arXiv:2602.05015v1 [math.AP] 4 Feb 2026

# 洛伦兹力方程的 $S^1$-指标理论

ˆ CRISTIAN BEREANU 和 ALEXANDRU PIRVUCEANU

**摘要**。 本文证明，与洛伦兹力方程相关的庞加莱作用泛函的 $S^1$-不变性保证了多个临界点的存在，这些临界点是具有固定周期的周期解。为此，我们证明了一个抽象的多重性结果，该结果基于采用 $S^1$-指标的 Lusternik-Schnirelman 方法。关于 Fadell-Rabinowitz 指标的相应结果已由 Ekeland 和 Lasry（《数学年刊》，112（1980年））证明。我们的抽象结果的主要特点是，它允许我们考虑仅满足弱紧性条件的非光滑泛函，而该条件与庞加莱泛函相适配。

**2010年数学主题分类**：58E05；58E35；34C25；83A05；70H40。

## 1 引言

在下文中， $\mathbb{R}^3$ 被赋予欧几里得标量积“ $\cdot$ ”和欧几里得范数“$|\cdot|$”。 设 $T>0$ 为一个固定周期。设 $V\colon\ [0,T]\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$与 $W\colon\ [0,T]\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 为两个 $C^1$-函数。本文考虑具有电势 $V$ 和磁势 $W$，的洛伦兹力方程（LFE），即

$$\left(\frac{q'}{\sqrt{1-|q'|^2}}\right)'=E(t,q)+q'\times B(t,q),$$

其中

$$E=-\nabla_q V-\frac{\partial W}{\partial t},\qquad B=\operatorname{curl}_q W$$

分别表示电场和磁场，而 $E+q'\times B$ 是众所周知的洛伦兹力。本文所说的 LFE 的**解** $q$ ，是指一个 $q=(q_1,q_2,q_3)\colon\ [0,T]\to\mathbb{R}^3$，它属于 $C^2$ 类，满足 $|q'(t)|<1$，对所有 $t\in[0,T]$ 均成立，并且验证该方程。下文考虑 $T$**-周期解**，即满足以下条件的解 $q$

$$q(0)=q(T),\quad q'(0)=q'(T).$$

按照费曼的说法 [14] （另见 [17]），上述方程是单个电荷在场 $E$ 和 $B$. 中的相对论正确运动方程。洛伦兹力方程最早由洛伦兹 [18] 和庞加莱 ´ [22] 引入。有关洛伦兹力方程的更多详情，例如可参见洛伦兹的论文 [19]。另一方面，在达莫尔论文 [10] 的结论部分，我们可以读到：“庞加莱 ´ [22] 所取得的最重要进展之一，是相对论电子拉格朗日量

$$L_{\text{electron}} = -m_{\text{electron}}c^2\sqrt{1-\frac{\mathbf{v^2}}{c^2}},$$

其中

$$m_{\text{electron}} = \frac{4}{3}\frac{E_{\text{em}}}{c^2}.\text{”}$$

关于洛伦兹力方程以及庞加莱所引入的上述拉格朗日量，我们可以在 [14] 中读到：“在相对论的情形下，公式如下：

$$S = -m_0c^2\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt - q\int_{t_1}^{t_2}[\phi(x,y,z,t) - \mathbf{v}\cdot A(x,y,z,t)]dt$$

[.....] 这个作用函数完整地给出了单个粒子在电磁场中相对论运动的理论。”

接下来，定理 6 [3] 证明，函数 $q\colon [0,T]\to\mathbb{R}^3$ 是洛伦兹力方程的一个 $T$- 周期解，其电势为 $V$、磁势为 $W$，当且仅当 $q$ 是一个 $T$- 周期利普希茨函数，满足 $||q'||_\infty \le 1$，且 $q$ 是下述变分不等式的解

$$\begin{aligned}\int_0^T[\sqrt{1-|q'|^2}-\sqrt{1-|\varphi'|^2}]dt \quad &+ \quad \int_0^T[\mathcal{E}(t,q,q') - \nabla_q V(t,q)]\cdot(\varphi-q)dt \\ &+ \quad \int_0^T W(t,q)\cdot(\varphi'-q')dt \ge 0\end{aligned}$$

对所有满足 $||\varphi'||_\infty \le 1$, 的 $T$-周期利普希茨函数 $\varphi\colon [0,T]\to\mathbb{R}^3$，其中 $\mathcal{E}\colon [0,T]\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 定义为

$$\mathcal{E}(t,q,p) = (p\cdot D_{q_1}W(t,q), p\cdot D_{q_2}W(t,q), p\cdot D_{q_3}W(t,q)).$$

这或多或少意味着 $0\in\partial S(q)$，或者说， $q$ 是与具有 $T$-周期边界条件的洛伦兹力方程相关的庞加莱作用泛函 $\mathcal{I}_*$ 的一个临界点（见定理 4）。

本文考虑自治势 $V$和 $W$，即 $V\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$和 $W\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$，因此两个势都与时间变量无关。主要观察是，在这种情况下，作用泛函 $\mathcal{I}_*$ 是 $S^1$-不变的。关于洛伦兹力方程，我们的主要结果大致如下（见定理 5）。首先，我们假设 $V$ 属于 $C^2$， $V(0) = 0$， $V > 0$ 且$V' \ne 0$ 于 $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$，并且在无穷远处有

$$\lim_{|q|\to\infty} V(q) = l^* > 0.$$

关于电势 $V$在原点附近的行为，我们假设存在某个正整数 $m$ 以及某个 $\lambda > 0$，使得

$$V(q) \geq \lambda |q|^2$$

在原点附近的所有 $q$。此外，我们只考虑满足 $V''$有界的电势 $V$。对于磁势 $W$，我们假设 $W$属于 $C^2$类，且$, W', W''$在 $\mathbb{R}^3$上有界。然后，我们证明存在$\Lambda_m > 0$，使得若上文引入的 $\lambda$ 满足 $\lambda \geq \Lambda_m$，则 $\mathcal{I}_*$ 至少有 $3m$ 个负能级上的临界轨道，它们是洛伦兹力方程的 $2\pi$-周期解。常数 $\Lambda_m$ 量化了电势 $V$ 与磁势 $W$之间的相互作用。

为了证明庞加莱作用泛函在负能级上有多个临界轨道，我们针对非光滑泛函发展了一种基于 $S^1$-指标的 Lusternik-Schnirelman 理论。首先，我们证明了一个适用于仅满足弱 Palais-Smale 紧性条件的光滑泛函的抽象结果（定理 2）。在这一光滑情形下，我们的结果是经典 Lusternik-Schnirelman 方法的推广，该方法采用 $S^1$-指标或 Fadell-Rabinowitz 指标（例如，参见定理 1 [12], 定理 6.1 [21], 命题 10 [11]）。证明定理 2 的主要工具是 Ghoussoub 定位定理 [15, 16, 11]。从光滑情形（定理 2）过渡到非光滑情形（定理 3）时，我们采用 Ekeland-Lasry 正则化过程（ [12]中的引理 7）。关于通过将 Lusternik-Schnirelman 方法应用于庞加莱作用泛函来研究洛伦兹力方程周期解的其他结果，参见 [4, 6, 8, 9]。在牛顿情形下，关于算子 $u \mapsto u''$ 的非线性有界扰动的周期解结果，例如参见 [1]。关于 Lusternik-Schnirelman 理论的入门介绍，可参见专著[2]-第 9, [11]章-第 5, [21]章-第 6, [16]章-第 7 章。

本文的组织结构如下。我们在第 2 节证明抽象结果（定理 2）。在第 3 节，我们在希尔伯特空间 $H_T^1$ 上引入 Poincar´e 作用泛函，并在 $H_T^1$, 的背景下证明适当的紧性条件，即命题 1。在第 4 节，我们证明上述关于洛伦兹力方程固定周期周期解的主要结果（定理 5）。

**致谢**。我们感谢匿名审稿人提出的重要意见和建议，这些意见和建议显著提升了本文的质量。

## 2 $S^1$-不变非光滑泛函

在本节中，$(X, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ 是一个实希尔伯特空间，$(Y, \|\cdot\|_Y)$ 是一个实巴拿赫空间，满足 $X \subset Y$，且典范单射 $i : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ 是一个紧算子。接下来，我们考虑泛函 $\mathcal{I} : X \to (-\infty, \infty]$，它满足以下假设:

$(H)$ $\mathcal{I} = \Psi + \mathcal{F}$, where $\mathcal{F} \in C^1(X, \mathbb{R})$ and $\Psi : X \to (-\infty, +\infty]$ is a convex

定义域非空的下半连续泛函，即$D(\Psi) = \{q \in X : \ \Psi(q) < +\infty\} \neq \emptyset$。

$X$ 的对偶空间记为 $X^*$。对于任意 $q \in X$，，根据里斯表示定理，存在唯一的元素 $\nabla \mathcal{F}(q) \in X$，使得

$$\mathcal{F}'(q)[\varphi] = \langle \nabla \mathcal{F}(q), \varphi \rangle \quad \text{for all } \varphi \in X.$$

## 2.1 临界点与紧性条件

对于任意 $q \in D(\Psi)$，我们考虑**在处的次微分**（见 [13]），其定义为

$$\partial \Psi(q) = \{f^* \in X^* : \Psi(\varphi) - \Psi(q) \geq f^*[\varphi - q] \text{ for all } \varphi \in D(\Psi)\}.$$

由此，对于任意 $q \in D(\Psi)$，有

$$\partial \mathcal{I}(q) = \mathcal{F}'(q) + \partial \Psi(q) = \{\mathcal{F}'(q) + f^* : f^* \in \partial \Psi(q)\}.$$

注意，由黎斯表示定理，对于每个 $q \in D(\Psi)$，$\partial \Psi(q)$ 和 $\partial \mathcal{I}(q)$都是 $X$ 的子集。点 $q \in X$ 是 $\mathcal{I}$ 的**临界点**，如果 $q \in D(\Psi)$，并且

$$0 \in \partial \mathcal{I}(q),$$

或者，等价地，

$$-\mathcal{F}'(q) \in \partial \Psi(q),$$

或者，等价地，满足以下变分不等式：

$$\Psi(\varphi) - \Psi(q) + \mathcal{F}'(q)[\varphi - q] \geq 0 \text{ for all } \varphi \in D(\Psi).$$

**一个 $(PS)$-序列，在能级 $c \in \mathbb{R}$ 处，对 $\mathcal{I}$**(见 [23]) 是一个序列 $(q_n) \subset D(\Psi)$，满足 $\mathcal{I}(q_n) \to c$，并且存在一个序列 $(\varepsilon_n) \subset [0, \infty)$，具有以下性质：$\varepsilon_n \to 0$ 并且对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有

$$\Psi(\varphi) - \Psi(q_n) + \mathcal{F}'(q_n)[\varphi - q_n] \geq -\varepsilon_n \|\varphi - q_n\| \text{ for all } \varphi \in D(\Psi).$$

**一个 $(PS)^*$-序列，在能级 $c \in \mathbb{R}$ 处，对 $\mathcal{I}$**(见 [23]) 是一个序列 $(q_n) \subset D(\Psi)$，满足 $\mathcal{I}(q_n) \to c$，并且存在一个序列 $(f_n^*) \subset X^*$，具有以下性质：$\|f_n^*\| \to 0$ 并且对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有

$$f_n^* \in \partial \mathcal{I}(q_n),$$

或者，等价地，

$$\Psi(\varphi) - \Psi(q_n) + \mathcal{F}'(q_n)[\varphi - q_n] \geq f_n^*[\varphi - q_n] \text{ for all } \varphi \in D(\Psi).$$

我们需要以下结果（见 [23]中的引理1.3）。

**引理1** 考虑一个凸下半连续函数 $\chi:\ X \to (-\infty, +\infty]$满足 $\chi(0) = 0$. 假设

$$\chi(q) \geq -\|q\| \text{ for all } q \in X.$$

那么，存在 $f^* \in X^*$，使得 $\|f^*\| \leq 1$，并且

$$\chi(q) \geq f^*[q] \text{ for all } q \in X.$$

**引理 2** 考虑一个序列 $(q_n) \subset D(\Psi)$ 以及 $c \in \mathbb{R}.$。我们有，$(q_n)$ 是能级 $c$处的一个 $(PS)$-序列，当且仅当 $(q_n)$是能级 $c$处的一个 $(PS)^*$-序列

证明。 假设 $(q_n)$是能级 $c$处的一个 $(PS)^*$-序列，其中 $\mathcal{I}$，即 $\mathcal{I}(q_n) \to c$，并且存在一个序列 $(f_n^*) \subset X^*$，具有如下性质： $\|f_n^*\| \to 0$，且对任意 $n \in \mathbb{N}$，均有

$$\Psi(\varphi) - \Psi(q_n) + \mathcal{F}'(q_n)[\varphi - q_n] \geq f_n^*[\varphi - q_n] \text{ for all } \varphi \in D(\Psi).$$

对于任意 $n \in \mathbb{N}$，均有

$$|f_n^*[x]| \leq \|f_n^*\|\|x\| \text{ for all } x \in X.$$

特别地,

$$f_n^*[\varphi - q_n] \geq -\|f_n^*\|\|\varphi - q_n\| \text{ for all } \varphi \in D(\Psi).$$

由此可得

$$\Psi(\varphi) - \Psi(q_n) + \mathcal{F}'(q_n)[\varphi - q_n] \geq -\|f_n^*\|\|\varphi - q_n\| \text{ for all } \varphi \in D(\Psi),$$

并且，只需取 $\varepsilon_n = \|f_n^*\|$ $(n \in \mathbb{N})$，$(q_n)$ 就是 $\mathcal{I}$在能级 $c$处的 $(PS)$-序列。

接下来，假设 $(q_n)$ 是 $\mathcal{I}$在能级 $c$ 处的 $(PS)$-序列，即 $\mathcal{I}(q_n) \to c$，并且存在一个序列 $(\varepsilon_n) \subset [0, \infty)$，满足性质 $\varepsilon_n \to 0$，且对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有

$$\Psi(\varphi) - \Psi(q_n) + \mathcal{F}'(q_n)[\varphi - q_n] \geq -\varepsilon_n\|\varphi - q_n\| \text{ for all } \varphi \in D(\Psi).$$

若 $\varepsilon_n = 0$，我们取 $f_n^* = 0.$。现在考虑 $\varepsilon_n > 0$ 和 $\chi:\ X \to (-\infty,\ +\infty]$由下式给出

$$\chi(q) = \varepsilon_n^{-1}(\Psi(q + q_n) - \Psi(q_n) + \mathcal{F}'(q_n)[q]) \quad (q \in X).$$

显然， $\chi$ 是凸的、下半连续的， $\chi(0) = 0$，并且

$$\chi(q) \geq -\|q\| \text{ for all } q \in X.$$

因此，利用上述引理1，存在 $g_n^* \in X^*$，满足 $\|g_n^*\| \leq 1$，并且

$$\chi(q) \geq g_n^*[q] \text{ for all } q \in X.$$

若取 $f_n^* = \varepsilon_n g_n^*$，则有 $\|f_n^*\| \to 0$，并且利用

$$\varepsilon_n\chi(\varphi - q_n) \geq f_n^*[\varphi - q_n] \text{ for all } \varphi \in D(\Psi),$$

结论现在已经清楚了。 ■

## 2.2 Ekeland-Lasry正则化程序

下面的结果是本文的主要工具之一，归功于 Ekeland 和 Lasry 的引理 7 [12]。

**引理 3** 假设 $\mathcal{I}$ 有下界，且下列假设成立：

$$(*)\ \textit{There exists } \alpha > 0 \textit{ such that the function}$$
$$D(\Psi) \ni q \mapsto \mathcal{I}(q) + \alpha\|q\|^2 \in (-\infty, \infty) \textit{ is convex.}$$

考虑 $0 < \varepsilon < \alpha^{-1}$，并令 $\mathcal{I}_\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ 由下式给出

$$\mathcal{I}_\varepsilon(q) = \inf_{\varphi \in X}(\varepsilon^{-1}\|\varphi - q\|^2 + \mathcal{I}(\varphi)).$$

泛函 $\mathcal{I}_\varepsilon$ 满足下列性质：

$(EL1)$ $\mathcal{I}_\varepsilon \in C^1(X, \mathbb{R})$;

$(EL2)$ 对所有 $q \in X$，有

$$\inf_X \mathcal{I} \le \mathcal{I}_\varepsilon(q) \le \mathcal{I}(q);$$

$(EL3)$ 对于固定的 $q \in X$，有

$$\mathcal{I}'_\varepsilon(q) = 0 \Leftrightarrow [q \in D(\Psi), 0 \in \partial\mathcal{I}(q)] \Leftrightarrow \mathcal{I}_\varepsilon(q) = \mathcal{I}(q).$$

此外，考虑由下式给出的函数 $\gamma : X \to X$

$$\gamma(q) = q - \frac{\varepsilon}{2}\nabla\mathcal{I}_\varepsilon(q) \quad (q \in X).$$

那么，对于任意 $q \in X$，有 $\gamma(q) \in D(\Psi)$，并且

$(EL4)$ $\mathcal{I}(\gamma(q)) = \mathcal{I}_\varepsilon(q) - \varepsilon^{-1}\|q - \gamma(q)\|^2$; (

$EL5)$ $2\varepsilon^{-1}(q - \gamma(q)) \in \partial\mathcal{I}(\gamma(q))$。

证明。$(EL2)$ 是引理 7 [12] 中的关系式 (41)。$(EL3)$ 是引理7 [12]中的关系式 (42)。我们的函数 $\gamma$ 是引理 7 [12] 证明的步骤 1 中引入的函数 $\psi$ 。上面给出的 $\gamma$ 的公式是引理 7 [12] 证明的步骤 2 中的关系式 (63)。$(EL4)$ 是引理7 [12]证明的步骤 1 中的关系式 (47)。$(EL5)$ 是引理 7 [12] 证明的步骤 1 中的关系式 (48)。 ■

给定 $c \in \mathbb{R}$，我们称 $\mathcal{I}$ 在能级 $c$ 满足**弱 Palais-Smale 条件**（简写为（$wPS$）$_c$-**条件**）（参见 [3, 4]），如果对于来自 $D(\Psi)$ 的任意序列（$q_n$），只要它是能级 $c$处的（$PS$）-序列，就存在一个子序列（$q_{n_k}$）在 $Y$ 中收敛到 $\mathcal{I}$ 的一个临界点 $q^*$，使得 $\mathcal{I}(q^*) = c$，也就是说，$q^*$是 $\mathcal{I}$ 在能级 $c$ 处的一个临界点，并且 $\|q_{n_k} - q^*\|_Y \to 0$.

给定 $c \in \mathbb{R}$，我们称 $\mathcal{I}_\varepsilon$ 在能级 $c$ 处满足 **弱 Palais-Smale 条件**，如果对于来自 $X$ 的任意序列 $(q_n)$，满足 $\mathcal{I}_\varepsilon(q_n) \to c$且$\mathcal{I}'_\varepsilon(q_n) \to 0$，都存在一个子序列 $(q_{n_k})$，在 $Y$ 中收敛到 $q^* \in X$，并且满足 $\mathcal{I}_\varepsilon(q^*) = c$ 和 $\mathcal{I}'_\varepsilon(q^*) = 0$.

**引理 4** 考虑满足 $\mathcal{I}$ $(wPS)_c$-条件的 $c \in \mathbb{R}$。如果 $0 < \varepsilon < \alpha^{-1}$，其中 $\alpha$ 在 $(*)$ 中给出，那么 $\mathcal{I}_\varepsilon$ 满足 $(wPS)_c$-条件。

证明。 考虑一个序列 $(q_n) \subset X$，使得

$$\mathcal{I}_\varepsilon(q_n) \to c \text{ and } \mathcal{I}'_\varepsilon(q_n) \to 0.$$

对于任意正整数 $n$，我们考虑

$$\varphi_n = \gamma(q_n), \quad u_n = 2\varepsilon^{-1}(q_n - \varphi_n).$$

利用引理 3 - $(EL4)$，可得

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\varphi_n) &= \mathcal{I}(\gamma(q_n)) \\ &= \mathcal{I}_\varepsilon(q_n) - \varepsilon^{-1}\|q_n - \gamma(q_n)\|^2 \\ &= \mathcal{I}_\varepsilon(q_n) - \varepsilon^{-1}\|q_n - \varphi_n\|^2 \\ &= \mathcal{I}_\varepsilon(q_n) - \frac{\varepsilon}{4}\|u_n\|^2. \end{aligned}$$

利用引理 3 - $(EL5)$，可得

$$2\varepsilon^{-1}(q_n - \gamma(q_n)) \in \partial\mathcal{I}(\gamma(q_n)),$$

也就是说

$$u_n \in \partial\mathcal{I}(\varphi_n).$$

但是，根据 $\gamma$的定义，有

$$\nabla\mathcal{I}_\varepsilon(q_n) = 2\varepsilon^{-1}(q_n - \gamma(q_n)) = u_n,$$

因此 $u_n \to 0$ 和 $\mathcal{I}(\varphi_n) \to c.$ 我们推得，$(\varphi_n)$ 是一个处于能级 $c$的 $\mathcal{I}$ 的 $(PS)^*$-序列；由引理 2 可知，$(\varphi_n)$ 是一个处于能级 $c.$的 $\mathcal{I}$ 的 $(PS)$-序列。但 $\mathcal{I}$满足 $(wPS)_c$-条件，因此存在一个子序列 $(\varphi_{n_k})$ 和 $q^* \in D(\Psi)$，使得 $\mathcal{I}(q^*) = c$, $0 \in \partial\mathcal{I}(q^*)$，并且 $\|\varphi_{n_k} - q^*\|_Y \to 0.$。接着，由引理 3 - $(EL3)$，我们推得 $\mathcal{I}_\varepsilon(q^*) = c$, $\mathcal{I}'_\varepsilon(q^*) = 0$，且 $\mathcal{I}_\varepsilon$ 满足 $(wPS)_c$-条件。 ■

## 2.3 Benci 的 S1-指标与 Ghoussoub 定位定理

本小节回顾一些已知结果。

首先，我们介绍 Benci 的 $S^1$-指标（参见 [5, 21]）。考虑

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

它是一个在复数乘法下的紧致拓扑群。我们将模 $2\pi$, 的实数（即 $\mathbb{R}/2\pi$）通过 $\theta \leftrightarrow e^{i\theta}.$ 与 $S^1$ 等同。因此，群 $(\mathbb{R}/2\pi, +)$ 与 $(S^1, \cdot)$ 等同。我们考虑一个实巴拿赫空间$\mathcal{X},$，并将所有作用于 $B(\mathcal{X})$ 的有界线性算子构成的巴拿赫空间记为

作用于 $\mathcal{X}$，并赋予通常的算子范数。回顾一下，算子 $A \in B(\mathcal{X})$ 若满足对所有 $x \in \mathcal{X}$. 都有 $\|Ax\| = \|x\|$，则称为**等距算子**。接下来，Banach 空间 $\mathcal{X}$ 上的 $S^1$ 的**表示**是一个函数

$$L : S^1 \to B(\mathcal{X}) : \quad \theta \mapsto L(\theta)$$

具有以下性质：

$$\begin{gathered} L(0) = \mathrm{id}, \\ L(\theta_1 + \theta_2) = L(\theta_1)L(\theta_2) \text{ for all } \theta_1, \theta_2 \in S^1, \\ S^1 \times \mathcal{X} \ni (\theta, x) \mapsto L(\theta)x \in \mathcal{X} \text{ is continuous.} \end{gathered}$$

子集 $A$ 在表示 $L$ 下是不变的，当且仅当对于所有$\theta \in S^1$. 都有 $L(\theta)A = A$。域 $\mathcal{X}$ 上的 $S^1$ 的表示 $L$ 是等距的，当且仅当对于所有 $\theta \in S^1$. ， $L(\theta)$ 都是等距算子。表示 $L$ 下 $\mathcal{X}$ 中的两个不变子集之间的映射 $R$ 是等变的，当且仅当

$$R \circ L(\theta) = L(\theta) \circ R \text{ for all } \theta \in S^1.$$

考虑

$$\mathcal{C} = \{A \subset \mathcal{X} : A \text{ is closed and invariant}\}.$$

与等距表示 $L$ 相关联的 $S^1$-**指标**是函数

$$\mathrm{ind} : \mathcal{C} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\} : \ A \mapsto \mathrm{ind}(A)$$

定义如下：对于 $A \in \mathcal{C}$， $S^1$-指标 $A$ 是满足以下条件的最小整数 $k$： 存在 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 和 $\Phi \in C(A, \ \mathbb{C}^k \setminus \{0\})$，使得

$$\Phi(L(\theta)x) = e^{in\theta}\Phi(x) \text{ for all } \theta \in S^1, x \in A.$$

如果不存在这样的映射，则定义

$$\mathrm{ind}(A) = +\infty.$$

最后，我们定义

$$\mathrm{ind}(\emptyset) = 0.$$

上面定义的映射“ind”是表示 $L$,的一个指标，也就是说，它具有以下性质：

(i) $\mathrm{ind}(A) = 0$ 当且仅当 $A = \emptyset$;
(ii) 如果 $R : A_1 \to A_2$ 是等变且连续的，那么

$$\mathrm{ind}(A_1) \leq \mathrm{ind}(A_2);$$

(iii) 若 $A \in \mathcal{C}$ 是紧的，则存在 $N \in \mathcal{C}$，使得 $A \subset \mathrm{int}(N)$，并且

$$\mathrm{ind}(N) = \mathrm{ind}(A);$$

(iv) 对所有 $A_1$， $A_2 \in \mathcal{C}$，有

$$\operatorname{ind}(A_1 \cup A_2) \leq \operatorname{ind}(A_1) + \operatorname{ind}(A_2).$$

接下来，我们介绍 Ghoussoub 定位定理（见 [15, 16, 11]）。对于 $\mathcal{X}$ 上关于 $S^1$ 的表示 $L$，泛函 $\mathcal{J}: \mathcal{X} \to (-\infty, \infty]$ 是不变的，当且仅当

$$\mathcal{J} \circ L(\theta) = \mathcal{J} \text{ for all } \theta \in S^1.$$

由 [12], 中的引理 7 可得以下结果。

**引理 5** 在引理 *3* 的假设下，若 $\mathcal{I}$ 是不变的，则对于任意 $0 < \varepsilon < \alpha^{-1}$.， $\mathcal{I}_\varepsilon$ 都是不变的

若紧不变子集类 $\mathcal{G}$ 满足以下条件，则称其对等变同伦稳定：对于任意 $A \in \mathcal{G}$ 和 $h \in C([0,1] \times \mathcal{X}, \mathcal{X})$，只要 $h(s, \cdot)$ 对所有 $s \in [0,1]$ 都是等变的，并且 $h(0, \cdot) = \mathrm{id}$，则有 $h(1, A) \in \mathcal{G}$.

**定理 1** 设紧不变子集类 $\mathcal{G}$ 对等变同伦稳定，并设 $\mathcal{J}: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 是一个不变泛函，满足

$$c := \inf_{A \in \mathcal{G}} \max_{A} \mathcal{J} > -\infty.$$

假设 $F$ 是 $\mathcal{X}$ 的一个闭不变子集，使得对所有 $A \in \mathcal{G}$，都有

- $A \cap F \neq \emptyset$,
- 上确界 $\mathcal{J} \geq c$.

$A \cap F$

那么，存在一个序列 $(x_n)$ 属于 $\mathcal{X}$，使得

$$\mathcal{J}(x_n) \to c, \quad \mathcal{J}'(x_n) \to 0,$$

并且有如下局部化：

$$\operatorname{dist}(x_n, F) \to 0.$$

## 2.4 Lusternik-Schnirelman 方法与 $S^1$-指标和弱紧性

**使用 $S^1$-指标进行计算**

在本小节中，我们将在所引入的抽象框架下进行讨论。设 $L$是 $S^1$ 在巴拿赫空间 $Y$上的等距表示，使得对所有 $\theta \in S^1$都有 $L(\theta)X = X$，并且 $L|_X = \{L(\theta)|_X\}_{\theta \in S^1}$ 是 $S^1$在希尔伯特空间 $X$ 上的等距表示；与 $L|_X$相关的 $S^1$-指标也如上所述记为“ ind ”。考虑

$$\operatorname{Fix}(S^1) = \{y \in Y : L(\theta)y = y \text{ for all } \theta \in S^1\},$$

并假设

$$\mathrm{Fix}(S^1) \subset X.$$

对于任意 $y \in Y$， $y$ 的**轨道**由下式给出

$$\mathcal{O}(y) = \{L(\theta)y : \theta \in S^1\}.$$

对于每个 $y \in Y$ 和 $\delta > 0$，我们考虑

$$\mathcal{O}^\delta(y) = \{z \in Y : \mathrm{dist}_Y(z, \mathcal{O}(y)) \le \delta\}.$$

注意， $\mathcal{O}(y)$ 是 $Y$ 中的紧不变集，而 $\mathcal{O}^\delta(y)$ 是 $Y$. 中的闭不变集。对于任意 $q \in X$, 有 $\mathcal{O}(q) \subset X$，但 $\mathcal{O}^\delta(q) \subset Y (\delta > 0)$。显然,

$$\mathrm{ind}(\mathcal{O}(q)) = +\infty \text{ for all } q \in \mathrm{Fix}(S^1).$$

此外，若 $q \in X \setminus \mathrm{Fix}(S^1)$，则 $2\pi$-周期连续函数

$$S^1 \ni \theta \mapsto L(\theta)q \in X$$

不是常数，因此它有一个最小周期 $T^* > 0$，并且存在一个正整数 $n$ ，使得 $2\pi = nT^*$. 。因此，对于任意正整数 $j$，函数

$$\mathcal{O}(q) \ni L(\theta)q \mapsto e^{ijn\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \theta \in S^1,$$

定义良好且连续。因此，特别地，显然

$$\mathrm{ind}(\mathcal{O}(q)) = 1.$$

下一个结果是对这一评论的推广。

**引理 6** 若 $q_1, ..., q_m \in X \setminus \mathrm{Fix}(S^1)$，则存在 $\delta > 0$ 使得

$$\bigcup_{j=1}^m \mathcal{O}^\delta(q_j) \cap \mathrm{Fix}(S^1) = \emptyset, \quad \mathrm{ind}\left(\bigcup_{j=1}^m \mathcal{O}^\delta(q_j) \cap X\right) = 1.$$

证明。 首先，显然存在 $\delta' > 0$ ，使得对所有 $1 \le j < k \le m.$， $\mathcal{O}^{\delta'}(q_j) \cap \mathcal{O}^{\delta'}(q_k) = \emptyset$。对于固定的 $j = 1, ..., m$，我们考虑 $2\pi$-周期连续函数

$$S^1 \ni \theta \mapsto L(\theta)q_j \in X \subset Y.$$

利用 $q_j \notin \mathrm{Fix}(S^1)$，上述函数不是常数，因此它有一个最小周期 $T_j > 0$，并且存在一个正整数 $n_j$ 使得 $2\pi = n_j T_j$.考虑 $n = n_1 n_2 \cdots n_m$ 以及 $\|\cdot\|_Y$-连续函数

$$\Phi : \bigcup_{j=1}^m \mathcal{O}(q_j) \to \mathbb{C} \setminus \{0\} \ : \quad L(\theta)q_j \mapsto e^{in\theta},\ 1 \le j \le m,\ \theta \in S^1.$$

˜利用 Tietze 延拓定理，存在一个 $\|\cdot\|_Y$-连续函数 $\Phi : \tilde{}Y \to \mathbb{C}$使得 $\Phi|_{\cup_{j=1}^m \mathcal{O}(q_j)} = \Phi$.现在我们定义连续函数$\Lambda : Y \to \mathbb{C}$，定义为

$$\Lambda(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\tilde{\Phi}(L(\theta)y)d\theta \text{ for all } y \in Y.$$

对于任意 $\tau \in [0, 2\pi]$ 和 $y \in Y$，有

$$\begin{aligned}
\Lambda(L(\tau)y) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\tilde{\Phi}(L(\theta)L(\tau)y)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\tilde{\Phi}(L(\theta+\tau)y)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_\tau^{2\pi+\tau} e^{-in(t-\tau)}\tilde{\Phi}(L(t)y)dt \\
&= e^{in\tau}\Lambda(y).
\end{aligned}$$

特别地，对于满足 $1 \le j \le m$，的 $y = q_j$，有

$$\Lambda(L(\tau)q_j) = e^{in\tau}\Lambda(q_j) = e^{in\tau} = \Phi(L(\tau)q_j),$$

即

$$\Lambda(q) = \Phi(q) \quad \text{for all } q \in \bigcup_{j=1}^m \mathcal{O}(q_j).$$

我们断言，存在 $\delta \le \delta'$，使得对所有 $q \in \cup_{j=1}^m \mathcal{O}^\delta(q_j) \cap X.$，都有 $\Lambda(q) \neq 0$。反设断言不成立，则对每个正整数 $k \ge \delta'^{-1}$，都存在 $v_k \in \cup_{j=1}^m \mathcal{O}^{1/k}(q_j) \cap X$，满足 $\Lambda(v_k) = 0.$。设 $u_k \in \cup_{j=1}^m \mathcal{O}(q_j)$ 满足 $\|v_k - u_k\|_Y \le 1/k.$。取一个子序列后，存在 $u \in \cup_{j=1}^m \mathcal{O}(q_j)$，使得 $\|u_k - u\|_X \to 0$，因此 $\|v_k - u\|_Y \to 0.$。于是， $\Lambda(v_k) \to \Lambda(u)$ 且 $\Lambda(u) = \Phi(u) = 0$，这与 $\Phi.$的定义矛盾。因此， $\Lambda : \cup_{j=1}^m \mathcal{O}^\delta(q_j) \cap X \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 是一个 $\|\cdot\|_X$-连续函数，使得对所有 $q \in \cup_{j=1}^m \mathcal{O}^\delta(q_j) \cap X$，都有 $\Lambda(L(\theta)q) = e^{in\theta}\Lambda(q)$。这意味着 $\mathrm{ind}(\cup_{j=1}^m \mathcal{O}^\delta(q_j) \cap X) = 1.$。现在，另一个结论显然成立。 ■

**光滑情形**

接下来，考虑一个不变泛函 $\mathcal{J} \in C^1(X, \mathbb{R})$，并对任意正整数 $j$ 定义

$$\mathcal{G}_j = \{A \subset X : A \text{ compact, invariant with } \mathrm{ind}(A) \ge j\}$$

a及相关的 Lusternik-Schnirelman 层 els,

$$c_j = \inf_{A \in \mathcal{G}_j} \max_A \mathcal{J}.$$

利用 $S^1$-指标的性质 (ii)，可知对于任意正整数 $j.$，类 $\mathcal{G}_j$ 在等变同伦下保持稳定。注意，$\mathrm{ind}(\mathcal{O}(0)) = +\infty$，因此，对于所有正整数 $j.$， $\mathcal{O}(0) \in \mathcal{G}_j$ 且 $c_j \leq \mathcal{J}(0)$。由此可得

$$-\infty \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq \mathcal{J}(0).$$

对于 $c \in \mathbb{R}$，我们考虑 $\mathcal{J}$ 在能级 $c$处的临界点集，

$$K_c = \{q \in X : \mathcal{J}(q) = c, \mathcal{J}'(q) = 0\}.$$

注意，由于 $\mathcal{J}$ 是不变的，因此若 $q \in K_c$，则 $\mathcal{O}(q) \subset K_c$. 我们称 $\mathcal{O}(q)$为 $\mathcal{J}$ 在能级 $c$.处的一条**临界轨道**

**定理 2** 设 $\mathcal{J} \in C^1(X, \mathbb{R})$ 是一个不变泛函。

- 若对某个正整数 $j$ 有 $c_j > -\infty$ ，且 $\mathcal{J}$ 满足$(wPS)_{c_j}$-条件，则 $K_{c_j} \neq \emptyset$.

- 此外，若对某些正整数 $j < k$ 有 $c_j = c_k = c > -\infty$， $\mathcal{J}$满足$(wPS)_c$-条件，且 $K_c \cap \mathrm{Fix}(S^1) = \emptyset$，则存在一个序列$(q_n) \subset X$，使得 $\cup_n \mathcal{O}(q_n) \subset K_c$ 且 $\mathcal{O}(q_m) \cap \mathcal{O}(q_n) = \emptyset$ 对所有满足 $m \neq n$的正整数 $m$、 $n$ 成立，也就是说，存在 $\mathcal{J}$ 在能级 $c$.处的一列不同的临界轨道

证明。 我们考虑一个正整数 $j$ ，使得 $c_j > -\infty$ 和 $\mathcal{J}$ 满足 $(wPS)_{c_j}$-条件。利用 Ghoussoub 定位定理，即定理 1，结合 $F = X$ 和 $\mathcal{G} = \mathcal{G}_j$， 可知存在一个序列 $(q_n) \subset X$ ，使得

$$\mathcal{J}(q_n) \to c_j, \quad \mathcal{J}'(q_n) \to 0.$$

利用 $\mathcal{J}$满足 $(wPS)_{c_j}$-条件这一事实，取一个子序列可知存在 $q \in X$，使得 $\|q_n - q\|_Y \to 0$， $\mathcal{J}(q) = c_j$，且 $\mathcal{J}'(q) = 0$. 特别地， $q \in K_{c_j}$， 因此 $K_{c_j} \neq \emptyset$.

对于第二个断言，反设 $K_c$ 仅包含有限条轨道 $\mathcal{O}(q_1) \cdots$， $\mathcal{O}(q_l)$。 现在令 $\delta > 0$ 由引理 6 给出，于是有

$$\bigcup_{m=1}^{l} \mathcal{O}^\delta(q_m) \cap \mathrm{Fix}(S^1) = \emptyset, \quad \mathrm{ind}\left(\bigcup_{m=1}^{l} \mathcal{O}^\delta(q_m) \cap X\right) = 1.$$

考虑 $X$ 中的不变集 $F$，其定义为

$$F = \{q \in X : \ \mathrm{dist}_Y(q, \cup_{m=1}^{l} \mathcal{O}(q_m)) \geq \delta\}.$$

利用从 $X$ 到 $Y$ 的典范单射是一个紧算子这一事实，以及

$$F = X \cap \ (\mathrm{dist}_Y(\cdot, \cup_{m=1}^{l} \mathcal{O}(q_m)))^{-1}[\delta, \infty),$$

由此可知， $F$ 在 $X$. 中是闭的。注意，根据我们的假设，

$$F \cap K_c = \emptyset.$$

对于任意固定的 $A \in \mathcal{G}_k$，显然

$$A \subset (A \cap F) \cup (\cup_{m=1}^{l} \mathcal{O}^{\delta}(q_m) \cap X),$$

并利用 $S^1$-指标的性质 (iv)，我们推出

$$j < k \leq \mathrm{ind}(A) \leq \mathrm{ind}(A \cap F) + \mathrm{ind}(\cup_{m=1}^{l} \mathcal{O}^{\delta}(q_m) \cap X) = \mathrm{ind}(A \cap F) + 1,$$

由此可得

$$\mathrm{ind}(A \cap F) \geq j,$$

因此 $A \cap F \neq \emptyset$, $A \cap F \in \mathcal{G}_j$，且 $\max_{A \cap F} \mathcal{J} \geq c_j = c.$。利用 Ghoussoub 定位定理，即定理 1，取上文所定义的 $F$ 以及 $\mathcal{G} = \mathcal{G}_k$, 可知存在序列 $(u_n) \subset X$，使得

$$\mathcal{J}(u_n) \to c, \quad \mathcal{J}'(u_n) \to 0, \text{ and } \mathrm{dist}_X(u_n, F) \to 0.$$

由于 $\mathcal{J}$ 满足 $(wPS)_c$-条件，取子序列可知存在 $u \in X$，使得 $\|u_n - u\|_Y \to 0$, $\mathcal{J}(u) = c$，且 $\mathcal{J}'(u) = 0.$。设 $(v_n) \subset F$ 为 $F$ 中的序列，使得 $\|u_n - v_n\|_X \to 0$, 从而 $\|v_n - u\|_Y \to 0$。由于 $\mathrm{dist}_Y(\cdot, \cup_{m=1}^{l} \mathcal{O}(q_m))$ 是巴拿赫空间 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 上的连续函数，且 $u \in X$, 可知 $u \in F$ 且 $\mathcal{O}(u) \subset F \cap K_c$, 这与$F \cap K_c = \emptyset$. 矛盾。因此，第二个断言得证。 ■

**注 1** 上述结果，即定理 2，在 $X$ 是巴拿赫空间时同样成立，且证明无需作任何改动。为了使用 Ekeland-Lasry结果（引理 3），我们需要 $X$ 是希尔伯特空间。

**非光滑情形**

现在回到满足主要假设（$H$）的非光滑泛函 $\mathcal{I} = \Psi + \mathcal{F}$，并假设泛函 $\Psi$ 和 $\mathcal{F}$ 在希尔伯特空间$X$上保持不变（在紧群 $S^1$ 的等距作用 $L|_X$ 下）。对于一个固定的实数 $c \in \mathbb{R}$, 我们像在光滑情形中一样，考虑

$$K_c(\mathcal{I}) = \{q \in X : \mathcal{I}(q) = c, q \text{ is a critical point of } \mathcal{I}\}.$$

此外，我们考虑

$$K(\mathcal{I}) = \{q \in X : q \text{ is a critical point of } \mathcal{I}\}.$$

利用 $\Psi$ 和 $\mathcal{F}$ 的不变性，很容易证明，若 $q \in K_c(\mathcal{I})$, 则$\mathcal{O}(q) \subset K_c(\mathcal{I})$。如同在光滑情形中，对于任意正整数 $j$，我们考虑与非光滑泛函 $\mathcal{I}$ 相关的Lusternik-Schnirelman层级,

$$c_j(\mathcal{I}) = \inf_{A \in \mathcal{G}_j} \sup_{A} \mathcal{I}.$$

我们有

$$-\infty \leq c_1(\mathcal{I}) \leq c_2(\mathcal{I}) \leq \cdots \leq \mathcal{I}(0).$$

此外，遵循 Ekeland-Lasry [12]„ 我们考虑该集合

$$\Omega = \{q \in X : \mathcal{I}(q) < 0\}.$$

我们的主要抽象结果将应用于 Poincar´e 作用泛函，内容如下。

**定理 3** 假设不变非光滑泛函 $\mathcal{I}$ 有下界，满足 $(H)$、*Ekeland-Lasry*条件 $(*)$ $\mathcal{I}(0) = 0$，存在某个$\omega < 0$，使得 $\mathcal{I}$ 对所有 $d < \omega$都满足 $(wPS)_d$-条件，并且

$$\mathrm{Fix}(S^1) \cap \Omega \cap K(\mathcal{I}) = \emptyset.$$

考虑 $0 < \varepsilon < \alpha^{-1}$.

- 可知，对所有满足 $c_j(\mathcal{I}_\varepsilon) < \omega$. 的正整数 $j$，集合 $K_{c_j(\mathcal{I}_\varepsilon)}(\mathcal{I}_\varepsilon) = K_{c_j(\mathcal{I}_\varepsilon)}(\mathcal{I})$ 非空。
- 此外，若存在正整数 $j$、$k$ 使得

  $$j < k \ and \ c_j(\mathcal{I}_\varepsilon) = c_k(\mathcal{I}_\varepsilon) < \omega,$$

  则 $K_{c_j(\mathcal{I}_\varepsilon)}(\mathcal{I})$ 包含无穷多个轨道。
- 特别地，如果存在某个正整数 $k$ 使得 $c_k(\mathcal{I}_\varepsilon) < \omega$，那么$K(\mathcal{I})$ 至少包含 $k$ 个处于负能级的轨道。

证明。 由引理 3 - $(EL1)$ 可得 $\mathcal{I}_\varepsilon \in C^1(X, \mathbb{R})$，并利用 [12], 中的引理 7 可知, $\mathcal{I}_\varepsilon$ 是不变的。此外，利用引理 4 和引理 3 - $(EL2)$，我们推得 $\mathcal{I}_\varepsilon$ 对所有 $d < \omega$. 都满足 $(wPS)_d$-条件。证明的第一部分和第二部分现可由定理 2 和引理 3 - $(EL3)$ 立即得出。 最后一部分由前两部分得出。 ■

我们回顾以下结果（见 [21]中的命题5.3）。

**引理 7** 设 $Z$ 是 $X$ 的有限维不变子空间，且 $D$ 是 $Z$. 中 0 的一个开有界不变邻域。如果 $Z \cap \mathrm{Fix}(S^1) = \{0\}$，那么

$$\mathrm{ind}(\partial D) = \frac{1}{2} dim(Z).$$

由上述引理 7 和我们的主要抽象结果定理 3，可推得以下重要结果。

推论 *1* 假设不变非光滑泛函 $\mathcal{I}$ 有下界并满足 *(H)*、*Ekeland-Lasry*条件 $(*)$ $\mathcal{I}$ *(0)* $= 0$，存在 $\omega < 0$ 使得 $\mathcal{I}$ 对所有 $d < \omega$满足 $(wPS)_d$，且 *Fix(*$S^1$*)* $\cap$ *Ω* $\cap$ *K(*$\mathcal{I}$*)* $= \emptyset$. 设 $Z$ 是 $X$ 的一个 *(2k)* 维不变子空间，使得$Z \cap$*Fix(*$S^1$*)* $= \{0\}$, 并设 $D$ 是 $Z$ 中 *0* 的一个开有界不变邻域，满足 $sup_{\partial D} \mathcal{I} < \omega$. 。那么， $K$ *(*$\mathcal{I}$*)* 至少包含 $k$ 条处于负能级的轨道。

证明。 利用引理 7，我们推得 ind(∂D) = k. 。但 $\sup_{\partial D}\mathcal{I} < \omega$， 因此利用引理 3 - (EL2)， 可得 $\max_{\partial D}\mathcal{I}_\varepsilon < \omega$， 这与 $\partial D \in \mathcal{G}_k$一起推出 $c_k(\mathcal{I}_\varepsilon) < \omega$. 。现在由定理 3 的最后一部分即可得到结论。

■

# 3 ´上的庞加莱作用泛函

## 3.1 函数空间

我们用 $C_T$ 表示连续函数 $q\colon [0,T] \to \mathbb{R}^3$ with$q(0) = q(T)$ 构成的巴拿赫空间，其赋予通常的范数

$$||q||_\infty = \max_{[0,T]} |q| \quad \text{for all } q \in C_T.$$

$L^\infty(0,T)$ 中的范数也记为 $||\cdot||_\infty$。若 $W^{1,\infty}(0,T)$ 表示 $[0,T]$ 上所有实值利普希茨函数构成的空间（或者等价地，表示 $[0,T]$ 上几乎处处具有有界导数的绝对连续函数构成的空间），我们考虑巴拿赫空间

$$W_T^{1,\infty} = \{q \in [W^{1,\infty}(0,T)]^3 : q(0) = q(T)\}$$

赋予通常的范数 $\|\cdot\|_{1,\infty}$ 其定义为

$$\|q\|_{1,\infty} = \|q\|_\infty + \|q'\|_\infty \quad (q \in W_T^{1,\infty}).$$

索博列夫空间 $H_T^1$ 是函数 $q \in L^2(0,T;\mathbb{R}^3)$ 的空间，这些函数具有弱导数 $q' \in L^2(0,T;\mathbb{R}^3)$，并且是 $T$-周期的，即 $q(0) = q(T)$,或者等价地，是绝对连续函数 $q\colon [0,T] \to \mathbb{R}^3$ with$q' \in L^2(0,T;\mathbb{R}^3)$ 的空间，且这些函数是 $T$-周期的。索博列夫空间 $H_T^1$ 是一个希尔伯特空间，其内积为

$$(q|\varphi)_{1,2} = \int_0^T [q(t)\cdot\varphi(t) + q'(t)\cdot\varphi'(t)]dt,$$

我们将相应的范数记为$\|\cdot\|_{1,2}$. 注意 ${W^1,_T}^\infty \subset H_T^1$连续地，并且Arzel`a-Ascoli 定理表明 $H_T^1 \subset C_T$ 紧地。

## 3.2 作用泛函的非光滑部分

考虑

$$D(\Psi_*) = \{q \in W_T^{1,\infty} : \|q'\|_\infty \le 1\},$$

以及 $\Psi_*$： 由 $H_T^1 \to (-\infty,+\infty]$ 给出

$$\Psi_*(q) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^T [1 - \sqrt{1-|q'(t)|^2}]dt, & \text{if } q \in D(\Psi_*), \\ +\infty, & \text{if } q \in H_T^1 \setminus D(\Psi_*). \end{cases}$$

根据 [20, 7] ，可得如下结果:

**引理 8** *(i)* 集合 $D(\Psi_*)$ 在 $C_T$. 中是凸且闭的。此外，若 $(q_n)$ 是 $D(\Psi_*)$ 中的一个序列，且在 $[0,T]$ 中逐点收敛于连续函数 $q\colon [0,T]\to\mathbb{R}^3$，则 $q\in D(\Psi_*)$ 且在 $w^*$-拓扑下 $q_n'\to q'\sigma(L^\infty,L^1)$。

*(ii)* 若 $(q_n)$ 是 $D(\Psi_*)$ 中的一个序列，且在 $C_T$ 中收敛到 $q$，则 $q\in\mathcal{D}(\Psi_*)$ 且

$$\Psi_*(q)\le\liminf_{n\to\infty}\Psi_*(q_n).$$

特别地，泛函 $\Psi_*$ 在 $H_T^1$上是弱下半连续且凸的。

## 3.3 作用泛函的光滑部分

设 $\mathcal{F}_*:H_T^1\to\mathbb{R}$ 由下式给出

$$\mathcal{F}_*(q):=\int_0^T[q'(t)\cdot W(t,q(t))-V(t,q(t))]dt\qquad\text{for all } q\in H_T^1.$$

证明以下结论是标准的（见 [21]）：若 $V\colon [0,T]\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 且 $W\colon [0,T]\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 是满足 $W(0,\cdot)=W(T,\cdot)$ 的 $C^1$ 函数，则 $\mathcal{F}_*\in C^1(H_T^1,\mathbb{R})$，其中

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_*'(q)[\varphi] &= \int_0^T(\mathcal{E}(t,q(t),q'(t))-\nabla_qV(t,q(t)))\cdot\varphi(t)dt\\ &+ \int_0^T W(t,q(t))\cdot\varphi'(t)dt\end{aligned}$$

对每个 $q$，$\varphi\in H_T^1$，其中 $\mathcal{E}\colon [0,T]\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 由下式给出

$$\mathcal{E}(t,q,p)=(p\cdot D_{q_1}W(t,q),p\cdot D_{q_2}W(t,q),p\cdot D_{q_3}W(t,q)).$$

## 3.4 作用泛函

与电势为 $V$，磁势为 $W$，且在 $[0,T]$ 上满足周期边界条件的 LFE 相关的作用泛函为 $H_T^1$ （参见 [3] 的 $W^{1,\infty}_T$ 情形），其表达式如下

$$\mathcal{I}_*:H_T^1\to(-\infty,+\infty],\quad \mathcal{I}_*=\Psi_*+\mathcal{F}_*.$$

可知，$\mathcal{I}_*$ 满足（$H$），因此，若 $q\in D(\Psi_*)$，则点 $q\in H_T^1$ 是 $\mathcal{I}_*$的**临界点**，并且

$$\Psi_*(\varphi)-\Psi_*(q)+\mathcal{F}_*'(q)[\varphi-q]\ge 0\quad\text{for all }\varphi\in D(\Psi_*),$$

或者，等价地，

$$\int_0^T [\sqrt{1-|q'|^2}-\sqrt{1-|\varphi'|^2}]dt+\int_0^T [\mathcal{E}(t,q,q')-\nabla_q V(t,q)]\cdot(\varphi-q)dt + \int_0^T W(t,q)\cdot(\varphi'-q')dt \geq 0 \quad \text{for all } \varphi \in D(\Psi_*).$$

我们需要以下重要结果（见 [20] 中的引理 14）。对于 $q \in L^1(0, T; \mathbb{R}^3)$，记为

$$\overline{q}=\frac{1}{T}\int_0^T q(t)dt.$$

**引理 9** 对于每个 $f \in L^1(0, T; \mathbb{R}^3)$，存在唯一的 $q_f \in W^{2,1}(0, T; \mathbb{R}^3)$，使得 $\|q_f'\|_\infty < 1$ 并且

$$\left(\frac{q_f'}{\sqrt{1-|q_f'|^2}}\right)' = \overline{q_f}+f, \quad q_f(0)=q_f(T),\ q_f'(0)=q_f'(T).$$

此外，$q_f$ 是变分不等式 $q \in D(\Psi_*)$ 的唯一解

$$\int_0^T [\sqrt{1-|q'|^2}-\sqrt{1-|\varphi'|^2}]dt+T\overline{q}\cdot(\overline{\varphi}-\overline{q})+\int_0^T f\cdot(\varphi-q)dt \geq 0 \quad \textit{for all } \varphi \in D(\Psi_*).$$

利用引理 9 以及命题 1 的证明中所采用的相同策略（另见 [7] 中的命题 1 以及 [20] 中的定理 6），我们得到以下关键结果。

**定理 4** 函数 $q \in H_T^1$ 是带有电势 $V$ 和磁势 $W$ 的 *LFE* 的 $T$-周期解，当且仅当 $q$ 是作用泛函 $\mathcal{I}_*$. 的临界点

在下面的结果中，我们引入 $H_T^1$. 上的庞加莱作用泛函的弱紧性性质。关于 $W^{1,\infty}_T$ 情形，参见 [3]中的引理 6。

**命题 1** 假设任意 $(PS)$-序列 $(q_n)$ 中的 $\mathcal{I}_*$ 在能级 $c \in \mathbb{R}$ 处均满足：$(q_n)$ 有界。则，$\mathcal{I}_*$ 关于 $C_T$ 满足 $(wPS)_c$-条件

证明。令 $(q_n) \subset D(\Psi_*)$ 为 $\mathcal{I}_*$ 在能级 $c \in \mathbb{R}$. 处的 $(PS)$-序列。利用 $(q_n)$ 有界这一点，可知 $(q_n)$ 在 $W^{1,\infty}_T$ 中有界。取一个子序列后，我们可以假设 $\|q-q_n\|_\infty \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时趋于某个 $q \in C_T$。由引理 8 可推出 $q \in D(\Psi_*)$ $\Psi_*(q) \leq \liminf_{n\to\infty} \Psi_*(q_n)$，且在 $w^*$-拓扑下 $q_n' \to q'$ $\sigma(L^\infty, L^1)$。由此可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T V(t,q_n)dt=\int_0^T V(t,q)dt.$$

此外，对于任意正整数 $n$，我们有 e

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T q_n' \cdot (W(t,q_n) - W(t,q))dt\right| &\leq \int_0^T |q_n'|\ |W(t,q_n) - W(t,q)|dt \\ &\leq \int_0^T |W(t,q_n) - W(t,q)|dt,\end{aligned}$$

这意味着

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T q_n' \cdot (W(t,q_n) - W(t,q))dt = 0.$$

接下来，利用 $W(\cdot,q) \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^3)$，我们推得

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T q_n' \cdot W(t,q)dt = \int_0^T q' \cdot W(t,q)dt,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T q_n' \cdot W(t,q_n)dt = \int_0^T q' \cdot W(t,q)dt$$

and

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_*(q_n) = \mathcal{F}_*(q).$$

同理，有

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T (\mathcal{E}(t,q_n,q_n') - \nabla_q V(t,q_n)) \cdot (\varphi - q_n)dt =$$

$$\int_0^T (\mathcal{E}(t,q,q') - \nabla_q V(t,q)) \cdot (\varphi - q)dt \quad \text{for all } \varphi \in D(\Psi_*),$$

由此我们推得

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_*'(q_n)[\varphi - q_n] = \mathcal{F}_*'(q)[\varphi - q] \quad \text{for all } \varphi \in D(\Psi_*).$$

我们回顾一下，$\mathcal{I}_*(q_n) \to c$，并考虑一个具有如下性质的序列 $(\varepsilon_n) \subset [0,\infty)$：$\varepsilon_n \to 0$，且对于每个正整数 $n$，都有

$$\Psi_*(\varphi) - \Psi_*(q_n) + \mathcal{F}_*'(q_n)[\varphi - q_n] \geq -\varepsilon_n \|\varphi - q_n\|_{1,2} \text{ for all } \varphi \in D(\Psi_*).$$

若取 $n \to \infty$，我们可推导出 $q$ 是 $\mathcal{I}_*$. 的临界点。此外，取$\varphi = q$ 可得

$$\Psi_*(q) - \Psi_*(q_n) + \mathcal{F}_*'(q_n)[q - q_n] \geq -\varepsilon_n \|q - q_n\|_{1,2} \text{ for all positive integers } n,$$

并取 $n \to \infty$，可得 $\Psi_*(q) = \lim_{n\to\infty} \Psi_*(q_n)$，因此 $c = \mathcal{I}_*(q)$。证明完成。

■

# 4 主要结果

为方便起见，我们取固定周期为 $T = 2\pi$. 。设 $L : S^1 \to B(C_{2\pi})$ 定义如下:

$$(L(\theta)q)(t) = q(t+\theta) \quad \text{for all } \theta \in S^1, t \in \mathbb{R}, q \in C_{2\pi}.$$

有 $L$ 是 $S^1$ 在巴拿赫空间 $C_{2\pi}$.上的等距表示。注意到

$$\mathrm{Fix}(S^1) = \mathbb{R}^3 \subset H^1_{2\pi}.$$

此外，显然，$(L(\theta)|_{H^1_{2\pi}})_{\theta\in S^1}$ 是 $S^1$在希尔伯特空间 $H^1_{2\pi}$. 上的等距表示。庞加莱′作用泛函 $\mathcal{I}_*$，即 $\Psi_*$，的非光滑部分在表示 $L$. 下保持不变。在本节中，我们考虑具有自治电势和磁势的洛伦兹力方程，因此

$$V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

这意味着庞加莱′作用泛函 $\mathcal{I}_*$，即 $\mathcal{F}_*$的光滑部分在表示 $L$.下保持不变

**引理10** 假设条件

- $(V_1)$ $V$在 $\mathbb{R}^3$上属于 $C^2$ 类， $V(0) = 0$在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$上， $V' \neq 0$在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$上， $V''$ 在 $\mathbb{R}^3$上有界，并且存在 $l^* > 0$ 使得$\lim_{|q|\to\infty} V(q) = l^*$.

- （$W_1$） $W$在 $\mathbb{R}^3$上属于 $C^2$ 类，并且 $W$、$W'$、$W''$在 $\mathbb{R}^3$.上有界

满足。于是，作用泛函 $\mathcal{I}_*$ 满足 *Ekeland-Lasry* 凸性条件（$*$），也就是说，存在 $\alpha > 0$ 使得函数

$$D(\Psi_*) \ni q \mapsto \mathcal{I}_*(q) + \alpha\|q\|^2_{1,2} \in \mathbb{R}$$

是凸的。

证明。 利用（$V_1$），令 $\alpha_1 > 0$ 使得函数

$$\mathbb{R}^3 \ni q \mapsto -V(q) + \alpha_1|q|^2 \in \mathbb{R}$$

是凸的。但是，对于任意 $q \in H^1_{2\pi}$，有

$$\begin{gathered} -\int_0^{2\pi} V(q(t))dt + \alpha_1\|q\|^2_{1,2} = \int_0^{2\pi}(-V(q(t)))dt \\ +\alpha_1\int_0^{2\pi}(|q(t)|^2 + |q'(t)|^2)dt = \int_0^{2\pi}(-V(q(t)) + \alpha_1|q(t)|^2)dt \\ +\alpha_1\int_0^{2\pi}|q'(t)|^2dt, \end{gathered}$$

进而我们推得

$$H^1_{2\pi} \ni q \mapsto -\int_0^{2\pi} V(q(t))dt + \alpha_1\|q\|^2_{1,2} \in \mathbb{R}$$

是凸的。接下来，对于一个固定常数 $\alpha_2 > 0$，我们考虑由下式给出的函数 $\mathcal{H}_*$：$W^{1,\infty}_{2\pi} \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{H}_*(q) = \int_0^{2\pi} q'(t) \cdot W(q(t))dt + \alpha_2 \|q\|^2_{1,2} \quad \text{for all } q \in W^{1,\infty}_{2\pi}.$$

有 $\mathcal{H}_* \in C^2(W^{1,\infty}_{2\pi}, \mathbb{R})$，其二阶导数为

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}''_*(q)[\varphi,\psi] &= \int_0^{2\pi} q'(t) \cdot W''(q(t))[\varphi(t),\psi(t)]dt \\
&+ \int_0^{2\pi} \psi'(t) \cdot W'(q(t))[\varphi(t)]dt \\
&+ \int_0^{2\pi} \varphi'(t) \cdot W'(q(t))[\psi(t)]dt \\
&+ 2\alpha_2(\varphi|\psi)_{1,2} \text{ for all } q,\varphi,\psi \in W^{1,\infty}_{2\pi},
\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}''_*(q)[\varphi-q,\varphi-q] &= \int_0^{2\pi} q'(t) \cdot W''(q(t))[\varphi(t)-q(t),\varphi(t)-q(t)]dt \\
&+ 2\int_0^{2\pi} (\varphi'(t)-q'(t)) \cdot W'(q(t))[\varphi(t)-q(t)]dt \\
&+ 2\alpha_2\|\varphi-q\|^2_{1,2} \text{ for all } q,\varphi \in W^{1,\infty}_{2\pi}.
\end{aligned}$$

利用（$W_1$），我们考虑两个正常数 $c_1$ 和 $c_2$，使得对所有 $q \in \mathbb{R}^3.$，都有 $||W'(q)|| \le c_1$且 $||W''(q)|| \le c_2$。那么，对任意 $q$，$\varphi \in D(\Psi_*)$，有

$$\left|\int_0^{2\pi} q'(t) \cdot W''(q(t))[\varphi(t)-q(t),\varphi(t)-q(t)]dt\right| \le c_2\|\varphi-q\|^2_{L^2} \le c_2\|\varphi-q\|^2_{1,2},$$

另一方面

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{2\pi} (\varphi'(t)-q'(t)) \cdot W'(q(t))[\varphi(t)-q(t)]dt\right| &\le c_1\|\varphi'-q'\|_{L^2}\|\varphi-q\|_{L^2} \\
&\le c_1\|\varphi-q\|^2_{1.2}.
\end{aligned}$$

由此可知，当 $\alpha_2 > 0$ 充分大时，有

$$\mathcal{H}''_*(q)[\varphi-q,\varphi-q] \ge 0 \quad \text{for all } q,\varphi \in D(\Psi_*),$$

这意味着 $\mathcal{H}_* : \text{int}(D(\Psi_*)) \to \mathbb{R}$ 是凸的。这与 $\mathcal{H}_*$ 的连续性一起，意味着 $\mathcal{H}_*$ 在 $D(\Psi_*)$上是凸的。

因此，如果 $\alpha$ 足够大，那么函数

$$D(\Psi_*) \ni q \mapsto \mathcal{F}_*(q) + \alpha\|q\|^2_{1,2} \in \mathbb{R}$$

是凸的，而这与 $\Psi_*$ 在 $D(\Psi_*)$上是凸的共同推出了结论。

■

**引理 11** 若条件 $(V_1)$ 和 $(W_1)$ 成立，则作用泛函 $\mathcal{I}_*$:$H^1_{2\pi} \to (-\infty, +\infty]$ 有下界，并且对于任意 $c < -2\pi(l^* +$上确界 $|W|)$，满足关于 $C_{2\pi}$ 的 $(wPS)_c$-条件。$\mathbb{R}^3$

证明。 首先，注意到由 $(V_1)$ 可得 $V$是有界的。此外，由 $(W_1)$ 可得，对任意 $q \in D(\Psi_*)$，我们有

$$\left| \int_0^{2\pi} q'(t) \cdot W(q(t))dt \right| \leq 2\pi \sup_{\mathbb{R}^3} |W| < \infty,$$

因此 $\mathcal{I}_*$ 在 $H^1_{2\pi}$. 上有下界。接下来，考虑 $c < -2\pi(l^* + \sup_{\mathbb{R}^3} |W|)$，并令 $(q_n) \subset D(\Psi_*)$ 为能级 $c$. 处的一个 $(PS)$-序列。假设 $(q_n)$ 无界，并取一子序列后假设 $|q_n| \to \infty$. 。考虑分解 $q_n = q_n + \tilde{q}_n$ ，并注意到对任意 $n \in \mathbb{N}$. 有 $\|\tilde{q}_n\|_\infty \leq 2\pi$ 。于是，利用 $(V_1)$，我们推出

$$\int_0^{2\pi} V(q_n(t))dt \to 2\pi l^* \text{ as } n \to \infty.$$

另一方面，对所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_*(q_n) &= \int_0^{2\pi} [1 - \sqrt{1 - |q_n'|^2}]dt - \int_0^{2\pi} V(q_n)dt + \int_0^{2\pi} q_n' \cdot W(q_n)dt \\ &\geq -2\pi \sup_{\mathbb{R}^3} |W| - \int_0^{2\pi} V(q_n)dt \end{aligned}$$

令 $n \to \infty$，则有 $c \geq -2\pi(l^* +\sup_{\mathbb{R}^3} |W|)$，矛盾。因此，$(q_n)$ 有界，并由命题 1 得出结论。 ■

**引理 12** 此外，假设以下条件成立。

- $(V_2)$ *There exist* $\lambda > 0$, *and* $r_0 > 0$ *such that* $V(q) \geq \lambda |q|^2$ *for all* $q \in \mathbb{R}^3$ *with* $|q| \leq r_0$.

考虑 $m \in \mathbb{N}$ 和

$$Z_m = \left\{ \sum_{j=1}^{m} [\cos(jt)a_j + \sin(jt)b_j] : a_j, b_j \in \mathbb{R}^3, 1 \leq j \leq m \right\},$$

*and*

$$D = \{q \in Z_m : \|q\|_{1,\infty} < r\},$$

其中 $r < \min(r_0,1)$。那么， $Z_m$ 是 $H^1_{2\pi}$ 的一个$(6m)$维不变子空间，满足 $Z_m \cap \mathrm{Fix}(S^1) = \{0\}$，并且 $D$ 是 $Z_m$. 中0 的一个开有界不变邻域。此外，存在 $\Lambda_m(l^*, W) > 0$，使得如果$\lambda \geq \Lambda_m$，那么

$$\sup_{\partial D} \mathcal{I}_* < -2\pi(l^* + \sup_{\mathbb{R}^3} |W|).$$

证明。由三角公式可知， $Z_m$ 是不变的

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

因此，我们需要证明的就是，对于所有 $q \in \partial D$，以及所有足够大的 $\lambda$，都有 $\mathcal{I}_*(q) < -2\pi(l^* + \sup_{\mathbb{R}^3}|W|)$。利用 $r \leq 1$，可得 $D \subset \overline{D}(\Psi_*)$，而利用

$$1 - \sqrt{1-s^2} \leq s^2 \quad \text{for all } s \in [0,1],$$

and

$$m^2 \int_0^{2\pi} |q(t)|^2 dt \geq \int_0^{2\pi} |q'(t)|^2 dt \quad \text{for all } q \in Z_m,$$

由 $(V_2)$ 和 $(W_1)$ 可推得，对于所有 $q \in D$,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_*(q) &= \int_0^{2\pi} [1 - \sqrt{1-|q'(t)|^2}]dt - \int_0^{2\pi} V(q(t))dt + \int_0^{2\pi} q'(t)\cdot W(q(t))dt \\ &\leq (m^2 - \lambda)\int_0^{2\pi} |q(t)|^2 dt + 2\pi \sup_{\mathbb{R}^3}|W|. \end{aligned}$$

令 $\gamma_m > 0$ 满足

$$||q||_{L^2} \geq \gamma_m ||q||_{1,\infty} \quad \text{for all } q \in Z_m.$$

于是，对于所有 $q \in \partial D$，都有

$$\mathcal{I}_*(q) \leq (m^2 - \lambda)2\pi\gamma_m r^2 + 2\pi \sup_{\mathbb{R}^3}|W|,$$

结论随即得证。 ■

**注释2** 常数 $\Lambda_m$ 刻画了电势 $V$ 在原点附近的行为与电势 $V$ 在无穷远处的行为以及磁势 $W$ 之间的联系。

**引理13** 考虑集合

$$\Omega_* = \{q \in H^1_{2\pi} : \mathcal{I}_*(q) < 0\}.$$

于是，我们有

$$\mathrm{Fix}(S^1) \cap \Omega_* \cap K(\mathcal{I}_*) = \emptyset.$$

证明。假设存在 $q \in \mathbb{R}^3 = \mathrm{Fix}(S^1)$，使得 $q$ 是 $\mathcal{I}_*$ 的临界点，且 $\mathcal{I}_*(q) < 0$. 由定理 4 可知， $q$ 是洛伦兹力方程的一个解，即 $V'(q) = 0$，这就产生了矛盾。证明完毕。 ■

我们的主要应用如下。

**定理 5** 假设条件 $(V_{1,2})$ 和 $(W_1)$ 成立。对于任意$m \in \mathbb{N}$，存在 $\Lambda_m > 0$，使得若 $\lambda$ 属于$(V_2)$ 且满足 $\lambda \geq \Lambda_m$，则 $\mathcal{I}_*$ 至少有 $3m$ 条负能级临界轨道，它们是洛伦兹力方程的 $2\pi$-周期解。

证明。 结论由定理 4、推论 1 以及引理 10、11、12、13 得出。

■

**例 1** 对于任意 $\lambda > 0$，有

$$\lim_{x\to 0} x^{-2}\arctan(\lambda x^2) = \lambda, \quad \lim_{|x|\to\infty} \arctan(\lambda x^2) = \frac{\pi}{2}.$$

考虑由下式给出的电势 $V$

$$V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad V(q) = \arctan(\lambda|q|^2).$$

有 $V$满足 $(V_{1,2})$，其中 $l^* = \frac{\pi}{2}$，且 $V(q) \geq \frac{\lambda}{2}|q|^2$ 在零附近。另假设磁势 $W$ 满足 $(W_1)$。 固定 $m \in \mathbb{N}$。由上述定理可知，存在 $\Lambda_m > 0$，使得对于任意满足$\frac{\lambda}{2} \geq \Lambda_m$. 的 $\lambda$，洛伦兹力方程至少有 $3m$ $2\pi$-周期解。特别地，若 $\lambda \to \infty$, ，则洛伦兹力方程的 $2\pi$- 周期解的数量趋于无穷。

**注 3** 众所周知，若不采用本文所用的归一化，带电粒子的相对论运动方程为

$$\left(\frac{q'}{\sqrt{1-|q'|^2/c^2}}\right)' = \frac{\beta}{m_0}(E(t,q) + q' \times B(t,q)),$$

其中， $c$ 为光速， $m_0$ 为静止质量， $\beta \in \mathbb{R}$ 为粒子的电荷。注意， $m_0$ 和 $\beta$ 是给定的。因此，要应用我们的结果，若希望粒子带正电，则电势 $V$ 必须具有吸引性，即 $V > 0$，若希望粒子带负电，则电势$V$ 必须具有排斥性，即 $V < 0$。

# 参考文献


[1] A.AMBROSETTI和V. COTI ZELATI，缺乏紧致性的临界点与奇异动力系统，Ann. Mat. Pura et Appl. CIL(1987)，237–259。

[2] A.AMBROSETTI和 A. MALCHIODI，《非线性分析与半线性椭圆问题》，剑桥高等数学研究丛书第104卷，2007年。

[3] D. ARCOYA、C. BEREANU和P.J. TORRES，洛伦兹力方程的临界点理论，Arch. Rational Mechanics Anal. **232**(2019年)，1685–1724。[4] D. ARCOYA、C. BEREANU和P.J. TORRES，洛伦兹力方程作用积分的*Lusternik—Schnirelman*理论，Calc. Var. Partial Differential Equations **59** (2020年)，50。[5] V. BENCI，群的一个几何指标 $S^1$ 及其在常微分方程周期解研究中的若干应用，Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981年)，393–432。[6] C. BEREANU，洛伦兹力方程中的相互作用，Calc. Var. Partial Differential Equations **63**(2024年)，29。[7] C. BEREANU、P. JEBELEAN和J. MAWHIN，奇异 $\phi$-拉普拉斯算子的非线性扰动的变分方法，Rend. Lincei Mat. Appl.**22**(2011年)，89–111。[8] A. BOSCAGGIN、W. DAMBROSIO和D. PAPINI，相对论开普勒问题的周期解：一种变分方法，Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)**XXV** (2024年)，1465–1504。[9] A. BOSCAGGIN、W. DAMBROSIO和D. PAPINI，具有奇异电磁势的洛伦兹力方程的无穷多个周期解，J. Differential Equations **383** (2024年)，190–213。[10]T. DAMOUR，庞加莱 ́、电子动力学与相对论，法国科学院物理学报**18** (2017年)，551–562。[11] I. EKELAND，《哈密顿力学中的凸性方法》，施普林格，1990年。[12] I. EKELAND和J.-M. LASRY，凸能量曲面上哈密顿流的周期轨线数量，Ann. of Math. **112** (1980年)，283–319。[13] I. EKELAND和R. TEMAM，《凸分析与变分问题》，工业与应用数学学会应用数学经典丛书第28卷，1999年。[14] R. FEYNMAN、B.R. LEIGHTON和M. SANDS，《费曼物理学讲义：第二卷，主要论电磁学与物质》，艾迪生-韦斯利出版公司，2011年。[15] N. GHOUSSOUB，极小极大临界点的位置、重数与莫尔斯指标，J. Reine. und Angew. Math. **417** (1991年)，27–76。[16] N. GHOUSSOUB，《临界点理论中的对偶性与扰动方法》，剑桥数学丛书第107卷，1993年。

[17] L.D. LANDAU 和 E.M. LIFSCHITZ，《经典场论》，第四版：第2卷，Butterworth-Heinemann，1980年。[18] H.A. LORENTZ，速度小于光速的任意运动系统中的电磁现象，阿姆斯特丹科学院院刊 - VKAW**6**（1904年），809–831。[19]H.A. LORENTZ，亨利·庞加莱的两篇 ´回忆录 ´论数学 ´物理学，数学学报**38**（1921年），293–308。[20] J. MAWHIN，若干非自治常微分方程的共振问题，载于：《非自治微分方程的稳定性与分岔理论》，R. JOHNSON 和 M.P. PERA（编），数学讲义2065，CIME基金会丛书，施普林格，2011年，103-184。[21] J. MAWHIN 和 M. WILLEM，《临界点理论与哈密顿系统》，施普林格，纽约，1989年。[22] H. POINCAR ´E，论 ´电子的动力学，巴勒莫数学学会报告**21**（1906年），129–176。[23] A. SZULKIN，下半连续函数的极小极大原理及其在非线性边值问题中的应用，Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire **3**（1986年），77–109。

布加勒斯特大学数学学院，学院街14号，邮编70109，布加勒斯特，罗马尼亚；罗马尼亚科学院“西米翁·斯托伊洛”数学研究所，格里维采路21号，布加勒斯特，罗马尼亚 cbereanu@imar.ro

巴贝什-博雅伊大学数学与计算机科学学院，米哈伊尔·科格尔尼恰努街1号，邮编400084，克卢日-纳波卡，罗马尼亚
alexandru.pirvuceanu@ubbcluj.ro