arXiv:2602.05025v1 [math.OC] 4 Feb 2026

通过重缩放马尔可夫决策过程逼近由Hawkes过程驱动的奇异停止控制

Isabel AGOSTINO* Thibaut MASTROLIA†

UC 伯克利，工业工程与运筹学系

2026年2月6日

摘要

我们研究一个由霍克斯过程所支配的自激动态驱动的奇异最优停止随机控制问题。在连续时间情形中，我们证明该优化问题可归结为求解带梯度约束的变分偏微分方程。随后，我们引入其离散时间对应问题，并将其建模为马尔可夫决策过程。我们证明，在适当的重缩放过程下，离散时间问题的价值函数收敛到其连续时间对应问题，这意味着离散时间最优解对连续时间问题是渐近最优的。最后，我们将这些结果应用于由霍克斯过程驱动并带有奇异控制的奥恩斯坦-乌伦贝克随机微分方程，其动机来自网络威胁下的最优电厂投资，并通过数值模拟说明理论结果。

1 引言

1.1 网络风险管理：一个启发性框架

奇异随机控制兴起于20世纪60年代，源于Bather与Chernoff[11], 的奠基性工作，他们提出了一个程式化的飞船接近问题，用以研究不确定性下的最优燃料管理。在其表述中，控制者必须持续权衡两种相互竞争的效应：早期干预可在剩余时间充裕时实施，但依赖于不精确的信息；晚期干预则受益于更完善的信息，但随着剩余时间 $T-t$ 缩短而日益失效。由此得到的有限时域控制问题在于最小化二次终端成本以及形式为$(T-t)^{-1}\,d\xi_t$的运行控制成本，其中 ξ 表示累计燃料消耗。控制过程 ξ 被建模为非递减的有界变差过程，从而推广了经典随机控制问题；在这些问题中， ξ 通常被假定关于勒贝格测度绝对连续。这一开创性例子推动了奇异控制数学理论的广泛发展；可参见 [3, 4, 13, 24, 29, 39, 40, 51, 52, 53, 68]等诸多文献。此后，奇异控制技术已被应用于众多领域。在排队系统中，奇异控制通过准入控制、服务器速度调节或推动状态过程的强制空闲，刻画工作负荷或队列长度的瞬时调整；参见 [38, 46, 63]。在生物学与可再生资源管理中，此类控制出现于最优采收与种群调控

*iagostino@berkeley.edu
†mastrolia@berkeley.edu

问题 [43]。在数学金融中，它们在最优投资、消费与股利分配模型中发挥着核心作用 [9, 67, 69]。而在能源经济学中，奇异控制被用于描述电厂容量规划中不可逆或部分可逆的投资决策 [2, 55]。关于奇异控制、其分析基础及其应用的全面论述，我们参阅专著 [33]以及近期的博士论文 [71]。

回顾飞船燃料问题以及能源管理中电厂投资的例子，可以看到这些领域近年来日益面临网络攻击；参见 [42, 70, 73]等。这些实证观察凸显了有必要通过将网络威胁纳入底层系统动态来拓展现有的奇异控制研究。一篇近期的实证与理论文章 [10]利用WannaCry攻击的真实数据表明，网络攻击呈现出自激特征，而Hawkes过程作为一类自激计数过程，能够成功再现实践中观察到的聚集与传染模式。近年来，涉及自激动态的随机控制问题因其能够刻画事件发生会改变未来事件发生可能性的系统而日益受到关注。此类反馈效应可由Hawkes过程自然刻画，其强度会随过去的跳跃活动而演化。自激动态出现在多种应用中，包括金融、保险以及信息物理系统。例如，在网络风险下的电厂投资中，攻击或故障可能暂时提高脆弱性，从而导致事件聚集。对此类系统的最优管理需要在持续的运营调整与旨在缓解风险并维持稳定性的离散、可能突发的干预之间取得平衡。在这一框架下，我们研究由Hawkes动态驱动的奇异混合随机控制问题。控制者通过正则（绝对连续）与奇异（有界变差）两部分采取行动，体现了渐进决策与瞬时决策的结合。自激跳跃机制的存在引入了非马尔可夫依赖结构，从而使该优化问题在分析上颇具挑战。在连续时间情形中，我们证明该问题可由带梯度约束的变分Hamilton-Jacobi-Bellman方程刻画，从而将经典奇异控制理论自然推广至具有内生跳跃强度的系统。

1.2 现状与贡献

本文致力于奇异控制与自激随机系统交叉领域的研究。早期关于跳跃扩散过程的随机控制和最优停止研究，例如[5, 6, 27], ，建立了验证定理并研究了价值函数的正则性；与此同时，基于偏微分方程（PDE）离散化格式的数值近似也得到了发展，例如 [30]。我们的表述通过引入 Hawkes驱动跳跃拓展了这一研究脉络，这类跳跃同时产生状态依赖和历史依赖跳跃强度。不同于依赖 PDE 离散化的经典方法，我们研究了一种纯离散时间控制模型，并证明其与连续时间优化问题等价，从而无需直接对变分偏微分方程进行数值处理。

从 Haussmann 和 Suo 的开创性工作开始 [39, 40], ，奇异随机控制理论便与最优停止问题紧密相连。这一关系在 [36, 37, 20], 中得到了进一步阐明，该文建立了自由边界表述与变分不等式之间的解析联系。关于奇异控制理论及其与随机微积分和粘性解之间联系的全面论述，可见专著 [33, 68]。这些奠基性成果为本文的连续时间表述提供了分析背景，也促使我们研究自激动态下的离散近似。

受霍克斯过程影响的系统控制已在 [14, 8], 中得到研究，作者分析了具有自激跳跃的随机控制问题；[54], 则为受控跳跃过程构建了马尔可夫逼近框架。在离散时间方面，马尔可夫决策过程（MDP）理论已相当成熟，例如可参见经典文献[45, 66] ，且已广泛应用于决策、动态博弈和随机控制 [12, 32]。此外，在各种结构设定下，MDP 已成功用作奇异随机控制问题的近似格式。针对状态约束系统 [22], 、多物种种群模型 [43], 、种群动力学中的缩放极限 [49], 以及金融领域中包含资本注入的切换跳扩散模型 [48, 72], 均已获得收敛性和一致性结果。

本文的主要贡献有三方面。

1. 我们在一个一般框架下，提出了由霍克斯过程驱动的连续时间奇异混合停止随机控制问题的连续时间和离散时间表述。我们推导了连续时间情形下相应的带梯度约束的变分哈密顿–雅可比–贝尔曼偏微分方程。

2. 将离散时间对应问题建模为马尔可夫决策过程。通过适当的重缩放论证，我们证明离散时间价值函数收敛至其连续时间对应物。这一收敛结果意味着，离散时间最优控制对于连续时间问题而言是渐近最优的。此外，我们为马尔可夫决策过程框架提出了一种新的受控霍克斯过程离散化方法。

3. 将结果应用于由霍克斯跳跃驱动的奇异受控奥恩斯坦–乌伦贝克过程，该过程受到网络威胁下发电厂投资问题的启发。此例说明了如何将一般结果应用于一个易于处理的模型，并通过数值实验展示了离散时间近似的准确性。总体而言，本文将现有的马尔可夫逼近技术扩展至具有自激特性的系统中的非马尔可夫跳跃环境。

本文的结构如下。在第2节中，我们介绍连续时间问题的表述，包括所使用的空间与记号。第2.2节回顾具有指数核的霍克斯过程的定义以及强度过程的性质。第2.3节研究由带奇异控制的霍克斯过程驱动的随机微分方程之解的可积性性质。第2.4节给出停止–奇异优化(4)、与该问题相关的变分梯度约束偏微分方程(2.4)，以及验证定理，见定理2.14和定理2.16。第2.5节引入反射过程，以将状态过程限制在有界区域内，作为马尔可夫决策过程框架的预备步骤，并给出命题 2.18中的首批收敛结果。第 3 节给出相应的离散时间框架，首先在第 3.1 节中对霍克斯过程进行离散化，然后在第3.2节中给出该问题的马尔可夫决策过程表述。收敛结果在第4节中陈述，首先在第4.1节中利用时间重标度与紧性性质，给出马尔可夫决策过程向受控随机微分方程的收敛。主要收敛结果在第4.2节中给出。我们特别证明，离散时间问题的价值函数收敛于由时间重标度得到的有界区域上连续时间优化问题的连续时间价值函数，而后者本身又收敛于连续时间无界区域优化问题的价值函数。我们还证明，离散时间问题的任意最优解都为连续时间极限问题提供一个 ε-最优解。最后，第 5 节以由Hawkes过程驱动的奥恩斯坦–乌伦贝克过程为例说明这些结果。

2 连续时间模型

在本节中，我们介绍我们所关注的优化问题的连续时间版本。受控随机微分方程由下文的(3)给出，而优化问题为(4)。

2.1 空间与记号

我们遵循 [44, 54] 在标记过程与连续扩散过程相结合的背景下提出的框架。在本文中，$T > 0$ 表示一个固定的未来时域，我们将 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 记为一个概率空间，其中 $\Omega = \Omega^c \times \Omega^\Pi$ 由维纳空间 $\Omega^c := \mathcal{C}([0,T]; \mathbb{R})$ 和跳跃构型空间 Ω^Π 组成，定义如下：

$$\Omega^\Pi = \left\{ \omega^\Pi = \sum_{i=1}^{n} \delta_{y_i},\ y_i = (t_i, \theta_i, z_i) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ i = 1, \dots, n,\ 0 = t_0 < T_1 < \cdots < t_n = T \right\}.$$

我们假设该空间配备了布朗运动 W。令 $\omega := (\omega^c, \omega^\Pi) \in \Omega$。我们有 $W_t(\omega) = \omega^c_t$。我们将 $\mathbb{P}^\Pi$ 记为泊松测度，其下计数过程 Π 定义为

$$\Pi([0,t] \times [0,\theta] \times (-\infty, z]) := \omega^\Pi([0,t] \times [0,\theta] \times [0,z]),\ (t,\theta,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,$$

是一个强度测度为 $dtd\theta\mathfrak{m}(dz)$的齐次泊松过程，其中 $\mathfrak{m}(dz)$ 是 $\{\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$ 上的概率测度，其支撑集包含于紧子集 $\mathfrak{P} \subsetneq \mathbb{R}_+$，且 $\mathfrak{m}(\{0\}) = 0$。此外，我们假设 $\int_{\mathbb{R}} |z| \mathfrak{m}(dz) < \infty$。我们回顾一下，与 (W, Π) 相关的自然滤过定义为

$$\mathcal{F}_t := \sigma(W_t) \vee \mathcal{F}_t^\Pi, \quad \mathcal{F}_t^\Pi := \sigma\Big(\Pi\big(\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\big)\Big).$$

我们用 $\mathcal{T}_{[0,T]}$ 表示 $[0,T]$上的 $\mathbb{F}$-停时集合，其中 $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$。我们将 $\mathcal{D}[0,\infty)$ 设为定义在 $[0,\infty)$ 上、取值于 $\mathbb{R}$ 的右连续且有左极限函数空间，并用 $\mathcal{I}[0,\infty)$（分别为 $\mathcal{BV}[0,\infty)$）表示其非递减函数（分别为有界变差函数）子空间。

注意，我们将 $\mathfrak{m}$ 视为取值于 $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$ 的随机元素，其中 $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$ 是 $\mathbb{R}_+$ 上有限博雷尔测度所构成的空间，赋有弱收敛拓扑（或者等价地，赋有由有界连续测试函数诱导的拓扑）。

2.2 霍克斯过程与指数核

2.2.1 霍克斯表述

由 Hawkes 首次提出于 1971 [41], ，霍克斯过程是一种具有可预测强度的自激非齐次计数过程。也就是说，强度 λ_t 可由 $\mathcal{F}_{t-}$ 确定。霍克斯过程传统上用于对地震学中的地震聚集和余震进行建模。其关键特征是，某一事件的发生会提高短期内未来事件发生的可能性，从而形成时间依赖性。在过去几十年中，霍克斯过程的应用范围不断扩大，涵盖金融（对交易到达和价格跳跃建模）、神经科学、社交网络，以及近来用于网络安全和风险建模，在这些领域中，它们能够捕捉网络攻击的聚集和传染效应。这里我们回顾带标记的霍克斯过程及其计数过程的概念。下面介绍的版本是 [19] 中提出的广义标记霍克斯过程的一个特例。令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一个概率空间，并考虑一个标记点过程 N，其标记空间为 $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$，即一个随机元素序列 $((T_n, Z_n))_{n \geq 1}$，其中

$(T_n)_n$ 和 $(Z_n)_n$ 分别是非递减非负随机变量序列。我们为过程 N 关联一个取整数值的随机测度，也记作 N，定义如下

$$N(dt,dz) := \sum_{n\geq 1} \delta_{(T_n,Z_n)}(dt,dz)\mathbf{1}_{\{T_n<\infty\}}, \text{ so that } N((0,t],A) = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{T_n\leq t,\, Z_n\in A\}},\ A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+),$$

其中 δ 表示 在 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ 上的狄拉克测度。相应的 Hawkes 核定义为 as

$$\psi(t,A) = \left(\lambda_t^{\infty} + \int_{(0,t)\times\mathbb{R}_+} \phi(t-s,z)N(ds,dz)\right)\mathbb{Q}(A),$$

对于 $t\geq 0$ 和 $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$，其中 $\mathbb{Q}$ 是 $(\mathbb{R}_+,\ \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ 上的概率测度， η 是正的可预测过程，而 $\phi^{\circ}(\cdot,\ \cdot)$ 是非负有界可测函数。

注释 2.1. 若对任意 $t>0$ 都有 $\phi(t) = \alpha e^{-\beta t}$，则这一对 (N_t,λ_t) 是一个马尔可夫过程，特别地，λ 是下列随机微分方程的解

$$d\lambda_t = \beta\big(\lambda_\infty - \lambda_t\big)\,dt + \alpha\,dN_t,$$

其中我们采用 符号滥用 $N_t = \int_{(0,\ t)\times\mathbb{R}_+}\phi(t-s,z)N(ds,dz)$，其解为

$$\lambda_t = e^{-\alpha t}\lambda_0 + \big(1-e^{-\alpha t}\big)\lambda_\infty + \beta\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\,dN_s.$$

本文中，我们将考虑一个具有指数核的霍克斯过程，作为对上述注释 2.1 的扩展；具体而言，定义

$$\varphi(t) := \sum_{j=1}^{n} d_j e^{-q_j t},\ (d_1,\ldots,d_n)\in\mathbb{R}^n,\ (q_1,\ldots,q_n)\in(0,\infty)^n.$$

2.2.2 Brémaud-Massoulié 表述

Hawkes 提出的历史表述的一个缺点是，过程的定义并非自包含，因为强度 λ 取决于过程 N，而后者本身又取决于 λ。稀疏化方法是一种有效且非常优雅的方法，可将霍克斯过程定义为由 (N,λ) 求解的自包含随机微分方程系统。稀疏化方法最初由 Ideka 提出 [47, 第 93 页，（7.27）]，随后 Brémaud 和 Massoulié 在 [21] 中对其进行了严格定义；该方法也见于早期关于模拟的研究 [61, 64]。其主要思想是考虑定义在 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ 上、强度测度为 $dtd\theta\nu(dz)$ 的泊松随机测度 μ，它在平面 (s,u) 上散布着无限多个潜在事件；随后，在每个时间 s，若纵坐标 u 低于当前强度 λ_{s-}，则接受该事件。该方法确保 (N,λ) 是一个耦合随机微分方程组的解，该方程组通过 Brémaud 和 Massoulié 提出的泊松嵌入方法 [21] 表示为：

$$\lambda_t = \lambda_\infty(t) + \int_0^{t-}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(t-s)\varrho(z)\mathbf{1}_{\theta\leq\lambda_s}\Pi(ds,d\theta,dz) = \lambda_\infty(t) + \sum_{j=1}^{n} d_j\varsigma_t^{(j)}, \tag{1}$$

其中，每个分量 $\varsigma_t^{(j)}$ 由 $\varsigma_t^{(j)} = \int_0^{t-}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-q_j(t-s)}\varrho(z)\mathbf{1}_{\theta\leq\lambda_s}\Pi(ds,d\theta,dz)$ 定义，且$\lambda_\infty(\cdot)$是确定性的。以下研究中，我们始终假设施加了以下假设。

假设 1。 存在 $\Lambda_\infty < \infty$ 使得 $\sup_{s\in[0,T]} \lambda_\infty(s) \le \Lambda_\infty$。

根据 [54]an d 假设 1，我们现在可以将 λ 写成如下形式的一阶随机微分方程:

$$\begin{cases} d\varsigma_t^{(1)} = -q_1\varsigma_t^{(1)}dt + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} \varrho(z)\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_\infty(t)+\sum_{j=1}^n d_j\varsigma_t^{(j)}}\Pi(dt,d\theta,dz) \\ \vdots \\ d\varsigma_t^{(n)} = -q_n\varsigma_t^{(n)}dt + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} \varrho(z)\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_\infty(t)+\sum_{j=1}^n d_j\varsigma_t^{(j)}}\Pi(dt,d\theta,dz). \end{cases}$$

带标记的霍克斯过程的泊松嵌入为 $N(dt,\ dz) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\theta\le\lambda_s}\Pi(dt,\ d\theta,\ dz)$。注意，由于 Π 是齐次泊松过程，其强度测度为 $dtd\theta\mathrm{m}(dz)$。

引理 2.2 （杜布-迈耶分解—— [7]中的定理 2.3.7）。 对于任意 $t\in[0,T]$，我们有

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}_+} N(ds,dz) = \int_0^t\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\theta\le\lambda_s}\Pi(dt,d\theta,dz) = \bar{N}_t + \int_0^t\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\theta\le\lambda_s}dsd\theta m(dz)$$

其中 $\bar{N}_t$ 是鞅，$\int_0^t\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\theta\le\lambda_s}dsd\theta\mathbf{m}(dz)$ 是霍克斯过程的补偿子。此外，对于任意随机过程 $H(z)$，若 $z\in\mathbb{R}_+$ 满足

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} |H_s(z)|\,\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_s}\ m(dz)d\theta ds\right] < \infty,$$

由下式定义的过程 M^H

$$M_t^H := \int_0^t\int_{\mathbb{R}_+} H_s(z)N(ds,dz) - \int_0^t\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} H_s(z)\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_s}dsd\theta m(dz),$$

是一个（$\mathbb{P}^\Pi,\mathbb{F}^\Pi$）-鞅。

2.2.3 强度过程的性质

分析依赖于以下假设，该假设在全文中均得到遵循。

假设 (R)。 存在 $\rho\ge 2$ 使得 $\varrho^* = \int_{\mathbb{R}_+}|\varrho(z)|^\rho\mathrm{m}(dz) < \infty$，并满足稳定性条件： $\varrho^*\frac{d_j}{q_j} < 1$ 对所有 j均成立。

引理2.3。 在假设（**R**）下，存在 $C_T<\infty$ 使得 $\mathbb{E}\Big[\int_0^T\big(\lambda_\infty(t) + \sum_{j=1}^n d_j\varsigma_t^{(j)}\big)dt\Big] \le C_T$。

证明。 我们首先对每个 $\varsigma^{(j)}$取期望。于是,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\big[\varsigma_t^{(j)}\big] = -q_j\mathbb{E}\big[\varsigma_t^{(j)}\big] + \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} \varrho(z)\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_\infty(t)+\sum_{j=1}^n d_j\varsigma_t^{(j)}}\ d\theta\ \mathrm{m}(dz)\right],$$

我们可以将其改写为

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\big[\varsigma_t^{(j)}\big] = -q_j\mathbb{E}\big[\varsigma_t^{(j)}\big] + \varrho^*\left(\lambda_\infty(t) + \sum_{j=1}^n d_j\mathbb{E}\big[\varsigma_t^{(j)}\big]\right).$$

假设任何历史贡献都已纳入基准强度 λ_∞，我们便可求解上述线性常微分方程：

$$\mathbb{E}\big[\varsigma_t^{(j)}\big] = e^{-q_j t}\mathbb{E}\big[\varsigma_0^{(j)}\big] + \varrho^* \int_0^t e^{-q_j(t-s)}\Big(\lambda_\infty(s) + \sum_{j=1}^n d_j \mathbb{E}\big[\varsigma_s^{(j)}\big]\Big) ds.$$

根据假设（$\mathbf{R}$）以及 $\mathbb{E}[\lambda_t] = \lambda_\infty(s) + \sum_{j=1}^n d_j \mathbb{E}\big[\varsigma_s^{(j)}\big]$，我们得到以下卷积型伏尔泰拉方程

$$\mathbb{E}[\lambda_t] = \lambda_\infty(t) + \int_0^t I(t-s)\mathbb{E}[\lambda_s] ds, \quad I(u) := \varrho^* \sum_{j=1}^n d_j e^{-q_j u}.$$

定义 $\int_0^t I\ t-s\ I^{*n}\ s\ ds \qquad \delta_0 \qquad 0 \qquad R\ t\ =$ 重卷积幂 $I^{*0}(\ ) = \delta_0$, $I^{*1}(\ ) = I(\ )$，以及 $I^{*(n+1)}(\ )\ (I * I^{*n})(\ )\ (\ )\ (\ )$ ——其中 是位于 的狄拉克测度。定义更新核为 $(\ )\sum_{n=0}^\infty I^{*n}(t)$。注意，当 $\|I\|_{L^1} < 1$ 时，更新核在 L^1 中收敛，其中 $\|\cdot\|_{L^1}$ 是卷积范数。

$$\|I\|_{L^1} = \int_0^\infty I(u)du = \varrho^* \sum_{j=1}^n d_j \int_0^\infty e^{-q_j u} du = \varrho^* \sum_{j=1}^n \frac{d_j}{q_j}.$$

在假设 $(\mathbf{R})$ 下，$\|R\|_{L^1} = \frac{1}{1-\varrho^*\sum_{j=1}^n \frac{d_j}{q_j}}$ ~~现在，~~ 根据 [35], 第 2 章中卷积的定义，我们可以写成

$$\mathbb{E}[\lambda_t] = (R * \lambda_\infty)(t) = \int_0^t R(t-s)\lambda_\infty(s) ds.$$

对时间进行积分并应用富比尼定理可得

$$\begin{aligned}\int_0^T \mathbb{E}[\lambda_t] dt &= \int_0^T \int_0^t R(t-s)\lambda_\infty(s) ds dt = \int_0^T \lambda_\infty(s)\left(\int_s^T R(t-s) dt\right) ds \\ &= \int_0^T \lambda_\infty(s)\left(\int_0^{T-s} R(u) ds\right) ds \le \frac{1}{1-\varrho^*\sum_{j=1}^n \frac{d_j}{q_j}} \int_0^T \lambda_\infty(s) ds.\end{aligned}$$

最后，根据假设 1，我们有 $\int_0^T \mathbb{E}[\lambda_t] dt \le \frac{\Lambda_\infty T}{1-\varrho^*\sum_{j=1}^n \frac{d_j}{q_j}}$ □

引理 2.4. 对于任意满足假设 $(\boldsymbol{R})$ 的 $\ell \ge 2$，有 $\mathbb{E}[\text{上确界}_{t\le T}\, \lambda_t^\ell] < \infty$，其中 λ_t 的定义与 *1* 中相同。

证明。对 λ^ℓ 应用伊藤公式可得

$$\begin{aligned}d\big(\lambda_t^\ell\big) = \ell\lambda_t^{\ell-1}\Bigg(&-\sum_{j=1}^n q_j \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} d_j e^{-q_j(t-s)} \mathbf{1}_{\theta\le\lambda_s} \varrho(z)\Pi(ds, d\theta, dz)\Bigg) dt \\ &+ \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+}\left(\lambda_t + \Big(\sum_{j=1}^n d_j \varrho(z)\Big)^\ell - \lambda_t^\ell\right)\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_t}\Pi(dt, d\theta, dz).\end{aligned}$$

取期望可得

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}[\lambda_t^\ell] = -\ell\mathbb{E}\left[\lambda_t^{\ell-1}\sum_{j=1}^n q_j\int_0^t\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} d_j e^{-q_j(t-s)}\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_s}\varrho(z)\Pi(ds,d\theta,dz)\right] + \ell\mathbb{E}[\lambda_\infty(t)\lambda_t^{\ell-1}]$$
$$+\mathbb{E}\left[\lambda_t\int_{\mathbb{R}_+}\left(\lambda_t+\Big(\sum_{j=1}^n d_j\varrho(z)\Big)^\ell-\lambda_t^\ell\right)\mathrm{m}(dz)\right].$$

关注漂移项，我们注意到

$$\sum_{j=1}^n q_j\int_0^t\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} d_j e^{-q_j(t-s)}\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_s}\varrho(z)\Pi(ds,d\theta,dz) \ge q_{\min}\int_0^t\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}\sum_{j=1}^n d_j e^{-q_j(t-s)}\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_s}\varrho(z)\Pi(ds,d\theta,dz)$$
$$= q_{\min}(\lambda_t-\lambda_\infty(t)).$$

因此，

$$-\ell\mathbb{E}\left[\lambda_t^{\ell-1}\sum_{j=1}^n q_j\int_0^t\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} d_j e^{-q_j(t-s)}\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_s}\varrho(z)\Pi(ds,d\theta,dz)\right] \le -\ell q_{\min}\mathbb{E}[\lambda_t^{\ell-1}(\lambda_t-\lambda_\infty(t)]$$
$$= -\ell q_{\min}\mathbb{E}[\lambda^\ell] + \ell q_{\min}\mathbb{E}[\lambda_\infty(t)\lambda_t^{\ell-1}].$$

应用杨氏不等式可得，对于任意 $\epsilon\in(0,1)$，

$$\ell q_{\min}\mathbb{E}[\lambda_\infty(t)\lambda_t^{\ell-1}] \le \ell q_{\min}\Lambda_\infty(\epsilon\mathbb{E}[\lambda_t^\ell]+C_\epsilon).$$

漂移项上界为 $-\ell q_{\min}(1-\tilde{\epsilon})\mathbb{E}[\lambda_t^\ell]+C_1$，其中 $\tilde{\epsilon}$ 是某个依赖于ϵ,Λ_∞的小量。现在令 $\Phi(\lambda)=\int_{\mathbb{R}_+}\left(\lambda_t+\left(\sum_{j=1}^n d_j\varrho(z)\right)^\ell-\lambda_t^\ell\right)\mathrm{m}(dz)$。由二项式展开以及 $\sum_{j=1}^n d_j\varrho(z)$ 的矩的可积性，我们注意到

$$\Phi(\lambda)\le C\sum_{k=0}^\ell\lambda^k\int_{\mathbb{R}_+}\Big(\sum_{j=1}^n d_j\varrho(z)\Big)^{\ell-k}\mathrm{m}(dz).$$

因此，$\lambda\Phi(\lambda)\le C\sum_{k=0}^\ell\lambda^{k+1}\int_{\mathbb{R}_+}\left(\sum_{j=1}^n d_j\varrho(z)\right)^{\ell-k}\mathrm{m}(dz)$。于是，存在常数 C_2 和 C_3，使得

$$\mathbb{E}[\lambda_t\Phi(\lambda_t)]\le C_2+C_3\mathbb{E}[\lambda_t^\ell].$$

结合我们的两个界可得 $\frac{d}{dt}\mathbb{E}[\lambda_t^\ell]\le A+B\mathbb{E}[\lambda_t^\ell]$。由 $[0,T]$ 上的格朗沃尔引理，我们推得 $\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}[\lambda_t^{m+1}]<\infty$。 □

引理 2.5。对于任意满足假设 （***R***） 的 $\ell\ge 2$， $\mathbb{E}[\text{上确界}_{t\le T}(\varsigma_t^{(j)})^\ell]<\infty$。

证明。令 $I_T=\int_0^T\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+}\varrho(z)\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_s}\Pi(ds,\ d\theta,\ dz)$。那么，对于任意样本路径 ω，$\sup_{t\le T}\varsigma_t^{(j)}\le I_T$。因此，只需证明 $\mathbb{E}[I_T^{m+1}]<\infty$。我们可以将 I_T 分解为补偿鞅和补偿子，如下所示:

$$I_T=\underbrace{\int_0^T\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+}\varrho(z)(\Pi(dt,d\theta,dz)-dtd\theta\mathrm{m}(dz))}_{\mathcal{M}_T}+\underbrace{\varrho^*\int_0^T\Big(\lambda_\infty(t)+\sum_{j=1}^n d_j\varsigma_t^{(j)}\Big)dt}_{\mathcal{A}_T}.$$

注意，$\varsigma_t^{(j)} = \sum_{s\le t} e^{-q_j\ (t-s)}\ \varrho(z_s) \le \sum_{s\le T} e^{-q_j\ (t-s)}\ \varrho(z_s) = I_T,\quad \mathbb{P}-a.s.$。因此，$\sup_{t\le T} \varsigma_t^{(j)} \le I_T$，只需证明 $\mathbb{E}[I_T^\ell] < \infty$。接着，由引理 2.4 可得

$$\mathbb{E}[\mathcal{A}_T^\ell] = (\varrho^*)^\ell \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \lambda_\infty(t) + \sum_{j=1}^n d_j \varsigma_t^{(j)}\ dt\right)^\ell\right] \le (\varrho^*)^\ell T^{\ell-1} \int_0^T \mathbb{E}[\lambda_t^\ell] dt < \infty.$$

现在，利用 [57], 中的定理 2.11，我们得到对于某个常数 $C_\ell > 0$

$$\mathbb{E}[|\mathcal{M}_T|^\ell] \le C_\ell \left(\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \lambda_s ds \cdot \int_{\mathbb{R}_+} \varrho(z)^2 \mathrm{m}(dz)\right)^{\ell/2}\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \lambda_s ds \cdot \int_{\mathbb{R}_+} \varrho(z)^{\ell+1} \mathrm{m}(dz)\right]\right).$$

由引理 2.4 和假设 **(R)**，右端有限，因此对于某个$C > 0$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\le T} \left(\varsigma_t^{(j)}\right)^\ell\right] \le \mathbb{E}[I_T^\ell] \le C\Big(\mathbb{E}\big[|\mathcal{M}_T|^\ell\big] + \mathbb{E}[\mathcal{A}_T^\ell]\Big) < \infty.$$

□

2.3 受控随机微分方程与奇异控制

我们考虑具有漂移、波动率和网络风险成本、受奇异控制且由霍克斯过程驱动的随机微分方程的解。设 B 和 Γ 为 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 的紧子集。我们将受控过程的漂移、波动率和霍克斯跳跃幅度定义为

$$\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \sigma : \mathbb{R}\times B \longrightarrow \mathbb{R},\ \chi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\Gamma \longrightarrow \mathbb{R},\ \varrho : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},$$

假设它们是连续函数，使得对于任意 $(x,\ z,\ b,\ g) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times B\times\Gamma$

$$(\mathbf{L})\begin{cases} |\mu(x)-\mu(\tilde{x})| + |\sigma(x,b)-\sigma(\tilde{x},b)| + |\chi(x,z,g)-\chi(\tilde{x},z,g)| \le c|x-\tilde{x}|, \\ |\mu(x)| + |\sigma(x,b)| \le c(1+|x|) \\ |\chi(x,z,g)| \le c(1+\tilde{\chi}(x)+|z|^p),\ \text{ for some } p>1, \end{cases}$$

其中 $\tilde{\chi}$ 是一个从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的有界函数。

定义 2.6（容许控制）。容许控制定义为一对渐进可测过程 $\nu := (\beta, \gamma)$，其取值属于 $B\times\Gamma$。我们用 $\mathcal{V}$ 表示容许控制集合$\nu_t = (\beta_t, \gamma_t)$。

现在我们介绍不含奇异控制的随机微分方程组，见 [14, 54]。

$$\begin{cases} dY_t = \mu(Y_t)dt + \sigma(Y_t,\beta_t)dW_t + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} \chi(Y_t,z,\gamma_t)\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_\infty(t)+\sum_{j=1}^n d_j\varsigma_t^{(j)}}\Pi(dt,d\theta,dz), \\ d\varsigma_t^{(1)} = -q_1\varsigma_t^{(1)}dt + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} \varrho(z)\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_\infty(t)+\sum_{j=1}^n d\varsigma_t^{(1)}}\Pi(dt,d\theta,dz), \\ \vdots \\ d\varsigma_t^{(n)} = -q_n\varsigma_t^{(n)}dt + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} \varrho(z)\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_\infty(t)+\sum_{j=1}^n d\varsigma_t^{(n)}}\Pi(dt,d\theta,dz), \\ N(dt,dz) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\theta\le\lambda_\infty(t)+\sum_{j=1}^n d_j\varsigma_t^{(j)}}\Pi(dt,d\theta,dz). \end{cases} \tag{2}$$

注 2.7 (指数核维数为 **1)**。 假设 $n = 1$ ，使得 $\varphi(t) = de^{-qt}$。随机微分方程组如下

$$\begin{cases} dY_t = \mu(Y_t)dt + \int_0^t \sigma(Y_t, \beta_t)dW_t + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} \chi(Y_t, z, \gamma_t)\,\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_t}\Pi(dt, d\theta, dz), \\ \lambda_t = \lambda_\infty(t) + \int_0^{t-}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} de^{-q(t-s)}\varrho(z)\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_s}\Pi(ds, d\theta, dz), \\ N(dt, dz) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\theta\le\lambda_t}\Pi(dt, d\theta, dz). \end{cases}$$

定义 2.8 （**(2)** 的解）。 (2) 的解是一个元组（$Y, \varsigma_1, \ldots, \varsigma_n, N$） ，使得（$Y, \varsigma_1, \ldots, \varsigma_n, N$）满足随机微分方程组(2) ，且 N 是补偿子为 $dsd\theta\mathrm{m}(dz)$的带标记的霍克斯过程。

现在，我们将该随机微分方程的定义推广到带有奇异控制的情形。

定义 2.9 （奇异控制）。 设 Ξ 为非负、非递减且左连续、右极限存在的函数集合。若任一 $\xi \in \mathbb{R}_+$ 关于 $\mathcal{F}$ 渐进可测，且其样本路径属于 Ξ，则称其为奇异控制。

奇异受控随机微分方程变为:

$$\begin{cases} dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t, \beta_t)dW_t + d\xi_t + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} \chi(X_t, z, \gamma_t)\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_\infty(t)+d^\top\bar{\varsigma}_t}\Pi(dt, d\theta, dz) \\ d\varsigma_t^{(1)} = -q_1\varsigma_t^{(1)}dt + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} \varrho(z)\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_\infty(t)+\sum_{j=1}^n d_j\varsigma_t^{(j)}}\Pi(dt, d\theta, dz) \\ \vdots \\ d\varsigma_t^{(n)} = -q_n\varsigma_t^{(n)}dt + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} \varrho(z)\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_\infty(t)+\sum_{j=1}^n d_j\varsigma_t^{(j)}}\Pi(dt, d\theta, dz), \\ N(dt, dz) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\theta\le\lambda_\infty(t)+\sum_{j=1}^n d_j\varsigma_t^{(j)}}\Pi(dt, d\theta, dz), \end{cases} \tag{3}$$

其中令 $\varsigma := -(\varsigma^{(1)}, \ldots, \varsigma^{(n)})$ 与 $\bar{d} = (d_1, \ldots, d_n)$，从而 $\sum_{j=1}^n d_j\varsigma_t^{(j)} = d^\top\bar{\varsigma}_t$.

引理 2.10. 设假设 ***(R)*** 与假设 ***(L)*** 成立。对任意 $\ell \ge 1$，我们有$\sup_{t\le T}\mathbb{E}|X_t|^\ell < \infty$。

证明。 本证明将 [54, 定理 2.2]从平方可积性的设定推广到奇异控制与任意可积阶数的更广泛框架。对 $|X_t|^\ell$ 应用跳跃扩散过程的伊藤公式，我们得到

$$d|X_t|^\ell = \ell X_{t-}|X_{t-}|^{\ell-2}dX_t + \frac{1}{2}\ell(\ell-1)|X_{t-}|^{\ell-2}d\langle X^c, X^c\rangle_t + \sum_{\Delta X_t>0}(|X_t|^\ell - |X_{t-}|^\ell - \ell X_{t-}|X_{t-}|^{\ell-1}\Delta X_t)$$

由假设 **(L)**，注意到

$$\ell X_{t-}|X_{t-}|^{\ell-2}\mu(X_t) \le \ell|X_t|^{\ell-1}|\mu(X_t)| \le \ell|X_t|^{\ell-1}c(1+|X_t|).$$

因此,

$$\ell|X_t|^{\ell-1}|\mu(X_t)| \le c(1+|X_t|^\ell).$$

现在注意到

$$\frac{\ell(\ell-1)}{2}|X_t|^{\ell-2}|\sigma(X_t, \beta_t)|^2 \le C(1+|X_t|)^2 \le C\big(1+|X_t|^\ell\big).$$

因此,

$$|X_t|^\ell - |X_{t-}|^\ell \le \ell |X_{t-}|^{\ell-1}\left|\int_{\mathbb{R}_+}\chi(X_t,z,\gamma_t)dz\right| + C\left|\int_{\mathbb{R}_+}\chi(X_t,z,\gamma_t)\mathrm{m}(dz)\right|^\ell$$
$$\le C\left(1+|X_{t-}|^\ell + \left|\int_{\mathbb{R}_+}\chi(X_t,z,\gamma_t)\mathrm{m}(dz)\right|^\ell\right).$$

因此， $\mathbb{E}\big[|X_t|^\ell\big] \le \mathbb{E}\big[|X_0|^\ell\big] + C\int_0^t \mathbb{E}\big[1+|X_s|^\ell\big]ds < \infty$. 通过应用格朗沃尔引理，我们可以推出 $\sup_{t\le T}\mathbb{E}[|X_t|^\ell] < \infty$。 □

2.4 随机最优混合停止—奇异控制问题

受项目管理和投资问题的启发，我们假设，若项目价值触及由其当前价值决定的边界 F，公司便决定停止该项目；也就是说，若项目价值低于 $F(X_\tau)$，项目将在时间 τ停止。否则，项目将持续至到期时刻 $T>0$，公司获得价值 $G(X_T)$。我们假设主体可以自行决定在整个过程中注入额外资金支持 ξ，并每次承担成本 ϕ。此外，主体还需承担与控制 β 和 γ相关的持续成本 K。最后，每当霍克斯过程发生跳跃时，都会产生一项成本 κ。具体而言，我们将成本函数定义如下:

$F\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad G\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \phi\colon\ [0,T]\to\mathbb{R}_+,\quad K\colon\ [0,T]\times\mathbb{R}\times B\times\Gamma\to\mathbb{R},\quad \kappa\colon\ [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$

使得对于任意的（$t,\ x,\ b,\ g,\ z$）$\in[0,T]\times\mathbb{R}\times B\times\Gamma\times\mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
&\textbf{(Polx)}\ :\ \ F,G\in\mathbb{R}[x],\\
&\textbf{(Poly)}\ :\ \ |K(t,x,b,g)|+|\kappa(t,x,z)|\le C(1+|x|^p),\ \ p\ge 1,\\
&\textbf{(Coef)}\ :\ \ \forall \mathfrak{K}>0\ \sup_{(t,x)\in[0,T]\times[-\mathfrak{K},\mathfrak{K}]}\int_0^\infty |\kappa(t,x,z)|\mathrm{m}(dz)<\infty,
\end{aligned}$$

其中 $\mathbb{R}[x]$ 表示实值多项式空间。优化问题 is

$$V_0(x,\bar\varsigma) := \sup_{(\nu;\tau,\xi)\in\mathcal{V}\times\mathcal{T}_{[0,T]}\times\Xi} J_0(x,\bar\varsigma;\nu,\tau,\xi), \tag{4}$$

其中，对于任意的（$x,\ \bar\varsigma;\ \nu,\ \vartheta$）$\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathcal{V}\times\mathcal{T}_{[0,T]}\times\Xi$

$$\begin{aligned}
J_0(x,\bar\varsigma;\nu,\vartheta) := \mathbb{E}\Big[&e^{-r\tau}F(X_\tau)\mathbf{1}_{\tau<T} + e^{-rT}G(X_T)\mathbf{1}_{\tau\ge T}\\
&-\int_0^{\tau\wedge T} e^{-rs}K(s,X_s,\beta_s,\gamma_s)ds - \int_0^{\tau\wedge T} e^{-rs}\phi(s)d\xi_s\\
&-\int_0^{\tau\wedge T}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-rs}\kappa(s,X_s,z)\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_\infty(t)+\bar d\bar\varsigma_s^\top}\Pi(ds,d\theta,dz)|X_0=x,\bar\varsigma_0=\bar\varsigma\Big],
\end{aligned}$$

其中 $\vartheta=(\tau,\ \xi)\in\mathcal{T}_{[0,T]}\times\Xi$。

解释。 第一项和第二项分别表示提前停止项目与否所获得的利润。第三项表示由控制的选择（β, γ）产生的连续时间成本。最后两项分别表示与主体的奇异行动以及项目价值中的事故相关的成本（例如，当 χ是负函数时）。

结合赫尔德不等式以及引理 2.4 和 2.10，可知

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}_+}|\kappa(s,X_s,z)|\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_\infty(s)+\bar{d}\bar{\varsigma}_s^\top}\ \mathrm{m}(dz)d\theta ds\right]<\infty.$$

因此，目标函数 J_0 可简化如下

$$\begin{aligned}J_0(x,\bar{\varsigma};\nu,\vartheta):=\mathbb{E}\Big[&e^{-r\tau}F(X_\tau)\mathbf{1}_{\tau<T}+e^{-rT}G(X_T)\mathbf{1}_{\tau\ge T}\\&-\int_0^{\tau\wedge T}e^{-rs}\phi(s)d\xi_s-\int_0^{\tau\wedge T}e^{-rs}\mathcal{K}(s,X_s,\bar{\varsigma}_s,\mathrm{m},\nu_s)ds\mid X_0=x,\bar{\varsigma}_0=\bar{\varsigma}\Big],\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{K}(s,\ X_s,\ \bar{\varsigma}_s,\ \mathrm{m}\ \nu_s)=\int_{\mathbb{R}_+}\kappa(s,\ X_s,\ z)(\lambda_\infty(s)+\bar{d}\bar{\varsigma}_s^\top)\,\mathrm{m}(dz)-K(s,\ X_s,\ \nu_s)$。

定义 2.11（容许控制）。若控制 $\nu=(\beta,\gamma)\in\mathcal{V}$且 $\vartheta:=(\tau,\xi)\in\mathcal{T}_{[0,T]}\times\Xi$满足以下条件，则称其为容许的：

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^{T\wedge\tau}e^{-rs}[\phi(s)d\xi_s+|\mathcal{K}(s,X_s,\bar{\varsigma}_s,\mathrm{m},\nu_s)|ds]\Big]<\infty.$$

我们引入以下带梯度约束的变分不等式：

$$\textbf{(VPDE)}\begin{cases}\min\left\{\partial_t v-rv+\sup_{b,g\in B\times\Gamma}\mathcal{L}^{b,g}[v];\partial_x v-\phi(t);v-F(x)\right\}=0,\ t<T\\ v(T,x,\bar{\varsigma})=G(x),\ (x,\bar{\varsigma})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^n.\end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{b,g}[v](t,x,\bar{\varsigma},\mathrm{m}):=&\mu(x)\partial_x v(t,x,\bar{\varsigma})+\tfrac{1}{2}|\sigma(x,b)|^2\partial_{xx}v(t,x,\bar{\varsigma})-\mathcal{K}(t,x,\bar{\varsigma},\mathrm{m},b,g)\\&-\sum_{k=1}^n q_k\varsigma^k\partial_{\varsigma^k}v(t,x,\bar{\varsigma})\\&+(\lambda_\infty(t)+\bar{d}\bar{\varsigma}^\top)\int_{\mathbb{R}_+}[v(t,x+\chi(x,z,g),\bar{\varsigma}+\varrho(z)\mathbf{e}_n)-v(t,x,\bar{\varsigma})]\ \mathrm{m}(dz)\end{aligned}$$

以及 $\mathbf{e}_n=(1,\ \cdots,\ 1)\in\mathbb{R}^n$。

注释 2.12（ 指数核维度为 1)。 假设 $n=1$。则 ***VPDE*** 变为 s

$$(VPDE)_1\begin{cases}\min\left\{\partial_t v-rv+\sup_{b,g}\mathcal{L}^{b,g}[v];\phi(t)-\partial_x v;v-F(x)\right\}=0\\ v(T,x,\lambda)=G(x),\ (x,\lambda)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{b,\ g}[v]\ (t,x,\lambda,\mathrm{m})\ :=\tfrac{1}{2}|\sigma(x,\ b)|^2\partial_{xx}v(t,\ x,\ \lambda)+\mu(x)\partial_x v(t,\ x,\ \lambda)-\mathcal{K}(t,\ x,\ \lambda,\ \mathrm{m}\ b,\ g)+q\partial_\lambda v(\lambda_\infty-\lambda)\\+\lambda\int_{\mathbb{R}_+}[v(t-,X_{t-}+\chi(x,z,g),\lambda+\varrho)-v(t,x,\lambda)]\ \mathrm{m}(dz).\end{aligned}$$

注释 2.13。这类函数 $F, G, \mathcal{K}$ 的一个例子见应用部分第 *5* 节。

下面我们介绍目标函数和价值函数的动态版本。

$$J_t(x,\bar{\varsigma};\nu,\vartheta) := \mathbb{E}\Big[e^{-r(\tau-t)}F(X_\tau^{t,x})\mathbf{1}_{\tau<T} + e^{-r(T-t)}G(X_T)\mathbf{1}_{\tau\geq T} - \int_t^{\tau\wedge T} e^{-r(s-t)}\phi(s)d\xi_s \\ - \int_t^{\tau\wedge T} e^{-r(s-t)}\mathcal{K}(s,X_s,\bar{\varsigma}_s,\mathrm{m},\nu_s)ds | X_t = x, \bar{\varsigma}_t = \bar{\varsigma}\Big]$$

$$V_t(x,\bar{\varsigma}) := \sup_{(\nu,\vartheta)\in\mathcal{V}\times\mathcal{T}_{[t,T]}\times\Xi} J_t(x,\bar{\varsigma};\nu,\vartheta),$$

将 [6, 定理 2.1]推广到霍克斯过程下的混合停止奇异控制，我们得到以下结果。

定理 2.14 (超解**)**。 假设存在一个正则函数 $v \in \mathcal{C}^{1,2,1}([0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$ ，其关于 *time* 一次可微、关于 *space* 二次连续可微，并且关于 *intensity* 一次可微，满足

1. 存在 $C<\infty$ 和指数 ℓ、ℓ'、$\mathfrak{r}$、$\mathfrak{r}'>0$，使得对所有 t、x、$\bar{\varsigma}$:

$$\begin{aligned}
&\textbf{\textit{(Polv)}}: \quad |v(t,x,\bar{\varsigma})| \leq C\big(1+|x|^{\ell}+\big\|\bar{\varsigma}^{\top}\big\|^{\mathfrak{r}}\big)\\
&\textbf{\textit{(Dvx)}}: \quad |\partial_x v(t,x,\bar{\varsigma})| \leq C\big(1+|x|^{\ell-1}+\big\|\bar{\varsigma}^{\top}\big\|^{\mathfrak{r}}\big)\\
&\textbf{\textit{(Dvs)}}: \quad |\partial_{\varsigma^{(j)}} v(t,x,\bar{\varsigma})| \leq C|d_j|\Big(1+|x|^{\ell'}+\big\|\bar{\varsigma}^{\top}\big\|^{\mathfrak{r}'}\Big) \quad \forall j\in\{1,\dots,n\},
\end{aligned}$$

2. $v(t、\ x、\ \bar{\varsigma}) \geq F(x)$ 对所有$(t、\ x、\ \bar{\varsigma})$

3. $\phi(t) \geq \partial_x v(t、\ x、\ \bar{\varsigma})$ 对所有 $(t、\ x、\ \bar{\varsigma})$ 4. $\partial_t v(t、\ x、\ \bar{\varsigma}) - rv(t、\ x、\ \bar{\varsigma}) + \sup_{b、\ g\in B\times\Gamma} \mathcal{L}^{b、\ g}[v](t、\ x、\ \bar{\varsigma}, \mathrm{m}) \leq 0$ 对所有 $(t、\ x、\ \bar{\varsigma}) \in [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_+$, 5. $v(T、\ x、\ \bar{\varsigma}) = G(x)$,

则对任意$(t,x,\bar{\varsigma}) \geq V_t(x,\bar{\varsigma})$，均有$(t,x,\bar{\varsigma}) \in [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_+$。

注 2.15。 第一个假设旨在确保任何局部鞅都是真鞅，而假设 *2* 至 *5* 则用于超解性质。

定理 *2.14* 的证明。固定一个容许控制 $(\beta,\gamma;\ \tau,\xi) \in \mathcal{V}\times\mathcal{T}_{[0,T]}\times\Xi$。对 $e^{-r(s-t)}v(s,X_s,\bar{\varsigma}_s)$ 应用伊藤公式，得到

$$
\begin{aligned}
&v(t,x,\bar{\varsigma})\\
&=\mathbb{E}[e^{-r(\tau\wedge T-t)}v(\tau\wedge T,X_{\tau\wedge T},\bar{\varsigma}_{\tau\wedge T})]\\
&-\mathbb{E}\left[\int_t^{\tau\wedge T}e^{-r(s-t)}\big(\partial_s v(s,X_s,\bar{\varsigma}_s)-rv(s,X_s,\bar{\varsigma}_s)+\mathcal{L}^{\beta,\gamma}[v](s,X_s,\bar{\varsigma}_s\big)ds\right]\\
&-\mathbb{E}\left[\int_t^{\tau\wedge T}e^{-r(s-t)}\mathcal{K}(s,X_s,\bar{\varsigma}_s,\mathrm{m},\beta_s,\gamma_s)ds\right]\\
&-\mathbb{E}\left[\int_t^{\tau\wedge T}e^{-r(s-t)}\partial_x v(s,X_s,\bar{\varsigma}_s)\sigma(X_s,\beta_s)dW_s\right]-\mathbb{E}\left[\int_t^{\tau\wedge T}e^{-r(s-t)}\partial_x v(s,X_s,\bar{\varsigma}_s)d\xi_s^{(c)}\right]\\
&-\mathbb{E}\left[\sum_{t\le s\le\tau\wedge T}e^{-r(s-t)}\big(v(s,X_{s-}+\Delta\xi_s,\bar{\varsigma}_{s-})-v(s,X_{s-},\bar{\varsigma}_{s-})\big)\right]\\
&-\mathbb{E}\left[\int_t^{\tau\wedge T}\int_{\mathbb{R}_+}e^{-r(s-t)}\underbrace{[v(s,X_{s-}+\chi(X_s,z,\gamma_s),\bar{\varsigma}_{s-}+\varrho(z)\mathbf{e}_n)-v(s,X_{s-},\bar{\varsigma}_{s-})]}_{H}\bar{N}(ds,dz)\right],
\end{aligned}
$$

其中 N 由引理 2.2 定义。根据中值定理，存在一个过程 ζ，其取值介于 $X_{s-}+\Delta\xi_s$ 和 X_{s-} 之间，使得

$$v(s,X_{s-}+\Delta\xi_s,\bar{\varsigma}_{s-})-v(s,X_{s-},\bar{\varsigma}_{s-})=\Delta\xi_s\cdot\partial_x v(s,\zeta_s,\bar{\varsigma}_s).$$

因此，前一个等式的第五行变为 $\sum_{t\le s\le\tau\wedge T}e^{-r(s-t)}\Delta\xi_s\partial_x v(s,\ \zeta_s,\ \bar{\varsigma}_s)$ 的期望。接下来，我们检查最后一项 H 的可积性。由于 v 是 X 和 $\bar{\varsigma}$ 的多项式，根据第一个假设，由引理 2.4、2.5 和 2.10 可得 $\int_{\mathbb{R}_+}|H|\mathrm{m}(dz)<\infty$。此外，结合 **(Polv)** 、**(L)** 和引理 2.10，可得由 $Z_t:=\sigma(X_t,\ \beta_t)$ $v(t,\ X_t,\ \bar{\zeta}_t)$ 定义的 Z 属于 $\mathbb{H}^2$。因此

$$
\begin{aligned}
v(t,x,\bar{\varsigma})=&\mathbb{E}[e^{-r(\tau\wedge T-t)}v(\tau\wedge T,X_{\tau\wedge T},\bar{\varsigma}_{\tau\wedge T})]\\
&-\mathbb{E}\left[\int_t^{\tau\wedge T}e^{-r(s-t)}\big(\partial_s v(s,X_s,\bar{\varsigma}_s)-rv(s,X_s,\bar{\varsigma}_s)+\mathcal{L}^{\beta,\gamma}[v](s,X_s,\bar{\varsigma}_s\big)ds\right]\\
&-\mathbb{E}\left[\int_t^{\tau\wedge T}e^{-r(s-t)}\mathcal{K}(s,X_s,\bar{\varsigma}_s,\mathrm{m},\nu_s)ds\right]\\
&-\mathbb{E}\left[\int_t^{\tau\wedge T}e^{-r(s-t)}\partial_x v(s,X_s,\bar{\varsigma}_s)d\xi_s^{(c)}\right]\\
&-\mathbb{E}\left[\sum_{t\le s\le\tau\wedge T}e^{-r(s-t)}\big(v(s,X_{s-}+\Delta\xi_s,\bar{\varsigma}_{s-})-v(s,X_{s-},\bar{\varsigma}_{s-})\big)\right].
\end{aligned}
$$

由假设 2 至 5 可得 $v(t,\ x,\ \bar{\varsigma})\ge\sup_{\beta,\ \gamma;\tau,\ \xi}J_t(x,\ \bar{\varsigma};\beta,\ \gamma,\ \tau,\ \xi)=V_t(x,\ \bar{\varsigma})$。

□

现在我们转向验证结果。

定理 2.16。 假设定理 *2.14* 的所有条件均已满足。令 $D=\{(t,x,\bar{\varsigma}):\hat{}\hat{}v(t,x)>F(x)\}$ 为一个延续区域。假设存在 $\hat{}\nu=(\beta、\hat{}\gamma)\in\mathcal{V}$ 和 $\vartheta=(\hat{}\tau、\xi)$，使得

5. $\partial_t v(t,x,\bar{\varsigma}) - rv(t,x,\bar{\varsigma}) - \sum_{j=1}^{n} q_j \varsigma^{(j)} \partial_{\varsigma^{(j)}} v(t,x,\bar{\varsigma}) + \mathcal{L}^{\hat{\nu}}[v](t,x,\bar{\varsigma},\mathrm{m}) = 0$ *for all* $(t,x) \in D$,

6. $(\phi(t) - \partial_x v(t、\ x、\ \bar{\varsigma}))d\hat{\xi}_t^{(c)} = 0$ 对所有 t均成立，其中 $\hat{\xi}^{(c)}$ 是$\hat{}$ ξ的连续部分，

$\hat{}$ $\hat{}$7. $\Delta_{\hat{\xi}} v(t_k, X_{t_k}, \bar{\varsigma}_{t_k}) = \phi(t_k) \cdot \Delta\xi(t_k)$ 对于 ξ 的所有 t_k 跳跃时刻，

8. $v(T,x,\bar{\varsigma}) = G(x)$, 9. $\hat{\tau} = \inf\{t > 0 : (t,x,\bar{\varsigma}) \notin D\} < \infty$ 几乎处处对所有 $x \in \mathbb{R}$, $\bar{\varsigma} \in \mathbb{R}_+^n$ 成立，

10. $\{v(\tau,x,\bar{\varsigma}) :\ \tau \in \mathcal{T}, \tau \leq \hat{\tau}\}$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$, $\bar{\varsigma} \in \mathbb{R}_+^n$ 均一致可积。

$\hat{}$那么，对于所有 $(s,x,\bar{\varsigma}) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^n$ 以及 $(\hat{\nu}, \vartheta)$， $V(s,x,\bar{\varsigma}) = v(s,x,\bar{\varsigma})$ 是最优的波动率、跳跃、停止和奇异控制策略。

证明。 令 D 为上述定理陈述中定义的延续区域，并令假设 $\hat{}$ 1-10. 得到满足。固定控制 $(\hat{\nu},\ \xi)$ 和定理及假设 9 中定义的 $\hat{\tau}$。根据前面的证明以及伊藤公式，并结合假设 1 中对 v 所作的假设，我们回顾可得

$$
\begin{aligned}
v(t,x,\bar{\varsigma}) = \mathbb{E}\Bigg[& e^{-r(\hat{\tau}-t)} F(X_{\hat{\tau}}) \mathbf{1}_{\hat{\tau}<T} + e^{-r(T-t)} G(X_T) \mathbf{1}_{\hat{\tau}=T} - \int_t^{\hat{\tau}\wedge T} e^{-r(s-t)} \mathcal{K}(s, X_s, \bar{\varsigma}_s, \mathrm{m}, \hat{\nu}_s) ds \\
& - \int_t^{\hat{\tau}\wedge T} e^{-r(s-t)} \phi(s) d\hat{\xi}_s^{(c)} - \sum_{t \leq s_k \leq \hat{\tau}\wedge T} e^{-r(s-t)} \phi(s_k) \Delta\hat{\xi}(s_k) \Bigg] \\
= \mathbb{E}\Bigg[& e^{-r(\hat{\tau}-t)} F(X_{\hat{\tau}}) \mathbf{1}_{\hat{\tau}<T} + e^{-r(T-t)} G(X_T) \mathbf{1}_{\hat{\tau}=T} - \int_t^{\hat{\tau}\wedge T} e^{-r(s-t)} \mathcal{K}(s, X_s, \bar{\varsigma}_s, \mathrm{m}, \hat{\nu}_s) ds \\
& - \int_t^{\hat{\tau}\wedge T} e^{-r(s-t)} \phi(s) d\hat{\xi}_s \Bigg].
\end{aligned}
$$

令 $n \in \mathbb{R}_+$，并令 $\Theta_n = \inf\{t : (X_t,\ \bar{\varsigma}_t) \in [-n,n]^{1+n}\}$；也就是说， Θ_n 是局部化方法中的一个停时。我们定义

$$
\begin{aligned}
v_n(t,x,\bar{\varsigma}) = \mathbb{E}\Big[& e^{-r(\hat{\tau}-t)} F(X_{\hat{\tau}}) \mathbf{1}_{\hat{\tau}<T\wedge\Theta_n} + e^{-r(T\wedge\Theta_n - t)} G(X_T) \mathbf{1}_{\hat{\tau}=T\wedge\Theta_n} \\
& - \int_t^{\hat{\tau}\wedge T\wedge\Theta_n} e^{-r(s-t)} \mathcal{K}(s, X_s, \bar{\varsigma}_s, \mathrm{m}, \hat{\nu}_s) ds + \int_t^{\hat{\tau}\wedge T\wedge\Theta_n} e^{-r(s-t)} \phi(s) d\hat{\xi}_s \Big]
\end{aligned}
$$

由于我们取 $n \to \infty$，因此 $\Theta_n \to \infty$ 也成立，即 $\tau \wedge T \wedge \Theta_n \to \tau \wedge T$ 和 $T \wedge \Theta_n \to T$。根据假设 **(Polx)**、**(Poly)** 和 **(Coeff)**，结合引理 2.4、2.5 和 2.10 以及控制收敛定理，我们推得 $\lim_{n\to\infty} v_n(t,\ x,\ \bar{\varsigma}) = J_t(x,\ \bar{\varsigma}; \vartheta) \leq V_t(x,\ \bar{\varsigma})$。利用定理 2.14，我们进一步推得 $V_t(x,\ \bar{\varsigma}) = v(t,\ x,\ \bar{\varsigma})$，其最优解为 $\hat{\nu}$ 和 ϑ。 □

2.5 限制在有界区域

现在，我们为后续的马尔可夫决策过程定义一个受约束状态空间。为限制状态空间，我们必须在原始动力学中引入一个项，使过程在触及上边界或下边界值时反射回内部。也就是说，我们需要相应的双侧反射映射。令 $L \in [0,\infty)$。根据 [23] 以及 [56], 的定义 1.2，在 $L \geq 0$ 固定时，$[-L,L]$ 上的 Skorokhod 映射可定义如下。

定义 2.17 (斯科罗霍德问题)。 给定 $\Psi \in \mathcal{D}[0,\infty)$，存在唯一的一对函数 $(\Psi, \psi, \psi) \in \mathcal{D}[0,\infty) \times \mathcal{BV}[0,\infty)$，满足以下性质：

1. *For every* $t \in [0,\infty)$, $\Psi(t) = \tilde{\psi}(t) + \psi(t) \in [-L, L]$.
2. ψ 分解为 $\psi = \psi_\ell - \psi_u$，其中 ψ_ℓ、$\psi_u \in \mathcal{I}[0,\infty)$ 并满足

$$\int_0^\infty \mathbf{1}_{\psi(s)>-L} d\psi_\ell(s) = 0 \quad \textit{and} \quad \int_0^\infty \mathbf{1}_{\psi(s)<L} d\psi_u(s) = 0.$$

我们将反射过程 R_t^+、R_t^-和 $\mathcal{R}_t^i$, $1 \le i \le n$ 定义为分量逐一非递减、右连续且有左极限、$\{\mathcal{F}_t\}$-适应的过程，并且满足

$$\int_0^{\tau\wedge T} \mathbf{1}_{X_t^L > -L} dR_t^+ = 0 \qquad \int_0^{\tau\wedge T} \mathbf{1}_{X_t^L < L} dR_t^- = 0$$

$$\int_0^{\tau\wedge T} \mathbf{1}_{\varsigma_t^{(i),L} < L} d\mathcal{R}_t^{(i)} = 0 \quad \forall i \in \{1,\dots,n\},$$

其中（$X^L, \varsigma^{(i),L}$）对于任意控制 $\nu = (\beta, \gamma) \in \mathcal{V}$均满足以下条件

$$\begin{cases} dX_t^L = \Big[\mu(X_t^L) + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} \chi(t, X_t^L, z, \gamma_t)\mathbf{1}_{\theta \le \lambda_\infty(t) + \bar{d}(\bar{\varsigma}_t^L)^\top} d\theta \mathrm{m}(dz)\Big]dt \\ \qquad\qquad +\sigma(X_t^L, \beta_t)dW(t) + d\xi(t) + dR_t^+ - dR_t^- \\ d\varsigma_t^{(1),L} = -q_1 \varsigma_t^{(1),L} dt + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} \varrho(z)\mathbf{1}_{\theta \le \lambda_\infty(t) + \bar{d}(\bar{\varsigma}_t^L)^\top} \Pi(dt, d\theta, dz) - d\mathcal{R}_t^{(1)} \\ \vdots \\ d\varsigma_t^{(n),L} = -q_n \varsigma_t^{(n),L} dt + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} \varrho(z)\mathbf{1}_{\theta \le \lambda_\infty(t) + \bar{d}(\bar{\varsigma}_t^L)^\top} \Pi(dt, d\theta, dz) - d\mathcal{R}_t^{(n)}, \\ N(dt, dz) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\theta \le \lambda_\infty(t) + \bar{d}(\bar{\varsigma}_t^L)^\top} \Pi(dt, d\theta, dz) \end{cases} \tag{5}$$

我们注意到，对于奇异控制 ξ和霍克斯过程 N，有界区域会如下影响这些过程。若某个跳跃使其终值落在区域之外（即跳至 $y > L$），则该跳跃会触发反射过程，并将其反射回区域内。现在，我们定义 $\tau_L = \inf\{t \ge 0 : (X_t \notin [-L, L]) \cup (\bar{\varsigma}_t \notin [0, L]^n)\}$。我们将$J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}; \nu, \vartheta)$和$V_{0,L}(x, \bar{\varsigma})$定义如下：

$$\begin{aligned} J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}; \nu, \vartheta) = \mathbb{E}\Big[& e^{-r\tau} F(X_\tau^L)\mathbf{1}_{\{\tau<T\}\cap\{\tau<\tau_L\}} - e^{-r(T\wedge\tau_L)\}} G(X_{T\wedge\tau_L}^L)\mathbf{1}_{\{\tau=T\}\cup\{\tau_L<\tau\}} \\ & - \int_0^{\tau\wedge T\wedge\tau_L} e^{-rs}\phi(s)d\xi_s - \int_0^{\tau\wedge T\wedge\tau_L} e^{-rs}\mathcal{K}(s, X_s^L, \bar{\varsigma}_s^L, \mathrm{m}, \nu_s)ds \Big] \end{aligned}$$

$$V_{0,L}(x, \bar{\varsigma}) = \sup_{(\nu,\vartheta)\in\mathcal{V}\times\mathcal{T}_{[0,T]}\times\Xi} J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}; \nu, \vartheta). \tag{6}$$

现在我们希望证明受约束状态空间问题收敛于无约束问题。

命题 2.18。 $V_{0,\,L}(x, \bar{\varsigma})$ 在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^n$ 的紧子集上一致收敛到 $V_0(x, \bar{\varsigma})$，当 $L \to \infty$ 时。

证明。注意到 $\tau_L \to \infty$，当 $L \to \infty$ 时。此外，X^L 和 $\bar{\varsigma}^L$ 分别逐点且几乎必然收敛到 X 和 $\bar{\varsigma}$。由控制收敛定理、假设**(Polyx)**,**(Poly)**, **(Coef)**以及引理 2.10 可得 $J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}; \nu, \vartheta) \to J_0(x, \bar{\varsigma}; \nu, \vartheta)$，当 $L \to \infty$ 时。因此，

$$\forall \epsilon, \exists L^*, \text{ such that } \forall L \geq L^*, |J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}; \nu, \vartheta) - J_0(x, \bar{\varsigma}; \nu, \vartheta)| \leq \epsilon.$$

现在我们来证明，当 $L \to \infty$ 时，$V_{0,L}(x, \bar{\varsigma}) \to V_0(x, \bar{\varsigma})$。设 ν^*, ϑ^* 是 (6) 中的最优解。首先，我们证明 $V_{0,L}(x, \bar{\varsigma}) \geq V_0(x, \bar{\varsigma}) - \epsilon$。回顾上确界的定义可知，$\forall \epsilon > 0$, $J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}; \nu^*, \vartheta^*) + \epsilon \geq V_{0,L}(x, \bar{\varsigma})$。此外，根据最优性的定义，对于所有 ν, ϑ，都有 $J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}; \nu^*, \vartheta^*) \geq J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}; \nu^*, \vartheta)$。因此，由于 $J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}; \nu, \vartheta)$ 收敛到 $J_0(x, \bar{\varsigma}; \nu, \vartheta)$，$J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}; \nu^*, \vartheta^*) \geq J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}; \nu^*, \vartheta) \geq J_0(x, \bar{\varsigma}; \nu, \vartheta) - \epsilon \ \forall \nu, \vartheta$。此外，根据上确界的定义，我们可以看到

$$V_{0,L}(x, \bar{\varsigma}) = J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}; \nu^*, \vartheta^*) \geq J_0(x, \bar{\varsigma}; \nu, \vartheta) - \epsilon = V_0(x, \bar{\varsigma}) - \epsilon \text{ for any } \nu, \vartheta.$$

现在，我们必须证明 $V_0(x, \bar{\varsigma}) \geq V_{0,L}(x, \bar{\varsigma}) - \epsilon$。由 $J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}; \nu, \vartheta)$ 收敛到 $J_0(x, \bar{\varsigma}; \nu, \vartheta)$，可得 $J_0(x, \bar{\varsigma}; \nu, \vartheta) \geq J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}; \nu, \vartheta) - \epsilon$ 对所有 ν, ϑ 均成立。因此，对于任意 ν, ϑ，有 $J_0(x, \bar{\varsigma}; \nu^*, \vartheta^*) \geq J_0(x, \bar{\varsigma}; \nu, \vartheta)$，并且对所有 $\epsilon > 0$，$J_0(x, \bar{\varsigma}; \nu^*, \vartheta^*) + \epsilon \geq V_0(x, \bar{\varsigma})$。于是，$J_0(x, \bar{\varsigma}; \nu^*, \vartheta^*) \geq J_0(x, \bar{\varsigma}; \nu, \vartheta) \geq J_0$，且 $_{L}(x, \bar{\varsigma}; \nu, \vartheta) - \epsilon$ 对所有 ν, ϑ 均成立。然后，$V_0(x, \bar{\varsigma}) = J_0(x, \bar{\varsigma}; \nu^*, \vartheta^*) \geq J_0$，$_{L}(x, \bar{\varsigma}; \nu, \vartheta) - \epsilon = V_0$，$_{L}(x, \bar{\varsigma}) - \epsilon$。由此我们得出结论：$V_{0,L}(x, \bar{\varsigma}) \to V_0(x, \bar{\varsigma})$，因为 $L \to \infty$。 □

注记2.19. 我们注意到，由于 $\lambda_\infty(t) \leq \Lambda_\infty \ \forall t \in [0, T]$，根据假设 ***1***，以及 $\bar{\varsigma}_L(t) \in [0, L]^n$，¯存在 $\Lambda_L < \infty$ 使得 $\lambda_L(t) = \lambda_\infty(t) + d\bar{\varsigma}_L(t) \leq \Lambda_L$ 对所有 $t \in [0, T]$ 均成立。具体而言，我们注意到，可以令 $\Lambda_L = \Lambda_\infty + nL$最大值$_k$ d_k。

3 离散时间马尔可夫链模型

变分偏微分方程**(VPDE)**为价值函数提供了一种刻画，即将其视为控制问题的精确连续时间解，见 [15]。然而，由奇异控制结构引出的梯度约束使方程高度非线性且退化，通常会形成自由边界问题。从数值计算的角度看，这类变分不等式带来了很大困难：经典有限差分或有限元格式必须同时近似解并识别约束的活跃区域，而收敛性保证通常依赖于单调且稳定的离散化。实际上，这使得直接数值求解 VPDE 的计算成本高得难以承受，甚至无法实现，尤其是在高维情形下。因此，我们采用离散时间近似框架来构造数值上易于处理的格式。具体而言，我们采用 Kushner [58], [59], [60] 提出的马尔可夫链近似方法。其核心思想是通过恰当设计的离散时间马尔可夫链来近似受控扩散过程，使其局部转移矩与原连续时间过程相匹配。这种弱近似保留了动力学的关键概率结构，同时避免直接离散化梯度约束。在此基础上，原连续时间控制问题被重新表述为定义在近似链状态空间上的离散时间马尔可夫决策过程。相应的动态规划方程由此得到良好定义，并可使用标准的价值迭代或策略迭代方法进行数值求解；随着离散化步长趋于零，可得到价值函数和最优控制的收敛近似。

3.1 霍克斯过程离散化

为了定义离散时间马尔可夫链模型，我们必须先对霍克斯过程进行离散化。令 $\bar{\varsigma}_i^h = (\varsigma^{(1),h}_i, \ldots, \varsigma^{(n),h}_i)$，使得离散强度为 $\lambda_i^h := \lambda_\infty(t_n) + \bar{d}\bar{\varsigma}_i^{h\top}$。由于霍克斯过程核是指数函数之和，因此可以使用 Dassios 和 Zhang 在 [28] 中提出的方法对该过程进行精确模拟。令 η_j 为第 j^{th} 次跳跃的时间。然后通过以下方式计算 $\bar{\varsigma}_i^h$的精确更新

$$\varsigma_{i+1}^{(k),h} = \varsigma_i^{(k),h} e^{-q_k \Delta t^h(x)} + \sum_{\eta_j \in [t_i, t_{i+1})} \varsigma_{\eta_j}^{(k),h},$$

相应的强度过程为 $\lambda_{i+1}^h = \lambda_\infty(t_{i+1}) + \bar{d}\bar{\varsigma}_{i+1}^h$，其中 $\Delta t^h(x)$ 是时间步，其严格定义将在下一节给出。局部一致的基于期望的更新为

$$\mathbb{E}\big[\varsigma_{i+1}^{(k),h}\big] = \varsigma_i^{(k),h} e^{-q_k \Delta t^h(x)} + \mathbb{E}[\varrho(z)]\, \lambda_n^h \Delta t^h(x)\, \frac{1 - e^{-q_k \Delta t^h(x)}}{q_k \Delta t^h(x)},$$

或等价地

$$\mathbb{E}\big[\bar{\varsigma}_{i+1}^h\big] = \underbrace{\bar{\varsigma}_i^h \odot e^{-\bar{q}\Delta t^h(x)}}_{\bar{\varsigma}^{\text{decay}}} + \mathbb{E}[\varrho(z)] \lambda_i^h \Delta t^h(x) \frac{1 - e^{-\bar{q}\Delta t^h(x)}}{\bar{q}\Delta t^h(x)},$$

其中 $\odot$、指数运算和除法都定义为阿达马积。上述连续值的 $\bar{\varsigma}$-目标必须投影到该马尔可夫链所用的有限$\mathbf{S}$网格上，其形式化定义见定义 3.3。对每个分量进行两点线性拆分：若目标 $\varsigma^{(k)}$位于网格点 s_j 和 s_{j+1}之间，则赋予权重 $w_j^{(k)}$，其中 $w_{j+1}^{(k)} = 1 - w_j^{(k)}$，使分量的期望等于目标。对于 n 维向量 $\bar{\varsigma}$，我们采用乘积拆分规则。具体而言，定义线性投影

$$\mathcal{P}^{\text{lin}}(\varsigma^{(k)} \mid s_j, s_{j+1}) = \begin{cases} w_j^{(k)} := \frac{s_{j+1} - \varsigma^{(k)}}{s_{j+1} - s_j}, & \text{assigned to } s_j, \\ w_{j+1}^{(k)} := \frac{\varsigma^{(k)} - s_j}{s_{j+1} - s_j}, & \text{assigned to } s_{j+1}. \end{cases}$$

对于我们的 n维向量 $\bar{\varsigma}$，我们可以使用一维线性投影的乘积

$$\mathcal{P}_{\mathbf{S}}^{\text{no jump}}(\mathbf{j}' \mid \bar{\varsigma}) := \prod_{k=1}^{n} \mathcal{P}^{\text{lin}}\Big(\varsigma^{(k)} \mid s_{j_k'}^{(k)}, s_{j_k'+1}^{(k)}\Big),$$

其中 $s_{j_k'}^{(k)}$， $s_{j_k'+1}^{(k)}$ 是夹住 $\varsigma^{(k)}$ 的网格点，而 $\mathbf{j}'$ 是包含投影网格点索引的向量。这至多产生 2^n 个非零概率，对应于包围 $\bar{\varsigma}$的超立方体各顶点，并保持期望：

$$\mathbb{E}_{\mathcal{P}_{\mathbf{S}}^{\text{no jump}}}[\bar{\varsigma}] = \bar{\varsigma}.$$

在建模中加入标记后，我们将 $\bar{\varsigma}$ 的转移概率定义为

$$\mathcal{P}_{\mathbf{S}}^{(z)}(\mathbf{j}' \mid \bar{\varsigma}, z) := \prod_{k=1}^{n} \mathcal{P}^{\text{lin}}\Big(\varsigma^{(k)} + \varrho(z) \;\Big|\; s_{j_k'}^{(k)}, s_{j_k'+1}^{(k)}\Big).$$

这也保留了期望：

$$\mathbb{E}_{\mathcal{P}_{\mathbf{S}}^{(z)}}[\bar{\varsigma}] = \bar{\varsigma} + \varrho(z)\mathbf{e}_n.$$

3.2 由霍克斯跳跃驱动的离散时间受控马尔可夫链

首先，我们设计用于近似 X_t 的底层马尔可夫链。令 $h>0$ 为离散化参数。根据式 (5) 中的受约束系统动力学，不失一般性地假设 L 是 h 的整数倍。我们将马尔可夫链的状态空间定义为 $\mathbb{S}_L^h=\{x=kh\in\mathbb{R}:\ k\in\mathbb{Z}\}\cap[-L,L]$。令 $\{X_i^h:\ i\in\mathbb{N}\}$ 为一个状态空间为 $\mathbb{S}_L^h$ 的离散时间受控马尔可夫链。定义 $\Delta X_i^t=X_{i+1}^h-X_i^h$。在每个时间步，我们可以选择通过奇异控制注入资金，或者让过程扩散。定义 $\pi_i^h\in\{0,1,+,-\}$ 为在步骤 i 采取的动作，其中

- $\pi_i^h=0$: 扩散过程,
- $\pi_i^h=1$: 注入量为 h,
- $\pi_i^h=+$ 和 $\pi_i^h=-$ 分别对应于通过反射过程 R^+ 和 R^- 实现的反射,
- $\pi_i^h=k_-$ 对应于通过反射过程 $\mathcal{R}(k)$ 对 ς^k 进行反射，其中 $k\in\{1,\dots,n\}$.

将注入量记为 $\Delta\xi_i^h=h$。文献中通常采用这种注入量，这也是重缩放过程所必需的，见 [59, 第 8 节.3]。因此，对于 $\pi_i^h=1$，我们有$\Delta X_i^h=\Delta\xi_i^h=h$。为完整起见，我们以与 $\{X_i^h\}$ 相同的方式定义 $\{Y_i^h\}$，但它表示不含奇异控制的过程，如式（2）所定义。我们详细说明系统在不同可能操作下的演化方式 π。对于满足 $\pi_i^h=0$的步骤，增量 ΔX_n^h 应按如下方式扩散

$$\Delta X_i^h\approx\int_{t_i^h}^{t_{i+1}^h}\mu(X_t)dt+\int_{t_i^h}^{t_{i+1}^h}\sigma(X_t,\beta_t)dW_t+\int_{t_i^h}^{t_{i+1}^h}\int_0^{\Lambda_L}\int_{\mathbb{R}_+}\chi(X_t,z,\gamma_t)\mathbf{1}_{\theta\le\lambda_t}\Pi(dt,d\theta,dz),$$

在较小的区间上。我们注意到，对于满足 $\pi_i^h\in\{-,+\}$ 的步，过程会立即以大小为 h 的步反射回状态空间 $\mathbb{S}_L^h$。也就是说，若 $\pi_i^h=-$，则 $\Delta X_i^h=-h$；若 $\pi_i^h=+$，则 $\Delta X_i^h=h$。一般而言，对于任意 i，可以写成

$$\Delta X_i^h=\Delta X_i^h\mathbf{1}_{\pi_i^h=0}+\Delta X_i^h\mathbf{1}_{\pi_i^h=1}-\Delta X_i^h\mathbf{1}_{\pi_i^h=-}+\Delta X_i^h\mathbf{1}_{\pi_i^h=+}.$$

定义 3.1 (容许控制 π^h)。设 $\pi^h=(\pi_1^h,\pi_2^h,\dots)$ 且 $\mathcal{F}_i^h=\sigma\{X_j^h,\pi_j^h,j\le i\}$，由 X^h 和 π^h 生成的 σ-代数。若控制 π^h 满足以下条件，则称其为容许的:

- π_i^h 是 $\mathcal{F}_i^h$-适应的,
- 对所有 $x\in\mathbb{S}_L^h$, $\mathbb{P}(X_{i+1}^h=x\mid\mathcal{F}_i^h)=p^h(X_i^h,x\mid\pi_i^h)$,
- $X_i^h\in\mathbb{S}_L^h$ 对所有 i。

从 x 出发的容许控制集合记为 $\mathcal{A}_x^h$。

现在已经说明了马尔可夫链的记号和底层过程，接下来我们将构造该链本身，即定义其转移概率。这些概率的选取方式使得离散时间过程 X_i^h 与底层扩散过程在局部上保持一致。更准确地说，我们要求满足以下条件:

$$\mathbb{E}_{x,i}^{h,0}\left[\Delta X_i^h\right]=\mu(x)\Delta t^h(x)+o(\Delta t^h(x)) \tag{7}$$

$$\mathrm{Var}_{x,i}^{h,0}(\Delta X_i^h)=\sigma(x,\beta_{t_i^h})\Delta t^h(x)+o(\Delta t^h(x)) \tag{8}$$

其中 $\mathbb{E}^{h,x^0,n}[\cdot]$ 表示初始条件为 x、离散化为 h、当前步为 i且当前动作为 $\pi_i^h=0$ 时的期望。

注 3.2. 我们注意到，对于具有更复杂反射行为的受约束过程，例如反射方向或大小依赖于状态的情形，需要满足额外的局部一致性条件；参见 *[59,* 第 *5.7* 节。*2]*然而，在当前设定中，反射结构较为简单，因此，与 *[22],* 中一样，这些额外条件通过构造自动满足。

现在，我们定义马尔可夫链的转移概率和时间区间。为确保时间离散化与控制无关，我们采用 Kushner 和 Dupis 在 [59] 第 5.2.1 节中提出的方法。定义

$$D(x) := \max_{\beta \in \mathcal{A}(x)} \sigma^2(x,\beta), \quad Q_h(x) := D(x) + h\mu(x), \quad \Delta t^h(x) := \frac{h^2}{Q_h(x)}.$$

于是，马尔可夫链的扩散概率定义如下:

$$\begin{aligned} p_D^h(x, x+h|\beta) &= \frac{\frac{1}{2}\sigma^2(x,\beta) + h\,\mu^+(x)}{Q_h(x)}, \\ p_D^h(x, x-h|\beta) &= \frac{\frac{1}{2}\sigma^2(x,\beta) + h\,\mu^-(x)}{Q_h(x)}, \\ p_D^h(x, x|\beta) &= 1 - p_D^h(x, x+h) - p_D^h(x, x-h). \end{aligned}$$

为了纳入跳跃，我们必须包含第 3.1 节中的信息。由于霍克斯强度作为由过去标记驱动的指数函数之和演化，下一时间区间内发生跳跃的条件概率为 $\lambda_i^h \Delta t^h(x) + o(\Delta t^h(x))$ [34]。令

$$p_{1,n} = e^{-\lambda_n^h \Delta t^h(x)} \lambda_n^h \Delta t^h(x)$$

表示一个时间步内发生 1 次跳跃的概率，其由泊松密度定义 .

定义 3.3 （离散跳跃概率 $\mathcal{Q}_u$）。令 $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ 为带有标记律 $\mathrm{m}(dz)$ 的标记空间，并令 $\chi_h(x,z,\gamma)$ 为在目标空间 $(\mathbf{S}\ \mathcal{B}_\mathbf{S})$ 中产生增量的跳跃映射。将 $\mathbf{S}$ 划分为 U 个互不相交的可测单元，$\{C_1, C_2, \ldots, C_U\}$，使得

$$C_u \cap C_v = \varnothing \ for\ u \neq v, \quad \bigcup_{u=1}^{U} C_u = \mathbf{S}.$$

每个单元 C_u 表示过程可能的跳跃增量集合。对于给定的空间转移$x \to y$，定义 $u(x,y)$ 为满足下式的唯一索引

$$y - x \in C_{u(x,y)}.$$

与该转移相关的离散跳跃概率为

$$\mathcal{Q}_{u(x,y)}(x) := \mathrm{m}\big(\underbrace{\{z \in \mathbb{R}_+ : \chi_h(x,z,\gamma) \in C_{u(x,y)}\}}_{\mathcal{Z}_{u(x,y)}(x)}\big),$$

也就是说，标记 z 产生的跳跃增量落在与 $y - x$相同单元格中的概率。这些概率满足

$$\mathcal{Q}_u(x) \in [0,1], \qquad \sum_{u=1}^{U} \mathcal{Q}_u(x) = 1.$$

现在，我们通过选取代表性标记 $\{z_\upsilon\}_{\upsilon=1}^{\Upsilon}$ 来对 m 进行离散化，其中 $\Upsilon > 0$ 和权重 $\{q_\upsilon(x)\}_{\upsilon=1}^{\Upsilon}$ 定义如下。

定义 3.4 (标记测度的 Voronoi 离散化)。 给定一组代表性标记$\{z_\upsilon\}_{\upsilon=1}^{\Upsilon} \subset \mathfrak{P}$，设 $\{V_\upsilon\}_{\upsilon=1}^{\Upsilon}$ 是紧支集 $\mathfrak{P}$ 的一个可测划分，使得对于所有 $\upsilon = 1, \dots, \Upsilon$，都有 $z_\upsilon \in V_\upsilon$ 。离散化测度m^h 定义如下：

$$\mathrm{m}^h(dz) := \sum_{\upsilon=1}^{\Upsilon} q_\upsilon(x)\delta_{z_\upsilon}(dz),$$

其中， δ_{z_υ} 是位于 z_υ 处的狄拉克测度，权重由 *Voronoi* 单元的测度给出：

$$q_\upsilon(x) = \mathrm{m}(V_\upsilon), \quad \upsilon = 1, \dots, \Upsilon.$$

根据构造， $\sum_{\upsilon=1}^{\Upsilon} q_\upsilon(x) = \mathrm{m}(\mathfrak{P}) = 1$。

定义指标集 $\mathcal{I}_u := \{\upsilon : z_\upsilon \in \mathcal{Z}_u(x)\}$。那么

$$\mathcal{Q}_u(x) = \sum_{\upsilon\in\mathcal{I}_u} q_\upsilon(x), \qquad \mathrm{m}^h(dz) := \sum_{\upsilon\in\mathcal{I}_u} q_\upsilon(x)\,\delta_{z_\upsilon}(dz).$$

最后，对于任意可积函数 f，

$$\int_{\mathcal{Z}_u(s,x)} f(z)\,\mathrm{m}^h(dz) = \sum_{\upsilon\in\mathcal{I}_u} q_\upsilon(x)\,f(z_\upsilon).$$

现在我们来讨论由以下方式定义的$(X^h, \bar\varsigma^h)$演化的单步转移概率

$$\begin{aligned} p^h\big((x,\mathbf{j}),(y,\mathbf{j}')\big) &= p_{0,n}\; p_D^h(x,y)\; \mathcal{P}_{\mathbf{S}}^{\text{no jump}}\big(\mathbf{j}' \mid \bar\varsigma^{\text{decay}}\big) \\ &\quad + p_{1,n}\int_{\mathcal{Z}_{u(x,y)}(s,x)} \mathcal{P}_{\mathbf{S}}^{(z)}\big(\mathbf{j}' \mid \bar\varsigma, z\big)\; m(dz) + o(\Delta t^h(x)). \end{aligned}$$

或者，一个更实用的离散版本

$$\begin{aligned} p^h\big((x,\mathbf{j}),(y,\mathbf{j}')\big) &= p_{0,n}\; p_D^h(x,y)\; \mathcal{P}_{\mathbf{S}}^{\text{no jump}}\big(\mathbf{j}' \mid \bar\varsigma^{\text{decay}}\big) \\ &\quad + \; p_{1,n} \sum_{\upsilon\,:\,\chi_h(x,z_\upsilon,\gamma)\in C_{u(x,y)}} q_\upsilon(x)\; \mathcal{P}_{\mathbf{S}}^{(z_\upsilon)}\big(\mathbf{j}' \mid \bar\varsigma, z_\upsilon\big) + o(\Delta t^h(x)), \end{aligned} \tag{9}$$

其中， χ_h 表示跳跃函数 χ 的任意一致有界逼近，并满足 $|\chi_h - \chi| \to 0$，当 $h \to 0$时成立。奇异控制和反射动作的结果是确定性的，因此其转移概率为

$$p^h(x, x+h|\pi = 1) = 1, \quad p^h(L, L-h|\pi = -) = 1, \quad p^h(-L, -L+h|\pi = +) = 1.$$

注 3.5. 为简化记号，我们省略对 ς 的依赖，但请记住， $p(x, x|\pi = k_-) = 1$ 对应于 ς^k 上从 ς^k 到 $\varsigma^k - h$ 的一次转移，其中 $k \le n$。

对每个 x，定义一族插值区间 $\Delta t^h(x)$，如先前定义的方程所示： $\Delta t^h(x) := \overline{Q_h^{h^2}\, x()}$。我们定义

$$t_0^h = 0, \quad \Delta t_j^h = \Delta t^h(X_j^h, \pi_j^h), \quad t_i^h = \sum_{j=0}^{i-1} \Delta t_j^h.$$

注 3.6. 注意，由 *[59],* 的第 *5.6.2* 节可知，受控马尔可夫链 X_n^h 一旦 $\Delta t^h(x) \to 0$ 关于 x 和控制一致成立，便是局部相容的，当 $h \to 0$ 使得

1. $p_D^h(x, y|\pi, \beta)$ 与(7)和(8)局部一致

2. 存在 $\psi^h = o(\Delta t^h(x))$，使得 $p^h(x, y|\pi, \nu)$ 可写成(9)中的形式。

现在我们为受控马尔可夫链定义奖励函数和价值函数。设 $t_N^h = T$，并令$\mathfrak{T} = \sup\{i : t_i^h \le \tau^h\}$ 为对应于最优停止的时间步。

$$J_0^h(x, \bar{\varsigma}; \nu^h, \vartheta^h, \pi^h) = \mathbb{E}\left[-\sum_{i=0}^{n\wedge\mathfrak{T}} e^{-rt_i^h} \left(\mathcal{K}(t_i^h, X_i^h, \bar{\varsigma}_i^h, \mathrm{m}, \nu_i^h,)\Delta t_i^h + \phi(t_i^h) h \mathbf{1}_{\pi_i^h=1} \right) \right.$$
$$\left. + e^{-rT} G(X_T^h)\mathbf{1}_{n=N} + e^{-rt_{\mathfrak{T}}^h} F(X_{\mathfrak{T}}^h)\mathbf{1}_{n\ge\mathfrak{T}} \right]$$

$$V_0^h(x, \bar{\varsigma}) = \sup_{\nu^h, \vartheta^h, \pi^h} J_0^h(x, \bar{\varsigma}; \nu^h, \vartheta^h, \pi^h). \tag{10}$$

定理 3.7 (带最优停止的离散时间动态规划原理**)。** 对每个 $i \in \{0, \dots, N-1\}$，定义延续算子

$$(\mathcal{L}_i^h V)(x, \bar{\varsigma}) := \sup_{\nu, \vartheta} \left\{ -\mathcal{K}(t_i^h, x, \bar{\varsigma}, \mathrm{m}, \nu^h)\Delta t_i^h - \phi(t_i^h) h \, \mathbf{1}_{\{\pi=1\}} + e^{-r\Delta t_i^h} \mathbb{E}\Big[V(x_{i+1}^h, \bar{\varsigma}_{i+1}^h) \mid x_i^h = x, \bar{\varsigma}_i^h = \bar{\varsigma} \Big] \right\}.$$

价值函数满足以下反向动态规划方程：

$$\begin{cases} V_i^h(x, \bar{\varsigma}) = \max\left\{ e^{-r\Delta t_i^h} F(x), (\mathcal{L}_i^h V)(x, \bar{\varsigma}) \right\}, \forall i \in \{0, \dots, N-1\} \\ V_N^h(x, \bar{\varsigma}) = e^{-r(T - t_N^h)} G(x) \end{cases}$$

其中，条件期望是在时间 i的受控转移下取的。

上述定理的证明是将 [17, 18] 稍作扩展，以适用于离散化的 Hawkes 驱动状态过程。当动态规划方程中的最大值在时间步 i由停止收益 F取得时，最优停止时间为 $\tau^h = t_i^h$。否则，系统会按照受控动力学继续演化，并选择最优控制 $\hat{}\nu^h$，以取得延续价值的上确界。

4 收敛　　离散时间优化到连续时间优化的收敛

现在，我们将转向本研究的核心内容：离散时间框架下价值函数 V^h 向连续时间模型中的 V 的收敛。我们首先证明第 3 节中构建的马尔可夫决策过程收敛到受控随机微分方程 (3)。具体而言，我们给出一个紧性结果，这是推导值函数和最优解收敛的基础。

4.1 马尔可夫决策过程向奇异随机微分方程的收敛

马尔可夫决策过程收敛到奇异控制随机微分方程的结论分三个主要步骤建立。首先，我们构造受控离散时间过程的连续时间插值，并将其与原始马尔可夫决策过程的动力学联系起来。其次，我们引入恰当的时间重标度过程并分析其关键性质，以确保重缩放后的动力学与极限奇异控制情形相一致。最后，我们证明与马尔可夫决策过程相关的过程族在 Skorokhod 空间中是紧的，从而可以将任意极限点视为目标奇异控制随机微分方程的候选解。

4.1.1 连续时间插值

我们构造连续时间插值，使其在 $[t_i^h, t_{i+1}^h)$ $i \geq 0$ 上分段常值。首先，需要定义离散时间过程。令 $\xi_0^h = B_0^h = M_0^h = H_0^h = R_0^h 0$，并定义：

$$\xi_i^h = \sum_{j=0}^{i-1} \Delta\xi_j^h,\ B_i^h = \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{1}_{\pi_j^h=0} \mathbb{E}_j^h[\Delta X_j^h],\ M_i^h = \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{1}_{\pi_j^h=0} \left(\Delta Y_j^h - \mathbb{E}_j^h[\Delta Y_j^h]\right),$$

$$H_i^h = \sum_{j:\eta_j^h<i} \chi_h(X_{\eta_j^h}^h, \gamma_{\eta_j^h}^h, z_j),$$

其中，η_j^h 是 X 的离散化跳跃时刻，并且

$$R_{k,i}^h = \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{1}_{\pi_j^h=k} \Delta X_j^h, \quad k \in \{+,-\},\ \mathcal{R}_i^{(k),h} = \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{1}_{\pi_j^h=k_-} \Delta\varsigma_j^{(k),h},\ k \in \{1,\dots,n\}.$$

在定义了离散时间过程后，现在可以将常值插值定义为：

$$X_t^h := X_{i^h(t)}^h,\ B_t^h := B_{i^h(t)}^h,\ M_t^h := M_{i^h(t)}^h,\ H_t^h := H_{i^h(t)}$$

$$\varsigma_t^{(k),h} := \varsigma_{i^h(t)}^{(k),h},\ \beta_t^h := \beta_{i^h(t)}^h,\ \gamma_t^h := \gamma_{i^h(t)}^h,\ \xi_t^h := \xi_{i^h(t)}^h,\ R_{j,t}^h := R_{j,i^h(t)}^h,\ \mathcal{R}_t^{(k),h} := \mathcal{R}_{i^h(t)}^{(k),h},$$

其中 $i^h(t) = \max\{i:\ t_i^h \leq t\},\ t \geq 0$。我们设 $\mathcal{F}_{i^h(t)}^h = \sigma\{X_s^h, \xi_s^h:\ s \leq t\} = \mathcal{F}_t^h$。请注意 t

$$X_t^h = x + B_t^h + M_t^h + \xi_t^h + H_t^h + R_{+,t}^h - R_{-,t}^h + \varepsilon_t^h,$$

其中 ε_t^h是 $\mathcal{F}_t^h$-适应的，且 $\lim_{h\to 0} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|\varepsilon_t^h| = 0.$

备注 4.1。注意，ς 已在第 *3.1* 节中离散化。我们将采用与之前定义的 ς 相同的时间插值，但为简化记号，不再写出其确切定义。

4.1.2 时间重标度

为证明离散解收敛到连续解，我们引入时间重标度，并将在后文中加以应用。我们定义重标度时间增量 $\{\Delta\hat{t}_i^h:\ i \in \mathbb{N}\}$如下：

$$\Delta\hat{t}_i^h = \Delta\hat{t}_i^h \mathbf{1}_{\pi_i^h=0} + h\mathbf{1}_{\pi_i^h\neq 0}$$

其中，$\hat{}\ t_0 = 0$ 和 $\hat{}t_i = \sum_{j=0}^{i-1} \Delta\hat{}t_j^h$ 对应于 $i \geq 1$。这种时间重标度可理解为在跳跃步处将时间尺度延展 h。与 [22, 定义 **4.1**], 类似，我们将时间重标度过程定义如下。

定义 4.2. 重标度时间过程 $\hat{}T^h(\cdot)$ 是满足以下条件的唯一连续非递减过程：

(a) $\hat{}T^h(0) = 0$，*(b)* 当 $\pi_i^h = 0$ 时，$\hat{}T^h(\cdot)$ 在$(\hat{}t_i^h, \hat{}t_{i+1}^h)$ 上的导数为 *1*，
(c) 当 $\pi_i^h \in \{-,+,1,1_-,\dots,n_-\}$ 时，$\hat{}T^h(\cdot)$ 在$(\hat{}t_i^h, \hat{}t_{i+1}^h)$ 上的导数为 *0*。

我们定义 $\mathcal{S}^h := \hat{T}^h(T)$。

注 4.3。 注意，$\hat{T}^h$ 有界、满足 *1-Lipschitz* 条件，因此一致等度连续 $us.$

令 $\hat{i}^h(t) := \max\{i : \hat{t}_i^h \le t\}$ for $t \ge 0$。令 $\hat{X}_t^h := X^h_{\hat{T}^h(t)}$ 为重缩放并插值的过程。我们类似地定义 $\hat{\xi}^h, \hat{H}^h, \hat{B}^h, \hat{M}^h, \hat{\beta}^h, \hat{\gamma}^h, \hat{R}_j^h$ 和 $\hat{\mathcal{F}}^h$。我们得到

$$\begin{aligned}\hat{X}_t^h &= x + \int_0^t \mu(\hat{X}_s^h) d\hat{T}^h(s) + \int_0^t \sigma(\hat{X}_s^h, \hat{\beta}_s^h) d\hat{W}_s^h + \hat{\xi}_t^h + \hat{H}_t^h + \hat{R}_{+,t}^h - \hat{R}_{-,t}^h + \hat{\varepsilon}_t^h \\ &= x + \hat{B}_t^h + \hat{M}_t^h + \hat{\xi}_t^h + \hat{H}_t^h + \hat{R}_{+,t}^h - \hat{R}_{-,t}^h + \hat{\varepsilon}_t^h,\end{aligned}$$

其中 $\hat{\varepsilon}_t^h$ 是 $\mathcal{F}^h(t)$-适应的，并且

$$\lim_{h\to 0} \sup_{t\in[0,S^h]} \mathbb{E}|\hat{\varepsilon}_t^h| = 0.$$

我们定义 $\hat{\tau}^h = \hat{T}^h(\tau^h) \le \mathcal{S}^h$。现在给出时间重缩放过程的反函数的一些性质，后文将用到这些性质。

引理 4.4。 设 $\hat{G}\colon [0,T] \to [0,\mathcal{S}^h]$ 是连续非减函数，满足 $\hat{G}(0) = 0$且 $\hat{G}(T) = \mathcal{S}^h$。定义广义逆 $G\colon [0,\mathcal{S}^h] \to [0,T]$ 为 $G(t) = \inf\{s : \hat{G}(s) > t\}$。则对所有有界可测函数 $g\colon [0,T] \to \mathbb{R}$,

$$\int_0^{G(t)} g(s) d\hat{G}(s) = \int_0^t g(G(s)) ds.$$

证明。定义勒贝格–斯蒂尔杰斯测度 μ，其定义在 $[0,T]$ 上为 $\mu((a,b]) = G(b) - G(a)$, 其中 $a < b$。此外，定义推前测度 $\nu := \mu \circ G^{-1}$，其定义在 $[0,\mathcal{S}^h]$ 上。对于任意 $u \in [0,\mathcal{S}^h]$,

$$\nu((0,u]) = \mu\big(G^{-1}((0,u])\big) = \mu\big(\{s \in [0,T] : \hat{G}(s) \in (0,u]\}\big).$$

由于 G 连续且非递减，集合 $\{s: G(s) \le u\}$ 的上确界为 $s^* = \sup\{s: G(s) \le u\}$，因此

$$\mu\big(\{s : \hat{G}(s) \in (0,u]\}\big) = \hat{G}(s^*) - \hat{G}(0) = u.$$

因此，对所有 $u \in [0,\mathcal{S}^h]$, $\nu((0, u]) = u$，这表明 ν 在 $[0,\mathcal{S}^h]$ 上与勒贝格测度一致。现在，对于有界可测函数 g,

$$\int_0^{G(u)} g(s)\, d\hat{G}(s) = \int_{[0,G(u)]} g(s)\, \mu(ds) = \int_{(0,u]} g(G(v))\, \nu(dv) = \int_0^u g(G(v))\, dv.$$

□

引理 4.5（等度连续条件下的一致端点收敛）。对于每个 $\varepsilon > 0$, $h_0 > 0$ 存在 $\delta > 0$ （与 h 无关），使得

$$\sup_{0<h<h_0} \sup_{|t-T|<\delta} \left|\hat{T}^h(t) - \mathcal{S}^h\right| < \varepsilon.$$

特别地，对于每个固定的 h，当 $\to \mathcal{S}^h$ 趋于 $t \to T$ 时，$\hat{T}^h(t)$，且按照上述意义，收敛在 $h \in (0, h_0)$上一致。

证明。 首先，记得根据注 4.3，族 $\{\hat{T}^h\}_{0<h<h_0}$ 在 $[0,T]$ 上等度连续，因此对于任意 $h_0>0$，存在一个模函数 $\omega(\delta)$，使得当 $\delta\downarrow 0$ 时，$\omega(\delta)\downarrow 0$，

$$\sup_{0<h<h_0}\sup_{|t-s|\le\delta}\left|\hat{T}^h(t)-\hat{T}^h(s)\right|\le\omega(\delta).$$

固定 $\varepsilon>0$。选择足够小的 $\delta>0$，使得 $\omega(\delta)<\varepsilon$。对于任意 $h\in(0,h_0)$ 以及任意 $t\in(T-\delta,T]$，根据单调性和等度连续性，我们有，

$$0\le\mathcal{S}^h-\hat{T}^h(t)=\hat{T}^h(T)-\hat{T}^h(t)\le\sup_{|s-t|\le\delta}\left|\hat{T}^h(s)-\hat{T}^h(t)\right|\le\omega(\delta)<\varepsilon.$$

因此，$\sup_{0<h<h_0}\sup_{|t-T|<\delta}|\hat{T}^h(t)-\mathcal{S}^h|<\varepsilon$，这正是所需的结论。 □

引理 4.6. $\sup_h\mathbb{E}[\mathcal{S}^h]=\sup_h\mathbb{E}[\hat{T}^h(T)]<\infty.$

证明。由于

$$\hat{T}^h(T)=\hat{t}_N=\sum_{i=0}^{N-1}\Delta t_i^h\mathbf{1}_{\pi_i^h=0}+h\sum_{i=0}^{N-1}\mathbf{1}_{\pi_i^h\neq 0}=T+h\sum_{i=0}^{N-1}\mathbf{1}_{\pi_i^h\neq 0},$$

只需对 $h\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N-1}\mathbf{1}_{\pi_i^h\neq 0}\right]$ 找到一个一致上界。我们知道，每当 $\pi_i^h=1$ 时，都会产生一项代价 $\phi(t_i^h)h$；而对于反射 $\pi_i^h=+,-,1_-,\dots,n_-$，则没有代价。对于任意容许控制，我们注意到

$$J_0^h(x,\bar{\varsigma};\cdot)\le-\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N-1}e^{-rt_i^h}\phi(t_i^h)h\mathbf{1}_{\pi_i^h=1}\right]+C_0$$

其中 C_0 吸收有界的运行成本和终端成本。现在，对控制取上确界，我们可以直接证明存在常数 $C>0$，使得

$$h\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N-1}\mathbf{1}_{\pi_i^h=1}\right]\le C<\infty.$$

由于右侧给出的常数上界与 h 无关，因此该界是一致的。于是，$\mathbb{E}[\hat{T}^h(T)]=T+h\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N-1}\mathbf{1}_{\pi_i^h=1}\right]\le T+C$。因此，$\sup_h\mathbb{E}[\hat{T}^h(T)]\le T+C<\infty$. □

4.1.3 MDP 的紧性及其向奇异随机微分方程的收敛

本节重点讨论此前在第3.2节中引入的 MDP 向奇异受控随机微分方程组 (3) 的解的收敛性。该收敛将在 Skorokhod 空间中以弱意义成立，我们将在下文回顾这一空间。

定义 4.7（Skorokhod 空间）。设 $T>0$ 和 E 为波兰空间。Skorokhod 空间 $D([0,T];E)$ 是从 $[0,T]$ 到 E 的所有右连续且有左极限函数所组成的集合，即这些函数在每个 $t\in(0,T]$ 处均右连续并存在左极限。

为了得到控制 $\hat{\beta}^h,\hat{\gamma}^h$ 的紧性，我们需要额外的性质来定义可容许性。该问题的马尔可夫结构自然引导我们将研究限制在反馈控制上。

定义 4.8 (反馈控制)。 我们将集合 $\mathcal{V}^F$ 定义为所有取值于 $\mathcal{V}$ 的 $\nu:=(\beta,\gamma)$ 所组成的集合，并要求存在连续映射 $\psi^b\colon[0,T]\times\mathbb{R}\longrightarrow B$ 和 $\psi^g\colon[0,T]\times\mathbb{R}\longrightarrow\Gamma$，使得 $\beta_t=\psi^b(t,\hat{X}_t^h)$ $\gamma_t=\psi^g(t,\hat{X}_t^h)$。

注 4.9。 根据该定义的推论，若将研究范围限制为控制 $\nu^h := (\beta^h, \gamma^h) \in \mathcal{V}^F$，则 $\hat{}\nu^h := (\hat{}\beta^h, \hat{}\gamma^h) \in \mathcal{V}^h$；并且只要 $(\hat{}X^h)_h$ 在 $D([0,T];\mathbb{R})$ 中是紧的，那么根据反馈函数 ψ^b, ψ^g 的连续性，族 $\hat{}\nu^h$ 在 $D([0,T]; B\times\Gamma)$ 中也紧。

本节的主要结果如下，它给出了问题中涉及的过程的紧性性质。

命题 4.10。令 $\hat{}\nu^h = (\hat{}\beta^h, \hat{}\gamma^h) \in \mathcal{V}^F$ 并定义

$$\hat{\mathcal{H}}^h := \big(\hat{T}^h, \hat{\varsigma}^h, \hat{\lambda}^h, \hat{N}^h, \hat{X}^h, \hat{H}^h, \hat{B}^h, \hat{M}^h, \hat{R}^{+,h}, \hat{R}^{-,h}; \hat{\tau}^h, \hat{\xi}^h, \hat{\beta}^h, \hat{\gamma}^h, \mathrm{m}^h\big).$$

那么随机元素族 $\big\{\ \hat{}\mathcal{H}^h :\quad h>0\big\}$ 在乘积空间中是紧的

$$[0,\mathcal{S}^h]\times D([0,\mathcal{S}^h];\mathbb{R}_+^n\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)$$
$$\times[0,\mathcal{S}^h]\times D([0,\mathcal{S}^h];\mathbb{R}\times B\times\Gamma)\times\mathcal{M}(\mathbb{R}_+).$$

证明。 首先，我们将利用 Aldous 紧性判据证明 $\hat{}\varsigma^h$ 的紧性：对任意 $\eta>0$,

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{h>0}\sup_{\hat{\tau}\le\mathcal{S}^h}\mathbb{P}\Big(\big|\hat{\varsigma}^{(k),h}_{\hat{\tau}+\delta}-\hat{\varsigma}^{(k),h}_{\hat{\tau}}\big|>\eta\Big)=0, \tag{11}$$

wh其中，$\hat{}\tau$ 中的上确界取遍所有由 S界定的 $\mathcal{F}^h$-停时。回顾

$$\hat{\varsigma}^{(k),h}_t=\hat{\varsigma}^{(k),h}_s e^{-q_k(t-s)}+\int_s^t\int_{\mathbb{R}_+}\varrho(z)e^{-q_k(t-u)}\hat{N}^h(du,dz). \tag{12}$$

因此,

$$\mathbb{E}\big[\hat{\varsigma}^{(k),h}_t\big]=\mathbb{E}\big[\varsigma^{(k),h}_0\big]e^{-q_k t}+\mathbb{E}\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}_+}\varrho(z)\mathrm{m}^h(dz)du\right].$$

根据假设 **(R)** ，我们得到

$$\mathbb{E}\big[\hat{\varsigma}^{(k),h}(t)\big]\le\mathbb{E}\big[\varsigma^{(k),h}_0\big]+\bar{\varrho}\int_0^t\mathbb{E}[\lambda_\infty(u)+\bar{d}\cdot\mathbb{E}\big[\hat{\varsigma}^h_u\big]]du.$$

注意，$(\mathbb{E}\big[\hat{}\varsigma^{(k)}{}_{,t}\quad{}^h\big])_{k\le n}$ 满足一个 Grönwall–Volterra 不等式系统。因此，存在常数 C_1 ，使得

$$\sup_h\sup_{t\in[0,\mathcal{S}^h]}\mathbb{E}\Big[\big|\hat{\varsigma}^{(k),h}_t\big|\Big]\le C_1<\infty.$$

由马尔可夫不等式可知，对于任意时间 t 和 $\zeta>0$，存在一个足够大的常数 κ_1，使得

$$\sup_h\mathbb{P}(|\hat{\varsigma}^{(k),h}_t|>\kappa_1)\le\zeta.$$

注意，对于任意 $0<u\le\delta$ 和 $\hat{}\tau\le\mathcal{S}^h$ ，根据 (12)，我们有

$$\hat{\varsigma}^{(k),h}_{\hat{\tau}+u}-\hat{\varsigma}^{(k),h}_{\hat{\tau}}=\hat{\varsigma}^{(k),h}_{\hat{\tau}}\big(e^{-q_k u}-1\big)\ +\ D^{(k),h}_{\hat{\tau},\hat{\tau}+u}\ +\ M^{(k),h}_{\hat{\tau},\hat{\tau}+u},$$

其中 $D^{(k),h}$ 是补偿子/漂移， $M^{(k),h}$ 是增量 $\hat{}\varsigma^{(k)}{}_{,h\ \hat{\tau}+u}\ -\hat{}\varsigma^{(k)}{}_{,h\ \hat{\tau}}$ 中的鞅项。我们分别研究这三项的收敛。

(1) 首先，回顾 $\mathbb{E}\Big[\ \big|\hat{\varsigma}^{(k),}{}_{,\tau}{}^{h}\big|\ \Big] \le C_1 \cdot \hat{}$因此

$$\mathbb{E}\Big[\big|\hat{\varsigma}^{(k),h}_{\hat{\tau}}\big| \cdot \big|e^{-q_k u} - 1\big|\Big] \le C_1 \left|1 - e^{-q_k u}\right| \to 0 \text{ as } u \downarrow 0 \text{ uniformly in } h \text{ and } \hat{\tau}\ .$$

(2) 接下来，由假设 (**R**)，我们有

$$\mathbb{E}\Big[\ \big|D^{(k),h}_{\hat{\tau},\hat{\tau}+u}\big|\ \Big] \le \bar{\varrho}\ \mathbb{E}\left[\int_{\hat{\tau}}^{\hat{\tau}+u} \lambda^h_s\, ds\right].$$

根据 $\hat{\varsigma}^h$ 的一致一阶矩界以及 λ^h 的线性性，

$$\sup_{h>0}\ \sup_{s\le \mathcal{S}^h} \mathbb{E}[\lambda^h(s)] < \infty.$$

因此，存在一个常数 C_2，使得

$$\mathbb{E}\Big[\ \big|D^{(k),h}_{\hat{\tau},\hat{\tau}+u}\big|\ \Big] \le C_2\, u.$$

因此，$\mathbb{E}\Big[\ \big|D^{(k),h}_{\tau}{}_{\hat{},\hat{\tau}+u}\big|\ \Big] \to 0$ 当 $u \downarrow 0$ 时，在 h 和 $\hat{}\tau$ 上一致成立。

(3) $M^{(k),h}$ 的可预测二次变差满足

$$\left\langle M^{(k),h}\right\rangle_{\hat{\tau},\hat{\tau}+u} = \int_{\hat{\tau}}^{\hat{\tau}+u}\int_{\mathbb{R}_+} \big(\varrho^{(k)}(z)\big)^2 e^{-2q_k(\hat{\tau}+u-s)}\, \lambda^h_s \mathrm{m}(dz)\, ds.$$

利用 $\sup_{s\le \mathcal{S}^h} \mathbb{E}[\lambda^h_s] < \infty$ 和 $\mathbb{E}[(\varrho^{(k)}(z))^2] < \infty$，我们推得存在一个正常数 C_3，使得

$$\mathbb{E}\Big[\left\langle M^{(k),h}\right\rangle_{\hat{\tau},\hat{\tau}+u}\Big] \le C_3\, u.$$

由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式可得

$$\mathbb{E}\Big[\ \big|M^{(k),h}_{\hat{\tau},\hat{\tau}+u}\big|\ \Big] \le \mathbb{E}\Big[\left\langle M^{(k),h}\right\rangle_{\hat{\tau},\hat{\tau}+u}\Big]^{1/2} \le C_3\, u^{1/2}.$$

结合上述三点，对于任意 $0 < u \le \delta$，

$$\sup_{h>0}\ \sup_{\hat{\tau}\le S} \mathbb{E}\Big[\big|\hat{\varsigma}^{(k),h}_{\hat{\tau}+u} - \hat{\varsigma}^{(k),h}_{\hat{\tau}}\big|\Big] \to 0 \text{ as } u \downarrow 0$$

且该收敛关于 $\hat{}\tau$ 和 h 是一致的。式（11）由马尔可夫不等式得到。然后，根据 [31, 推论 3.7。4] 分量过程 $\hat{}\varsigma^{(k),\ h}$ 在 $D([0,\mathcal{S}];\mathbb{R}_+)$ 中是紧的。这意味着向量值过程 $\hat{}\varsigma^h$ 在 $D([0,\mathcal{S}];\mathbb{R}^n_+)$ 中是紧的。

由于 $\hat{}\lambda^h$ 是 $\hat{}\varsigma^h$ 的固定线性组合，$\hat{}\lambda^h$ 的紧性直接由 $\hat{}\varsigma^{(k),\ h}$ 的紧性得到。

$\{\hat{}R^{+,\ h},\ \hat{}R^{-,\ h}\}$ 紧性的证明与 [60, 定理 5.3] 类似。

为了证明$\hat{}X^h$、$\hat{}B^h$、$\hat{}M^h$、和$\hat{}H^h$的紧性，我们必须首先引入不带奇异控制的随机微分方程（2）的解$\hat{}Y$的连续插值，其中$\hat{}Y^h_t := \hat{}Y^h_{i^h\ (t)}$，使得

$$\hat{Y}^h_t = Y_0 + \hat{B}^h_t + \hat{M}^h_t + \hat{H}^h_t + \hat{R}^{+,h}_t - \hat{R}^{-,h}_t.$$

那么，存在一个常数 $c>0$ ，使得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{t\le T}\left|\hat{Y}_t^h\right|^2\right] \le c\mathbb{E}\left[|Y_0|^2+\sup_{t\le T}\left|\int_0^t \mu(\hat{Y}_s^h)d\hat{T}^h(s)\right|^2\right] \\ + c\mathbb{E}\left[\sup_{t\le T}\left|\int_0^t \sigma(\hat{Y}_s^h,\hat{\beta}_s^h)d\hat{W}_s^h\right|^2\right] \\ + c\mathbb{E}\left[\sup_{t\le T}\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}_+}\chi(\hat{Y}_s^h,\hat{\gamma}_s^h,z)\Big(\lambda_\infty(s)+\bar{d}\hat{\xi}_s^\top\Big)\mathrm{m}^h(dz)d\hat{T}(s)\right|^2\right] \\ + c\mathbb{E}\left[\sup_{t\le T}\left|\hat{R}_t^{+,h}\right|^2+\left|\hat{R}_t^{-,h}\right|^2\right]+E_T^h,\end{aligned}$$

其中 E 是由插值诱导的一项，使得$\lim_{h\to 0}E_T^h=0$. 利用假设**(L)**，并结合$\hat{}R_+^h$, $\hat{}R_-^h$的胎紧性、$\hat{}\beta^h$与$\hat{}\gamma^h$的有界性，以及对鞅项应用Burkholder-Davis-Gundy不等式，存在常数 $\tilde{c}>0$ 使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\le T}|\hat{Y}_t^h|^2\right]\le\tilde{c}\Big(1+\mathbb{E}\left[\int_0^T\sup_{u\le s}|\hat{Y}_u^h|^2d\hat{T}^h(s)\right]\Big).$$

$\hat{}$注意到 $T(\cdot)$是一个适应的过程，我们由富比尼定理推得tha t

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\le T}|\hat{Y}_t^h|^2\right]\le\tilde{c}\Big(1+\int_0^T\mathbb{E}\left[\sup_{u\le s}|\hat{Y}_u^h|^2\right]d\mathbb{E}[\hat{T}^h(s)]\Big)\le\tilde{c}\Big(1+\int_0^T\mathbb{E}\left[\sup_{u\le s}|\hat{Y}_u^h|^2\right]ds\Big).$$

注意到 $\tilde{c}$依赖于 $\mathcal{S}^h$，因而依赖于$\sup_h\mathbb{E}[\hat{}T^h(T)]$，但不直接依赖于 h。应用格朗沃尔引理，我们得到

$$\sup_h\mathbb{E}\left[\sup_{t\le T}|\hat{Y}_t^h|^2\right]<\infty.$$

作为德拉瓦莱普桑判据的推论，$\{\hat{}Y^h\}$是一致可积的。因此，$\{\hat{}Y^h\}$在 $D([0,\mathcal{S}^h];\mathbb{R})$中是胎紧的。由时间重标度的定义，$|\hat{}\xi_{t+s}^h-\hat{}\xi_t^h|\le|s|+o(h)$。因此，$\{\hat{}\xi^h(\cdot)\}$是胎紧的。由于$\{\hat{}T^h(\cdot)\}$有界，它是一致可积的，从而也是胎紧的。

注意到，$\hat{}N^h$ 的紧性源于任意区间 $[t,t+s]$ 上的跳跃次数的均值是$\hat{}\lambda^h$ 的线性函数，而$\hat{}\lambda^h$ 是紧的。因此，$\hat{}N^h$ 是紧的，$\hat{}H^h$也同样如此。

注意，由于我们假设的 m^h 具有紧支撑性质，且该性质在其离散化过程中得以保留，根据 [65, 定理 3.2]，m^h 是紧的。根据 [60, 定理 5.3]并结合 [50, 引理 23.12]，其他项的紧性也可得出。

因此，由于$\hat{}B^h$，$\hat{}M^h$，$\hat{}\xi^h$，$\hat{}H^h$和$\hat{}R^{\pm,h}$都是紧的，且$\hat{}X^h$ 是这些紧过程之和，$\{\hat{}X^h\}$也紧。有限时间范围的设定直接保证了 $[0,T]$ 中的停时$\hat{}\tau^h$ 具有紧性。最后，根据注 4.9，$\hat{}\nu^h:=(\hat{}\beta^h,\ \hat{}\gamma^h)$是紧的。

□

结合这一结果与普罗霍罗夫定理，我们得到以下推论。

推论 4.11。 存在一个非递增序列$(h_n)_n$ ， 当 n 趋于 ∞时收敛到0 ， 以及一个极限随机元素 $\mathcal{H}$ ， 使得

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\mathcal{H}}^{h_n} = \hat{\mathcal{H}} := \left(\hat{T}, \hat{\xi}, \hat{\lambda}, \hat{N}, \hat{X}, \hat{H}, \hat{B}, \hat{M}, \hat{R}^+, \hat{R}^-; \hat{\tau}, \hat{\xi}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\mathrm{m}}\right) \ a.s..$$

现在我们确定这个极限，并研究马尔可夫决策过程 $\hat{X}^h$ 收敛到随机微分方程 (3) 的解的情况。我们将 [22, Section 5] 中阐述的证明框架扩展到我们的模型，并得到以下结果。

定理 4.12。 对于每个固定序列 $\hat{}\ \beta$、$\hat{}\gamma \in \mathcal{V}^F$，极限点 $\hat{}\ \mathcal{H}$ 具有以下性质 ：

$\hat{}$*1.* T 非递减且利普希茨连续，利普希茨系数为 *1*。*2.* 对所有 $t \in [0,T]$， $\hat{}B_t = \int_0^t \mu(\hat{}X_s) d\hat{}T(s)$。

$\hat{}$ $\hat{}$*3.* $(M_t)^{t\le T}$ 是连续的 $(\mathcal{F}_t)^{t\le T}$-鞅，其二次变差为

$$\langle \hat{M} \rangle_t = \int_0^t \left|\sigma(\hat{X}_s, \hat{\beta}_s)\right|^2 d\hat{T}(s), t \in [0,T]. \tag{13}$$

$\hat{}$*4.* ξ 非递减且连续。

5. $\hat{}R^+$、$\hat{}R^-$ 是满足以下条件的非递减连续过程

$$\int_0^{\hat{\tau}\wedge T} \mathbf{1}_{X_t^L > -L} d\hat{R}_t^+ = 0 \qquad \int_0^{\tau\wedge T} \mathbf{1}_{X_t^L < L} d\hat{R}_t^- = 0$$

6. 对所有 $t \in [0,T]$， $\hat{}H_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} \chi(\hat{}X_s, \hat{}\gamma_s, z) \mathbf{1}_{\theta \le \lambda_\infty(s) + \bar{d}\bar{\varsigma}_s^\top} \Pi(ds, d\theta, dz)$。

$\hat{}$ $\hat{}$*7.* X 满足 $\mathbb{P}(X_t \in \mathbb{S}_L) = 1$，对所有 $t \in [0,T]$ 以及

$$\hat{X}_t = x + \hat{B}_t + \hat{M}_t + \hat{\xi}_t + \hat{H}_t + \hat{R}_t^+ - \hat{R}_t^-.$$

$\hat{}\hat{}$证明。 1. 根据定义 4.2， $T \ge 0$ 在整个定义域上的导数，因此 T 是非递减的。此外，由于对于接近 x（即相邻）的 y， $\frac{T(y)-T(x)}{y-x} \in \{0,1\}$)，显然，对于所有这样的 y，$\hat{}\hat{}\hat{}$ $|T(y) - T(x)| \le |y-x|$。因此， T是系数为 1 的利普希茨连续函数。

2. 由于 $(\hat{}X^h, \hat{}T^h) \to (\hat{}X, \hat{}T)$ 几乎必然成立，我们注意到 $\int_0^t \mu(\hat{}X_s^h) d\hat{}T^h(s) \to \int_0^t \mu(\hat{}X_s) d\hat{}T(s)$ 几乎必然成立。作为控制收敛定理的推论，由于 μ 满足(**L**)，并结合引理 2.10，我们得到第 2 点中的收敛。

$\hat{}\hat{}$ 3. 我们证明 M 具有连续路径，并且是二次变差为 (13) 的 $(\mathcal{F}_t)^{t\le T}$-鞅。由 (7) 和 (8)，我们推出存在 $\zeta \in (0,\infty)$，使得对所有 $h \ge 0, u \in (0,T]$，

$$\sup_{t\le u} |\hat{M}_t^h - \hat{M}_{t-}^h| \le 2\zeta h.$$

因此，当 h 足够小时， $\int_0^T e^{-u}(1 \wedge \sup_{t\le u} |\hat{}M_t^h - \hat{}M_{t-}^h|) du \le 2\zeta h$。所以，

$$\lim_{h\to 0} \int_0^T e^{-u}(1 \wedge \sup_{t\le u} |\hat{M}_t^h - \hat{M}_{t-}^h|) du = 0.$$

将该收敛与 $\hat{M}^h \to \hat{M}$ 结合，根据 [31, 定理 3.10。2] 我们推得 $\hat{M}$ 具有连续路径。现在注意到，$\hat{M}^h$ 的二次变差为

$$\langle \hat{M}^h \rangle(t) = \int_0^t \left| \sigma(\hat{X}_s^h, \hat{\beta}_s^h) \right|^2 d\hat{T}(s) + \hat{\varepsilon}_t^h,$$

其中 $\hat{\varepsilon}_t^h$ 满足

$$\lim_{h \to 0} \mathbb{E}\left[\sup_{u \le T} |\hat{\varepsilon}_u^h|^\ell \right] = 0$$

对所有 $\ell \ge 1$ 均成立。根据 Burkholder-Davis-Gundy 不等式，(**L**) 结合引理 2.10，存在某个常数 $\alpha > 0$，使得:

$$\mathbb{E}[|\hat{M}_t^h|^2] \le \alpha \left[T^2 + \mathbb{E}[\sup_{0 \le u \le t} |\hat{\varepsilon}_t^h|^2] \right].$$

因此，$\{(\hat{M}_t^h)\ h > 0\}$ 一致可积，并且根据 [中的定理 3.10.2，[31]] $\hat{M}$ 因此是一个 $\hat{}\{\mathcal{F}_t\}$-鞅，其二次变差由 (13) 给出。

4. 第四个性质由 $\hat{\xi}^h$ 非递减以及 $|\hat{\xi}_{t+s}^h - \hat{\xi}_t^h| \le s + h$ 得出。

5. 由于 $\mathbb{P}(X_{n+1}^h = x|\mathcal{F}_n^h) = \mathbb{P}(X_{n+1}^h = x|X_n^h, \mathcal{F}_n^h) = p^h(X_n^h, x|\pi_n^h)$，反射定义中的 $(\hat{X}, \hat{R})$ 可以替换为 $(\hat{X}^h, \hat{R}^h)$。因此，由于 $\hat{X}^h \in [-L, L]$，根据 $\hat{X}^h$ 的定义以及定义 2.17 中 Skorohod 映射的性质，结论得证。

6. 这一点直接源于对 Π-测度随机积分的离散化；注意到基于 Voronoi 图的离散化的 m^h 弱收敛于 m，且 χ是连续的，同时 $\hat{X}^h$ 和 $\hat{\gamma}^h$具有紧性性质。

7. 由前述所有结论，我们得到极限 $\hat{}$点 X所需的分解。

□

我们希望将这一结果转移到原始过程中，尤其是证明 X^h 向X的收敛。为实现这一目标，我们定义如下逆时间过程

$$\overline{T}(t) = \inf\{s \ : \ \hat{T}(s) > t\}.$$

我们首先给出该过程的一些性质，并参见 [22, 公式（46）] 以获取这些结果的证明。

引理 4.13 （关于 T的性质）。¯对于任意 $t \in [0, T]$，过程 T是非递减的、右连续的；当 t趋于 T 时收敛于 T，并满足以下性质

1. $t \le \overline{T}(t) \le T$，$\hat{}$ $\hat{}$*2.* $T(T(t)) = t$ 和 $T(T(t)) \ge t$ *3.* $T(s) \in [0, t] \Leftrightarrow s \in [0, T(t)]$. _

现在，我们类似地引入 $\hat{T}^h$ 的广义反函数，即 $\hat{T}$ 的离散化版本，定义如下

$$\bar{T}^h(u) := \inf\{s \in [0, T] : \ \hat{T}^h(s) > u\}.$$

¯该过程满足上文引理 4.13 中所述的相同性质。此外，我们还得到了关于该广义逆的以下收敛结果。

引理 4.14 （广义逆的收敛性质）。假设 $\mathcal{S}^h \to \mathcal{S}$ 当 $h \downarrow 0$且 $\hat{}T^h \to \hat{}T$在 $[0,T]$上一致收敛。则：

$\bar{}$ $\hat{}$*1.* 对于每个不是 T 的不连续点的 $u \in [0,\mathcal{S}]$ （等价地， T 在某个邻域内严格递增的点），我们有

$$\bar{T}^h(u) \to \bar{T}(u) \quad as\ h \downarrow 0.$$

2. 此外，若 $\hat{}T$ 在 $[0,\mathcal{S}]$上严格递增（因此 $\bar{T}$ 连续），则 $\bar{T}^h \to \bar{T}$ 在 $[0,\mathcal{S}]$ 上一致成立（将 $\bar{T}^h$ 延拓为 $\bar{T}^h(u) = T$，其中 $u \in (\mathcal{S}^h, \mathcal{S}]$，当 $\mathcal{S}^h < \mathcal{S}$ 时）。

证明。 1. 固定一个不是 $\bar{T}$ 不连续点的 $u \in [0,\mathcal{S}]$。由于 $\hat{}T^h \to \hat{}T$ 一致收敛且 $\mathcal{S}^h \to \mathcal{S}$，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $h_1 > 0$，使得对所有 $0 < h < h_1$，我们都有 $\sup_{s\in[0,T]} |\hat{}T^h(s) - \hat{}T(s)| < \varepsilon$ 且 $|\mathcal{S}^h - \mathcal{S}| < \varepsilon$。根据单调函数反函数的标准定义，可以证明

$$\hat{T}\big(\bar{T}(u) - \omega\big) \le u \le \hat{T}\big(\bar{T}(u) + \omega\big)$$

对所有充分小的 $\omega > 0$。$\hat{}T^h$ 的一致收敛蕴含以下不等式

$$\hat{T}^h\big(\bar{T}(u) - \omega\big) \le u + o(1), \qquad \hat{T}^h\big(\bar{T}(u) + \omega\big) \ge u - o(1),$$

这些不等式又蕴含：对所有充分小的 h， $\bar{T}^h(u) \in [\bar{T}(u) - \omega,\ \bar{T}(u) + \omega]$。令 $\omega \downarrow 0$，得到 $\bar{T}^h(u) \to \bar{T}(u)$。

2. 若 $\hat{}T$严格递增，则 $\bar{T}$在 $[0,\mathcal{S}]$上连续。$\hat{}T^h \to \hat{}T$和$\mathcal{S}^h \to \mathcal{S}$ 的一致收敛继而蕴含其逆函数的等度连续性和一致收敛。具体而言，对于任意 $\varepsilon > 0$，取 $\delta > 0$ 使得 $|s - s'| < \delta$ 蕴含 $|\hat{}T(s) - \hat{}T(s')| < \varepsilon$，然后利用一致收敛将这一模函数传递至 $\hat{}T^h$，且该结论对 h一致成立；再利用标准的反函数不等式（基于单调性），即可得出 $\bar{T}^h$ 在$[0,\mathcal{S}]$上向 $\bar{T}$ 一致收敛这一所需结论。

□

本引 理诱导压缩过程 $\tilde{X}^h_t := \hat{}X^h_{\bar{T}(t)}$的收敛，如下 w.

引理 4.15 （压缩离散过程的收敛）。 假设$\hat{}X^h \to \hat{}X$ 在$[0,\mathcal{S}]$上一致。则 $\tilde{X}^h \to \tilde{X} := \hat{}X \circ \bar{T}$在 $[0,T]$.上一致

证明。 由引理 4.14， $\bar{T}^h \to \bar{T}$ 一致。根据假设，$\hat{}X^h \to \hat{}X$ 在拉伸域上一致。关于连续函数一致收敛的标准复合结果蕴含$\hat{}X^h \circ \bar{T}^h \to \hat{}X \circ \bar{T}$, 在 $[0,T]$上一致。

□

$\tilde{}$最后，极限过程 X 作为右连续且有左极限的半鞅，具有如下形式的唯一分解

$$\tilde{X}_t = x + \tilde{B}_t + \tilde{M}_t + \tilde{\xi}_t + \tilde{H}_t + \tilde{R}^+_t - \tilde{R}^-_t, \tag{14}$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$其中 B 是绝对连续可预测过程， ξ 与 H 为非递减、适应的且具有有限变差， $\tilde{M}$ 是局部鞅，并且 $\tilde{R}^+, \tilde{R}^-$ 求解斯科罗霍德问题。我们有如下识别定理。

定理 4.16。 考虑半鞅分解 (14)，我们有

1. $\tilde{B}_t = \int_0^t \mu(\tilde{X}_s)ds$.

2. M 是具有二次变差的连续 $\{\mathcal{F}_t\}$-鞅

$$\langle \tilde{M} \rangle_t = \int_0^t |\sigma(\tilde{X}_s, \beta_s)|^2 ds.$$

存在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$以及滤子 $\{\mathcal{F}_t\}$ 的扩张，其支撑维纳过程 W，该过程关于扩张后的滤子是鞅，并且使得

$$\tilde{M}_t = \int_0^t \sigma(\tilde{X}_s, \tilde{\beta}_s) dW_s.$$

3. $\tilde{R}^+$、$\tilde{R}^-$ 是满足以下条件的非递减连续过程

$$\int_0^{\hat{\tau}\wedge T} \mathbf{1}_{\tilde{X}_t > -L} d\tilde{R}_t^+ = 0 \qquad \int_0^{\tau\wedge T} \mathbf{1}_{\tilde{X}_t < L} d\tilde{R}_t^- = 0$$

4. *For all* $t \in [0,T]$, $\tilde{H}_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} \chi(\tilde{X}_s, \gamma_s, z) \mathbf{1}_{\theta \le \lambda_\infty(s) + \bar{d}\bar{\varsigma}_s^\top} \Pi(ds, d\theta, dz)$.

定理 *4.16* 的证明。首先，注意到

$$\int \mathbf{1}_{[\bar{T}(\tau-), \bar{T}(\tau)]} d\hat{T}(s) = 0.$$

ˆ于是，由定理 4.12 和引理 4.4，我们立即得到性质 1。现在回顾 Mˆ ˆ ⁻是一个连续 $\mathcal{F}_t$-鞅。由于 M 具有连续路径，且 $T(t) \le T$ 几乎必然成立，我们看到 $\lim_{n\to\infty}$ˆ$M_{\bar{T}(t)\wedge n} =$ˆ$M_{\bar{T}(t)} = \tilde{M}_t$ 几乎必然成立，从而由假设(**L**)和引理 2.10 得到性质 2。性质 3 和 4 可通过与定理 4.12 类似的论证，并利用引理 4.4 以及 χ的性质得到。 □

作为(14)以及(5)的解的唯一性的直接推论，我们得到最终推论，特别表明 X^h 收敛到 X，并总结于图 1。

推论 4.17. 对任意 $(\beta, \gamma, \tau, \xi) \in \mathcal{V} \times \Xi$ 我们有

$$\tilde{\mathcal{X}}_t = \mathcal{X}_t, \quad \textit{for any } t \le T, \quad \mathcal{X} = (X, H, B, M, H, R^+, R^-).$$

4.2 价值函数的收敛

我们现在转而研究离散时间优化问题(10)关于时间离散化参数 h向其连续时间版本(4)的收敛。

定理 4.18（价值函数的收敛）。设 $V_{0,\ L}(x, \bar{\varsigma})$ 是连续有界控制问题（定义见（6））的价值函数，设 $V_{0,\ L}^h(x^h, \bar{\varsigma}^h)$ 是离散近似（定义见（10））的价值函数，其中 $(x_h, \bar{\varsigma}_h)$ 是离散域中的一列初始条件，并且当 $h \to 0$ 时收敛于 $(x, \bar{\varsigma})$。那么，存在一个子序列 $\{h_n\}_{n\ge1}$，使得当 $n \to \infty$时 $h_n \to 0$，且离散值函数收敛于连续值函数：

$$\lim_{n\to\infty} V_{0,L}^{h_n}(x_{h_n}, \bar{\varsigma}_{h_n}) = V_{0,L}(x, \bar{\varsigma}).$$

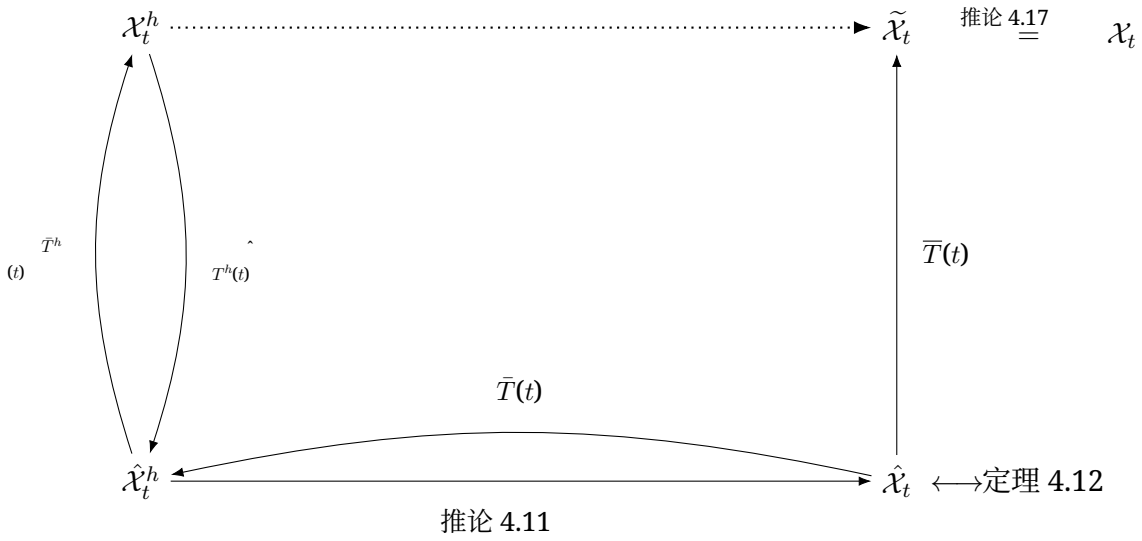


图 1：收敛性：Co nvergence of $\mathcal{X}^h$ 其中 $\mathcal{X}$表示任意一般过程 X， H， B， M， H， R^+， R^-

证明。 我们的目标是证明，除去一个子序列外，离散有界问题的价值函数收敛于连续有界问题的价值函数。设 $\{h_n\}$ 是过程弱收敛已由推论 4.11 建立的子序列。为简便起见，我们将该子序列记为 h。首先回顾推论 4.11：状态过程与控制过程构成的元组弱收敛于一个连续极限过程：

$$(\bar{\varsigma}^h, X^h, u^h) \Rightarrow (\bar{\varsigma}^L, X^L, u),$$

其中极限过程满足连续有界动力学。由于 F， G， ϕ，以及 $\mathcal{K}$ 满足**(Polx)**,**(Poly)**，且 **(Coef)**成立，由控制收敛定理可知，期望收益收敛：

$$\lim_{h\to 0} J_{0,L}^h(x_h, \bar{\varsigma}_h; u^h) = J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}; u).$$

证明分两步进行，分别建立上界和下界。

步骤 1： $\limsup_{h\to 0} V_{0,\ L}^h \le V_{0,\ L}$。对于每个 h，令 $u^h = (\nu^h,\ \tau^h,\ \xi^h)$ 为离散问题中从 $(x_h,\ \bar{\varsigma}_h)$ 出发的 ε- 最优控制序列，其定义如下

$$V_{0,L}^h(x_h, \bar{\varsigma}_h) \le J_{0,L}^h(x_h, \bar{\varsigma}_h; u^h) + h.$$

极限控制 u 属于连续有界问题的可容许控制集合。因此，该极限控制所获得的收益不能超过上确界（即价值函数）：

$$J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}; u) \le \sup_{\nu,\tau,\xi} J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}; \nu, \tau, \xi) = V_{0,L}(x, \bar{\varsigma}).$$

取 $h \to 0$ 时的上极限：

$$\limsup_{h\to 0} V_{0,L}^h(x_h, \bar{\varsigma}_h) \le \lim_{h\to 0} (J_{0,L}^h(u^h) + h) = J_{0,L}(u) \le V_{0,L}(x, \bar{\varsigma}).$$

步骤 2： $\liminf_{h\to 0} V^h_{0,L} \geq V_{0,L}$。固定 $\varepsilon > 0$。令 $u^* = (\nu^*, \tau^*, \xi^*)$ 为连续有界问题的一个 ε-最优容许控制，使得：

$$J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}; u^*) \geq V_{0,L}(x, \bar{\varsigma}) - \varepsilon.$$

我们通过设定 $\hat{}\nu^h_i = \nu^*_{t_i}$，分段定义离散脉冲 $\hat{}\xi^h$，使其累积和逼近 ξ^*，并设定 $\hat{}\tau^h = \min\{t^h_k : t^h_k \geq \tau^*\}$，从而构造一列离散可容许控制 $\hat{}u^h = (\hat{}\nu^h, \hat{}\tau^h, \hat{}\xi^h)$ 来逼近 u^*。注意，由 $\hat{}u^h$ 驱动的状态过程 $\hat{}X^h$ 强收敛（在 L^2 中）至最优连续轨迹 X^*。因此，

$$\lim_{h\to 0} J^h_{0,L}(x_h, \bar{\varsigma}_h; \hat{u}^h) = J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}; u^*).$$

由于现在 $\hat{}u^h$ 是离散问题的一个容许控制，且满足

$$V^h_{0,L}(x_h, \bar{\varsigma}_h) \geq J^h_{0,L}(x_h, \bar{\varsigma}_h; \hat{u}^h),$$

当 $h \to 0$ 时，我们得到

$$\liminf_{h\to 0} V^h_{0,L}(x_h, \bar{\varsigma}_h) \geq \lim_{h\to 0} J^h_{0,L}(x_h, \bar{\varsigma}_h; \hat{u}^h) = J_{0,L}(x, \bar{\varsigma}, u^*) \geq V_{0,L}(x, \bar{\varsigma}) - \varepsilon.$$

由于 ε 是任意的，我们有 $\liminf_{h\to 0} V^h_{0,L} \geq V_{0,L}$。

结合步骤 1 和步骤 2 的结果，我们得到：

$$V_{0,L}(x, \bar{\varsigma}) \leq \liminf_{h\to 0} V^h_{0,L}(x_h, \bar{\varsigma}_h) \leq \limsup_{h\to 0} V^h_{0,L}(x_h, \bar{\varsigma}_h) \leq V_{0,L}(x, \bar{\varsigma}).$$

□

根据 co 结合定理 4.18 与命题 2.18，我们得到最终的收敛结果 t.

推论 4.19。设 $(x_h, \bar{\varsigma}_h)$ 是离散域中收敛于 $(x, \bar{\varsigma})$ 的一列初始条件，其中 $h \to 0$。那么，存在一个子序列 $\{h_n\}_{n\geq 1}$，满足当 $n \to \infty$ 时 $h_n \to 0$，使得离散价值函数收敛于连续值函数：

$$\lim_{L\to\infty} \lim_{n\to\infty} V^{h_n}_{0,L}(x_{h_n}, \bar{\varsigma}_{h_n}) = V_0(x, \bar{\varsigma}).$$

5 网络风险下的能源项目管理应用：由霍克斯过程驱动的受控奥恩斯坦–乌伦贝克过程

接下来，我们将应用受发电厂投资项目网络风险启发而得到的结果。本节中，我们将项目的盈利状态 X_t 建模为受控均值回复因子。均值回复反映了电力市场基本面（尤其是去季节性价格/利润率）因物理平衡和供给响应而趋于回复的特性；奥恩斯坦–乌伦贝克模型设定是对此进行建模的标准方法，参见例如 [16, 62]。我们考虑通过奇异控制 ξ对该项目注入资本。为刻画级联停电、短缺事件或针对电网的网络攻击（例如 [1, 26]）等极端事件，我们纳入事故驱动的向下跳跃，这与电价均值回复跳扩散模型中的做法一致，参见例如 [25]。

采用霍克斯过程建模。为突出奇异控制和停时的影响，我们将固定 $\beta = 1$ 和 $\gamma = 0$。因此，所考虑的 X 动态如下：

$$\begin{cases} dX_t = (\alpha - \delta X_t)dt + \sigma dW_t + d\xi_t - dN_t \\ d\lambda_t = -q(\lambda_t - a)dt + dN_t \\ N(dt, dz) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\theta \le \lambda_t} \Pi(dt, d\theta, dz), \end{cases}$$

其中 $\alpha, a, q, \delta, \sigma$ 均为正数。我们注意到，在强度方程中， q 是衰减率， a 是基准强度。请注意，由于我们不再控制波动率和攻击严重程度，而是聚焦于奇异停止问题，因此成本函数 $\mathcal{K}(s, x, \beta, \gamma, \lambda, \mathrm{m})$ 为零。

我们将停止决策建模为回售灵活性。这相当于设定一个保险底价，使管理者有权以固定的保险价值 I 清算项目。从数学上说，这等同于持有一份以项目价值 X 为标的、执行价格为 I 的美式看跌期权。如果项目从未停止，管理者将获得终值 $G(X_T)$。因此，该策略起到对冲作用：一旦项目价值大幅低于 I，管理者便行使期权以尽量减少损失。因此，我们假设在任何时间 τ，管理者都可以退出或出售项目，并获得 $I > 0$ （保险底价或清算价值）；这可视为一份以 X 为标的、执行价格为 I 的美式看跌期权。我们设定 $F(X_\tau) = (I - X_\tau)^+$。如果项目未停止且仍具可行性，管理者将在时间 T 获得 $G(X_T) = \frac{X_T^{1-\eta}}{\eta}$。

在下文中，我们在所有模拟中将参数设为以下数值：

$$r = 0 \quad \alpha = 0.5 \quad \delta = 1 \quad \sigma = 0.1 \quad \eta = 0.1 \quad k = 1 \quad a = 1 \quad T = 1$$

5.1 Conv带有确定性资本注入的 Hawkes-OU 的收敛性 .

首先，我们直观地研究第3.2节中为离散时间马尔可夫链定义的概率模型的收敛。由于我们只考察 X_t 的演化，而不是价值函数本身，因此将 $\xi = 0.5$ 的跳跃幅度固定为常数，该跳跃发生在时间 $\frac{T}{2}$。

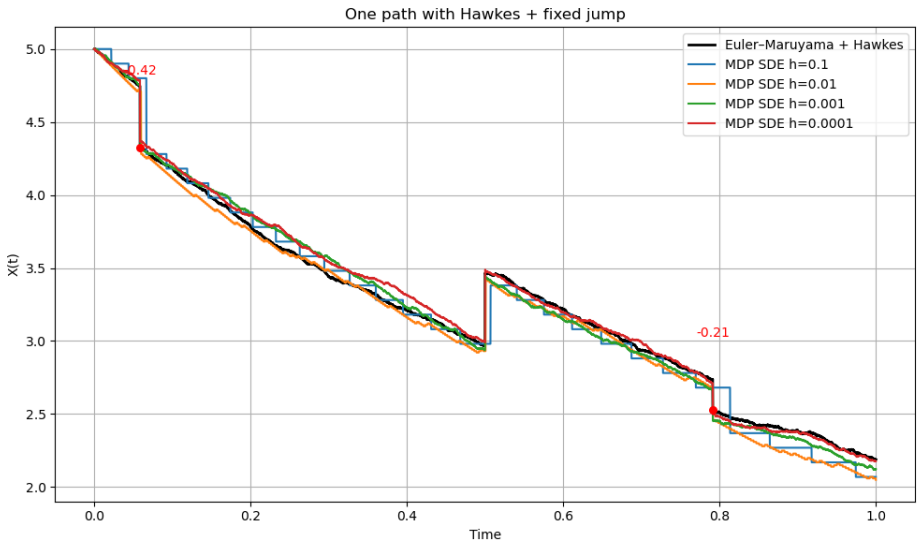


图 2：精确 OU 扩散与 DTMC 近似。

在图 2 中，我们说明了推论 4.17，并看到当 h 逐渐减小至 0 时，离散时间马尔可夫链近似会趋近于奥恩斯坦–乌伦贝克过程的精确模拟。

5.2 收敛 离散时间优化向连续时间的收敛

现在，我们来展示定理 4.19 的结果，以及对于不同的 h，与 DTMC 相关的价值函数向连续时间情形下的价值函数收敛的情况。图 3 展示了在不同 h 取值下，V^h 相对于 x_0 和 λ_0 的收敛情况；图 6a 则展示了在固定 x_0 或 λ_0 取值下的截面。我们看到，当 h 趋于零时，价值函数收敛，这验证了推论 4.19。请注意，当 x_0 足够大且接近 1 时，价值函数似乎趋于 $\frac{1}{\eta}$ 所对应的上限值。这是因为在这种情况下，采用这组参数时，项目具有可行性且永不停止，而主导项为 $\frac{X_T^{1-\eta}}{\eta} \approx \frac{1}{\eta}$，因为在我们的模拟中，$X$ 被限制在 1 以内。我们注意到，项目价值随 x_0 增加而上升，这表明最优资本注入能够使项目具有可行性。相反，当 λ_0 的值增加时，项目更容易遭遇事故，导致价值函数下降。

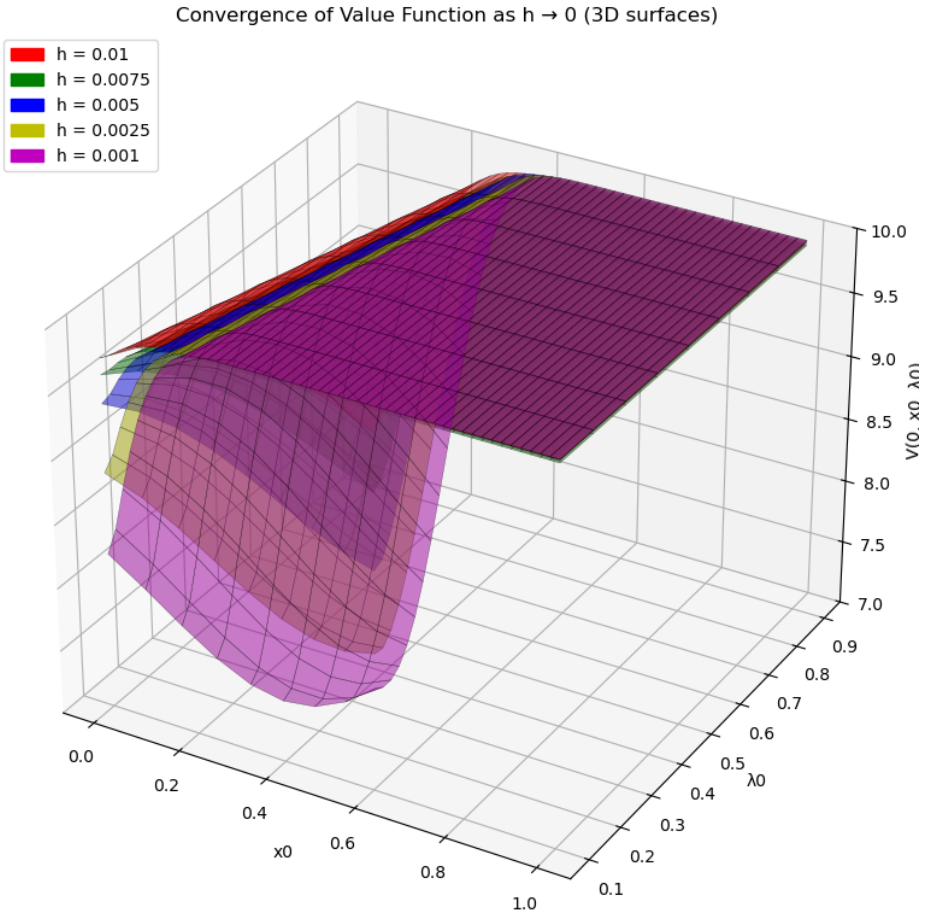
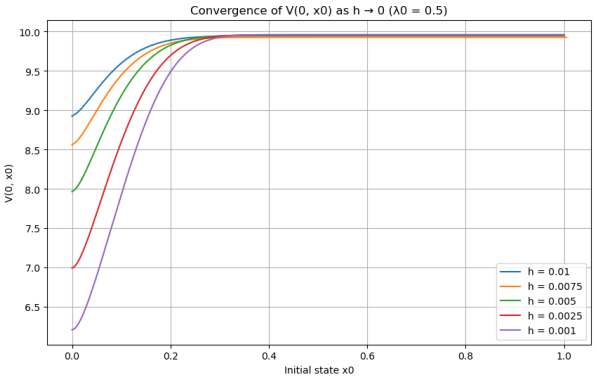
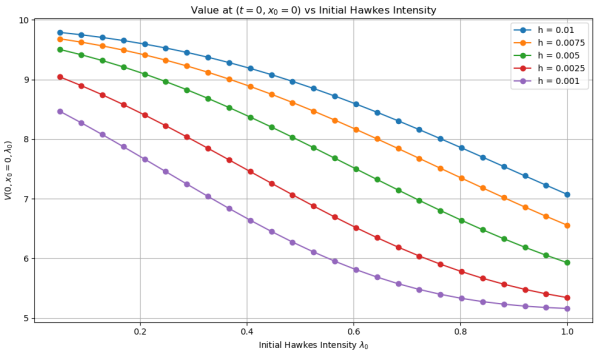


图 3： x_0 和 λ_0中的价值函数收敛



(a) $V(0, x_0, \lambda_0 = 0.5)$



(b) $V(0, x_0 = 0, \lambda_0)$

图4：不同 h下固定初始参数时价值函数的收敛。

5.3 最优资本注入

在图5中，我们展示了 X 的一条样本路径，并同时给出价值函数 $V_t^{h=0.005}(x_0 = 0, \lambda_0 = 1)$，其中最优资本注入（奇异控制）在横轴上可视化。我们观察到，管理者在项目开始时大量注入资本，以确保项目可行并防止提前停止；随着项目临近到期，注入活动再次增加。这对应于开始时的一种救援时间，随后是观望期，最后是期末潜在破产对冲的成本。

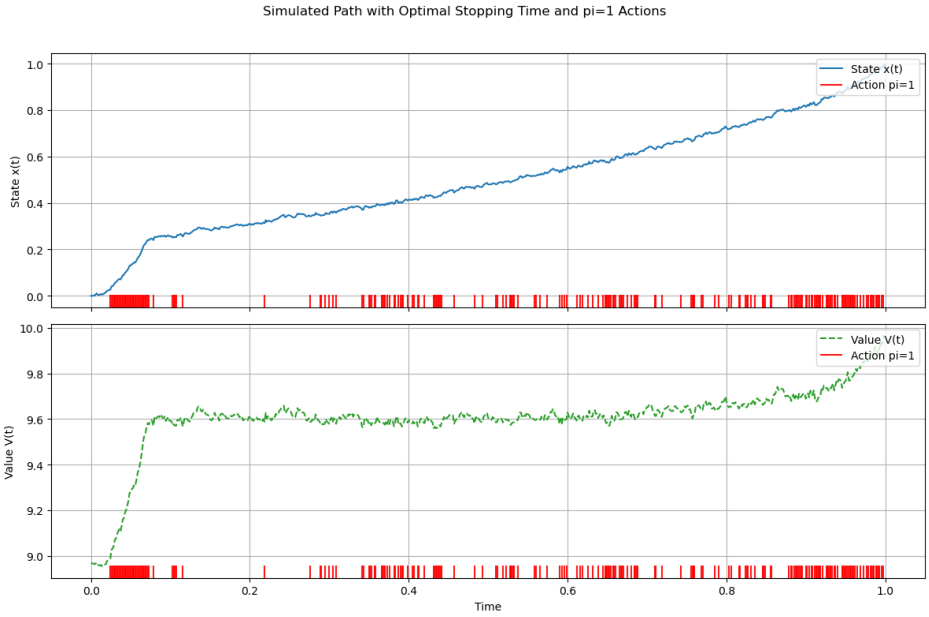
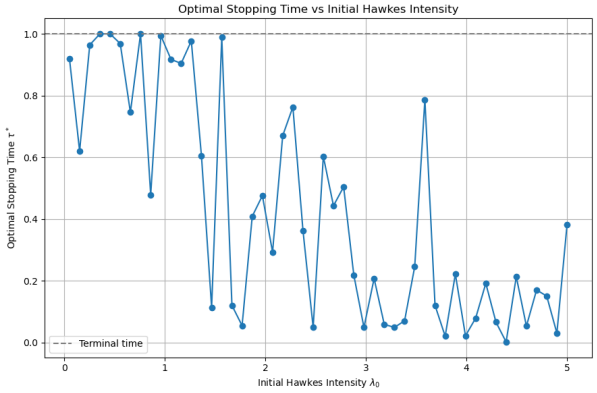


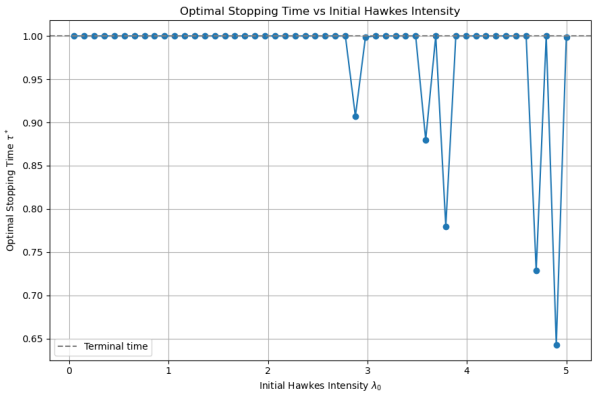
图5：上方为 X,的一条样本路径，下方为随时间变化的 $V^{h=0.005}(x_0 = 0, \lambda_0 = 1)$；红线表示资本注入的时间。

5.4 奇异控制与最优停止

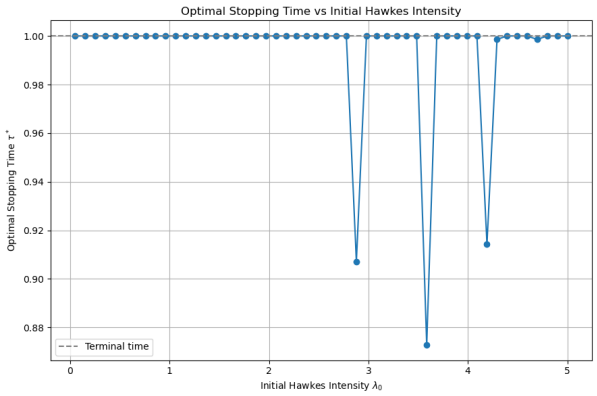
图6展示了当 $h = 0.005$ 变化时，对于固定的 x_0，马尔可夫决策过程的最优停止时间如何随初始霍克斯强度的增加而变化。具体而言，图 6a 展示了在过程中未施加奇异控制时，随着初始霍克斯强度增加，马尔可夫决策过程会更早停止。其背后的直觉是，较高的 λ_0 意味着霍克斯过程中会出现更多跳跃，从而导致价值函数更多次下降。因此，若无法通过奇异控制注入资本来抵消这些下降，价值函数往往会更早达到停止条件。在图6b和图6c中，我们分别考虑了奇异控制成本较高和较低的情形（相对于问题本身而言）。在这两种情形下，与无控制问题相比，即使 λ_0 较高，项目在大多数情景下仍能持续运营至到期，从而避免提前退出。这凸显了战略性资本注入的益处，而降低干预成本会进一步放大这种益处。



(a) 无奇异控制



(b) $\phi = 3$



(c) $\phi = 0.01$

图6：有无奇异控制时，最优停止时间 τ^* 与初始霍克斯强度 λ_0 的关系。

参考文献

[1] D. Abraham、S. H. Houmb 和 L. Erdodi，能源基础设施的网络攻击——文献综述及当前形势展望，Applied Sciences, 15 (2025), p. 9233.[2] R. Aïd、S. Federico、H. Pham 和 B. Villeneuve，考虑建设期与不确定性的显式投资规则，Journal of Economic Dynamics and Control, 51 (2015), pp. 240–256.[3] A. Alfonsi 和 A. Schied，通过奇异控制处理完全单调核的容量测度，SIAM控制与优化杂志, 51 (2013), pp. 1758–1780.[4] L. H. Alvarez，奇异随机控制、线性扩散与最优停止：一类可解问题，SIAM控制与优化杂志, 39 (2001), pp. 1697–1710.[5] L. H. Alvarez 和 T. A. Rakkolainen，谱负跳扩散的奇异随机控制与最优停止，Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastics Processes, 81 (2009), pp. 55–78.[6] T. T. K. An，最优停止与奇异随机控制的结合，Stochastic Analysis and Applications, 28 (2010), pp. 401–414.

[7] *D. Applebaum*，《列维过程与随机微积分》，剑桥大学出版社，*2009*年。[8] *P. Aubert*、*E. Chevalier* 和 *V. L. Vath*，《自激索赔下的最优分红与资本注入》，*arXiv* 预印本 *arXiv:2511.19701*，（*2025*年）。[9] *F. M. Baldursson* 和 *I. Karatzas*，《不可逆投资与行业均衡》，《金融与随机学》，*1*（*1996*年），第*69–89*页。[10] *A. Baldwin*、*I. Gheyas*、*C. Ioannidis*、*D. Pym* 和 *J. Williams*，《网络安全攻击中的传染》，《运筹学会期刊》，*68*（*2017*年），第*780–791*页。[11] *J. Bather* 和 *H. Chernoff*，《宇宙飞船控制中的序贯决策（有限燃料）》，《应用概率期刊》，*4*（*1967*年），第*584–604*页。[12] *N. Bäuerle* 和 *U. Rieder*，《马尔可夫决策过程及其在金融中的应用》，施普林格科学与商业媒体，*2011*年。[13] *V. E. Beneš*、*L. A. Shepp* 和 *H. S. Witsenhausen*，《若干可解的随机控制问题》，《随机学：概率与随机过程国际期刊》，*4*（*1980*年），第*39–83*页。[14] *A. Bensoussan* 和 *B. Chevalier-Roignant*，《含自激跳跃的扩散过程的随机控制：综述》，《数学控制与相关领域》，*14*（*2024*年），第*1452–1476*页。[15] *A. Bensoussan* 和 *J.-L. Lions*，《变分不等式在随机控制中的应用》，第*12*卷，爱思唯尔，*2011*年。[16] *F. E. Benth*、*J. S. Benth* 和 *S. Koekebakker*，《电力及相关市场的随机建模》，第*11*卷，世界科学出版社，*2008*年。[17] *D. Bertsekas*，《动态规划与最优控制：第一卷》，第*4*卷，雅典娜科学出版社，*2012*年。[18] *D. Bertsekas* 和 *S. E. Shreve*，《随机最优控制：离散时间情形》，第*5*卷，雅典娜科学出版社，*1996*年。[19] *T. R. Bielecki*、*J. Jakubowski* 和 *M. Niewęgłowski*，《广义多元霍克斯过程的构造与模拟》，《应用概率方法论与计算》，*24*（*2022*年），第*2865–2896*页。[20] *A. Bovo*、*T. De Angelis* 和 *E. Issoglio*，《零和奇异控制者对停止者博弈的无界区域变分不等式》，《运筹学数学》，*50*（*2025*年），第*277–312*页。[21] *P. Brémaud* 和 *L. Massoulié*，《非线性霍克斯过程的稳定性》，《概率年刊》，（*1996*年），第*1563–1588*页。[22] *A. Budhiraja* 和 *K. Ross*，《投资组合选择问题中带状态约束的奇异随机控制收敛数值格式》，*SIAM*控制与优化杂志，*45*（*2007*年），第*2169–2206*页。[23] *K. Burdzy*、*W. Kang* 和 *K. Ramanan*，《时变区间上的斯科罗霍德问题》，《随机过程及其应用》，*119*（*2009*年），第*428–452*页。

[24] *A. Cadenillas* 和 *U. G. Haussmann*，《奇异控制问题的随机最大值原理》，《随机学：概率与随机过程国际期刊》，*49*（*1994*年），第*211–237*页。[25] *A. Cartea* 和 *M. G. Figueroa*，《电力市场定价：具有季节性的均值回复跳跃扩散模型》，《应用数学金融》，*12*（*2005*年），第*313–335*页。[26] *D. U. Case*，《乌克兰电网网络攻击分析》，电力信息共享与分析中心（*E-ISAC*），*388*（*2016*年），第*3*页。[27] *C. Ceci* 和 *B. Bassan*，《扩散过程的混合最优停止与随机控制问题：具有半连续终端奖励》，《随机学与随机报告》，*76*（*2004*年），第*323–337*页。[28] *A. Dassios* 和 *H. Zhao*，《具有指数衰减强度的霍克斯过程的精确模拟》，《概率电子通信》，（*2013*年）。[29] *F. Dufour* 和 *B. Miller*，《奇异随机控制问题》，*SIAM*控制与优化杂志，*43*（*2004*年），第*708–730*页。[30] *R. Dumitrescu*、*C. Reisinger* 和 *Y. Zhang*，《非线性期望与跳跃下混合最优停止和控制问题的近似格式》，《应用数学与优化》，*83*（*2021*年），第*1387–1429*页。[31] *S. N. Ethier* 和 *T. G. Kurtz*，《马尔可夫过程：刻画与收敛》，约翰·威立父子公司，*2009*年。[32] *E. A. Feinberg* 和 *A. Shwartz*，《马尔可夫决策过程手册：方法与应用》，第*40*卷，施普林格科学与商业媒体，*2012*年。[33] *W. H. Fleming* 和 *H. M. Soner*，《受控马尔可夫过程与粘性解》，施普林格，*2006*年。[34]*R. Foschi*，《泊松过程与指数霍克斯过程之间差异的度量》，《应用概率方法论与计算》，*23*（*2021*年），第*219–239*页。[35] *G. Gripenberg*、*S.-O. Londen* 和 *O. Staffans*，《沃尔泰拉积分方程与泛函方程》，数学及其应用百科全书第*34*卷，剑桥大学出版社，剑桥，*1990*年。[36] *X. Guo* 和 *P. Tomecek*，《奇异控制与最优切换之间的联系》，*SIAM*控制与优化杂志，*47*（*2008*年），第*421–443*页。[37] ，《一类奇异控制问题与光滑拟合原理》，*SIAM*控制与优化杂志，*47*（*2009*年），第*3076–3099*页。[38] *J. M. Harrison* 和 *R. J. Williams*，《同质顾客群体开放排队网络的布朗模型》，《随机学：概率与随机过程国际期刊》，*22*（*1987*年），第*77–115*页。[39] *U. G. Haussmann* 和 *W. Suo*，《奇异最优随机控制 *I*：存在性》，*SIAM*控制与优化杂志，*33*（*1995*年），第*916–936*页。

[40] ——, 奇异最优随机控制 *II*：动态规划，《*SIAM*控制与优化杂志》，*33*（*1995*年），第*937–959*页。[41] *A. G. Hawkes*，自激与相互激励点过程的谱，*Biometrika*，*58*（*1971*年），第*83–90*页。[42] *R. Hemmati* 和 *H. Faraji*，利用负荷与能源管理策略识别零能耗建筑中的网络攻击/停电/故障，《能源储存杂志》，*50*（*2022*），第*104290*页。[43] *A. Hening*、*K. Q. Tran*、*T. T. Phan* 和 *G. Yin*，相互作用随机种群的采收，《数学生物学杂志》，*79*（*2019*），第*533–570*页。[44] *C. Hillairet* 和 *A. Réveillac*，关于计数过程的混沌展开，《电子概率学杂志》，*29*（*2024*年），第*1–33*页。[45] *R. A. Howard* 和 *J. E. Matheson*，风险敏感马尔可夫决策过程，《管理科学》，*18*（*1972*），第*356–369*页。[46] *D. L. Iglehart* 和 *W. Whitt*，重交通下的多通道排队系统 *I*，《应用概率进展》，*2*（*1970*），第*150–177*页。[47] *N. Ikeda* 和 *S. Watanabe*，随机微分方程与扩散过程，第*24*卷，爱思唯尔，*2014*年。[48] *Z. Jin*、*H. Yang* 和 *G. G. Yin*，带资本注入的制度转换跳跃扩散模型中最优股息支付与投资策略的数值方法，*Automatica*，*49*（*2013*），第*2317–2329*页。[49] *P. Jusselin* 和 *T. Mastrolia*，种群动力学中随机控制问题的标度极限，《应用数学与优化》，*88*（*2023*），第*14*页。[50] *O. Kallenberg*，《现代概率论基础》，《概率论与随机建模》第*2*卷，施普林格·自然，瑞士，第*3*版，*2021*年。[51] *I. Karatzas*，一类奇异随机控制问题，《应用概率进展》，*15*（*1983*），第*225–254*页。[52] *I. Karatzas*、*D. Ocone*、*H. Wang* 和 *M. Zervos*，带自主停止的有限燃料奇异控制，《随机学：概率与随机过程国际期刊》，*71*（*2000*），第*1–50*页。[53] *N. E. Karoui* 和 *I. Karatzas*，有限燃料反射跟随者问题的概率学方面，*Acta Applicandae Mathematica*，*11*（*1988*），第*223–258*页。[54] *M. Khabou* 和 *M. Talbi*，具有一般核的受控霍克斯跳跃扩散的马尔可夫近似，*arXiv*预印本 *arXiv:2507.11294*，（*2025*）。[55] *T. Koch* 和 *T. Vargiolu*，考虑价格影响的太阳能电池板最优安装：一个可解的奇异随机控制问题，《*SIAM*控制与优化杂志》，*59*（*2021*），第*3068–3095*页。[56] *L. Kruk*、*J. Lehoczky*、*K. Ramanan* 和 *S. Shreve*，关于 $[0, a]$，《概率年刊》中的 *Skorokhod* 映射的显式公式，（*2007*）。

[57] *H. Kunita*，基于列维过程与随机微分同胚流的随机微分方程，载于《实分析与随机分析：新视角》，施普林格，*2004*年，第*305–373*页。[58] *H. J. Kushner*，连续时间随机控制问题的数值方法，《*SIAM*控制与优化杂志》，*28*（*1990*年），第*999–1048*页。[59] *H. J. Kushner* 和 *P. G. Dupuis*，《连续时间随机控制问题的数值方法》，《随机建模与应用概率》第*24*号，施普林格出版社，第*1*版，*1992*年。[60] *H. J. Kushner* 和 *L. F. Martins*，随机奇异控制问题的数值方法，《*SIAM*控制与优化杂志》，*29*（*1991*年），第*1443–1475*页。[61] *P. A. Lewis* 和 *G. Shedler*，具有对数线性速率函数的非齐次泊松过程模拟，*Biometrika*，*63*（*1976*年），第*501–505*页。[62] *J. J. Lucia* 和 *E. S. Schwartz*，电价与电力衍生品：来自北欧电力交易所的证据，《衍生品研究评论》，*5*（*2002*年），第*5–50*页。[63] *L. F. Martins* 和 *H. J. Kushner*，重交通下排队网络的路由与奇异控制，《*SIAM*控制与优化杂志》，*28*（*1990*年），第*1209–1233*页。[64] *Y. Ogata*，关于 *Lewis* 的点过程模拟方法，《*IEEE*信息论汇刊》，*27*（*1981*年），第*23–31*页。[65] *K. R. Parthasarathy*，度量空间上的概率测度，第*352*卷，美国数学学会，*2005*年。[66] *M. L. Puterman*，《马尔可夫决策过程：离散随机动态规划》，约翰·威立父子公司，*2014*年。[67] *A. M. Reppen*、*J.-C. Rochet* 和 *H. M. Soner*，具有随机盈利能力的最优股利策略，《数学金融》，*30*（*2020*年），第*228–259*页。[68] *S. E. Shreve*，奇异随机控制导论，载于《随机微分系统、随机控制理论及其应用》，施普林格，*1988*年，第*513–528*页。[69] *S. E. Shreve* 和 *H. M. Soner*，带交易成本的最优投资与消费，《应用概率年刊》，（*1994*年），第*609–692*页。[70] *G. Stergiopoulos*、*D. A. Gritzalis* 和 *E. Limnaios*，石油与天然气行业的网络攻击：事件评估与攻击模式综述，《*IEEE*开放获取期刊》，*8*（*2020*年），第*128440–128475*页。[71] *C. Sun*，《最优奇异控制问题与金融中的量子启发算法》，博士论文，密歇根大学安娜堡分校，*2024*年。[72] *K. Tran* 和 *G. Yin*，部分观测下随机环境中最优收获策略的数值方法，*Automatica*，*70*（*2016*年），第*74–85*页。[73] *S. Yıldız*、*B. Yildirim* 和 *M. T. Özdemir*，增强可再生能源微电网中的负荷频率控制与网络安全：一种在网络攻击下采用非整数阶控制的基于燃料电池的解决方案，《国际氢能杂志》，*75*（*2024*年），第*438–449*页。