arXiv:2602.05011v1 [math.OC] 4 Feb 2026

用于大规模群体控制的巴拿赫控制障碍函数

Xuting Gao*、Guillem Pascual*、Scott Brown 和 Sonia Martínez´

摘要—本文研究如何通过一种采用所谓巴拿赫控制障碍函数（B-CBF）的广义框架，实现超大规模多智能体系统的安全控制。我们将大规模群体建模为空间域上的概率分布，并展示如何利用 B-CBF 适当地刻画各种可与大规模群体目标相结合的宏观约束。借助这一框架，我们为大规模群体定义稳定的梯度流和滤波梯度流，并特别关注最优传输算法。此外，我们还展示如何推导出智能体层面的微观算法，使其在大规模极限下与宏观层面的对应算法保持一致。随后，我们确定了一组智能体能够计算分布式解的条件；该解仅需利用通信范围内其他智能体提供的局部信息。最后，我们在仿真部分展示了这些理论结果在群体系统中的应用。

一、引言

控制屏障函数（CBF）已成为确保动力系统安全性的强大且通用的工具 [1]。通过将安全要求编码为状态空间上的不等式约束，控制屏障函数能够确保安全集的正向不变性，同时兼容基于优化的控制设计 [2]。这一框架自然地扩展到了多智能体系统领域 [3], [4]。在规模庞大的群体中，智能体数量可达数千甚至更多，此时将系统建模为连续体或密度，对于正确刻画宏观性能既有利又必要。然而，最终的算法需要在智能体层级实施，因此必须在宏观算法与微观算法之间建立有意义的联系，同时考虑智能体的感知和通信限制。在这项工作中，我们通过定义在巴拿赫空间上的宏观屏障函数来研究这一问题。

与有限维情形相比，控制屏障函数在无限维情形中的应用在很大程度上仍未解决。尽管控制屏障函数已应用于某些泛函情形，例如时滞系统 [5], ，但其在超大规模群体中的应用仍然有限 [6]。后者研究了宏观避碰的优势，而宏观密度整形的其他方面，以及如何应对各个智能体层级的限制，则尚未得到解决。

群体密度控制与传输表述密切相关，其目标是将初始分布引导至目标分布。这一视角自然地将最优传输（OT） [7], [8] 与作为主要算法工具联系起来。由于随机系统可以建模为在密度空间中演化的确定性偏微分方程，这些方法也可应用于随机控制系统 [9]。这些结果表明，（确定性）密度引导和最优传输对于确定性大规模群体控制和随机系统控制都具有重要意义。

然而，将安全约束直接纳入最优传输或其他密度整形方法仍然极具挑战。加入碰撞规避或密度上限等运行要求后，该问题会变成一个大型的、通常难以处理的无限维约束规划。现有的密度整形工作仅针对特殊情形，例如通量界 [10], 质量约束 [11],或高斯情形下的协方差控制 [12]。因此，在密度演化过程中强制实施广泛类别安全约束的通用方法仍是一项悬而未决的挑战。

一些密度控制方法以集中式方式使用，利用偏微分方程或最优传输表述的宏观解 [13]–[15] ，并在初始时刻将其传送给群体中的所有智能体。尽管这带来了显著的计算效率，但它对单点故障不够稳健，且适应性有限。相反，在去中心化方法中，智能体通过与其他智能体的局部交互自行计算解。尽管现有方案的通用性较低，但它们强调可扩展通信，并且更加稳健、更具适应性。现有方法包括分布式最优传输算法 [16], [17]或基于马尔可夫链动力学的密度反馈方案 [18], [19]。尽管这些方法提供了有效的引导机制，但针对整个群体的安全保障结果仍然相对匮乏。许多工作利用问题特定结构，例如马尔可夫链动力学上的基于对偶性的线性不等式约束 [20], ，或用于无人机群碰撞规避的受生物启发势场方法 [21]。将控制障碍函数式安全保障与基于传输的群体控制及分布式实现相结合的系统性框架仍然缺失。

本文提出了一个用于安全控制超大规模群体的统一框架。我们的主要贡献如下。(1) 我们引入了巴拿赫控制障碍函数（B-CBF）的使用，将控制障碍函数推广到余域为偏序巴拿赫空间的情形。这使得能够以一种与将群体的大规模模型自然表示为概率分布相契合的方式，统一处理随机约束和空间相关约束。(2) 我们利用该框架定义概率分布上的梯度流和滤波流，尤其关注由宏观-

*同等贡献。X. Gao、G. Pascual、S. Brown与S. Mart´ınez任职于加利福尼亚大学圣迭戈分校机械与航空航天工程系，美国加利福尼亚州圣迭戈。（电子邮箱： {gpascualastivill, xug003, sab007, soniamd}@ucsd.edu。）

观 B-CBF 所支配的约束最优传输问题。(3) 我们推导出一种微观密度引导表述，并证明其与宏观大尺度极限相一致。最后，我们确定了在有限范围相互作用的条件下，群体能够以分布式方式计算其解所需满足的条件。

记号：在全文中，我们用 $\mathbb{R}$ 表示实数集，用 $\mathbb{R}^n$ 表示 $n-$ 维欧氏空间。非负实数集定义为 $\mathbb{R}_{\geq 0}$。我们用 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ 表示定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的梯度算子，而 $\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$ 是时间导数算子的简写。函数的支集记为 $\operatorname{supp}(\rho) = \{x \mid \rho(x) > 0\}$。两点 x, y 之间的欧氏距离记为 $\operatorname{dist}(x, y)$。以点 x 为中心、半径为 R 的球记为 $B(x, R)$，其体积记为 $|B_R|$。注记 $\oplus$ 定义了闵可夫斯基和，使得 $A \oplus B := \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$。给定集合 S，我们定义指示函数 $\mathbf{1}_S(x) = 1$（若 $x \in S$），否则 $\mathbf{1}_S(x) = 0$。事件 A 的概率记为 $\mathbb{P}[A]$。

II. 预备知识

在陈述核心问题之前，我们先介绍泛函分析和最优输运中的基本概念 [7]–[22]。

A. 测度空间与泛函

在下文中，$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的绝对连续测度集合。任意 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 都对应一个密度函数 $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得 $\mathrm{d}\mu = \rho \mathrm{d}x$，其中 $\mathrm{d}x$（分别为 $\mathrm{d}\mu$）表示关于 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格测度（分别为 μ）进行积分。回顾一下，绝对连续测度集合 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 可以嵌入到 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中，后者是 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格可积函数所构成的完备赋范向量（巴拿赫）空间。

接下来，我们简要回顾巴拿赫空间之间函数的弗雷歇导数。关于赋范空间中的微积分，更多背景知识请参阅 [23]。

定义 2.1（弗雷歇导数）：设 Z 和 W 为实巴拿赫空间。若存在有界线性算子 $\frac{\delta F}{\delta x} : Z \to W$，使得

$$\lim_{\|z - z_0\| \downarrow 0} \frac{\|F(z) - F(z_0) - \frac{\delta F}{\delta z}(z - z_0)\|}{\|z - z_0\|} = 0.$$

算子 $\frac{\delta F}{\delta z}$ 称为 F 的 Fréchet 导数。

B. 最优传输

这里我们引用最优传输中的两个重要定义。第 V 节在计算标称集群速度时会用到这些工具。

定义 2.2（传输映射）：设 ρ_0 和 ρ_* 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的概率密度函数，其对应的概率测度为 μ_0，$\mu_* \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$。可测映射 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 若将 μ_0 推前为 μ_*，则称其为从 μ_0 到 μ_* 的传输映射，记作 $T_{\#}\mu_0 = \mu_*$。换言之，对于任意可测集合 $B \subset \mathbb{R}^n$，

$$\mu_T(B) = \mu_0\big(T^{-1}(B)\big).$$

定义了传输映射后，最优映射就是使总传输成本最小的映射。

定义 2.3（蒙日问题）：给定两个概率测度 $\mu_0, \mu_T \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 和一个成本函数 $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，蒙日问题定义为

$$\begin{aligned} \inf_{T} \quad & \int_{\mathbb{R}^n} c\big(x, T(x)\big)\, \mathrm{d}\mu_0(x) \\ \text{subject to} \quad & T_{\#}\mu_0 = \mu_T, \end{aligned} \tag{1}$$

该问题的解是最优传输方案 T_*。当 $c(x, y) = \|x - y\|_p^p$ 时，会出现一个值得注意的特殊情形，此时最优成本定义了 p-Wasserstein 距离。我们用 $W_p(\mu, \zeta)$ 表示两个概率测度 μ, ζ 之间的 p-Wasserstein 距离。当这些测度存在密度 ρ, η 时，我们稍微滥用一下记号，将其写作 $W_p(\rho, \eta)$。若测度 μ, ζ 具有有限且有界的 p 阶矩，则 p-Wasserstein 距离有良好定义。

III. 问题表述

为了开发用于大规模群体协调的算法，我们将：(1) 确定可纳入有意义的大规模协调目标中的宏观动力学和约束；(2) 获得经严格证明正确的宏观安全算法；(3) 为有限数量的智能体推导分散且一致的算法。

因此，我们首先介绍大规模群体的连续体模型。该基础将用于表述本文重点研究的三个问题。具体而言，我们在第 IV 节和第 V 节讨论问题 (2)，而问题 (3) 则留待第 VI 节讨论。我们采用连续体方法对大规模群体建模，其中系统的宏观状态由空间域 $\mathbb{R}^n$ 上的时变密度函数 $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 描述。请注意，这种情况下，ρ 的一个样本对应一个智能体状态。该宏观模型源自个体智能体的微观行为，其轨迹 $x(t)$ 由完全驱动的单积分器动力学支配

$$\dot{x} = u(t, x). \tag{2}$$

需要设计速度场 $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，以实现预期的宏观目标，例如引导群体执行覆盖任务或保持安全性。

在宏观层面，智能体的守恒关系导出刘维尔方程，这是一种一阶偏微分方程，其形式为

$$\partial_t \rho(t, x) + \nabla \cdot \rho(t, x) u(t, x) = 0, \tag{3}$$

满足无穷远处的零通量边界条件。该模型的严格推导可参见例如 [24]。我们假设该方程的解存在且唯一，这可在满足某些正则性条件时得到保证；参见 [25]。为方便记号，我们将 $\rho_t(x) := \rho(t, x) \in \mathbb{R}$ 记为 $t \in \mathbb{R}$，$x \in \mathbb{R}^n$，并稍微滥用一下记号，将 $\rho_t \equiv \rho_t \mathrm{d}x \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 表示为 $\mathbb{R}^n$ 在时间 t 的密度（测度）。类似地，我们将速度场记为 $u_t(x) = u(t, x) \in \mathbb{R}^n$，或简记为 $u_t \in \mathcal{U} = L^2(\mathbb{R}^n)$。

在群体机器人学中，安全要求通常涵盖避障和冲突规避等典型问题。下面我们给出这两方面的两个主要示例，阐明其与微观约束之间的联系。设 $\rho \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$为描述一个规模极大的群体的密度，且$(x_i, x_j)$是从 ρ中独立抽取的样本。

引理 *3.1*（避障）：设 $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个闭障碍物，$\mathcal{O}^b = \mathcal{O} \oplus B_{d_{\min}}$为需要避开的区域，其中 $d_{\min}$ 为安全裕度或智能体尺寸上界。考虑泛函 $H\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$，其定义如下:

$$H(\rho) = \varepsilon - \int_{\mathcal{O}^b} \rho(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

那么，避障的宏观表述，$H(\rho) \geq 0$，等价于避障的微观表述，$\mathbb{P}[\mathrm{dist}(x_i, \mathcal{O}) \geq d_{\min}] \geq 1-\varepsilon$。

证明：注意，$\mathbb{P}[\mathrm{dist}(x_i, \mathcal{O}) \geq d_{\min}]\mathbb{P}[\mathrm{dist}(x_i, \mathcal{O}^b) > 0] = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}^b} \rho(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \int_{\mathcal{O}^b} \rho(x)\,\mathrm{d}x$。 ■

另一项安全性要求是拥塞控制，其目标是保持群体中任意两个智能体之间的最小距离 d。这可以通过以下等价表述实现。

引理 *3.2*（冲突规避）：考虑泛函$H^d\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$，其中

$$H^d(\rho) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{\mathrm{dist}(x,y) \leq d\}}\, \rho(x)\rho(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{5}$$

于是，对于某个 $\varepsilon > 0$，冲突规避的宏观表述，$H^d(\rho) \leq \varepsilon$，等价于冲突规避的微观表述，$\mathbb{P}[\mathrm{dist}(x_i, x_j) \geq d] \geq 1-\varepsilon$。此外，使任一表述成立的充分条件是拥塞条件 $\rho \leq \rho_{\max} \leq \frac{\varepsilon}{|B_d|}$。 ——

证明：式（5）中的泛函等价于发生碰撞的概率，$H^d(\rho) = 1 - \mathbb{P}^{\rho\otimes\rho}[\mathrm{dist}(x, y) \geq d]$，其中 $\rho \otimes \rho$ 指的是 $\rho\mathrm{d}x$ 的乘积测度。

为证明第二个结论，我们使用 $\rho \leq \rho_{\max}$ 对其进行界定

$$H^d(\rho) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(y,d)} \rho\mathrm{d}x \right) \rho\mathrm{d}y \leq \rho_{\max}|B_d|,$$

这表明 $\rho_{\max} \leq \frac{\varepsilon}{|B_d|} \implies H^d(\rho) \leq \varepsilon$。 ■

类似的推理还可以得到一种确保群体中的智能体彼此保持接近的方法。

推论 *3.3*（群体凝聚）：群体凝聚的宏观表述，$H^d(\rho) \geq 1-\varepsilon$，等价于群体凝聚的微观表述，$\mathbb{P}[\mathrm{dist}(x_i, x_j) \geq d] \leq \varepsilon$。此外，二者成立的一个充分条件是 $\rho \geq \rho_{\min} \geq \frac{1-\varepsilon}{|B_d|}$。 • ——

其他宏观约束可以用定义在 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 上的函数来表述。其中包括 Wasserstein 代价和基于散度的代价。我们将在后续各节讨论它们可能的用途与含义。

现在，我们陈述本文所讨论的核心问题:

问题*1*（速度场安全过滤）：给定群体动力学（3）、安全集 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 以及时变的标称速度场 $u_{\mathrm{nom},\,t} \in \mathcal{U}$ 求一个速度场 $u_t(x)$，使集合 $\mathcal{C}$ 前向不变，同时最小化其与$u_{\mathrm{nom},\,t}$的偏差。

问题*2*（安全密度引导）：利用问题1的解，设计一个控制器，使群体从初始密度 $\rho_0 \in \mathcal{C}$ 移动到目标密度 $\rho_* \in \mathcal{C}$，且轨迹 ρ_t 对所有 $t \geq 0$都保持在 $\mathcal{C}$内。

问题*3*（分布式实现）：给出问题1和问题2之解的完全分布式实现，使其在智能体数量增加时收敛到宏观解。

IV. 基于 B-CBF 的二次规划安全密度引导

本节通过引入一种控制屏障函数的推广形式来解决问题1，我们称之为 Banach-CBF（B-CBF）。这一概念统一并推广了控制屏障函数 [2],和平均场控制屏障函数 [6]的概念。它将屏障函数的陪域从实数扩展到任意偏序巴拿赫空间。以这种方式定义屏障函数，可以更轻松地表述群体动力学研究中自然产生的某些约束。

对于具有动力学方程（2）的个体智能体，安全约束可以表示例如避障或速度限制；参见第三节。这些安全集通常可以表示为状态空间上光滑实值函数的次水平集。然而，正如本文所讨论的，对于诸如（3）这样的更一般的偏微分方程系统，还有其他类型的安全约束并不适合这一范式。有趣的是，诸如（3）这样的偏微分方程可以视为定义在相应巴拿赫空间上的常微分方程。对于（3），我们可以将 ρ_t 解释为定义在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的常微分方程的状态。

设 Ξ 和 $\mathcal{U}$ 为实巴拿赫空间，并在 Ξ 上定义一个控制系统，其动力学为 $f\colon \Xi \times \mathcal{U} \to \Xi$,

$$\dot{\xi} = f(\xi, u). \tag{6}$$

注意，刘维尔方程 (3) 是 (6) 的一个特例，其中 $\rho \simeq \xi$，且算子 $f(\rho, u) = -\nabla \cdot \rho u$。

现在，我们来定义此情境下的安全性概念。设 $\mathcal{Y}$ 为实巴拿赫空间，$\mathcal{K} \subset \mathcal{Y}$ 为一个锥。[1]。$\mathcal{K}$ 在 $\mathcal{Y}$ 上诱导出一个偏序 $\succeq$，定义为 $x \succeq y \iff x - y \in \mathcal{K}$。给定函数 $H\colon \Xi \to \mathcal{Y}$，我们通过偏序定义安全集 $\mathcal{C} = \{\xi \in \Xi\colon H(\xi) \succeq 0\}$。

定义 *4.1:* H 称为*Banach CBF* (B-CBF)，如果对每个 $\xi_0 \in \mathcal{C}$，都存在一个时变速度场 $u(t, \xi)$，使得 $H(\xi)$ 关于时间可微，并且

$$\dot{H}(\xi) \succeq -\alpha(H(\xi)), \tag{7}$$

沿着满足初始条件 ξ_0 的 (6) 的轨迹[2]，其中 $\alpha\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ 关于 $\succeq$ 连续且严格递增，并且 $\alpha(0) = 0$。

[1]锥是一个凸集 $\mathcal{K}$，满足对于任意 $y_1, y_2 \in \mathcal{K}$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$，$y_1 + y_2 \in \mathcal{K}$ $\lambda y_1 \in \mathcal{K}$ 和。

[2]换言之，$\dot{H}(\xi)$指的是复合函数 $H \circ \xi$ 的时间导数：$\mathbb{R} \to \mathcal{Y}$。只要该复合函数可微，这一定义就是良好定义的；不过，我们通常要求 H（显然 ξ也如此）可微，以便能够使用链式法则计算 $\dot{H}$。

下面的定理指出，B-CBF 的存在足以保证相应安全集的正向不变性。我们假设 f、 H和 α 具有足够的正则性，从而所有常微分方程的解均唯一，且对所有时间都存在。

定理*4.2*： 令 $H: \Xi \to \mathcal{Y}$ 为系统 (6) 的 B-CBF。那么，安全集 $\mathcal{C}$ 是正向不变的。

证明： 为证明这一点，我们应用偏序巴拿赫空间上的比较原理。令$y(0) = H(\xi_0) \in \mathcal{Y}$，然后考虑比较系统 $\dot{y} = -\alpha(y)$。由于 $\alpha(0) = 0$ 且 α 单调递增，$y(0) \succeq 0$ 意味着对所有 $t > 0$， $y(t) \succeq 0$ 。换言之，解 $y(t)$在 $\mathcal{K}$ 上演化。因此，定理 2] 中的比较原理成立。利用该定理，$\dot{H}(\xi) \succeq \dot{y}$ 意味着对所有 $t \geq 0$， $H(\xi(t)) \succeq y(t)$。这证明了对所有 $t \geq 0$，$H(\xi(t)) \succeq 0$，从而使 $\mathcal{C}$ 正向不变。■

为突出该方法的灵活性，我们给出几个可能的函数 H，并说明它们可以如何在实践中使用。关键是将 B-CBF约束 (7) 用速度场显式表示，从而可以将其应用于凸优化问题。

A. 标量值泛函 $(\mathcal{Y} = \mathbb{R})$

均值场 CBF [6] 是 B-CBF 的一个特殊情形，其中陪域为实数集（$\mathcal{H}$， $\|\cdot\|$） $= (\mathbb{R}, |\cdot|)$，标准偏序 $\succeq$ 为 $\geq$。B-CBF约束变成熟悉的标量不等式$\dot{H}(\rho) \geq -\alpha(H(\rho))$。在大多数情况下，时间导数使用链式法则计算。

引理 *4.3*： （一般积分泛函）：给定一个可测子集 $S \subset \mathbb{R}^n$，定义一个泛函

$$H(\rho) := \beta - \int_S h(x, \rho(x)) \mathrm{d}x, \tag{8}$$

对于某个连续可微核 h： $S \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$和常数 $\beta \in \mathbb{R}$，则其沿着 (3) 的轨迹在时间 t处的导数为

$$\dot{H} = \int_S \frac{\partial h}{\partial \rho}(x) \nabla \cdot \rho_t(x) u_t(x) \mathrm{d}x. \quad \bullet$$

下面我们给出此类泛函及其导数的示例。

引理 *4.4*（障碍物规避约束）：根据引理 4.3，泛函 (4) 的时间导数为

$$\dot{H}(\rho) = \int_{\mathcal{O}^b} \nabla \cdot \rho_t(x) u_t(x) \, \mathrm{d}x. \quad \bullet$$

引理 *4.5*（碰撞规避）：A 中碰撞规避泛函 (5) 的时间导数为

$$\dot{H}^d = -2 \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{\mathrm{dist}(x,y) \leq d\}} \rho_t(y) \nabla \cdot \rho_t(x) u_t(x) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \quad \bullet$$

为了约束密度 ρ 保持接近（或远离）静态参考密度 η，可以利用 Kullback-Leibler（KL）散度构造屏障函数：

$$H(\rho) := \beta - D_{\mathrm{KL}}(\rho \,\|\, \eta) = \beta - \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) \log\left(\frac{\rho(x)}{\eta(x)}\right) \mathrm{d}x,$$

当 supp(ρ) =supp(η) 时，该函数定义良好。KL 散度 $D_{\mathrm{KL}}(\rho \,\|\, \eta)$ 不是度量，但满足 $D_{\mathrm{KL}}(\rho \,\|\, \eta) = 0$当且仅当 $\rho = \eta$ 几乎处处成立。可以证明如下。

引理 *4.6*（*KL* 散度）：根据引理 4.3，若 ρ_t 和 η 连续可微，则时间导数为

$$\dot{H} = -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\nabla \rho_t}{\rho_t} - \frac{\nabla \eta}{\eta}\right) \cdot \rho_t u_t \, \mathrm{d}x. \quad \bullet$$

或者，也可以使用第二节中定义的 p-Wasserstein 度量 $W_p(\eta, \rho)$，来评估 η 与 $\rho \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 之间的差异。可以证明如下结论。

引理 *4.7*（*Wasserstein* 距离）：设障碍函数泛函由到静态参考密度 η 的平方 2-Wasserstein 距离构造而成，即 $H(\rho) := \beta - \frac{1}{2} W_2^2(\rho, \eta)$。其时间导数为

$$\dot{H} = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \phi(x) \cdot \rho_t u_t \, \mathrm{d}x,$$

其中 ϕ 是最优输运问题中 ρ与 η 之间所谓的 Kantorovich 势函数（参见 [27,命题 7.17]）。向量场 $-\nabla \phi(x)$表示 Wasserstein 梯度流的方向，为最小化 $W_2^2(\rho, \eta)$提供最速下降方向。•

B. 空间相关函数（$\mathcal{Y} = L^1(\mathbb{R}^n)$）

群体特有的一类关键安全要求涉及必须在整个空间域内逐点成立的约束，例如对所有 $x \in \mathbb{R}^n$，密度上限 $\rho(x) \leq \rho_{\max}(x)$。使用实值函数（如 $H(\rho) = \max_x (\rho_{\max}(x) - \rho(x))$）来表述这类条件存在问题，因为该函数不可微。另一方面，使用可微的 B-CBF 可以轻松地对此约束建模。

回顾一下，B-CBF 的陪域可以是函数构成的巴拿赫空间，例如 $\mathcal{Y} = L^1(\mathbb{R}^n)$。这使我们能够将密度映射为空间相关函数，从而同时施加无限多个约束。[3]我们赋予 $L^1(\mathbb{R}^n)$偏序 $\succeq$，其定义如下：

$$\phi_1 \succeq \phi_2 \iff \phi_1(x) \geq \phi_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

于是，B-CBF不等式（7）被解释为对速度场的空间逐点约束。

引理 *4.8*（逐点密度上限）：为强制执行约束 $\rho \preceq \rho_{\max}$（即 $\rho(x) \leq \rho_{\max}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$），以确保参考剖面 $\rho_{\max}$的冲突规避，我们定义H： $L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$，其中 $H(\rho) = \rho_{\max} - \rho$。安全集 $\mathcal{C}$包含所有逐点以上限 $\rho_{\max}$为界的密度。因此，时间导数按逐点计算（假设$\dot{\rho}_{\max} = 0$），即 $\dot{H}(\rho_t) = \dot{\rho}_{\max} - \dot{\rho}_t = \nabla \cdot \rho_t u_t$。 •

B-CBF不等式（7）成为对通量散度的逐点约束，即对所有 $x \in \mathbb{R}^n$有$(\nabla \cdot \rho u)(x) \geq -\alpha_x(\rho_{\max}(x) - \rho(x))$，从而确保密度上限得到遵守。

最后，我们将 B-CBF 的概念应用于解决问题 1 中的安全滤波目标函数。在每个时刻 t，我们

[3]换言之，给定不可数多个安全集 $\mathcal{C}_x = \{\rho \mid \rho_{\max}(x) - \rho(x) \geq 0\}$，B-CBF 框架能够轻松地分析它们交集 $\mathcal{C} = \bigcap_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{C}_x$ 的行为。

求解一个无限维优化问题，

$$u_t = \arg\min_{u' \in \mathcal{U}} \int_{\mathbb{R}^n} \|u'(x) - u_{\text{nom},t}(x)\|^2 \, \mathrm{d}x, \quad \text{s.t.} \quad \dot{H}(\rho_t) \succeq -\alpha(H(\rho_t)), \tag{10}$$

只要 u_t 在线性地出现在控制障碍函数约束中，它就是一个二次规划（QP）。我们在注5.2和第VI节中介绍求解这些无限维规划的可行方法。

V. 安全且稳定的密度导引

本节介绍求解问题2的核心方法。我们首先回顾一种基于梯度流构造 u_{nom} 的通用方法，该方法在最优传输和约束的情形下具体化，如第二节-B所述。随后，我们建立该方法指数收敛至目标的条件。

A. 标称速度场

一种获得标称速度控制场、使 ρ_0 导引至 ρ_* 的初步方法，可以通过以下意义上的梯度流来实现。

引理*5.1*（*[28, 定理4.2]*）：考虑一个实值可微泛函 $F: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$。定义

$$u_{\text{nom},t} = -\nabla \frac{\delta F}{\delta \rho}(\rho_t). \tag{11}$$

从给定的 ρ_0出发，考虑ρ_0 在动力学 (3) 下的动态演化，并满足，$_t$ 对所有 $t \geq 0$均成立。于是， $F \leq 0$。此外，如果 F 是强凸的，且其最小化器位于 ρ_*，那么 ρ_t 将弱收敛到 ρ_*。•

考虑满足引理5.1假设的 $F(\rho) = \frac{1}{2} W_2^2(\rho, \ \rho_*)$。如引理4.7 所述， $F(\rho) = \frac{1}{2} W_2^2(\rho, \ \rho_*)$ 的一般（Wasserstein）梯度流为 $u_{\text{nom}} = -\nabla\phi$，其中 ϕ 是 Kantorovich 势函数。按照 [29]， $u_{\text{nom}}(t, \ x) = -\nabla\phi(x) = T^*(x) - x$， 其中$T^*$是最优传输问题 (1) 的解。作为求解 ϕ 的替代方案，可以通过直接求取 T^*来计算名义最优传输速度场。我们可以采用滚动时域计算，求得 T_t^*，将 ρ_t 引导至 ρ_*，并得到

$$u_{\text{nom}}(t, x) = \gamma(t) \left(T_t^*(x) - x\right), \tag{12}$$

其中 $\gamma(t) \geq 0$ 是时变增益，亦即“速度调度”。

引理*5.2*（一维最优传输映射 *[27]*）：设 $\rho_t \, \mathrm{d}x$, $\rho_* \, \mathrm{d}x \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 是两个概率密度函数，其对应的累积分布函数（CDF）为 F_0 和 F_*。从 ρ_t到 ρ_*的最优传输映射为 $T_t^*(x) = F_*^{-1}(F_0(x))$. •高维最优传输映射的数值方法见 [30]。我们将在第VI节应用分布式方法 [17]。

B. 基于二次规划的安全性与稳定性

在任意时刻 t，通过求解一个无限维二次规划（QP），将名义速度投影到安全且稳定的速度集合中。设 $V: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 为满足以下条件的李雅普诺夫泛函

$$\varphi_1(m(\rho, \rho_*)) \leq V(\rho) \leq \varphi_2(m(\rho, \rho_*))$$

对于某些 class-$\mathcal{K}$ 函数 φ_1， φ_2 以及定义在 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 上的某个度量 m。注意， V 不一定与 F 相同。在每个 $t \geq 0$，都可以求解

$$u_t = \arg\min_{u' \in \mathcal{U}} \int_{\mathbb{R}^n} \|u'(x) - u_{\text{nom},t}(x)\|^2 \, \mathrm{d}x \tag{13a}$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{H}(\rho_t) \succeq -\alpha_1(H(\rho_t)), \tag{13b}$$

$$\dot{V}(\rho_t) \leq -\alpha_2(V(\rho_t)), \tag{13c}$$

其中 α_1 与我们在 B-CBF 中定义的相同， α_2 是一个取标量值的 class-$\mathcal{K}$ 函数。第二个约束是标准的李雅普诺夫条件，旨在确保收敛到目标并保持稳定性。

定理*5.3*：考虑初始条件为 $\rho_0 \in \mathcal{C}$ 、目标密度为 $\rho_* \in \mathcal{C}$ 的群体 (3)。假设 $V(\rho)$ 在 ρ_* 处存在全局唯一极小值点。通过 B-CBF H 定义安全集 $\mathcal{C}$。假设对于任意 $t \geq 0$，优化问题 (13) 均可行。那么，在 u_t 下演化、由 (13) 的解控制的密度轨迹ρ_t 满足

1) 安全性：轨迹始终处于安全集内，即对于所有 $t \geq 0$，$H(\rho_t) \succeq 0$。 2) 收敛性：度量 m表征了轨迹 ρ_t 随 $t \to \infty$的变化渐近收 ρ_* 。

证明：第一部分，即安全性，直接由约束 (13b) 和定理4.2得出。收敛保证则可根据控制李雅普诺夫泛函（CLF）约束 (13c)，按照 [31, 定理 3.36]推导得出。■

注*5.1*（ V的作用）：请注意，如果 F 不是关于 ρ 的严格凸泛函，和/或 B-CBF 未定义凸集 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$，则 (13a)-(13b) 的解可能是一个局部极小值点或鞍点。引入 (13c) 有助于达到 ρ_*。然而，如果 F 是关于 ρ的严格凸泛函，B-CBF $H(\rho) \succeq 0$ 定义了凸集 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$，且 $\rho_* \in \text{Int}(\mathcal{C})$，那么我们可以保证 ρ_t 将弱收敛到 ρ_*，无需使用 (13c)。•

注*5.2*：（离散化与易处理的二次规划构造）：无限维优化（13）在计算上难以处理。以下离散化方法可导出实用的滚动时域算法。假设 ρ_t、 u_{nom}和 u 的支集位于紧域 Ω 内，可以对其进行有限网格划分，以获得分段常数近似 $\boldsymbol{\rho}_k \mathbf{U}_k$和$\mathbf{U}_{\text{nom},\ k}$，对应离散时刻 t_k、 $k \geq 0$。利用这些有限维向量，可以将（13a）近似为$\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_{\text{nom},\ k}$的加权二范数的平方，并用关于 $\boldsymbol{\rho}_k$ 和$\mathbf{U}_k$的适当（线性）离散化替代 B-CBF（13b）和 CLF 约束（13c）。一般而言，这将得到一个有限维二次规划，可采用滚动时域方式在每个时刻求解：对于每个 $\boldsymbol{\rho}_k$，我们首先求得$\mathbf{U}_{\text{nom},\ k}$，然后通过二次规划求解$\mathbf{U}_k$，最后利用（3）的适当离散化将 $\boldsymbol{\rho}_k$ 推进至$\boldsymbol{\rho}_{k+1}$。我们在例VII-A中采用此方法。•

VI. 微观与分散式算法

这里，我们讨论如何在智能体层级分布式地实现前述算法。

首先，当使用来自 (11) 的 u_{nom} 时，我们获得问题 (13a)-(13b) 的一致智能体版本。设 $\{x_1, \ldots, x_N\}$ 是从 ρ 中独立采样得到的 N 个智能体的位置。定义 $\mathbf{x}_N = (x_1, \ldots\ldots, x_N)$，并令 $r > 0$ 为决定每个智能体通信半径的小常数。我们定义截断高斯核

$$K_r(y) = \frac{1}{C} \exp\left(-\frac{\|y\|^2}{2r^2}\right) \mathbf{1}_{B(0,r)}(y) \tag{14}$$

其中归一化常数为 $C = \int_{B(0,r)} \exp\left(-\frac{\|y\|^2}{2r^2}\right) \mathrm{d}x$。该核用于近似密度，如下所示：

$$\widehat{\rho}_{\mathbf{x}_N,r}(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} K_r(x - x_j), \tag{15}$$

注意，只要智能体 i 知道 N，并且能够与 $2r$ 距离内的其他智能体通信，就可以在本地计算该近似值。具体而言，如果每个智能体 i都能在一个邻域内进行通信，$\mathcal{N}_i = \{j \in \{1, \ldots, N\} : \|x_i - x_j\| \le 2r\}$，那么对于任意 $x \in B(x_i, r)$，

$$\widehat{\rho}_{\mathbf{x}_N,r}(x) = \widehat{\rho}^{\,i}_{\mathbf{x}_N,r}(x) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} K_r(x - x_j), \tag{16}$$

这由截断高斯核 (14) 的支集性质可得。因此，我们将 $\widehat{\rho}_{\mathbf{x}_N,r}(x)$ 视为一种自然分布的量，每个智能体都可以获取。以下引理给出了统一界，并说明这些近似值收敛到真实函数值。

引理 *6.1*：设 $x_1, \ldots, x_N$ 是来自ρ的独立样本。那么，当 $N \to \infty$ 和 $r \to 0$时，$\widehat{\rho}_{\mathbf{x}_N,r} \to \rho$ 几乎处处一致成立。

证明：由于核 K_r 在 $r \to 0$时趋于狄拉克 delta，因此由 [32, 定理 3]可得结论。 ∎

下述引理保证了基于采样得到的名义速度能够恰当地收敛到通过梯度流获得的名义速度。

引理 *6.2*：假设 $F : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 是 Fr´echet 可微泛函，且其一阶变分的梯度 $\nabla \frac{\delta F}{\delta \rho}$关于 ρ连续，并且 $\nabla \frac{\delta F}{\delta \rho}(\rho) \in L^2(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$。此外，假设 H、$\dot{H}$、V和 $\dot{V}$关于 ρ 连续。定义

$$u_{\text{nom}}(\rho) = \nabla \frac{\delta F}{\delta \rho}(\rho).$$

固定一个密度 $\rho \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$，并令 u^* 表示满足 $\rho_t = \rho$ 且名义速度为 $u_{\text{nom}}(\rho)$的方程 (13) 的解。令$x_1, \ldots, x_N$为从 ρ 中独立抽取的样本，并令 $\bar{u}_{\mathbf{x}_N}$表示密度近似为 $\rho_t = \widehat{\rho}_{\mathbf{x}_N,r}$ 且名义速度为 $u_{\text{nom}}(\widehat{\rho}_{\mathbf{x}_N,r})$的方程 (13) 的解。那么，当 $N \to \infty$和 $r \to 0$时，$\bar{u}_{\mathbf{x}_N} \to u^*$ 几乎处处逐点。

证明：根据引理 6.1 和连续性假设，$H(\widehat{\rho}_{\mathbf{x}_N,\,r})$、$\dot{H}(\widehat{\rho}_{\mathbf{x}_N,\,r})$、$V(\widehat{\rho}_{\mathbf{x}_N,\,r})$ 以及 $\dot{V}(\widehat{\rho}_{\mathbf{x}_N,\,r})$ 分别收敛于它们的真实值 $H(\rho)$、$\dot{H}(\rho)$、$V(\rho)$ 和 $\dot{V}(\rho)$。根据假设，目标函数（13a）关于 ρ 连续。由于（13）的（唯一）最小化器关于目标函数和约束连续依赖，我们得出$\bar{u}_{\mathbf{x}_N} \to u^*$。 ∎

以分布式方式计算 $u_{\text{nom}}(\widehat{\rho}_{\mathbf{x}_N,\,r})$ 取决于 F 的性质。特别是，如果计算仅依赖于 $\widehat{\rho}_{\mathbf{x}_N,\,r}$ 和 $\nabla\widehat{\rho}_{\mathbf{x}_N,\,r}$，则可以使用（16）在本地完成计算。另一种可能性是，该泛函对应于 $F(\rho) = W_1(\rho, \rho_*)$，对此可以在 [17] 中找到一种分布式实现。另一方面，约束（13b）和（13c）可能带来更大的挑战。如果存在一种算法，使每个智能体都能通过与其他智能体通信来找到局部解，则该问题可以进一步解耦，并以分布式方式求解。

以下结果给出了问题结构适用于分布式实现的条件。为此，我们利用由智能体的位置$\mathbf{x}_N$生成的 Voronoi 划分，$\{\mathcal{V}_i\}_{i=1}^N$；见 [33]。

定理 6.3：假设引理 6.2 的所有条件均成立。设 $\text{supp}(\rho_t)$、$\text{supp}(u_{\text{nom}}) \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是紧域，ρ_t 绝对连续，且 α 线性。假设泛函H（分别为 V）由 $H(\rho) = \int_\Omega h(x, \rho)\mathrm{d}x$ 给出（分别为 $V(\rho) = \int_\Omega g(x, \rho)\,\mathrm{d}x$），其中 $h(x, \rho)$（分别为 $g(x, \rho)$）可积、具有可积偏导数且连续。定义 $H_i(\rho) = \int_{B(x_i,r)\cap\mathcal{V}_i} h(x, \rho)\,\mathrm{d}x$（分别为 $V_i(\rho) = \int_{B(x_i,r)\cap\mathcal{V}_i} g(x, \rho)\,\mathrm{d}x$） $i \in \{1, \ldots, N\}$，并考虑解 $\bar{u}_{\text{distr},\mathbf{x}_N}$：

$$\arg\min_{\bar{u}\in\mathcal{U}} \sum_{i=1}^{N} \int_{B(x_i,r)\cap\mathcal{V}_i} \|\bar{u}(x) - u_{\text{nom}}(\widehat{\rho}^{\,i}_{\mathbf{x}_N,r})(x)\|^2 \mathrm{d}x \tag{17a}$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{N} \dot{H}_i(\widehat{\rho}^{\,i}_{\mathbf{x}_N,r}(x)) \ge -\sum_{i=1}^{N} \alpha_2(H_i(\widehat{\rho}^{\,i}_{\mathbf{x}_N,r}(x))), \tag{17b}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{V}_i(\widehat{\rho}^{\,i}_{\mathbf{x}_N,r}(x)) \le -\sum_{i=1}^{N} \alpha_2(V_i(\widehat{\rho}^{\,i}_{\mathbf{x}_N,r}(x))). \tag{17c}$$

于是，有 $\bar{u}_{\text{distr},\mathbf{x}_N} \to u^*$，因为 $N \to \infty$ 和 $h \to 0$，其中 $u^*(t, x)$ 是 (13a)-(13c) 的一个解。

证明：(17a) 中的代价可重写为 a s

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{B(x_i,r)\cap\mathcal{V}_i} \|\bar{u}_t(x) - u_{\text{nom}}(\rho)(x)\|^2 \mathrm{d}x.$$

根据假设，被积函数由一个可积函数所界定。于是，根据控制收敛定理（DCT），当 $N \to \infty$时，其极限以及 $h \to 0$收敛到$\int_\Omega \|\bar{u}_t(x) - u_{\text{nom}}(\rho)(x)\|^2 \mathrm{d}x$。我们可将 (17b) 重写为

$$\sum_i H_i(\widehat{\rho}^{\,i}_{\mathbf{x}_N,r}(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{B(x_i,r)\cap\mathcal{V}_i} h(x, \widehat{\rho}^{\,i}_{\mathbf{x}_N,r}(x))\mathrm{d}x,$$

引理 6.1表明$\widehat{\rho}^{\,i}\mathbf{x}_N,r(x)$与$\nabla\widehat{\rho}^{\,i}\mathbf{x}_N,r(x)$在 $B(x_i, r)$上的收敛；h及其导数的可积性和连续性，连同控制收敛定理，确保当$N \to \infty$ 且 $h \to 0$时，$\sum_{i=1}^N \alpha(H_i(\widehat{\rho}^{\,i}\mathbf{x}_N,r)) = \alpha(\sum_{i=1}^N H_i(\widehat{\rho}^{\,i}\mathbf{x}_N,r)) \to \alpha(H(\rho))$，其中我们利用了 α 是线性的。我们可以用同样的论证表明，当$N \to \infty, h \to 0$时，$\sum_{i=1}^N \dot{H}_i(\widehat{\rho}^{\,i}\mathbf{x}_N,r(x)) \to \dot{H}(\rho)$。对约束(17c)也可作类似论证。该结果由最小化器关于目标函数和约束的连续性得出。 ∎

注记 *6.1*（空间依赖泛函）：对于诸如 $H(\rho) = \rho_{\max} - \rho$ 之类的空间依赖泛函，可以采用直接方法。在这种情况下，如引理 6.3所述，将B-CBF约束限制在Voronoi 划分上，可将每个沃罗诺伊区域 $\mathcal{V}_i$ 中的不等式解耦如下

$$\nabla \cdot \widehat{\rho}^{i}_{\mathbf{x}_N,r}(x)u(x) \geq \alpha_{x_i}(\rho_{\max}(x) - \widehat{\rho}^{i}_{\mathbf{x}_N,r}(x)), \qquad (18)$$

$\forall x \in \mathcal{V}_i \cap B(x_i,\ r)$。当 $N \to \infty, h \to 0$ 时，这些约束将收敛到引理 6.1 中的原始约束。 •

备注 *6.2*（分布式实现）：为了利用局部信息求解（17），每个智能体 i必须首先计算其在区域 $\mathcal{V}_i \cap B(x_i,\ r)$上的局部约束和目标函数。如 [33], 中所述，计算 $\mathcal{V}_i \cap B(x_i,\ r)$ 时，只需了解 $2h$ 距离内其他智能体的位置即可。为计算导数，我们应用引理 4.3；时变边界会产生额外项，但如 [33]中所述，若使用不受限的 Voronoi 划分，这些项将消失。于是，每个智能体的决策变量为 $u_t(x)$，定义在 $\mathcal{V}_i \cup B(x_i,\ r)$上。在一般的积分约束下，该优化问题是耦合的，并且可能是非线性的，因为计算（17b）—（17c）中的泛函导数时，每个决策变量都会出现。因此，为了实现该优化，可以采用准静态近似，即冻结智能体的位置及其对应的密度。随后，智能体可以应用分布式连续时间优化的原始-对偶算法，例如 [34] （或者在离散化后采用 [35],中的方法），并引入拉格朗日乘子和一致性变量。一个简单的空间离散化方法是假设 $u_t(x) \equiv u_t^i$中的值为常数，其中 $x \in \mathcal{V}_i \cap B(x_i,\ r)$，从而将积分化为求和。计算出速度后，利用控制其运动的简单积分器动力学传播智能体的位置。•

VII. 数值示例

在本节中，我们将方法应用于以下两个案例。其他 B-CBF 的更多示例请参见扩展版 [36]。

A. 示例：具有密度约束的一维输运

我们考虑一个一维输运问题：初始高斯密度为 $\rho_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$，目标均匀密度为$\rho_* \sim \mathcal{U}[10,14]$，时间范围为 $t \in [0,1]$。我们施加逐点密度上限（参见引理 4.8） $\rho(t,x) \leq 0.2$，对区间 $S = [3,7]$内所有 x 均成立。我们采用 B-CBFH： $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to L^1(S)$，其定义为 $H(\rho) = 0.2 - \rho|_S$，其中$\rho|_S$ 表示 ρ 在区域 S上的限制。

我们采用如下时间离散化 $\Delta t = 0.001$，以及 $k\Delta t$。在每个 t_k处，我们首先按照引理5.2计算时变最优传输映射，并选择$\gamma(t_k) = 1/(1-t_k)$，然后通过对该直线进行网格划分来求解优化问题(13)。求得的速度场 $\mathbb{U}_k$ 被应用于 ρ_k，以用隐式迎风法更新密度。如图1所示，当密度接近约束区域时，安全滤波器被激活。所得速度场使密度减速并扩散，以满足约束$\rho(t,x) \leq 0.2$，随后重新收敛，从而成功完成向目标分布的输运。

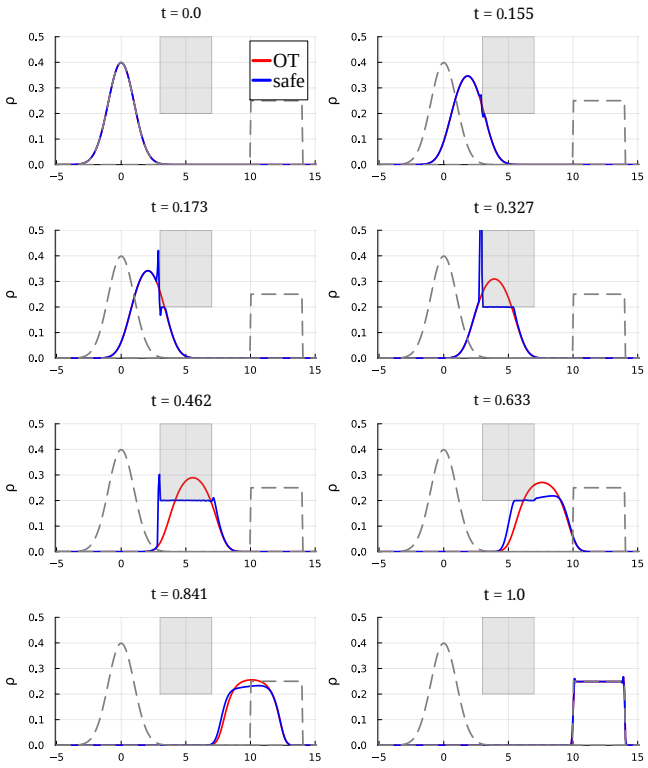

图 1. 灰色虚线表示初始与终端密度 ρ_0， ρ_*，阴影部分表示不安全区域。红色和蓝色曲线分别显示了经 CBF 投影后无约束最优传输和安全密度的演化。

B. 二维障碍物规避

引理 3.1中的避障表述可应用于最优传输的二维实现。为此，我们考虑如下的初始分布与目标分布：

$$\rho_0 \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \tfrac{1}{20}I_2\right), \quad \rho_T \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}7\\7\end{bmatrix}, \tfrac{1}{20}I_2\right),$$

以及一个障碍物 $O^b \subset \mathbb{R}^2$。随后我们使用 B-CBF

$$H(\rho) = \varepsilon - \int_{O^b} \rho(x)\,dx,$$

其中 $\varepsilon > 0$ 表示障碍物内部允许的最大密度。

为获得名义速度，我们应用 Sinkhorn 算法计算最优耦合，然后采用重心近似确定传输映射，具体说明见 [30]。之后，我们使用与前一个二维示例相同的离散化方法求解 (13)，并采用隐式迎风法传播密度。图 2 展示了施加屏障泛函后，速度场如何引导流体绕过障碍物，在保持安全约束的同时，仍将密度引向目标分布。

C. 具有冲突规避和群体凝聚的二维分布式最优传输

为了以分布式方式计算最优传输速度场，我们按照 [17] 中的实现方式来

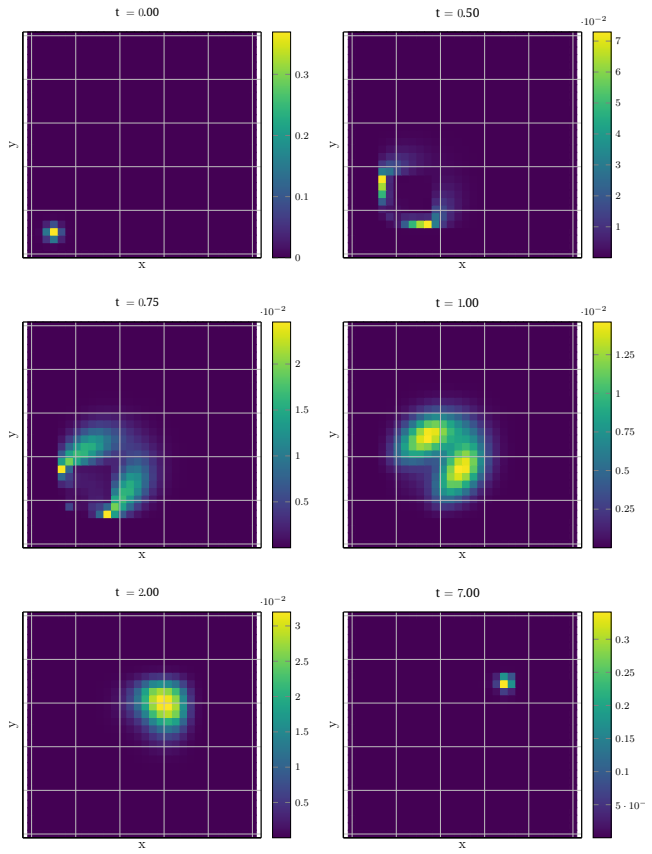

图2. 热力图展示了二维避障条件下密度演化的快照。这些图描绘了在遵守方形障碍物约束的同时，从初始密度到目标密度的输运。随着时间推移，密度流绕过障碍物，成功避开不安全区域并收敛到目标分布。

求取名义速度。随后，我们利用引理 3.2 中的公式以及备注 6.1、6.2，实现 B-CBF，以确保碰撞规避并维持群体凝聚。将 u_t 和 $\widehat{u}_{\text{nom},\ \mathbf{x}_N}$ 在每个智能体的区域上进行分段常数近似后，我们便可将问题 (17) 完全解耦，并得到如下形式的局部优化

$$
\begin{aligned}
v_i^*(t) = \arg\min_{u_t} \ & \|u_t - \widehat{u}_{\text{nom},\mathbf{x}_N}(t, x_i)\|_2^2 \\
\text{s.t.} \ & u_t \cdot \nabla \widehat{\rho}^i_{\mathbf{x}_N,r}(x_i) \geq \alpha_1\big(\widehat{\rho}^i_{\mathbf{x}_N,r}(x_i) - \rho_{\max}(x_i)\big), \\
& u_t \cdot \nabla \widehat{\rho}^i_{\mathbf{x}_N,r}(x_i) \leq \alpha_2\big(\widehat{\rho}^i_{\mathbf{x}_N,r}(x_i) - \rho_{\min}(x_i)\big).
\end{aligned}
$$

在实现中，我们使用固定的最小和最大密度 $\varepsilon_{\min}$，$\varepsilon_{\max}$。为每个智能体添加安全滤波器后，我们得到了图 3 所示的结果。正如预期，智能体彼此分散，以降低局部密度。这可能会导致与目标分布不匹配，因为在某些区域，目标密度过高，智能体无法聚集。与此同时，不存在孤立的智能体：即使智能体远离目标，它们仍会呈群集分布。

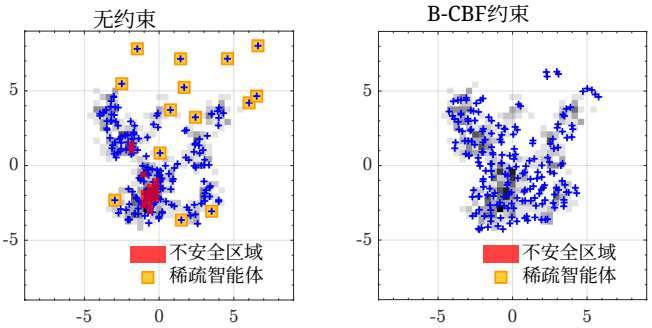

图3. 无约束（左）与CBF约束（右）分布式最优传输下智能体分布的最终状态。目标密度以灰度显示，最大密度约束违反以红色高亮。该约束对应于最大密度 $\varepsilon_{\max} = 0.045$和最小密度 $\varepsilon_{\min} = 0.01$ 。

D. 分布式熵下界

在此情境中，我们采用前一案例中介绍的分布式最优输运算法所给出的标称控制器，并施加积分型约束，对群体的熵设置下限：

$$H(\rho) = \varepsilon - \mathcal{H}(\rho),$$

其中 $\mathcal{H}(\rho) = -\int_\Omega \rho log \rho \mathrm{d}x$ 是熵泛函，安全区域是集合 $\{H(\rho) \geq 0\}$，这等价于熵 $\{\mathcal{H}(\rho) \geq \varepsilon\}$的下界。随后我们利用定理(6.3)，以分布式方式实现B-CBF。我们假设泛函的值与标称控制器在划分$B(x_i, h) \cap \mathcal{V}_i$的单元内为常数，将该情形应用于问题(17)，得到如下耦合优化问题：

$$
\begin{aligned}
& \arg\min_{\bar{u}\in\mathcal{U}} \ \sum_{i=1}^{N} \left\|\bar{u}_i - \widehat{u}_{\text{nom},\mathbf{x}_N}(x_i)\right\|^2 w_i \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{N} \nabla \widehat{\rho}^i_{\mathbf{x}_N,r}(x_i)\, \bar{u}_i\, w_i \\
& \qquad\qquad \geq -\alpha\left(\varepsilon + \sum_{i=1}^{N} \widehat{\rho}^i_{\mathbf{x}_N,r}(x_i)\, \log\big(\widehat{\rho}^i_{\mathbf{x}_N,r}(x_i)\big)\, w_i\right),
\end{aligned}
$$

其中 w_i 是单元的大小。请注意，这个优化问题具有二次规划的结构，并带有一个全局耦合约束。实现用于求解该优化问题的分布式算法时，我们需要保证其始终可行，确保无论何时停止算法，得到的近似解仍能保证系统的安全性。为此，我们为每个智能体求解以下局部问题：

$$
\begin{aligned}
v_i^* = \ & \arg\min_{u} \left\|u - \widehat{u}_{\text{nom},\mathbf{x}_N}(x_i)\right\|^2 \\
& \text{s.t.}\ \alpha\, \widehat{\rho}^i_{\mathbf{x}_N,r}(x_i)\, \log\big(\widehat{\rho}^i_{\mathbf{x}_N,r}(x_i)\big)\, w_i - \nabla \widehat{\rho}^i_{\mathbf{x}_N,r}(x_i)\, w_i\, u \\
& \qquad \leq \sum_{j\in\mathcal{N}_i} (y_i - y_j) + \alpha \frac{\varepsilon}{N},
\end{aligned}
$$

其中 $y_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \ldots, N\}$ 为松弛变量。关键在于，无论松弛变量取何值，聚合解 $\bar{v}^* = (v_1^*, \ldots, v_N^*)$ 都满足全局约束，因为

$\sum_i \sum_{j\in\mathcal{N}_i}(y_i - y_j) = 0$ 在无向图上。因此，整个优化过程中都能维持安全性。由于局部问题是一个二次规划，因此可以高效求解。为确保局部解向量 $\bar{v}^*$ 收敛至全局最优性，松弛变量通过动态一致性规则进行更新：

$$\dot{y}_i = -k \sum_{j\in\mathcal{N}_i} (\lambda_i - \lambda_j),$$

其中，λ_i 是与智能体i的局部约束相关联的拉格朗日乘子。该算法收敛到全局极小值的性质已在 [37]中得到证明。图4展示了群体最优传输中熵在无约束演化与受约束演化下的对比。如图所示，在受约束情形下，熵收敛至安全区域，并在仿真的剩余过程中始终保持在安全集内。

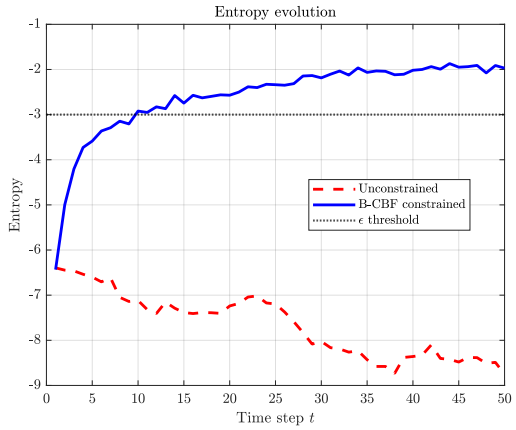

图4. 熵在无约束情形与 B-CBF 约束情形下的演化，熵阈值为 $\varepsilon = 3$。

VIII. 结论与未来工作

本文提出了巴拿赫控制障碍函数（B-CBF），将经典控制障碍函数和均值场 CBF 加以推广，以确保大规模群体系统的安全性。我们展示了 B-CBF 如何与梯度流控制器相结合，尤其是那些基于最优传输的控制器，从而为安全性和收敛性提供形式化保证。此外，我们开发了一种一致的分布式算法，使个体智能体能够实现宏观控制律，从而弥合微观执行与宏观安全保证之间的差距。数值仿真验证了这一可扩展且鲁棒的方法的有效性。未来的研究方向包括将其应用于随机系统、更一般的约束以及双层分布式优化问题。

参考文献

[1] A. D. Ames, S. Coogan, M. Egerstedt, G. Notomista, K. Sreenath 和 P. Tabuada，“控制障碍函数：理论与应用”，载于欧洲控制会议，2019 年，第 3420–3431 页。

[2] A. D. Ames、X. Xu、J. W. Grizzle 和 P. Tabuada，《基于控制屏障函数的安全关键系统二次规划》，IEEE自动控制汇刊，第62卷，第3876页，2017年，第8期，第3861页。[3] P. Glotfelter、J. Cort´es 和 M. Egerstedt，《应用于多机器人系统的非光滑屏障函数》，载于 IEEE 决策与控制会议，澳大利亚墨尔本，2017年12月，第5237–5242页。[4] D. Panagou、D. M. Stipanovi˘c 和 P. G. Voulgaris，《利用李雅普诺夫型障碍函数对多智能体系统进行多目标控制》，载于 IEEE 决策与控制会议。IEEE，2013 年，第 1478–1483 页。[5] A. Kiss、T. Molnar、A. Ames 和 G. Orosz，《控制屏障泛函：时滞系统的安全关键控制》，《鲁棒与非线性控制国际期刊》，第33卷，第7309页，2023年，第12期，第7282页。[6] S. W. Fung 和 L. Nurbekyan，《平均场控制障碍函数：实时群体控制框架》，载于美国控制会议，2025年，第1–7页。[7] C. Villani，《最优传输：旧与新》。Springer，2008年，第338卷。[8] J. D. Benamou 和 Y. Brenier，《蒙日-康托罗维奇质量转移问题的计算流体力学解》，《数值数学》，第84卷，第3期，第375–393页，2000年。[9] Y. Chen、T. Georgiou 和 M. Pavon，《将线性随机系统最优引导至最终概率分布，第一部分和第二部分》，IEEE自动控制汇刊，第1158–1180页，2015年。[10] A. Stephanovitch、A. Dong 和 T. T. Georgiou，《通过收费站的最优传输》，《欧洲应用数学杂志》，第36卷，第3期，第613–637页，2025年。[11] P. Gladbach 和 E. Kopfer，《密度约束最优传输的极限》，《变分法与偏微分方程》，第61卷，第2期，第70页，2022年。[12] J. Pilipovsky 和 P. Tsiotras，《具有输出反馈的计算高效机会约束协方差控制》，载于 IEEE 决策与控制会议。IEEE，2024年，第677–682页。[13] G. Foderaro、S. Ferrari 和 T. A. Wettergren，《用于多智能体轨迹优化的分布式最优控制》，《自动化》，第50卷，第149–154页，2014年。[14] P. Frihauf 和 M. Krstic，《领导者引导部署到平面曲线上：一种基于偏微分方程的方法》，IEEE自动控制汇刊，第56卷，第8期，第1791–1806页，2011年。[15] Y. Chen，《交互智能体系统的密度控制》，IEEE自动控制汇刊，第69卷，第1期，第246–260页，2023年。[16] S. Bandyopadhyay、S. J. Chung 和 F. Y. Hadaegh，《利用最优传输进行概率群体引导》，载于 IEEE 控制应用会议，2014年，第498–505页。[17] V. Krishnan 和 S. Mart´ınez，《用于群体部署的分布式最优传输》，《自动化》，2023年，审稿中。[18] S. Bandyopadhyay、S. J. Chung 和 F. Y. Hadaegh，《大规模自主智能体群体的概率分布式控制》，IEEE机器人学汇刊，第33卷，第5期，第1103–1123页，2017年。[19] S. Biswal、K. Elamvazhuthi 和 S. Berman，《利用局部密度反馈对多智能体系统进行去中心化控制》，IEEE自动控制汇刊，第67卷，第8期，第3920–3932页，2021年。[20] N. Demir 和 B. Acikmese，《具有冲突规避功能的去中心化自主智能体密度控制》，载于国际自动控制联合会世界大会，2014年。[21] J. Li、Y. Fang、H. Cheng、Z. Wang、Z. Wu 和 M. Zeng，《具有碰撞规避和编队机动的大规模固定翼无人机群系统控制》，IEEE系统杂志，第17卷，第1期，第744–755页，2022年。[22] H. Brezis，《泛函分析、索伯列夫空间与偏微分方程》。Springer，2010年。[23] A. Sasane，《函数空间中的优化》。多佛出版社，2016年。[24] N. Bellomo 和 C. Dogbe，《交通与人群建模：模型、推测与展望综述》，《SIAM评论》，第53卷，第3期，第409–463页，2011年。[25] L. Ambrosio，《非光滑向量场的输运方程与柯西问题》，载于《变分法与非线性偏微分方程》。Springer，2008年，第1–41页。[26] V. Laskhmikantham、A. R. Mitchell 和 R. W. Mitchell，《抽象锥中微分方程的极大解与极小解及比较结果》。《波兰数学年刊》，第34卷，1977年。

[27] F. Santambrogio, 《应用数学家的最优传输》。Springer, 2015年。[28] V. Krishnan 和 S. Mart´ınez, 《用于群体部署的分布式最优传输》, 载于*IEEE* 决策与控制会议, 美国佛罗里达州迈阿密海滩, 2018年12月, 第4583–4588页。[29] Y. Brenier, 《向量值函数的极分解与单调重排》, 《纯粹与应用数学通讯》, 第44卷, 第4期, 第375–417页, 1991年。[30] G. Peyr´e 和 M. Cuturi, 《计算最优传输》, 技术报告, 2017年。[31] A. N. Michel、L. Hou 和 D. Liu, 《动力系统的稳定性》。Springer, 2008年。[32] V. S. Varadarajan, 《论样本概率分布的收敛》, 《*Sankhy¯a*: 印度统计学杂志 (*1933—1960*)》, 第19卷, 第1/2期, 第23–26页, 1958年。[33] F. Bullo、J. Cort´es 和 S. Mart´ınez, 《机器人网络的分布式控制》, 应用数学丛书。普林斯顿大学出版社, 2009年。[34] A. Cherukuri 和 J. Cort´es, 《经济调度中用于初始化和随时优化的分布式发电机协调》, 《*IEEE*网络系统控制汇刊》, 第2卷, 第3期, 第226–237页, 2015年。[35] M. Zhu 和 S. Mart´ınez, 《不等式约束和等式约束下的分布式凸优化》, *IEEE*自动控制汇刊, 第57卷, 第1期, 第151–164页, 2012年。[36] X. Gao、G. Pascual、S. Brown 和 S. Mart´ınez, 《用于大规模群体控制的巴拿赫控制障碍函数》, 2025年。 [在线]。网址: http://muro.ucsd.edu/sonia/papers/data/CBF large swarms. pdf [37] X. Tan、C. Liu、K. H. Johansson 和 D. V. Dimarogonas, 《连续时间无违约多智能体优化算法及其在安全分布式控制中的应用》, 《*IEEE*自动控制汇刊》, 第70卷, 第5114–5128页, 2025年。