h_q)的某个开集。那么

$$\left|I_{\Omega,\Omega'}[G] - Q_{\Omega,\Omega'}^{h_q}[G]\right| \le 2nh_q^2|\Omega||\Omega'| \sup_{\substack{x\in\mathrm{Hull}(\Omega,h_q)\\ y\in\mathrm{Hull}(\Omega',h_q)}} \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{2n}\\ |\alpha|=2}} \left|D^\alpha G(x,y)\right|. \tag{128}$$

在较弱的假设下，即 $G:$ 凸包$(\Omega\ h_q)\times$凸包$(\Omega', h_q) \to \mathbb{C}$ 是利普希茨连续 *us* 其 *Lipschitz* 常数为 $\mathcal{L}_{\mathrm{Hull}(\Omega,h_q)\times\text{凸包}(\Omega',\ h_q)}[G]$，我们有

$$\left|I_{\Omega,\Omega'}[G] - Q_{\Omega,\Omega'}^{h_q}[G]\right| \le \sqrt{2}h_q|\Omega||\Omega'|\mathcal{L}_{\mathrm{Hull}(\Omega,h_q)\times\mathrm{Hull}(\Omega',h_q)}[G]. \tag{129}$$

证明。 见 [37,定理 3.6 和 3.7][1]。 □

在我们的 VIM 实现中，我们将这些求积规则应用于网格单元上的积分。对每一个 $\boldsymbol{m} \in \mathcal{I}$，网格单元 $\Omega_{\boldsymbol{m}}$ 是 $K_{\boldsymbol{m}}$ 的内部，而后者是迭代函数系统 $\{s_{\boldsymbol{m}} \circ s_i \circ s_{\boldsymbol{m}}^{-1}\}_{i=1}^{M}$ 的吸引子；该迭代函数系统满足开集条件，因为 $\{s_i\}_{i=1}^{M}$ 满足。此外，对任意 $\boldsymbol{p} \in \mathcal{I}$，我们有 $(\Omega_{\boldsymbol{m}})_{\boldsymbol{p}} = \Omega_{(\boldsymbol{m},\boldsymbol{p})}$，其中 $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{p})$ 表示 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 的连接（其中 $(\emptyset,\boldsymbol{p}) := \boldsymbol{p}$，且 $(\boldsymbol{m},\emptyset) := \boldsymbol{m}$）。另外，$L_{h_q}(\Omega_{\boldsymbol{m}}) = L_{h_q/\rho_{\boldsymbol{m}}}(\Omega)$。因此，对于 $F:$ 凸包$(\Omega_{\boldsymbol{m}}) \to \mathbb{C}$ 以及 $h_q > 0$，积分 $I_{\Omega_{\boldsymbol{m}}}[F]$ 的复合重心求积公式近似由下式给出

$$Q_{\Omega_{\boldsymbol{m}}}^{h_q}[F] = \sum_{\boldsymbol{p} \in L_{h_q/\rho_{\boldsymbol{m}}}(\Omega)} |\Omega_{(\boldsymbol{m},\boldsymbol{p})}|\, F(x_{(\boldsymbol{m},\boldsymbol{p})}).$$

同样，若 $\boldsymbol{n} \in \mathcal{I}$，则对于 $G:$ 凸包$(\Omega_{\boldsymbol{m}}) \times$凸包$(\Omega_{\boldsymbol{n}}) \to \mathbb{C}$ 我们对积的近似 al $I_{\Omega_{\boldsymbol{m}},\ \Omega_{\boldsymbol{n}}}[G]$定义为

$$Q_{\Omega_{\boldsymbol{m}},\Omega_{\boldsymbol{n}}}^{h_q}[G] = \sum_{\boldsymbol{p} \in L_{h_q/\rho_{\boldsymbol{m}}}(\Omega)} \sum_{\boldsymbol{q} \in L_{h_q/\rho_{\boldsymbol{n}}}(\Omega)} |\Omega_{(\boldsymbol{m},\boldsymbol{p})}|\, |\Omega_{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{q})}|\, G(x_{(\boldsymbol{m},\boldsymbol{p})}, x_{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{q})}).$$

计算式 (120) 中的矩阵元素 A_{ij} 时，我们根据 $K_{\boldsymbol{m}(i)} = \Omega_{\boldsymbol{m}(i)}$ 与 $K_{\boldsymbol{m}(j)} = \Omega_{\boldsymbol{m}(j)}$ 是否不相交，采用不同的方法。为区分这两种情况，我们引入以下指标集:

$$\mathcal{I}_{\mathrm{reg}} := \{(i,j) \in \{1,\dots,N\}^2 : K_{\boldsymbol{m}(i)} \cap K_{\boldsymbol{m}(j)} = \emptyset\}, \qquad \mathcal{I}_{\mathrm{sing}} := \{1,\dots,N\}^2 \setminus \mathcal{I}_{\mathrm{reg}}.$$

4.2.2 常规相互作用

若 $(i,\ j) \in \mathcal{I}_{\mathrm{reg}}$，则式 (120) 中的积分是常规的，可以用复合重心求积公式直接近似。令 $h_r > 0$，我们将此情形下 A_{ij} 的近似定义为

$$\tilde{A}_{ij} := \delta_{ij} - \frac{mk^2}{|\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}|^{1/2}|\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}|^{1/2}} Q_{\Omega_{\boldsymbol{m}(i)},\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}}^{h_r}[\Phi]. \tag{130}$$

为了推导误差估计，我们需要对网格 L_h 作出某种分离性质假设。回顾一下，对于给定的 $\boldsymbol{m} \in \mathcal{I}$，$K_{\boldsymbol{m}}$ 等于开集 $\Omega_{\boldsymbol{m}}$的闭包。

假设 4.14 （分离假设）。 我们假设:

(i) 如果 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n} \in \mathcal{I}$ *and* $K_{\boldsymbol{m}} \cap K_{\boldsymbol{n}} = \emptyset$，那么 凸包$(K_{\boldsymbol{m}}) \cap$凸包$(K_{\boldsymbol{n}}) = \emptyset$; *(ii)* 存在一个常数 $C_{\mathrm{sep}} > 0$，使得若 $h \in (0,$ 直径$(K)]$, $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n} \in L_h(\Omega)$ *and* $K_{\boldsymbol{m}} \cap K_{\boldsymbol{n}} = \emptyset$，则 dist(凸包$(K_{\boldsymbol{m}})$,凸包$(K_{\boldsymbol{n}})) \geq C_{\mathrm{sep}} h$。

我们还需要一个关于基本解 Φ 的正则性结果。在 [37, 引理 5.1]中已证明，对于 $n = 2,3$, 存在一个常数 $C_n > 0$, 它仅依赖于 n，使得

$$|D^{\alpha}\Phi(x,y)| \leq C_n \frac{\left(1 + (k|x-y|)^{(n+1)/2}\right)}{|x-y|^n}, \qquad \forall x \neq y, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^{2n},\ |\alpha| = 2. \tag{131}$$

引理 4.15 (不相交求积误差)。 假设假设 *4.14(i)* 成立。则存在一个常数 $C_{\mathrm{dis}} > 0$，使得若 $h \in (0,$直径$(K)]$ 且 $\boldsymbol{m}(i)\ \boldsymbol{m}(j) \in L_h(K)$ 是˜，且满足 $K_{\boldsymbol{m}(i)} \cap K_{\boldsymbol{m}(j)} = \emptyset$，则由 (120) 和 (130) 定义的 A_{ij} 和 A_{ij} 满足

$$|A_{ij} - \tilde{A}_{ij}| \leq \frac{C_{\mathrm{dis}} h_r^2 h^n}{(d_{ij})^n}, \qquad \forall h_r > 0, \tag{132}$$

其中

$$d_{ij} := \mathrm{dist}(\mathrm{Hull}(K_{\boldsymbol{m}(i)}), \mathrm{Hull}(K_{\boldsymbol{m}(j)})).$$

[1]我们注意到， [37, 定理 3.7(iii)] 的最终界缺少一个因子 $\mu(K)\mu(K')$。

证明。 我们首先注意到

$$|A_{ij} - \tilde{A}_{ij}| = \frac{|m|k^2}{|\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}|^{1/2}|\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}|^{1/2}} \left| I_{\Omega_{\boldsymbol{m}(i)},\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}}[\Phi] - Q^{h_j}_{\Omega_{\boldsymbol{m}(i)},\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}}[\Phi] \right|. \tag{133}$$

假设 4.14(i)意味着存在两个不相交开集 U，$U' \subset \mathbb{R}^n$ 使得 Hull($\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}$) $\subset U$ 且 Hull($\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}$) $\subset U'$。由于 $\Phi(x,\ y)$ 在远离 $x = y$ 处的光滑性，我们有 $\Phi:\ U \times U' \to \mathbb{C}$ 无穷次可微。此外，由(131)以及函数 $r \mapsto (1 + r^{(n+1)/2})/r^n$ 在$(0,\ \infty)$上递减这一事实，可得

$$\sup_{\substack{x\in \mathrm{Hull}(\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}) \\ y\in \mathrm{Hull}(\Omega_{\boldsymbol{m}(j)})}} \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{2n} \\ |\alpha|=2}} |D^\alpha \Phi(x,y)| \le C_n \frac{\left(1 + (kd_{ij})^{(n+1)/2}\right)}{(d_{ij})^n}.$$

因此，由(128)可知，对于 $h_r > 0$,

$$|A_{ij} - \tilde{A}_{ij}| \le \frac{2n|m|k^2h_r^2|\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}|^{1/2}|\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}|^{1/2}C_n\left(1 + (kd_{ij})^{(n+1)/2}\right)}{(d_{ij})^n}, \tag{134}$$

由此，根据(111)、(114)以及 $d_{ij} \le$diam(Ω)这一事实，可得(132)，其中

$$C_{\mathrm{dis}} = \frac{2n|m|k^2|\Omega|C_n(1 + (k\,\mathrm{diam}(\Omega))^{(n+1)/2})}{(\mathrm{diam}\,\Omega)^n}.$$

□

4.2.3 奇异相互作用

若$(i,\ j) \in \mathcal{I}_{\mathrm{sing}}$，则(120)中的积分是奇异的；为近似 A_{ij}，我们采用奇异性减除方法。将基本解分解为

$$\Phi(x,y) = c_n\Phi_0(x,y) + \Phi_*(x,y), \tag{135}$$

其中

$$c_n := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}, & n = 2, \\ \dfrac{1}{4\pi}, & n = 3, \end{cases} \qquad \Phi_0(x,y) := \begin{cases} \log(|x-y|), & n = 2, \\ \dfrac{1}{|x-y|}, & n = 3, \end{cases} \tag{136}$$

and

$$\Phi_*(x,y) := \Phi(x,y) - c_n\Phi_0(x,y), \tag{137}$$

我们可以将 A_{ij} 分解为

$$A_{ij} = \delta_{ij} - mk^2(c_nG^0_{ij} + G^*_{ij}), \tag{138}$$

其中

$$G^0_{ij} := \frac{I_{\Omega_{\boldsymbol{m}(i)},\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}}[\Phi_0]}{|\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}|^{1/2}|\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}|^{1/2}} \qquad \text{and} \qquad G^*_{ij} := \frac{I_{\Omega_{\boldsymbol{m}(i)},\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}}[\Phi_*]}{|\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}|^{1/2}|\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}|^{1/2}}. \tag{139}$$

计算 G^*_{ij} 时，我们采用求积网格宽度为 $h_* > 0$ 的复合重心求积公式，得到一个近似

$$\tilde{G}^*_{ij} := \frac{Q^{h_*}_{\Omega_{\boldsymbol{m}(i)},\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}}[\Phi_*]}{|\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}|^{1/2}|\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}|^{1/2}}. \tag{140}$$

根据 [37, 式（62）]，存在一个与 k无关的 $C_* > 0$，使得

$$|D^\alpha\Phi_*(x,y)| \le C_*k, \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^2, \quad \forall\alpha \in \mathbb{N}_0^4,\ |\alpha| = 1, \tag{141}$$

这使我们能够证明以下误差估计。

引理 4.16。 存在一个常数 $C^*_{\mathrm{sing}} > 0$，使得若 $h \in (0,\ \mathrm{diam}(K)]$ 且 $\boldsymbol{m}(i)\ \boldsymbol{m}(j) \in L_h(K)$，则由 (139) 和 (140) 定义的 G^*_{ij} 和 G^*_{ij} 满足

$$|G^*_{ij} - \tilde{G}^*_{ij}| \le C^*_{\mathrm{sing}} h^2 h_*, \qquad \forall h_* > 0. \tag{142}$$

证明。界（141）意味着 Φ_* 在 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ 上满足利普希茨条件，其 Lipschitz 常数为 $C^* k$，因此由（129）可得

$$|G^*_{ij} - \tilde{G}^*_{ij}| \le \sqrt{2}\,|\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}|^{1/2} |\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}|^{1/2} C_* k h_*, \tag{143}$$

由此，根据（111）和（114），可推出（142），其中

$$C^*_{\mathrm{sing}} = \sqrt{2} C_* k \frac{|\Omega|}{(\mathrm{diam}(\Omega))^2}.$$

□

对于 G^0_{ij} 的求值，我们采用 [38] 的方法。为了使该方法适用，我们需要假设定义 n-吸引子 K 的迭代函数系统具有这样的性质：G^0_{ij} 中出现的奇异积分可以通过适当的坐标变换，显式地表示为有限个“典范奇异积分”中的一个，而这些积分应满足一个可逆线性方程组，该方程组的右端项应包含有限个可使用复合重心求积法进行近似的“典范正则积分”。在 [38,§4]中给出了推导此类线性方程组的算法。我们将在下面的假设中对上述陈述作出更精确的说明；完整细节请参阅 [38]。

假设 4.17（典范积分）。 我们假设，将详细介绍于 *[38, §4]* 的算法应用于定义 n-吸引子 K 的迭代函数系统 $\{s_i\}_{i=1}^M$ 时，该算法会终止，并生成如下形式的线性系统

$$\mathcal{A}\boldsymbol{s} = \mathcal{B}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{t}, \tag{144}$$

其中，对于某些 n_s、$n_r \in \mathbb{N}$，

- $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_s \times n_s}$ 已知且可逆；
- $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{n_s \times n_r}$ 已知；
- $\boldsymbol{t} \in \mathbb{C}^{n_s}$ 已知（且仅当 $n = 2$ 时存在）；
- $\boldsymbol{s} = \left(I_{\Omega^{\boldsymbol{a}_1},\ \Omega_{\boldsymbol{b}_1}}[\Phi_0], \ldots, I_{\Omega^{\boldsymbol{a}_{n_s}},\ \Omega_{\boldsymbol{b}_{n_s}}}[\Phi_0]\right) \in \mathbb{C}^{n_s}$ 是由“典范奇异积分”组成的向量，其中，对于每个 $\nu = 1, \ldots, n_s$，均有 $\boldsymbol{a}_\nu$、$\boldsymbol{b}_\nu \in \mathcal{I}$ 和 $K_{\boldsymbol{a}_\nu} \cap K_{\boldsymbol{b}_\nu} \neq \emptyset$；
- $\boldsymbol{r} = \left(I_{\Omega^{\boldsymbol{c}_1},\ \Omega_{\boldsymbol{d}_1}}[\Phi_0], \ldots, I_{\Omega^{\boldsymbol{c}_{n_r}},\ \Omega_{\boldsymbol{d}_{n_r}}}[\Phi_0]\right) \in \mathbb{C}^{n_r}$ 是一个“标准正则积分”向量，其中 $\boldsymbol{c}_\eta$、$\boldsymbol{d}_\eta \in \mathcal{I}$ 和 $K_{\boldsymbol{c}_\eta} \cap K_{\boldsymbol{d}_\eta} = \emptyset$ 分别对应每个 $\eta = 1, \ldots, n_r$。

我们还假设，若 $h \in (0、\mathrm{diam}(K)]$ 和 $\boldsymbol{m}(i)\ \boldsymbol{m}(j) \in L_h(K)$ 满足 $K_{\boldsymbol{m}(i)} \cap K_{\boldsymbol{m}(j)} \neq \emptyset$，则存在 $\nu \in \{1, \ldots, n_s\}$、一个置换 $\Pi\colon \{i, j\} \to \{i, j\}$，以及一个相似变换 $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，使得 $T(K_{\boldsymbol{a}_\nu}) = K_{\boldsymbol{m}(\Pi(i))}$，$T(K_{\boldsymbol{b}_\nu}) = K_{\boldsymbol{m}(\Pi(j))}$。

为说明假设 4.17 的重要性，我们注意到，若 $\boldsymbol{m}(i)\ \boldsymbol{m}(j) \in L_h(K)$ 满足 $K_{\boldsymbol{m}(i)} \cap K_{\boldsymbol{m}(j)} \neq \emptyset$，且 ν, Π 和 T 如假设 4.17 最后一部分所述，则 G^0_{ij} 可通过变量替换表示为典范奇异积分 $I_{\Omega_{\boldsymbol{a}_\nu},\ \Omega_{\boldsymbol{b}_\nu}}[\Phi_0]$。具体而言，假设假设 4.17 中的相似变换 T 具有如下形式：$T(x) = \rho_T A_T x + \delta_T$，其中 $\rho_T > 0$、正交的 $A_T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $\delta_T \in \mathbb{R}^n$ 为某些量。那么，初等论证（参见 [38, 命题 3.2]）表明

$$\rho_T = \frac{\rho_{\boldsymbol{m}(\Pi(i))}}{\rho_{\boldsymbol{a}_\nu}} = \frac{\rho_{\boldsymbol{m}(\Pi(j))}}{\rho_{\boldsymbol{b}_\nu}} \tag{145}$$

and

$$G^0_{ij} = \frac{1}{|\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}|^{1/2} |\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}|^{1/2}} \begin{cases} \rho_T^4 \left(I_{\Omega_{\boldsymbol{a}_\nu}, \Omega_{\boldsymbol{b}_\nu}}[\Phi_0] + |\Omega_{\boldsymbol{a}_\nu}||\Omega_{\boldsymbol{b}_\nu}| \log(\rho_T)\right), & n = 2, \\ \rho_T^5 I_{\Omega_{\boldsymbol{a}_\nu}, \Omega_{\boldsymbol{b}_\nu}}[\Phi_0], & n = 3. \end{cases} \tag{146}$$

根据 (144)，典范奇异积分 $I_{\Omega_{\boldsymbol{a}_\nu},\,\Omega_{\boldsymbol{b}_\nu}}[\Phi_0]$ 是向量的第 ν 个分量

$$\boldsymbol{s} = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{t}), \tag{147}$$

并且，为了获得 $\boldsymbol{s}$ 各分量的数值近似，我们将公式 (147) 与向量 $\boldsymbol{r}$ 中常规积分的数值近似相结合。令 $\tilde{\boldsymbol{r}} := \left[Q^{h_s}{}_{\Omega^{\mathrm{c}}1,\Omega_{\boldsymbol{d}_1}}[\Phi_0], \ldots, Q^{h_s}{}_{\Omega^{\mathrm{c}}n_r,\Omega_{\boldsymbol{d}_{n_r}}}[\Phi_0]\right] \in \mathbb{C}^{n_r}$ 表示对 $\boldsymbol{r}$ 的每个单元应用复合重心近似、求积网格宽度为 $h_s > 0$ 时得到的 $\boldsymbol{r}$ 的近似，并令

$$\tilde{\boldsymbol{s}} := \mathcal{A}^{-1}\left[\mathcal{B}\tilde{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{t}\right] \in \mathbb{C}^{n_s}. \tag{148}$$

接着，我们通过将 (146) 中的 $I_{\Omega_{\boldsymbol{a}_\nu},\Omega_{\boldsymbol{b}_\nu}}[\Phi_0]$ 替换为 $\tilde{\boldsymbol{s}}$ 的第 ν 个分量 $\tilde{\boldsymbol{s}}_\nu$，来定义 G^0_{ij} 的一个近似 $\tilde{G}^0_{ij}$，于是

$$\tilde{G}^0_{ij} := \frac{1}{|\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}|^{1/2}|\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}|^{1/2}} \begin{cases} \rho_T^4\left(\tilde{\boldsymbol{s}}_\nu + |\Omega_{\boldsymbol{a}_\nu}||\Omega_{\boldsymbol{b}_\nu}|\log(\rho_T)\right), & n = 2, \\ \rho_T^5\tilde{\boldsymbol{s}}_\nu, & n = 3. \end{cases} \tag{149}$$

引理 4.18。假设 *4.14* 和 *4.17* 成立。则存在一个常数 $C_0 > 0$，使得若 $h \in (0, \mathrm{diam}(K)]$，$\boldsymbol{m}(i)$ $\boldsymbol{m}(j) \in L_h(\Omega)$ 且 $K_{\boldsymbol{m}(i)} \cap K_{\boldsymbol{m}(j)} \neq \emptyset$，则由 (139) 和 (149) 定义的 G^0_{ij} 和 $\tilde{G}^0_{ij}$ 满足

$$|G^0_{ij} - \tilde{G}^0_{ij}| \leq C_0 h^2 h_s^2, \qquad \forall h_s > 0. \tag{150}$$

证明。根据假设 4.17，我们可以针对某个 $\nu \in \{1, \ldots, n_s\}$，用 (146) 表示 G^0_{ij}。随后可以用 (149) 定义 $\tilde{G}^0_{ij}$，从而得到

$$|G^0_{ij} - \tilde{G}^0_{ij}| = \frac{\rho_T^{n+2}}{|\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}|^{1/2}|\Omega_{\boldsymbol{m}(j)}|^{1/2}}|\boldsymbol{s}_\nu - \tilde{\boldsymbol{s}}_\nu|. \tag{151}$$

对 ν 取最大值，并计算 (147) 与 (148) 之差，可得

$$|\boldsymbol{s}_\nu - \tilde{\boldsymbol{s}}_\nu| \leq \|\boldsymbol{s} - \tilde{\boldsymbol{s}}\|_\infty \leq \|\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}\|_\infty \|\boldsymbol{r} - \tilde{\boldsymbol{r}}\|_\infty. \tag{152}$$

根据 [37, 引理 4.1]，可得

$$|D^\alpha \Phi_0(x, y)| \leq \frac{n}{|x - y|^n}, \qquad \forall x \neq y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{N}^4, |\alpha| = 2,$$

将此结果与 (128) 结合，可得

$$\|\boldsymbol{r} - \tilde{\boldsymbol{r}}\|_\infty \leq 2n^2 h_s^2 C_r, \tag{153}$$

其中

$$C_r := \max_{\eta=1,\ldots,n_r} \frac{|\Omega_{\boldsymbol{c}_\eta}||\Omega_{\boldsymbol{d}_\eta}|}{\mathrm{dist}(\mathrm{Hull}(\Omega_{\boldsymbol{c}_\eta}), \mathrm{Hull}(\Omega_{\boldsymbol{d}_\eta}))^2},$$

根据假设 4.14(i)，该值有限。最后，结合 (151)、(152) 和 (153)，并应用 (111) 和 (114)，我们得到 (150)，其中

$$C_0 = \frac{2n^2 C_r \|\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}\|_\infty}{(\rho_{\min})^n \min_{\nu=1,\ldots,n_s}(|\Omega_{\boldsymbol{a}_\nu}|(\mathrm{diam}(\Omega_{\boldsymbol{a}_\nu}))^2)}.$$

□

结合上述结果，在奇异情形下，当 $(i, j) \in \mathcal{I}_{\mathrm{sing}}$ 时，我们定义˜近似 A_{ij} 为 A_{ij}

$$\tilde{A}_{ij} := \delta_{ij} - mk^2(c_n\tilde{G}^0_{ij} + \tilde{G}^*_{ij}), \tag{154}$$

其中，$\tilde{G}^0_{ij}$ 和 $\tilde{G}^*_{ij}$ 由 (149) 和 (140) 定义，并且我们有以下误差估计。**L**

L **引理 4.19.** 假设假设 *4.14* 和 *4.17* 成立。如果 $h \in (0, \mathrm{diam}(K)]$，$\boldsymbol{m}(i)$ $\boldsymbol{m}(j)$ $\in$ $_h(\Omega)$ 且 $K_{\boldsymbol{m}(i)} \cap K_{\boldsymbol{m}(j)} \neq \emptyset$ 那么，由 (120) 和 (154) 定义的 A_{ij} 和 A_{ij} 满足

$$|A_{ij} - \tilde{A}_{ij}| \leq |m|k^2(|c_n|C_0 h_s^2 + C^*_{\mathrm{sing}} h_*)h^2, \qquad \forall h_s > 0, \forall h_* > 0. \tag{155}$$

证明。由（138）、（154）以及引理 4.16 和 4.18 可得该结论。 □

4.2.4 组合估计

˜现在我们可以结合上述结果来估计 $\|A-A\|_2$。

引理 4.20. 假设 *4.14* 和 *4.17* 成立。则存在 $C_1, C_2, C_3 > 0$，使得若 $h \in (0, \operatorname{diam}(K)]$, $h_r > 0$, $h_s > 0$ 且 $h_* > 0$，则

$$\|A-\tilde{A}\|_2 \le \frac{1}{h^{n/2}}\left(C_1 h_r^2 + C_2 h_s^2 h^2 + C_3 h_* h^2\right). \tag{156}$$

证明。 首先注意到

$$\|A-\tilde{A}\|_2^2 \le \|A-\tilde{A}\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^{N} |A_{ij}-\tilde{A}_{ij}|^2 = \sum_{(i,j)\in\mathcal{I}_{\mathrm{sing}}} |A_{ij}-\tilde{A}_{ij}|^2 + \sum_{(i,j)\in\mathcal{I}_{\mathrm{reg}}} |A_{ij}-\tilde{A}_{ij}|^2. \tag{157}$$

为了估计关于 $\mathcal{I}_{\mathrm{sing}}$ 的和，我们将引理 4.19 的结果与对 $\#\mathcal{I}_{\mathrm{sing}}$ 的估计结合起来。定义 $\tau := \left(\frac{\rho_{\min}}{\operatorname{diam}(\Omega)}\right)^n |\Omega| > 0$，并回顾由 (115) 可知，对所有 $\boldsymbol{m} \in L_h(\Omega)$，$|\Omega_{\boldsymbol{m}}| \ge \tau h^n$。固定 $i \in \{1,\dots,N\}$，对于 $r>0$，令 $B_{r,i}$ 表示以 $x_{\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}}$ 为中心、半径为 r 的闭球。由于 $K_{\boldsymbol{m}(i)} \subset B_{h,i}$，若 $(i,j) \in \mathcal{I}_{\mathrm{sing}}$，则 $K_{\boldsymbol{m}(j)} \cap B_{h,i} \neq \emptyset$。由引理 B.1，$\#\{j : K_{\boldsymbol{m}(j)} \cap B_{h,i} \neq \emptyset\} \le 2^n \omega_n \tau^{-1}$，其中 ω_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积。于是，对 $i=1,\dots,N$ 求和，得到

$$\#\mathcal{I}_{\mathrm{sing}} \le 2^n \omega_n \tau^{-1} N. \tag{158}$$

因此，由 (155) 和 (116),

$$\left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{I}_{\mathrm{sing}}} |A_{ij}-\tilde{A}_{ij}|^2\right)^{1/2} \le 2^{n/2}\omega_n^{1/2}\tau^{-1/2}|m|k^2\left(|c_n|C_0 h_s^2 + C^*_{\mathrm{sing}} h_*\right)\left(\frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{\rho_{\min}}\right)^{n/2} h^{(4-n)/2}. \tag{159}$$

对于关于 $\mathcal{I}_{\mathrm{reg}}$ 的求和，我们使用引理 4.15 的结果。再次固定 $i \in \{1,\dots,N\}$。于是，对于每个 $j \in \{1,\dots,N\}$，集合 $K_{\boldsymbol{m}(j)}$ 必须与以下集合中的至少一个相交：$B_{3h,\,i}$ 或 $B_{(q+1)h,\,i} \setminus B_{qh,\,i}$，其中某个 $q \in \{3,\dots q_*\}$ 满足

$$q_* = \left\lceil \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{h} - 1 \right\rceil.$$

再次由引理 B.1，$\#\{j :\, K_{\boldsymbol{m}(j)} \cap B_{3h,\,i} \neq \emptyset\} \le 4^n \omega_n \tau^{-1}$。并且，对于这样的 j，若 $(i,\, j) \in \mathcal{I}_{\mathrm{reg}}$，则由假设 4.14(ii) 可得 $d_{ij} \ge C_{\mathrm{sep}} h$，因此由 (132)

$$|A_{ij}-\tilde{A}_{ij}| \le \frac{C_{\mathrm{dis}} h_r^2}{(C_{\mathrm{sep}})^n}. \tag{160}$$

由引理 B.2，对于 $q \ge 3$，我们有 $\#\{j :\, K_{\boldsymbol{m}(j)} \cap B_{(q+1)h,\,i} \setminus B_{qh,\,i} \neq \emptyset\} \le 3.2^n q^{n-1}\omega_n\tau^{-1}$。并且，对于这样的 j，$d_{ij} \ge (q-2)h$，因为 $\operatorname{Hull}(K_{\boldsymbol{m}(j)}) \cap B_{(q-1)h,\,i} = \emptyset$ 且 $\operatorname{Hull}(K_{\boldsymbol{m}(i)}) \subset B_{h,\,i}$，所以由 (132),

$$|A_{ij}-\tilde{A}_{ij}| \le \frac{C_{\mathrm{dis}} h_r^2}{(q-2)^n}. \tag{161}$$

结合这些观察结果并对 $i = 1,\dots,N$ 求和可得

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{I}_{\mathrm{reg}}} |A_{ij}-\tilde{A}_{ij}|^2 \le N\omega_n\tau^{-1}\left(4^n\left(\frac{C_{\mathrm{dis}}h_r^2}{(C_{\mathrm{sep}})^n}\right)^2 + \sum_{q=3}^{q_*} 3.2^n q^{n-1}\left(\frac{C_{\mathrm{dis}}h_r^2}{(q-2)^n}\right)^2\right), \tag{162}$$

并注意到 $q \ge 3$ 意味着 $q \le 3(q-2)$，因此（其中 ζ 为黎曼ζ函数 n)

$$\sum_{q=3}^{q_*} \frac{q^{n-1}}{(q-2)^{2n}} \le 3^{n-1}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{n+1}} = 3^{n-1}\zeta(n+1),$$

利用式 (116)，我们得到

$$\left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{I}_{\mathrm{reg}}}|A_{ij}-\tilde{A}_{ij}|^2\right)^{1/2}\leq\left(\frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{\rho_{\min}}\right)^{n/2}C_{\mathrm{dis}}\omega_n^{1/2}\tau^{-1/2}\left(\frac{2^n}{(C_{\mathrm{sep}})^n}+6^{n/2}\zeta(n+1)^{1/2}\right)\frac{h_r^2}{h^{n/2}}. \tag{163}$$

最后，将 (159) 和 (163) 与 (157) 合并，并应用 (115)，得到带有以下条件的 (156)

$$C_1=C_{\mathrm{dis}}\omega_n^{1/2}|\Omega|^{-1/2}\left(\frac{2^n}{(C_{\mathrm{sep}})^n}+6^{n/2}\zeta(n+1)^{1/2}\right)\left(\frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{\rho_{\min}}\right)^n,$$

$$C_2=2^{n/2}\omega_n^{1/2}|\Omega|^{-1/2}|m|k^2|c_n|C_0\left(\frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{\rho_{\min}}\right)^n,$$

$$C_3=2^{n/2}\omega_n^{1/2}|\Omega|^{-1/2}|m|k^2C^*_{\mathrm{sing}}\left(\frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{\rho_{\min}}\right)^n.$$

□

4.2.5 右端向量

回顾对于散射问题，给定 $g=u^{\mathrm{i}}|_\Omega$ $h_g>0$，我们将式 (120) 中定义的 $\boldsymbol{g}$ 的各项 g_i 近似为

$$\tilde{g}_i:=\frac{Q^{h_g}_{\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}}[u^{\mathrm{i}}]}{|\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}|^{1/2}}. \tag{164}$$

引理 4.21。假设 u^{i} 在开集 D^{i} 上是 C^∞，且 $K\subset D^{\mathrm{i}}$。那么存在 $h_g>0$ 和 $C_g>0$，使得

$$\|\mathbf{g}-\tilde{\mathbf{g}}\|_2\leq C_gh_g^2,\qquad\forall h_g\in(0,\tilde{h}_g]. \tag{165}$$

证明。根据假设，存在 $\varepsilon>0$，使得 $K_\varepsilon\subset D^{\mathrm{i}}$。此外，我们断言 存在 $h_q>0$，使得对于 $0<h_q\leq h_q$，有 Hull(Ω h_q) $\subset K_\varepsilon$。为此，定义 $D:=d_{\mathrm{H}}(\mathrm{Hull}(K)\ K)=\sup_{x\in\mathrm{Hull}(K)}\inf_{y\in K}|x-y|$，并注意对于 $\boldsymbol{m}\in L_{h_q}(\Omega)$，有 d_{H} (Hull($\Omega_{\boldsymbol{m}}$)，$\Omega_{\boldsymbol{m}}$) $\leq$ ${}^{h_qD}\mathrm{diam}(K)$。因此，对于任意满足 $0<\tilde{h}_q<{}^{\varepsilon}\mathrm{diam}(K)\,D$ 的情形，断言成立。

结合 (120)、(164) 和 (127)，可对每个 $i=1$、.....、N得到 $|g_i-\tilde{g}_i|$ 的一个估计。应用 (111) 和 (116) 后，即得到 (165)，其中

$$C_g=\frac{n|\Omega|^{1/2}}{2(\rho_{\min})^{n/2}}\sup_{x\in\mathrm{Hull}(\Omega,\tilde{h}_g)}\max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^2\\|\alpha|=2}}|D^\alpha u^{\mathrm{i}}(x)|. \tag{166}$$

□

4.2.6 线性泛函

类似地，对于由 (61) 定义的线性泛函 J，给定 $h_J>0$，我们近似其各项 es (80) 中定义的 $\boldsymbol{j}$ 的 j_i 为

$$\tilde{j}_i:=\frac{Q^{h_J}_{\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}}[j]}{|\Omega_{\boldsymbol{m}(i)}|^{1/2}}. \tag{167}$$

引理 4.22. 设 j 在开集 D^J 上为 C^2，且 $K\subset D^{\mathrm{J}}$。则存在 $h_J>0$ 和 $C_J>0$，使得

$$\|\mathbf{j}-\tilde{\mathbf{j}}\|_2\leq C_Jh_J^2,\qquad\forall h_J\in(0,\tilde{h}_J]. \tag{168}$$

证明。证明过程与引理 4.21 相同，其中 h_J 以类似于选择 h_g的方式选取，并且C_J 由（166）给出，但将其中的 u^{i} 替换为 j。 □

4.3 全离散误差分析

现在，我们可以将上述结果与第 §3.3 节的结果结合起来，为我们的分片常数 h-版本 VIM 在 n-吸引子上的全离散误差分析提供依据。

定理 4.23 (全离散分析)。 设 K 是一个 n-吸引子，且 $\Omega := K^\circ$。设 $\mathfrak{m} = m\chi|_\Omega$，其中某个常数 $m \in \mathbb{C}$ 满足 $\Im[m] \geq 0$。设 u^{i} 为入射场，且它在包含 K 的开集 D^{i} 上是 C^∞。设 u 表示散射问题(40)的唯一解。

假设假设 *4.14* 和 *4.17* 成立。作为 $h \to 0$，设 *§4.2* 中引入的求积参数满足

$$h_r = O(h^{\alpha/2+n/4}), \quad h_s = O(h^{\alpha/2-1+n/4}), \quad h_* = O(h^{\alpha-2+n/2}), \quad h_g = O(h^{\alpha/2}), \quad (169)$$

其中 $\alpha = 1$。那么，对于充分小的 $h \in (0, \mathrm{diam}(\Omega)]$，采用 *§4.2* 所述求积规则定义的分片常数 *VIM* 全离散解 $\tilde{u}_N$ 存在，且满足

$$\|u - \tilde{u}_N\|_{L^2(\Omega)} = O(h), \quad h \to 0,$$

˜，且全离散系统矩阵 A 条件良好，其中

$$\kappa_2(\tilde{A}) = \|\tilde{A}\|_2 \|\tilde{A}^{-1}\|_2 = O(1), \quad as \ h \to 0. \quad (170)$$

此外，若(169) 在 $\alpha = 2$ 下成立，并且

$$h_J = O(h), \quad (171)$$

那么，对于远场模式求值泛函，我们有 $|\tilde{J}^{\mathrm{FFP}}_{\hat{x}}(\tilde{u}_N) - J^{\mathrm{FFP}}_{\hat{x}}(u)| = O(h^2)$，且对ˆ$x \in \mathbb{S}^{n-1}$一致成立；对于散射场求值泛函，对每个 $\varepsilon > 0$，都有 $|J^{\mathrm{SF}}_{x_0}(u_N) - J^{\mathrm{SF}}_{x_0}(u)| = O(h^2)$，且对 $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus K_\varepsilon$一致成立。

证明。 结合推论 3.10、定理 3.13、推论 4.7 以及引理 4.20、4.21 和 4.22 即得。

□

注 4.24。 在定理 *4.23* 中，我们仅在 $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus K_\varepsilon$（某个 $\varepsilon > 0$）的情形下，给出了散射场求值泛函的全离散超收敛估计。当 $x_0 \in K$ 时，至少有一个积分 (80) 会出现奇异性，因此引理 *4.22* 不适用，而且近似 (167) 可能不准确（如果 x_0 恰好与复合重心求积公式中的某个求积点重合，甚至可能没有定义）。原则上，可以设计并分析特殊求积规则来处理这种情形。然而，由于这是体积分方程方法普遍存在的一个众所周知的问题，且与非均匀体的分形性无关，我们在此不再进一步探讨。尽管如此，我们注意到，根据注 *3.11*，即使对于 $x_0 \in K$，我们也预期半离散层面会有一定程度的超收敛；而且，即便采用朴素求积，对于 $x_0 \in K$，近似 (167) 在实际应用中通常也表现良好，下面的图 *9(d)-(f)* 所示结果便是如此。

注 4.25. 为了举例说明假设 (169) 和 (171) 在实际中的含义，我们指出，在 $n = 2$的情况下，要以 $\alpha = 2$达到 (169)，并满足 (171)，从而使泛函求值具有最优的 $O(h^2)$ 超收敛，我们需要 $h_r/h, h_s = O(h^{1/2})$和 $h_*/h, h_g/h, h_J/h = O(1)$，其中 $h \to 0$。这意味着，对于涉及 Φ_*、g 和J的各个积分的求值，只需使用固定数量（与h无关）的求积点；而对于在 $K_{\boldsymbol{m}(i)} \cap K_{\boldsymbol{m}(j)} = \emptyset$ 时出现在 A_{ij} 中的各个常规积分，以及 $\boldsymbol{r}$ 中各个常规典范积分的求值，所需的求积点数量则需适度增加（与 $(h^{1/2})^{-2} = h^{-1}$ 成正比），当 $h \to 0$ 时如此。

5 示例

本节考虑一些 n-吸引子的例子 K，第 4 节的结果适用于这些例子。虽然我们的理论既适用于 $n = 2$，也适用于 $n = 3$，但为便于可视化并降低

数值计算的成本，以下我们将讨论范围限制在情形 $n = 2$。[2] 我们重点介绍图 1 所示的三个例子，即 Fudgeflake、Gosper Island 和科赫雪花。每个例子都是一个 2-吸引子，由 $\mathbb{R}^2$ 中的迭代函数系统 $\{s_1, \dots, s_M\}$ 定义，其中 $M \in \mathbb{N}$，且每个 s_i 都是满足式 (94) 的压缩相似变换，详述如下。

为了论证 §4.2 中所述求积规则以及定理 4.23 的全离散误差估计适用，我们需要逐一验证每个示例均满足假设 4.14 和 4.17 的条件。仔细检查每个示例最初的几个 L_h 网格（见图 2a–2c）表明，这一点应当成立。但要严格证明这一点，需要进行一些颇为繁琐（尽管是初等的）的几何论证；由于篇幅所限，我们不在此复述。对于每个示例，我们所提供的是一组基本事实（不加证明地陈述），它们构成了相关论证的主要基础。具体而言，对于每个示例，我们报告假设 4.17 所需的典范奇异积分（由 [38] 中的算法确定），详细说明吸引子的对称性，并给出公式以表明 L_h 网格具有某种格结构。我们还报告了一些结果（部分利用 [80, 定理 2.1], 获得，该定理在下文作为引理 B.3 重新陈述），这些结果保证吸引子包含于某些包围球中。结合格公式，这便可以严格验证假设 4.14 中的分离条件，并保证在假设 4.17 中存在适当的相似变换 T，使给定的奇异相互作用 G_{ij}^0（如式（139）所定义）能够表示为其中一个典范奇异积分（如式（146）所示）。对于感兴趣的读者，关于科赫雪花情形的相关计算的完整细节可参见 [7, §4.2.2]；Fudgeflake 和 Gosper Island 的类似计算虽未在 [7], 中给出，但由于它们的迭代函数系统是齐次的，因而更为简单。

为定义我们的示例，我们引入以下记号

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

表示绕原点在 $\mathbb{R}^2$ 中以角度 $\theta \in [0, 2\pi)$ 逆时针旋转对应的矩阵。我们还定义晶格向量

$$\varepsilon_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_2 := \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = R_{\pi/3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{172}$$

5.1 Fudgeflake

Fudgeflake 由一个齐次迭代函数系统定义，其中 $M = 3$ 以及

$$\begin{aligned} &\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad A_1 = A_2 = A_3 = R_{\pi/6}, \\ &\delta_j = \frac{1}{3} R_{(2j-1)\pi/3}\, \varepsilon_1, \ j = 1, \dots 3. \end{aligned} \tag{173}$$

图2(a)展示了 Fudgeflake 及其前几个 L_h 网格。Fudgeflake 的重心 x_Ω 位于原点，其面积 $|\Omega|$ 等于 $\sqrt{3}/2$，边界维数为 $d = \dim_{\mathrm{H}}(\partial\Omega) = \log 4 / \log 3 \approx 1.26$ [62]。Fudgeflake 具有C_3 对称性，即 Ω 在绕原点旋转 $2\pi/3$的整数倍角度后保持不变。应用引理 B.3（注意到在此情形下 $\varrho(0) = \rho_* = \mu_* = 1/\sqrt{3}$ ）可证明，Fudgeflake 位于以原点为中心、半径为 $(1/2)(1 + 1/\sqrt{3}) \approx 0.789$的球内。

使 (117) 成立的 L_h 网格宽度序列由 $h_l = 3^{-l/2} h_0$, $l \in \mathbb{N}_0$ 给出，其中 h_0 :=dia m(Ω)，相应的网格元素数量满足 $\#L_{h_l}(\Omega) = 3^l$。这些网格具有如下格结构：给定 $l \in \mathbb{N}$，对于 $\boldsymbol{m} \in L_{h_l}(\Omega)$，存在$a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\Omega_{\boldsymbol{m}} = 3^{-l/2} R_{l\pi/6} \Omega + 3^{-(l+1)/2} R_{(l+1)\pi/6} \varepsilon_1 + 3^{-l/2} R_{l\pi/6}(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2). \tag{174}$$

将 [38] 算法应用于 Fudgeflake 迭代函数系统，会得到两个典型的奇异积分，即 $I_{\Omega,\ \Omega}[\Phi_0]$，我们称之为“自相互作用”；以及 $I_{\Omega_1,\ \Omega_2}[\Phi_0]$，我们

[2] 示例 3-吸引子的例子可见于 [75, 85]。我们注意到，术语“2-吸引子”具有不同的 nt 含义，在 [85] 中与其在本文中的含义相比。

称之为"边相互作用"，因为它涉及对相邻单元 Ω_1 和 Ω_2, 上的积分，这两个单元的闭包相交于一条分形曲线上（见图 2a）。

结合上述事实，可以证明假设 4.14 得到满足，其中 $C_{\rm sep} = (2/\sqrt{3}-1)/(h_0\sqrt{3})$；并且假设 4.17 也成立，因为对于任意一对闭包有非空交集的 L_h 网格单元 $\Omega\boldsymbol{m}^{(i)}$ 和 $\Omega\boldsymbol{m}^{(j)}$，要么 $i=j$，此时 G^0_{ij} 可以用自相互作用 $I_{\Omega\text{表示}\Omega}[\Phi_0]$；要么 $i\neq j$，此时 $\Omega\boldsymbol{m}^{(i)}$ 和 $\Omega\boldsymbol{m}^{(j)}$ 必定是晶格 (174) 上的直接相邻单元，因而 G^0_{ij} 可以用边相互作用 $I_{\Omega_1\text{表示}\Omega_2}[\Phi_0]$。

5.2 戈斯珀岛

戈斯珀岛迭代函数系也是齐次的，其中 $M=7$ 和

$$\rho_1=\ldots=\rho_7=\frac{1}{\sqrt{7}},\qquad A_1=\ldots=A_7=R_\vartheta,\quad \vartheta=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right),\quad R_\vartheta=\begin{pmatrix}\frac{5}{2\sqrt{7}} & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} & \frac{5}{2\sqrt{7}}\end{pmatrix}.$$

$$\delta_j=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}R_{(j-1)\pi/3+\vartheta}\,\varepsilon_1,\ j=1,\ldots 6,\ \delta_7=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}. \tag{175}$$

戈斯珀岛及其前几层 L_h 网格的示意图见图 2(b)。其重心 x_Ω 位于原点，面积 $|\Omega|$ 等于 $3\sqrt{3}/2$，边界维数为 $d=\dim_{\rm H}(\partial\Omega)=\log 3/\log\sqrt{7}\approx 1.13$ [62]。戈斯珀岛具有 C_6 对称性，即 Ω 在绕原点旋转 $\pi/3$的整数倍角度后保持不变。应用引理 B.3（注意到在此情形下 $\varrho(0)=1$, $\rho_*=1/\sqrt{7}$, $\mu_*=\sqrt{3}/\sqrt{7}$ ）可知, 戈斯珀岛位于半径为 $(1+\sqrt{7})/(2\sqrt{3})\approx 1.052$、以原点为中心的球内。

满足 (117) 的 L_h 网格宽度序列为 $h_l=7^{-l/2}h_0$, $l\in\mathbb{N}_0$，其中 $h_0:=\operatorname{diam}(\Omega)$，相应的网格元素数量满足 $\#L_{h_l}(\Omega)=7^l$。网格具有以下晶格结构：给定 $l\in\mathbb{N}$，对于 $\boldsymbol{m}\in L_{h_l}(\Omega)$，存在$a_1,a_2\in\mathbb{Z}$，使得

$$\Omega_{\boldsymbol{m}}=7^{-l/2}R_{l\vartheta}\Omega+3^{1/2}7^{-l/2}R_{l\vartheta}(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2). \tag{176}$$

与 Fudgeflake 类似，将 [38] 的算法应用于 Gosper Island 会产生两个典范奇异积分，即自相互作用 $I_{\Omega,\Omega}[\Phi_0]$ 和边相互作用$I_{\Omega_1,\Omega_2}[\Phi_0]$（见图2b）。结合上述事实，可以证明假设 4.14 在 $C_{\rm sep}=(3-(1+\sqrt{7})/\sqrt{3})/(h_0\sqrt{7})$ 下成立，并且假设 4.17 也成立，因为所有奇异相互作用 G^0_{ij} 均可表示为$I_{\Omega,\Omega}[\Phi_0]$ 或 $I_{\Omega_1,\Omega_2}[\Phi_0]$的形式。

5.3 科赫雪花

科赫雪花迭代函数系统是非齐次的，具有 $M=7$ 且

$$\rho_1=\ldots=\rho_6=\frac{1}{3},\ \rho_7=\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad A_1=\ldots=A_6=I,\ A_7=R_{\pi/6},$$
$$\delta_j=\frac{h_0}{3}R_{j\pi/3-\pi/6}\,\varepsilon_1,\ j=1,\ldots 6,\ \delta_7=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \tag{177}$$

其中 $h_0>0$ 是雪花的直径，$\tilde{h}_0:=\sqrt{3}h_0/2$ 是构成其首个预分形近似的等边三角形的边长，如图4所示。在下文第6节的数值结果中，我们取 $h_0=2/\sqrt{3}$，因此 $\tilde{h}_0=1$；但请注意，[38] 取 $h_0=2$，因此 $\tilde{h}_0=\sqrt{3}$。图2(c)展示了科赫雪花及其最初几层 L_h 网格。其重心 x_Ω 位于原点，面积 $|\Omega|$等于 $3h_0^2\sqrt{3}/10$，边界维数为 $d=\dim_{\rm H}(\partial\Omega)=\log 4/\log 3\approx 1.26$ [62]。科赫雪花具有 D_6 对称性，即 Ω 在绕原点旋转 $\pi/3$ 的整数倍以及关于与原点相交、角度为$j\pi/6$, $j=1,\ldots,6$ 的直线反射下保持不变。应用引理 B.3（注意，在此情形下 $\varrho(0)=h_0/2$, $\rho_*=1/\sqrt{3}$,$\mu_*=2/3$ ）可知，科赫雪花位于以原点为中心、半径为 $(1+1/\sqrt{3})-h_0/2\approx 0.789h_0$ 的球内。不过，通过不同的论证（例如图4所示的预分形近似），可以证明更精确的结果：$\operatorname{diam}(\Omega)=h_0$ （如上所述），且 Hull(Ω) 是外接半径为 $h_0/2$ 的六边形。

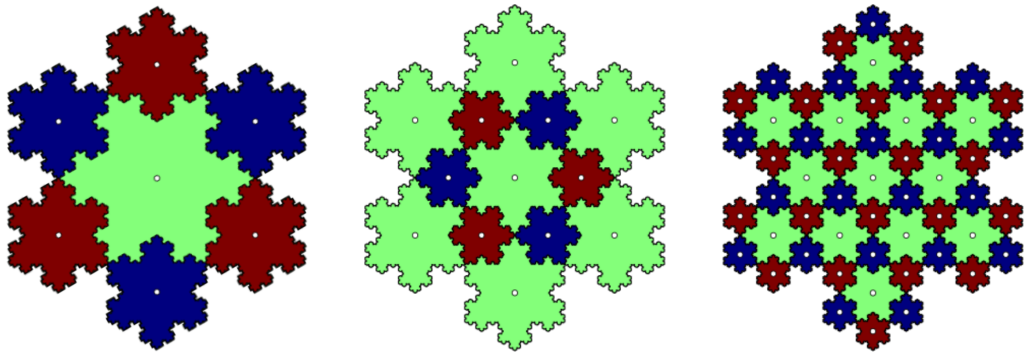


图 5：科赫雪花的 L_{h_l} 网格的格结构， $l = 1$、2、3。与指标集 B_l、 S_l^1 和 S_l^2 对应的单元分别以绿色、红色和蓝色表示。

使 (117) 成立的 L_h 网格宽度序列为 $h_l = 3^{-l/2}h_0$, $l \in \mathbb{N}_0$，与 Fudgeflake 的情形相同。不过，迭代函数系统并非齐次，因此 L_h 网格的格结构比 Fudgeflake 或 Gosper Island 的情况更复杂，下面将对此作出解释。对于科赫雪花，每个 L_h 网格都由两种不同尺寸的单元构成。具体而言，

$$L_{h_l}(\Omega) = B_l \cup S_l, \tag{178}$$

其中（“B”表示“大”，“S”表示“小”）

$$B_l = \{\boldsymbol{m} \in L_{h_l}(\Omega) : \operatorname{diam}(\Gamma_{\boldsymbol{m}}) = h_0 3^{-l/2}\}, \tag{179}$$

$$S_l = \{\boldsymbol{m} \in L_{h_l}(\Omega) : \operatorname{diam}(\Gamma_{\boldsymbol{m}}) = h_0 3^{-(l+1)/2}\}. \tag{180}$$

在由 $L_{h_l}(\Omega)$得到 $L_{h_{l+1}}(\Omega)$时， B_l 的每个单元被细分为 7 个部分，其中一个成为 B_{l+1}的单元，其余六个成为 S_{l+1}的单元；而 S_l 的每个单元都成为 B_{l+1}的单元。因此

$$\#B_{l+1} = \#B_l + \#S_l, \qquad \#S_{l+1} = 6(\#B_l). \tag{181}$$

用 $\#B_1 = 1$ 和 $\#S_1 = 6$ 解这些差分方程，得到

$$\#B_l = \frac{3^{l+1} - (-2)^{l+1}}{5}, \qquad \#S_l = \frac{2.3^{l+1} + 3.(-2)^{l+1}}{5}, \qquad l \in \mathbb{N}, \tag{182}$$

so 因此，网格单元总数满足 es

$$\#L_{h_l}(\Omega) = \#B_l + \#S_l = \frac{3^{l+2} - (-2)^{l+2}}{5} \sim \frac{3^{l+2}}{5} = \frac{9}{5}\left(\frac{h_l}{h_0}\right)^{-2}, \quad l \to \infty. \tag{183}$$

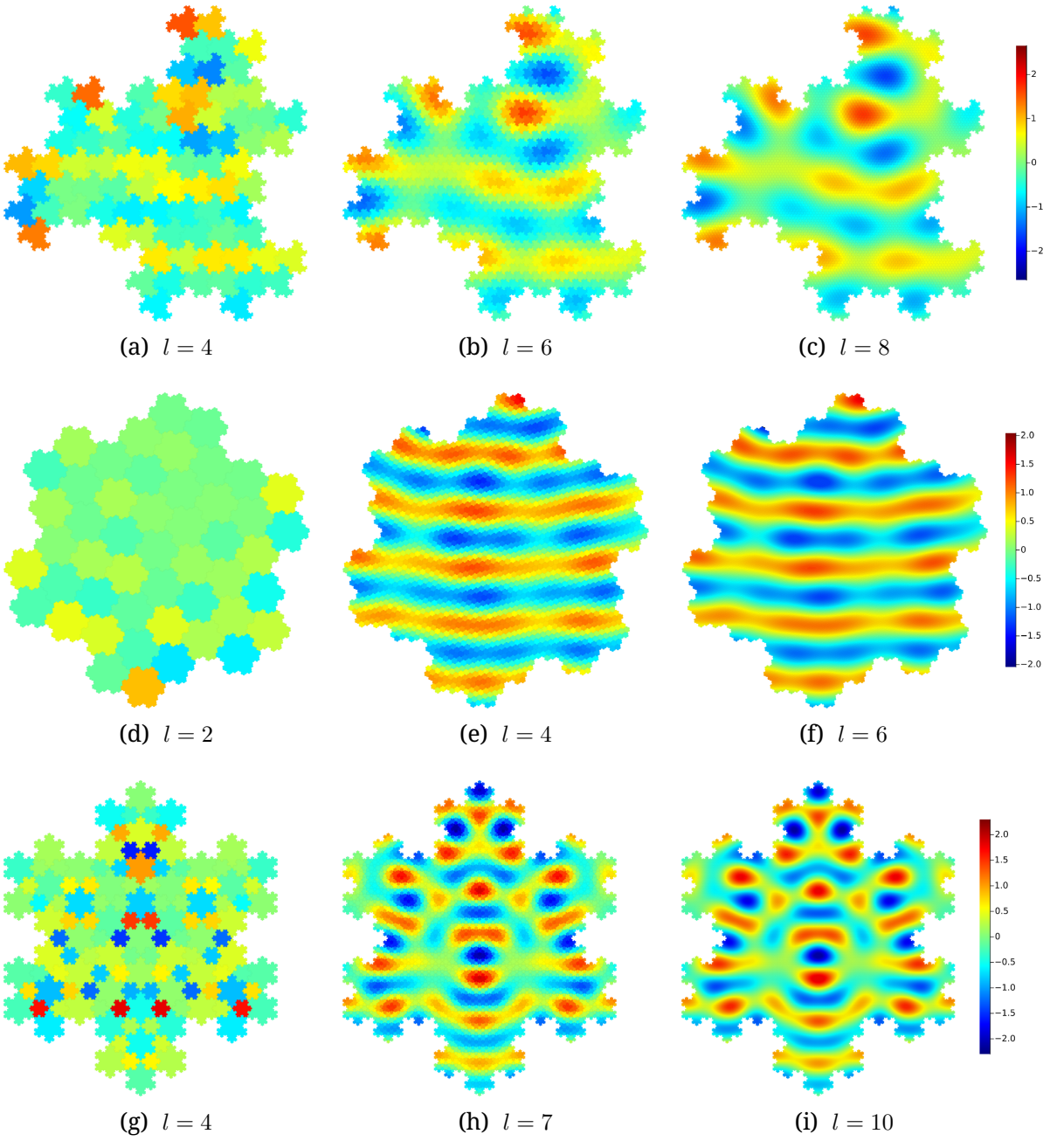
关于格结构，给定 $l \in \mathbb{N}$，我们可以进一步分解 $S_l = S_l^1 \cup S_l^2$，其 h $\#S_l^1 = \#S_l^2 = (\#S_l)/2$，并且

$$B_l = \{\boldsymbol{m} \in L_{h_l}(\Omega) : \Omega_{\boldsymbol{m}} = \frac{h_0}{2} 3^{-l/2} R_{l\pi/6}\Omega + h_0 3^{-l/2} R_{(l+1)\pi/6}(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2),$$
$$\text{对于某些 } a_1,\ a_2 \in \mathbb{Z}\},$$

$$S_l^j = \{\boldsymbol{m} \in L_{h_l}(\Omega) : \Omega_{\boldsymbol{m}} = \frac{h_0}{2} 3^{-(l+1)/2} R_{(l+1)\pi/6}\Omega + h_0 3^{-(l+1)/2} R_{(l+2)\pi/6}\,\varepsilon_j$$
$$+ h_0 3^{-l/2} R_{(l+1)\pi/6}(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2), \quad \text{for some } a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\}, \quad j = 1, 2. \tag{184}$$

式（184）所描述的三种格如图 5 所示。

正如在 [38, §5.4]，中针对科赫雪花所详细说明的那样， [38] 算法会产生三个典范奇异积分，即自相互作用 $I_{\Omega,\ \Omega}[\Phi_0]$、边相互作用$I_{\Omega_1,\ \Omega_7}[\Phi_0]$，以及“点相互作用”$I_{\Omega_1,\ \Omega_2}[\Phi_0]$；之所以称后者为点相互作用，是因为单元 Ω_1 和 Ω_2 的闭包交于一点（见图2b）。结合以上事实，可以证明假设 4.14 对 $C_{\text{sep}} = 1/(2h_0)$ 成立，且假设 4.17 也成立，因为所有奇异相互作用 G_{ij}^0 都可以表示为 $I_{\Omega,\ \Omega}[\Phi_0]$、 $I_{\Omega_1,\ \Omega_7}[\Phi_0]$ 或 $I_{\Omega_1,\ \Omega_2}[\Phi_0]$ 的形式。支撑这些结论的计算细节见 [7]。



(a) $l = 4$ (b) $l = 6$ (c) $l = 8$

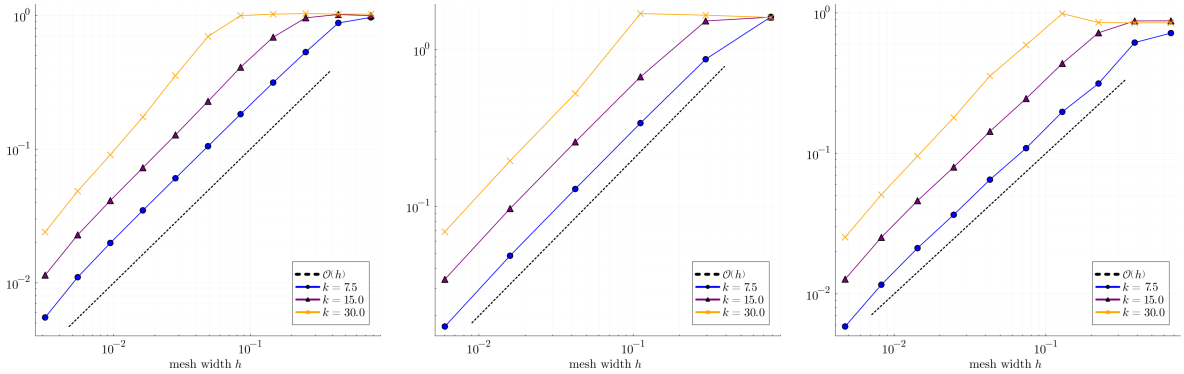
(d) $l = 2$ (e) $l = 4$ (f) $l = 6$

(g) $l = 4$ (h) $l = 7$ (i) $l = 10$

图6：三个示例在粗（左）、中（中）和细（右）网格宽度下的分片常数 VIM 解（实部）。这里 $k = 30$, $\vartheta = (0, 1)$，且在 (a)-(c) 和 (g)-(i) 中 $1 + m = 2.0$，而在 (d)-(f) 中 $1 + m = 1.311 + 2.289 \times 10^{-9}\mathrm{i}$。

6 数值结果

本节通过数值实验验证我们的理论分析。我们给出对 §5 中讨论的三个迭代函数系统吸引子进行散射的结果，即 Fudgeflake、Gosper Island 和科赫雪花。我们采用 §4.1 中所述的准均匀 L_h 网格剖分策略，使用 §5 中详细说明的网格宽度序列 $(h_l)_{l=0}^{\infty}$，并仅考察分片常数近似，采用 §4.2 中所述的求积规则。我们的首要目标是证明，我们的几何相容基于 IFS 的方法能够达到定理 4.23 中全离散误差分析所预测的精度（即 VIE 解在 $L^2(\Omega)$ 中以 $O(h)$ 的速度收敛，而散射场和远场方向图计算则呈现 $O(h^2)$ 超收敛）。我们的第二个目标是证明，与基于预分形的同类方法相比，我们的方法能提供精度显著更高的结果



(a) Fudgeflake (b) Gosper Island (c) 科赫雪花

图7：收敛图显示了分片常数解在 $L^2(\Omega)$ 中的误差随网格宽度 h 的变化。物理参数与图6相同。

近似。

我们的数值实验使用了开源 Julia 代码，该代码可在 github.com/AndrewGibbs/IFSIntegrals 获取，用于生成 L_h 网格并进行数值求积。为求解线性系统 (77)，我们采用无矩阵 GMRES，利用 L_h 网格的格结构（如 §5 所述）降低内存复杂度，并通过基于 FFT 的技术加速矩阵向量乘积。有关这部分实现的详细信息，请参见 [7, §5-§6]，并将在另一篇论文中介绍。

我们给出了入射平面波 $u^{\mathrm{i}}(x) := e^{ik\vartheta\cdot x}$ 被 §5 中的三个例子散射的结果（对于科赫雪花，取 $h_0 = 2/\sqrt{3}$，使得 $\tilde{h}_0 = 1$，见 §5.3），考察不同的波数 $k \in \{5, 7.5, 10, 15, 20, 30\}$ 与折射率扰动 $\mathfrak{m} = m\chi_\Omega$组合，其中 $1 + m \in \{2.0, 1.311 + 2.289 \times 10^{-9}\mathrm{i}\}$（第二个值是波长为 $0.55\mu m$ 时冰晶光散射的代表性取值，参见 [82]）。

图 1 给出了所考虑的三个例子中数值计算得到的总场图像。这里，三个例子中均有 $k = 30$ 和 $\vartheta = (0,1)$，而图 1(a)&(c) 中为 $1+m = 2$，图 1(b) 中为 $1 + m = 1.311 + 2.289 \times 10^{-9}\mathrm{i}$。这些图像通过使用复合重心求积公式对公式 (54) 进行数值计算得到，求积使用了大量单元，并采用分片常数 VIM 解 u_N，网格宽度为$h = h_l$，分别对应 $l = 9,6,10$；其中 h_l 是针对 §5 中每个例子定义的。

在图6中，我们展示了三个算例上分片常数 VIM 解的图像，物理参数与图 1 相同，并给出三种不同的网格宽度。该图旨在强调：在我们的 VIM 中，Ω 的几何完全由网格刻画，因此不存在几何近似。在最粗的算例中，可以清楚地看到网格单元的分形特性。

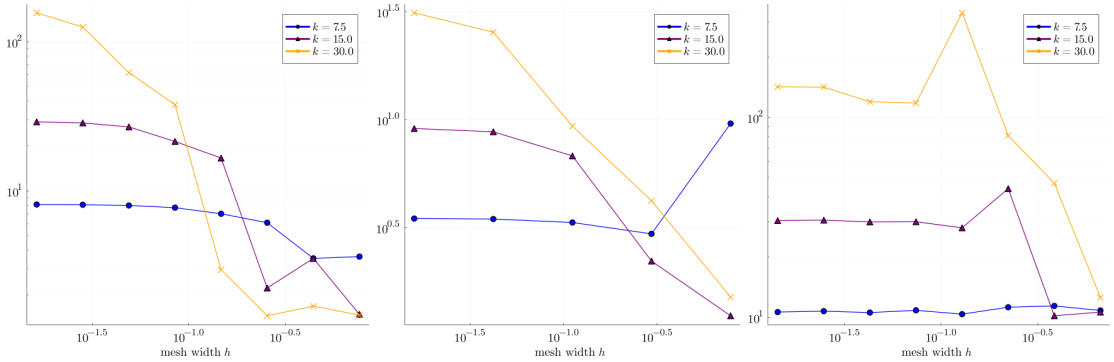
图7给出了相应的收敛图，展示 VIM 解在 $L^2(\Omega)$中的误差随 h的变化。此处参考解是由 VIM 在 $h = h_l$ 以及 $l = 12$分别为 7 和 11 时得到的（对应三个算例）。求积参数按照 (169) 选取，其中 $\alpha = 1$，具体为

$$h_r = h, \quad h_s = h_0, \quad h_* = h, \quad h_g = h. \tag{185}$$

这意味着对所计算的全部积分均使用单点求积，从而凸显了用于处理奇异积分的奇异性消减与自相似技术的有效性。在全部三种情形中，我们都观察到定理 4.23 所预测的 $O(h)$ 收敛速率。

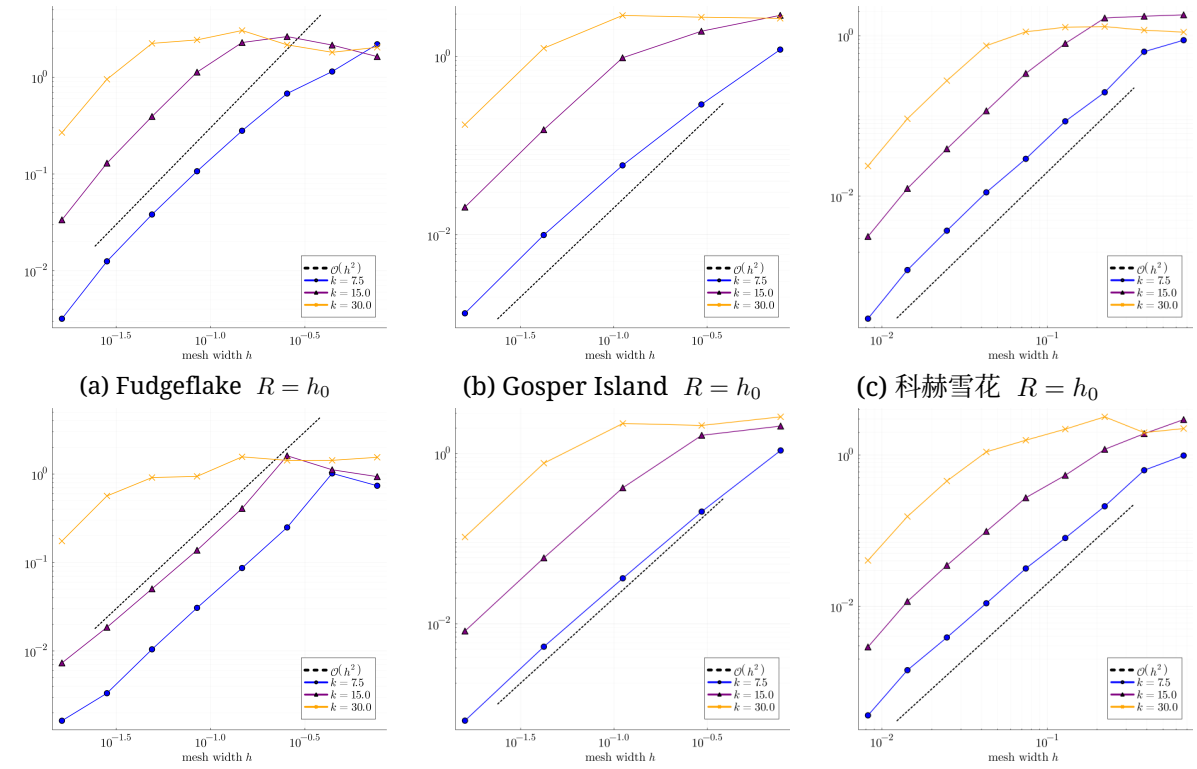
图 8 展示了相应系统矩阵的条件数曲线。在每种情况下，离散化的条件数均保持良好，且不随 $h \to 0$ 变化；这与定理 4.23 的预测一致，也符合第二类积分方程公式的预期。

在图 9(a)-(c) 中，我们给出了散射场在包围非均匀体、半径为 $h_0 = \mathrm{diam}(\Omega)$ 的圆上的收敛结果。此处数值求积



(a) Fudgeflake (b) Gosper Island (c) 科赫雪花

图 8: 与图7中结果相对应的系统矩阵的条件数 .



(a) Fudgeflake $R = h_0$ (b) Gosper Island $R = h_0$ (c) 科赫雪花 $R = h_0$

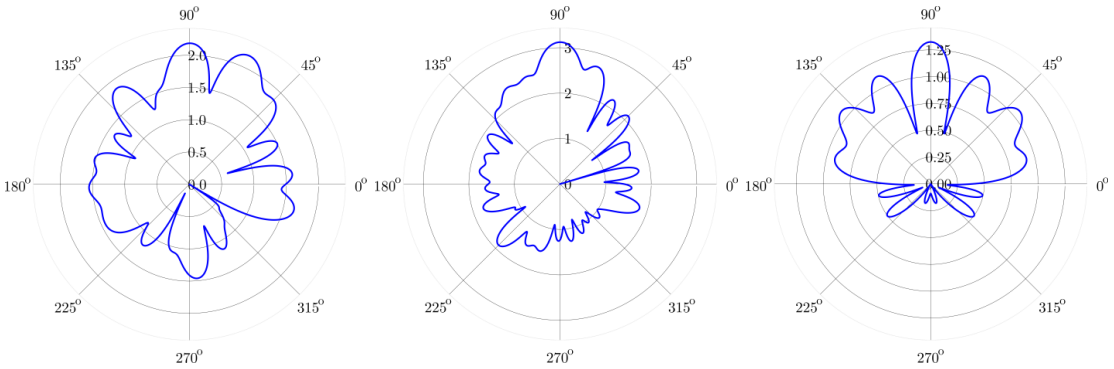
(d) Fudgeflake $R = h_0/10$ (e) Gosper Island $R = h_0/10$ (f) 科赫雪花 $R = h_0/10$

图 9：散射场的收敛图。上排——半径为 $R = h_0 = \text{diam}(\Omega)$ 的圆上的最大误差（非均匀体外部）。下排——半径为 $R = h_0/10$ 的圆上的最大误差（散射体内部）。参数 ϑ 和 m 与图6中的相同。

参数按照 (169) 选取，并取 $\alpha = 2$，具体为

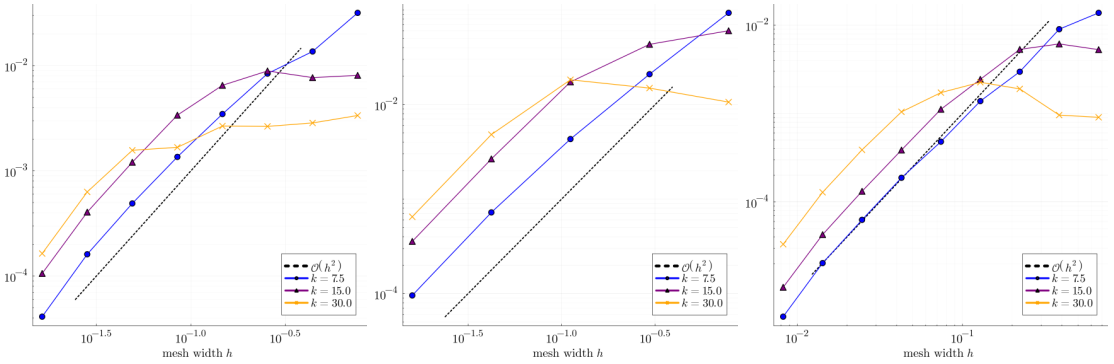
$$h_r = h^{3/2}, \quad h_s = h^{1/2}, \quad h_* = h, \quad h_g = h, \quad h_J = h. \tag{186}$$

同样，这意味着对涉及 h_*、h_g 和 h_J 的积分使用单点求积，但对涉及 h_r 和 h_s 的积分不使用单点求积。图中展示了圆上 2000 个等间距点处的最大误差，并分别以我们的 VIM 解作为参考解，其参数分别为 $l = 9$、6 和 10（对应三个示例）。在所有情况下，我们都观察到定理 4.23 预测的 $O(h^2)$ 收敛速率。图 9(d)-(f) 展示了散射场在非均匀体内部 的收敛情况，计算所用圆的半径为 $h_0/10$。如注 4.24 所述，我们在 §4.2 中没有给出专门用于计算非均匀体内部散射场的求积规则。不过，正如注 3.11 所述，我们的



(a) Fudgeflake (b) Gosper Island (c) 科赫雪花

图10：三个散射体的远场模式的极坐标图 $k = 15$，其他物理参数与图6相同。每种情况下，径向坐标表示 $\log_{10}(|J_{\mathrm{FFP}_\theta}|/|J^{\mathrm{FFP}}_{\mathrm{min}}|)$，其中 $|J_{\mathrm{FFPmin}}|$ 是对所考虑的 2000 个等间距 θ 值计算得到的远场模式的最小模。



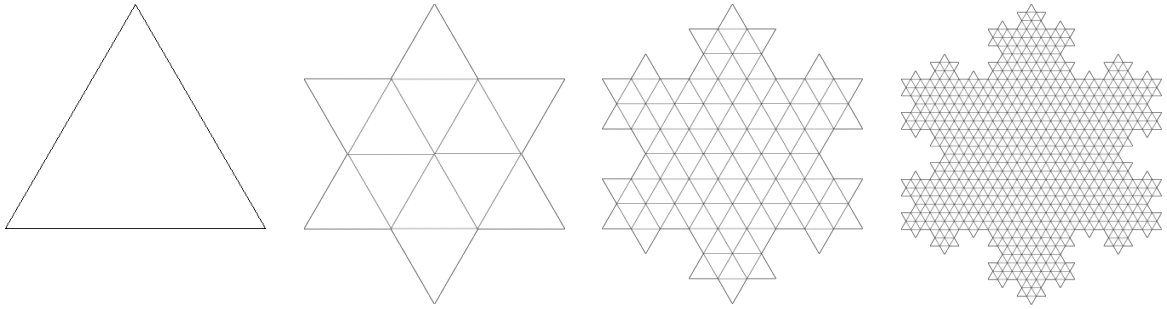
(a) Fudgeflake (b) Gosper Island (c) 科赫雪花

图11：远场模式的收敛情况。图中显示了 $\theta \in [0, 2\pi]$上的最大误差随网格宽度 h的变化。物理参数 ϑ 和 m与图6中的相同。

理论分析证明，对于任意 $\epsilon > 0$，都具有类似于 $O(h^{2-\epsilon})$ 的半离散收敛。因此，如果计算散射场时采用足够精确的数值求积，我们预计实践中会观察到近似为 $O(h^2)$ 的收敛。这正是我们在图 9(d)-(f) 中观察到的结果：计算散射场泛函时，我们使用了 $h_J = \xi h$；对于 Fudgeflake 和科赫雪花，使用 $\xi = 1/\sqrt{3}$，对于 Gosper Island，使用 $\xi \equiv 1/\sqrt{7}$（即，对每个 l 使用 $h_J = h_{l+1}$，而不是 $h_J = h_l$）。

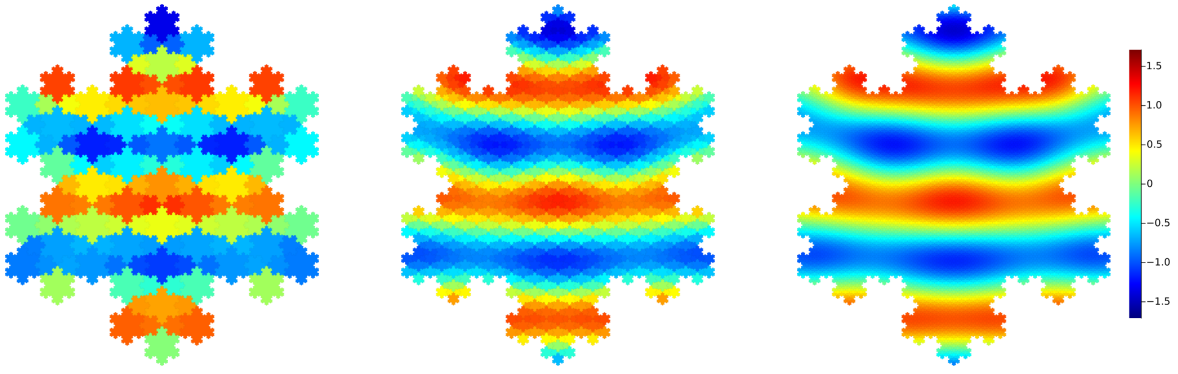
图10展示了三个示例在 $k = 15$时远场模式的极坐标图，计算时使用了求积参数（186）。图11展示了相应的收敛图，其中再次观察到定理 4.23 所预测的 $O(h^2)$ 收敛速率。这里绘制的是在2000个等间距方向上的最大误差，使用的参考解与图 9中的相同。

最后，对于科赫雪花，我们将基于IFS的方法与基于预分形的方法进行性能比较。为定义后者，我们考虑科赫雪花的标准预分形序列，如图4所示。每个预分形都划分为均匀网格，该网格由等边三角形单元组成，其边长等于构成预分形边界的线段长度。图12展示了前4个这样的网格（应与图2(c)对照，后者展示了前四个基于IFS的网格），附录A讨论了这些网格的一般性质。在每个这样的网格上，我们计算方程(44)的解 u 的分片常数Galerkin近似，即将(49)中的 V_N 替换为预分形网格上的分片常数函数空间后得到的解。为保证比较公平，数值求积采用与基于IFS的方法相似的策略，

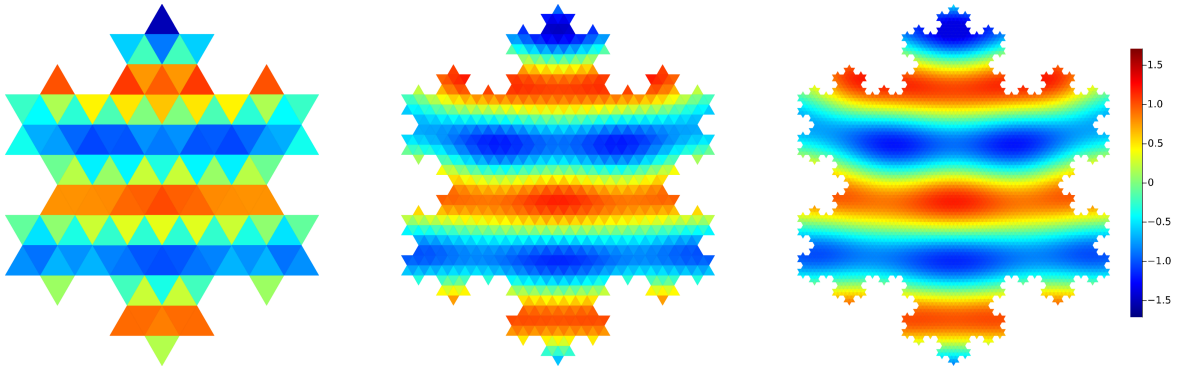


(a) $j = 0$ (b) $j = 1$ (c) $j = 2$ (d) $j = 3$

图 12：基于预分形的方法所用的均匀三角形网格。



(a) $l = 4$, $N = 133$ (b) $l = 6$, $N = 1261$ (c) $l = 8$, $N = 11605$



(d) $j = 2$, $N = 120$ (e) $j = 3$, $N = 1128$ (f) $j = 4$, $N = 10344$

图 13：科赫雪花（上排）和预分形近似（下排）上的分片常数积分方程解，对应不同的 h 值。每种情况下的网格元素数量 N 均已标出。

利用等边三角形本身是一个2-吸引子这一事实（对于任意 $a \in \mathbb{N}$，它都可以分解为由 a^2 个边长为原边长 $1/a$ 倍的等边三角形组成的并集）。图13展示了VIM和预分形方法的积分方程解示例，其中 $k = 15$、$\vartheta = (0,\ 1)$和 $1 + m = 1.311 + 2.289 \times 10^{-9}$i。

图 14 展示了相应的误差图，比较了采用基于IFS的方法和基于预分形的方法计算 Ω 周围半径为 4 的圆上的散射场时的精度，误差以所用自由度（网格单元）总数为变量。我们采用网格宽度为 $h_{10} = 3^{-5}h_0$ 的基于IFS的方法作为参考解。对于基于IFS的方法，结合定理 4.23 和 (183)，我们知道，当 $l \to \infty$ 时，散射场的误差按 $O(N_l^{-1})$ 的速率衰减，其中 $N_l = \#L_h(\Omega)$ 是 Ω 的 L_{h_l} 网格中的单元总数。对于基于预分形的方法，附录A给出了半离散误差分析；结合命题 A.1 和 (187)

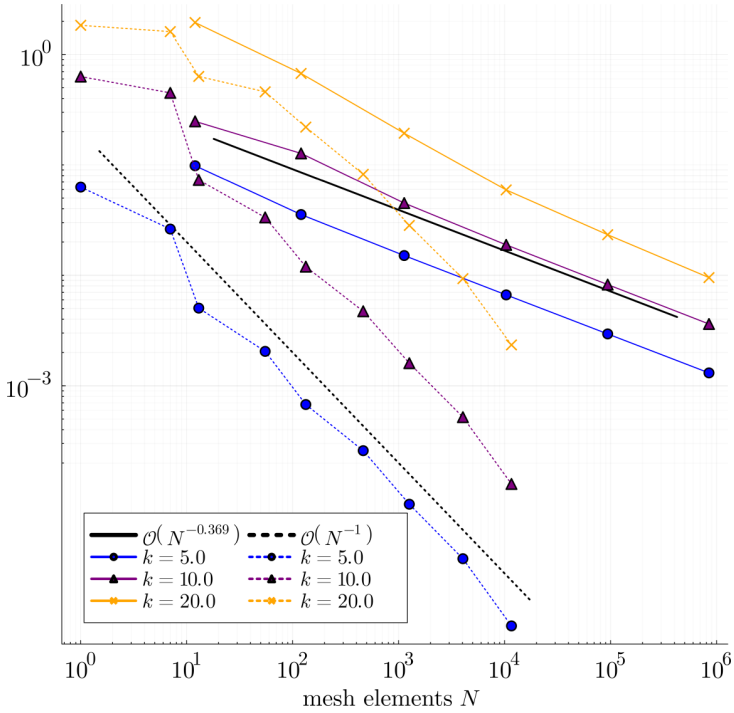


图14：散射场的收敛图，显示半径为 $h_0 = \text{diam}(\Omega)$的圆上（非均匀体外部）的最大误差，分别对应基于IFS的方法（虚线）和预分形方法（实线）。

我们预期散射场误差的衰减会慢得多，即当 $j \to \infty$ 时，按 $O(N_j^{-(1-d/2)}) = O(N_j^{-0.369\ldots})$ 的速率衰减，其中 N_j是第j个预分形网格中的单元总数。图 14 中的数值结果验证了这些理论预测，表明对于该问题，我们的几何相容的基于IFS的方法所得到的解明显比基于预分形的方法更加精确。

致谢

作者感谢Simon Chandler-Wilde、Ivan Graham、Andrea Moiola、Valery Smyshlyaev、Euan Spence和Timo Betcke的有益讨论。DH感谢EP- SRC项目EP/S01375X/1和EP/V053868/1的资助。本工作的一部分是在JB和DH于2025年秋季驻留瑞典于尔斯霍尔姆的米塔-莱夫勒研究所期间完成的，并得到瑞典研究理事会项目编号2021-06594的支持。

A 预分形方法的分析

设Ω表示科赫雪花的内部，并对 $j \in \mathbb{N}_0$ 令Ω$_j$ 表示科赫雪花第 j个标准内部预分形的内部，其定义见例如 [13, §5.1]（在 [13]的记号中取 $\beta = \pi/6$ ），如图4所示。与§6中相同，我们将雪花缩放，使其直径为$h_0 = 2/\sqrt{3}$。此时Ω$_j$ 的边长为 $\tilde{h}_j := 3^{-j}$。˜令 V_j 表示Ω$_j$ 的均匀网格上的分片常数函数空间，该网格由˜边长为 h_j的等边三角形单元组成， $j = 2$ 的情形如图3(b)所示。所得Ω$_j$ 网格中的单元数 N_j 满足递推关系$N_{j+1} = 9N_j + 3.4^j$ ，其中 $N_0 = 1$，从而对 $j \in \mathbb{N}_0$有 $N_j = (8.9^j - 3.4^j)/5$ ，因此

$$N_j \sim \frac{8}{5}9^j = \frac{8}{5}\tilde{h}_j^{-2}, \quad j \to \infty. \tag{187}$$

令 $\tilde{u}_j$ 表示方程（44）的解 u 的半离散预分形伽辽金近似，其中˜即为将 V_N 替换为 V_j 后方程（49）的解。由此我们可以证明以下收敛

结果。

命题 A.1. 令 Ω 表示科赫雪花的内部，并令 $\mathfrak{m} = m\chi_\Omega$，其中 $m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 满足 $\Im m \geq 0$。假设 (44) 和 (61)˜中的函数 g 和 $\mathfrak{j}$ 满足 $g, \mathfrak{j} \in H^s(\Omega)$，其中某个 $s > 1$。那么，取上述的 V_j，当 j 充分大时，˜分片常数预分形伽辽金近似 $\tilde{u}_j \in V_j$ 存在，且满足

$$\|u - \tilde{u}_j\|_{L^2(\Omega)} = O(h_j^{1-d/2}), \qquad j \to \infty, \tag{188}$$

$$|J(u) - J(\tilde{u}_j)| = O(h_j^{2-d}), \qquad j \to \infty, \tag{189}$$

其中 $d = \log 4/\log 3 \approx 1.26$ 是 Ω 的豪斯多夫维数 ∂。

证明。我们首先证明空间 $\tilde{V}_j$ 在 $L^2(\Omega)$中构成一个稠密序列。这可由标准的三角不等式论证得出。首先注意，对网格 Ω_j的每个单元应用凸域 [61, 11] 上的标准 Poincar´e 不等式（等边三角形就是一个例子），再对所有这些单元求和，可知对每个 $j \in \mathbb{N}_0$ 都有

$$\inf_{v \in \tilde{V}_j} \|\phi - v\|_{L^2(\Omega_j)} \leq \frac{\tilde{h}_j}{\pi} \|\phi\|_{W^1(\Omega_j)} \leq \frac{\tilde{h}_j}{\pi} \|\phi\|_{W^1(\Omega)}, \qquad \phi \in W^1(\Omega). \tag{190}$$

现在，给定 $\psi \in L^2(\Omega)$ 和 $\varepsilon > 0$，我们可以找到 $\phi \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(\Omega)$，使得$\|\psi - \phi\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon/2$。由于 $\operatorname{supp}\phi$ 是 Ω 的紧子集，且预分形 $\{\Omega_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ 构成一个递增的嵌套序列，因此对足够大的 j，有 $\phi \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(\Omega_j)$，从而 $\inf_{v\in\tilde{V}_j} \|\phi - v\|_{L^2(\Omega)} = \inf_{v\in\tilde{V}_j} \|\phi - v\|_{L^2(\Omega_j)}$。根据 (190)，取足够大的 j，即可使其小于 $\varepsilon/2$。由此，利用三角不等式即可得到所述的稠密性结论。

预分形 Galerkin 逼近的渐近适定性和拟最优性，可由证明定理 3.7 时采用的同一标准论证得到。不失一般性，我们可以假设 $1 < s < 2 + (2-d)/2 = 3 - d/2$。（若非如此，只需重新定义$s$。）这一约束结合假设 $g \in H^s(\Omega)$，根据推论 4.7（具体而言，根据 (98)），可知精确解满足 $u \in H^s(\Omega)$。因此，要证明 (188)，只需证明

$$\inf_{v \in \tilde{V}_j} \|\phi - v\|_{L^2(\Omega)} = O(\tilde{h}_j^{1-d/2}), \qquad j \to \infty,\ \phi \in H^s(\Omega). \tag{191}$$

此外，若 (191) 成立，则 (189) 也随之成立，这基本上是因为可以采用证明定理 3.8 时所用的同一超收敛论证：若 $\mathfrak{j} \in H^s(\Omega)$，则（再次不失一般性地假设 $1 < s < 3 - d/2$）根据推论 4.7（具体而言，根据 (99)），对偶解满足 $\zeta \in H^s(\Omega)$。为证明 (191)，首先注意到

$$\inf_{v \in \tilde{V}_j} \|\phi - v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\phi\|_{L^2(\Omega\setminus\Omega_j)} + \inf_{v \in \tilde{V}_j} \|\phi - v\|_{L^2(\Omega_j)}. \tag{192}$$

若 $\phi \in H^s(\Omega)$，则由于 $s > 1$，我们有 $\phi \in W^1(\Omega)$，因此根据 (190)，(192) 中的第二项为 $O(h_j)$，因为 $j \to \infty$。此外，同样由于 $s > 1$，根据 Sobolev嵌入定理，ϕ 在 Ω 上有界，因此 (192) 中的第一项可由下式估计

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega\setminus\Omega_j)} \leq \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} |\Omega \setminus \Omega_j|^{1/2}. \tag{193}$$

通过直接的几何计算（参见 [7, 第80]页），可以证明

$$|\Omega \setminus \Omega_j| = O((4/9)^j) = O((\tilde{h}_j)^{2-d}), \quad j \to \infty, \tag{194}$$

其中，在第二个等式中我们用到了 $h_j = 3^{-j}$和 $d = \log 4/\log 3$ 这一事实。结合 (193)，可知 (192) 中的第一项为 $O(\tilde{h}_j^{1-d/2})$，由此可得 (191)。

□

B 几何引理

下面这个初等引理是对 [34, 引理 9.2]的加强。具体而言， [34, 引理˜9.2] 假设引理 B.1 陈述中的集合 E_i 是球，这相当于对集合族 $\{E_i\}$作出了“形状正则性”假设。我们更一般的结果表明，这一假设并非必要。

引理 B.1. 设 $r, a, \tau > 0$。设 $\{E_i\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集集合族，使得对于每个 ˜ ˜ ∴i，$\operatorname{diam}(E_i) \le ar$，且 E_i 包含一个可测子集 E_i，满足 $|E_i| \ge \tau r^n$，其中 $\{E_i\}$ 两两不交。那么，半径为 r 的任意闭球至多与 $\{E_i\}$ 的 $(1+a)^n\omega_n\tau^{-1}$ 个闭包相交，其中 ω_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积。

证明。 我们沿用 [34, 引理 9.2] 的证明。若 E_i 与 B 相交，则由于 $\operatorname{diam}(E_i) \le ar$，$E_i$ 包含在与 B 同心、半径为 $(1+a)r$ 的闭球内。假设 ˜ 个集合 $\{E_i\}$ 中有 q 个与 B 相交。对相应子集 E_i 的体积求和，可得 $q\tau r^n \le (1+a)^n r^n \omega_n$，从而得到 q 的所述界。 □

下一个引理是上述引理的一个变体，适用于与环带相交的情形。

引理 B.2. 如果 $\{E_i\}$ 满足引理 *B.1* 中关于 $a = 1$的假设，那么对于任意 $x_0 \in \mathbb{R}^n$和任意 $j \in \mathbb{N}$, $j \ge 2$, 环带 $A_j := \{x \in \mathbb{R}^n : jr \le |x - x_0| \le (j+1)r\}$ 至多与 $3.2^n j^{n-1}\omega_n\tau^{-1}$ 个闭包 $\{E_i\}$相交。

证明。 我们采用与证明引理 B.1 时类似的论证。如果 E_i 与A_j 相交，那么根据假设 $\operatorname{diam}(E_j) \le r$，可知 E_i 包含于 $\{x \in \mathbb{R}^n : (j-1)r \le |x - x_0| \le (j+2)r\}$。因此，如果 q 个 $\{E_i\}$ 与 A_j 相交，通过比较体积可得 $q\tau \le ((j+2)^n - (j-1)^n)\omega_n$。接着我们注意到

$$(j+2)^n - (j-1)^n = 3((j+2)^{n-1} + (j+2)^{n-2}(j-1) + \ldots + (j+2)(j-1)^{n-2} + (j-1)^{n-1}),$$

对于 $j \ge 2$，其上界可表示为

$$3(2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 1)j^{n-1} \le 3.2^n j^{n-1}.$$

□

以下引理引自 [80], , 给出了 IFS 吸引子的一个保证包含球。

引理 B.3 ([80, 定理 2.1])**.** 设 $\{s_1, \ldots, s_M\}$ 是定义 *4.1* 中的一个迭代函数系统，其 *th* 吸引子 K。给定 $x \in \mathbb{R}^n$， K 包含于以 x 为中心、半径为

$$r(x) := \frac{\mu_* \varrho(x)}{1 - \rho_*}, \tag{195}$$

其中

$$\rho_* := \max_{i=1,\ldots,M} \rho_i, \tag{196}$$

$$\mu_* := \max_{i=1,\ldots,M} \|I - \rho_i A_i\|_2, \tag{197}$$

$$\varrho(x) := \max_{i=1,\ldots,M} \|p_i - x\|_2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{198}$$

并且，对于 $i = 1$，……， M， $p_i \in \mathbb{R}^n$ 表示映射 s_i 的唯一不动点。

参考文献

[1] Y. Achdou and T. Deheuvels，分形自相似界面上的传输问题，SIAM 多尺度建模与仿真期刊，14（2016），第708–736页。

[2] S. Ambikasaran, C. Borges, L.-M. Imbert-Gerard, and L. Greengard,二维利普曼–施温格方程的快速、自适应、高阶精度离散化，SIAM 科学计算期刊，38（2016），A1770–A1787页。

[3] A. Anand, A. Pandey, B. R. Kumar, and J. Paul,一种高效的高阶 *Nystr ¨ .....om*方案，用于求解具有不连续材料界面的非均匀可穿透介质中的声散射问题，计算物理学杂志，*311*（*2016*），第*258–274*页。[4] T. G. Anderson, M. Bonnet, L. M. Faria, and C. Pérez-Arancibia，通过多项式密度插值快速、高阶地计算体势，计算物理学杂志，*511*（*2024*），第*113091*页。[5] K. E. Atkinson，《第二类积分方程的数值解》，剑桥大学出版社，*1997*年。[6] C. Bandt，自相似集*5*：整数矩阵与 $\mathbb{R}^n$的分形镶嵌，美国数学会会刊，（*1991*），第*549–562*页。[7] J. Bannister，《分形非均匀体的声散射》，博士论文，伦敦大学学院，*2024*年。[8] J. Bannister, A. Gibbs, and D. P. Hewett，具有分形边界的阻抗屏/裂缝声散射：适定性分析与边界元近似，数学模型与应用科学方法，*32*（*2022*），第*291–319*页。[9] A. J. Baran，卷云光散射特性综述，定量光谱学与辐射传递杂志，*110*（*2009*），第*1239–1260*页。

[10] M. Barnsley and A. Vince，由迭代函数系统生成的分形镶嵌，离散与计算几何，*51*（*2014*），第*729–752*页。[11] M. Bebendorf，关于凸域上的*Poincar´e*不等式的注记，*Z. Anal. Anwend.*，*22*（*2003*），第*751–756*页。

[12] O. P. Bruno and E. M. Hyde，二维非均匀介质散射问题中的高阶傅里叶逼近，工业与应用数学学会数值分析杂志，*42*（*2005*），第*2298–2319*页。[13] A. Caetano, D. P. Hewett, and A. Moiola，粗糙集上的索伯列夫、*Besov*和*Triebel–Lizorkin*空间的稠密性结果，*J. Funct. Anal.*，*281*（*2021*），第*109019*页。[14] A. M. Caetano, S. N. Chandler-Wilde, X. Claeys, A. Gibbs, D. P. Hewett,and A. Moiola，分形声散射的积分方程方法，英国皇家学会会刊*A*辑，（*2025*），第*48120230650*页。

[15] A. M. Caetano, S. N. Chandler-Wilde, A. Gibbs, D. P. Hewett, and A. Moiola，用于分形屏声散射的豪斯多夫测度边界元方法，数值数学，*156*（*2024*），第*463–532*页。[16] A. M. Caetano, S. N. Chandler-Wilde, and D. P. Hewett，具有非空内部的*IFS*吸引子的性质及相关函数空间与散射问题。*arxiv.org/abs/2511.15213*。[17] R. Capitanelli et al.，尺度不规则分形上的罗宾边界条件，纯粹与应用分析通讯，*9*（*2010*），第*1221–1234*页。

[18] R. Capitanelli and M. A. Vivaldi，准填充分形层，林琴学会报告，*26*（*2015*），第*465–473*页。[19] M. Cefalo, S. Creo, M. Gallo, M. R. Lancia, and P. Vernole，分形区域中斯托克斯流的三维近似，载于《工程中的分形：理论方面与数值近似》，施普林格，*2021*年，第*27–53*页。[20] M. Cefalo, S. Creo, M. R. Lancia, and J. Rodríguez-Cuadrado，用于优化热量疏导的分形混合物，混沌、孤子与分形，*173*（*2023*），第*113750*页。[21] S. N. Chandler-Wilde and D. P. Hewett，分形屏散射问题的适定偏微分方程与积分方程表述，工业与应用数学学会数学分析杂志，*50*（*2018*），第*677–717*页。[22] S. N. Chandler-Wilde, D. P. Hewett, and A. Moiola， $\mathbb{R}^n$ 的非利普希茨子集上的索伯列夫空间及其在分形屏边界积分方程中的应用，积分方程与算子理论，*87*（*2017*），第*179–224*页。

[23] S. N. Chandler-Wilde, D. P. Hewett, A. Moiola, and J. Besson，分形屏声散射的边界元方法，数值数学，*147*（*2021*），第*785–837*页。

[24] Y. Chen，二维利普曼–施温格积分方程的快速直接算法，计算与数学进展，*16*（*2002*年），第*175–190*页。[25] V. Chukin, D. Mikhailova, and V. Nikulin，冰晶分形维数的两种测定方法，科学展望，*9*（*2012*），第*5–7*页。[26] G. Claret，延拓域上的亥姆霍兹透射问题与本征阻抗散射问题。*arxiv.org/abs/2601.14866*。[27] G. Claret, M. Hinz, A. Rozanova-Pierrat, and A. Teplyaev，延拓域上透射问题的层势算子。*arxiv.org/abs/2403.11601*。[28] G. Claret, A. Rozanova-Pierrat, and A. Teplyaev，延拓域上的层势收敛性与黎曼–希尔伯特问题。*arxiv.org/abs/2411.03767*。
[29] D. L. Colton and R. Kress，《反问题声学与电磁散射理论》，施普林格，第*4*版，*2019*年。[30] M. Costabel，声散射中体积分算子的谱，载于《科学与工程中的积分方法：理论与计算进展》，施普林格，*2015*年，第*119–127*页。[31] S. Creo, M. R. Lancia, P. Vernole, M. Hinz, and A. Teplyaev，分形区域中的静磁问题，载于《分形上的分析、概率与数学物理》，世界科技出版公司，*2020*年，第*477–502*页。
[32] R. Duan and V. Rokhlin，二维散射问题数值求解的高阶求积公式，计算物理学杂志，*228*（*2009*），第*2152–2174*页。[33] L. C. Evans，《偏微分方程》，美国数学会，*2022*年。[34] K. J. Falconer，《分形几何：数学基础与应用》，*Wiley*，第*3*版，*2014*年。[35] I. P. Georgakis, I. I. Giannakopoulos, M. S. Litsarev, and A. G.Polimeridis，采用线性基函数的快速体积分方程求解器，用于精确计算磁共振成像中的电磁场，*IEEE* 天线与传播汇刊，*69*（*2020*），第*4020–4032*页。
[36] I. I. Giannakopoulos, M. S. Litsarev, and A. G. Polimeridis，通过张量分解降低基于快速傅里叶变换的体积分方程方法的内存占用，*IEEE* 天线与传播汇刊，*67*（*2019*），第*7476–7486*页。[37] A. Gibbs, D. Hewett, and A. Moiola，分形上的奇异积分数值求积，数值算法，*92*（*2023*），第*2071–2124*页。[38] A. Gibbs, D. P. Hewett, and B. Major，非互不相交的自相似分形集上奇异积分的数值计算，数值算法，（*2023*），第*1–33*页。[39] J. J. Goodman, B. T. Draine, and P. J. Flatau，快速傅里叶变换技术在离散偶极子近似中的应用，光学快报，*16*（*1991*），第*1198–1200*页。
[40] A. Gopal and P.-G. Martinsson，用于平面声散射利普曼–施温格方程的加速高阶精度直接求解器，计算与数学进展，*48*（*2022*），第*42*页。[41] I. G. Graham, O. R. Pembery, and E. A. Spence，非均匀介质中的亥姆霍兹方程：先验估计、适定性与共振，微分方程杂志，*266*（*2019*），第*2869–2923*页。
[42] I. G. Graham and S. Sauter，变系数亥姆霍兹方程的稳定性与有限元误差分析，数学计算，*89*（*2020*），第*105–138*页。[43] K. Grochenig and A. Haas，自相似格子铺砌，傅里叶分析与应用杂志，*1*（*1994*），第*131–170*页。[44] S. P. Groth, A. G. Polimeridis, and J. K. White，通过循环预条件加速离散偶极近似，定量光谱学与辐射传递杂志，*240*（*2020*），第*106689*页。[45] V. Gujjula and S. Ambikasaran，一种基于方向代数快速多极子方法的利普曼–施温格方程迭代求解器，并采用*HODLR*预条件器加速，计算物理通讯，*32*（*2022*），第*1061–1093*页。

[46] D. P. Hewett，《非利普希茨区域上的分片多项式逼近》。*arxiv.org/abs/2511.22628*。[47] T. Hohage，《电磁介质散射问题的快速数值求解及其在反问题中的应用》，计算物理学杂志，*214*（*2006*年），第*224–238*页。
[48] J. E. Hutchinson，《分形与自相似性》，《印第安纳大学数学杂志》，*30*（*1981*），第*713–747*页。[49] P. Joly, M. Kachanovska, and Z. Moitier，《自仿射集上的高阶数值积分》。*arxiv.org/abs/2410.00637*。[50] J. Keesling，《$\mathbb{R}^n$中自相似镶嵌的边界》，*Topol. Appl.*，*94*（*1999*年），第*195–205*页。[51] M. R. Lancia，《具有分形界面的传输问题》，*Z. Anal. Anwend.*，*21*（*2002*年），第*113–133*页。
[52] M. R. Lancia, M. Cefalo, and G. Dell Acqua，《科赫型高导电层上的传输问题数值近似》，*Appl. Math. Comput.*，*218*（*2012*），第*5453–5473*页。
[53] M. R. Lancia et al.，《分形曲面上的二阶传输问题》，*Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.(5)*，*27*（*2003*），第*191–213*页。[54] ，《关于一些二阶传输问题》，*Arab. J. Sci. Eng.*，*29*（*2004*），第*85–100*页。
[55] M. R. Lancia and P. Vernole，《非规则热流问题》，工业与应用数学学会数学分析杂志，*42*（*2010*），第*1539–1567*页。[56] ,《分形区域上的斯托克斯问题：解的渐近行为》，*Discrete Contin. Dyn. Syst. - Ser. S*，*13*（*2020*年）。
[57] F. Liu and L. Ying，《稀疏化与扫描：利普曼–施温格方程的高效预条件子》，*SIAM* 科学计算期刊，*40*（*2018*），第*B379–B404*页。[58] P. A. Martin，《非均匀障碍物的声散射》，*SIAM J. Appl. Math.*，*64*（*2003*），第*297–308*页。
[59] W. C. H. McLean，《强椭圆系统与边界积分方程》，剑桥大学出版社，*2000*年。
[60] A. Moiola and E. A. Spence，《声传输问题：显含波数的界与无共振区域》，数学模型与应用科学方法，*29*（*2019*），第*317–354*页。
[61] L. E. Payne and H. F. Weinberger，《凸域上的最优 *Poincar´e* 不等式》，*Arch. Ration. Mech. Anal.*，*5*（*1960*），第*286–292*页。[62] L. Riddle，《经典迭代函数系统》。*larryriddle.agnesscott.org/ifs*。访问日期：*2026-02-04*。
[63] F. Rösler and A. Stepanenko，《粗糙障碍物散射共振的计算》。*arxiv.org/abs/2402.00846*。[64] ，《粗糙区域上拉普拉斯算子特征值的计算》，数学计算，*93*（*2024*），第*111–161*页。[65] T. Runst and W. Sickel，《分数阶索伯列夫空间、涅米茨基算子与非线性偏微分方程》，*De Gruyter*，*1996*年。[66] T. Sarkar, E. Arvas, and S. Rao，《应用快速傅里叶变换和共轭梯度法求解电尺寸大小不一的导体所产生的电磁辐射》，*IEEE* 天线与传播汇刊，*34*（*2003*），第*635–640*页。
[67] S. A. Sauter and C. Schwab，《边界元方法》，施普林格，*2011*年。
[68] W. Sickel，《关于$F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$在$\sigma_{p,\,q} < s < n/p$情形下的逐点乘子》，*Ann. Mat. Pura Appl.*，*176*（*1999*），第*209–250*页。[69] W. Sickel，《利佐尔金–特里贝尔空间的逐点乘子》，载于《*Maz'ya* 纪念文集》，第*2*卷（罗斯托克，*1998*），《算子理论进展与应用》第*110*卷，*Birkh¨auser*，巴塞尔，*1999*年，第*295–321*页。

[70] I. Sloan, 《第二类积分方程的迭代伽辽金法》, 载于《算子理论与偏微分方程小型会议》, 第5卷, 澳大利亚国立大学数学科学研究所, 1984年, 第153–162页。
[71] E. A. Spence, 《第6章: 线性椭圆型偏微分方程变分公式概述》, 载于《边值问题的统一变换: 应用与进展》, SIAM, 2014年, 第93–159页。[72] T. H. Stein, C. D. Westbrook, and J. Nicol, 《三波长雷达测量揭示的聚集体雪花分形几何》, 《地球物理研究快报》, 42 (2015), 第176–183页。
[73] R. S. Strichartz and Y. Wang, 《自仿射铺砌的几何 I》, 《印第安纳大学数学杂志》, (1999), 第1–23页。[74] A. Tambova, S. P. Groth, J. K. White, and A. G. Polimeridis, 《采用体积分方程法进行光子学仿真的绝热吸收体》, 《光波技术杂志》, 36 (2018), 第3765–3777页。[75] J. Thuswaldner and S.-q. Zhang, 《边界为球面的自仿射铺砌》, 《美国数学会汇刊》, 373 (2020年), 第491–527页。
[76] H. Triebel, 《利普希茨区域及利普希茨流形上的函数空间: 作为逐点乘子的示性函数》, 《马德里康普顿斯数学评论》, 15 (2002), 第475–524页。[77] J. Tyynelä, J. Leinonen, D. Moisseev, and T. Nousiainen, 《雪花的雷达后向散射: 分形、聚集体与软球状体模型的比较》, 《大气与海洋技术杂志》, 28 (2011), 第1365–1372页。
[78] G. Vainikko, 《利普曼–施温格方程的快速求解器》, 载于《数学物理中的正问题与反问题》, 施普林格, 2000年, 第423–440页。[79] ,《多维弱奇异积分方程》, 施普林格, 2006年。[80] J. Vass, 《迭代函数系分形的显式包围圆》。 arxiv.org/abs/1301.1378。[81] M. A. Vivaldi, 《一些传输问题中的分形与欧几里得相互作用》, 《数学》, 62 (2007), 第327–343页。
[82] S. G. Warren and R. E. Brandt, 《从紫外线到微波波段的冰的光学常数: 修订汇编》——《地球物理研究: 大气》, 113 (2008)。[83] L. Ying, 《利普曼–施温格方程的稀疏化预条件子》, SIAM 多尺度建模与仿真期刊, 13 (2015), 第644–660页。
[84] M. A. Yurkin and A. G. Hoekstra, 《离散偶极近似: 概述与最新进展》, 定量光谱学与辐射传递杂志, 106 (2007), 第558–589页。
[85] T. I. Zaitseva and V. Y. Protasov, 《自仿射 2-吸引子与铺砌》, Matematich- eskii Sbornik, 213 (2022), 第71–110页。