arXiv:2602.05045v1 [math.FA] 4 Feb 2026

巴拿赫空间上的复结构与代数范数的唯一性。

W.Cuellar Carrera V. Ferenczi

摘要

设 X 为一个无穷维巴拿赫空间，我们研究巴拿赫代数$L(X)/S(X)$，其中 $S(X)$ 是严格奇异算子构成的理想。我们推广了 Ferenczi- Galego [14] 的结果，证明了 $\|I-J\|_S \geq 2$；其中 I 是实空间X上的一个复结构，且 J 将 X 的一个超平面上的复结构延拓，并且 $\|.\|_S$ 表示 $L(X)/S(X)$ 上一个由通常的商范数 $\|.\|$支配的特定代数范数。我们通过证明：若 $X = Z_2$ 是 Kalton-Peck 空间，则 $L(Z_2)/S(Z_2)$ a) 对于 $\|.\|_S$ 不完备；且 b) 对于 $\|.\|$，它不与一个 C^*-代数 *-同构，从而解决了 Kalton-Swanson [23] 提出的两个问题。特别地，$L(Z_2)/S(Z_2)$ 具有两个不等价的 *-代数范数。

1 引言

1.1 算子理想

本文假设巴拿赫空间为实空间或复空间。然而，在讨论复结构时，通常将这些空间视为实空间。除非明确另有说明，子空间一词始终指闭线性子空间。按照 Pietsch[29], 的定义，算子理想是巴拿赫空间之间的算子类，它们对加法及与有界算子的复合封闭，并且包含所有有限秩算子。真算子理想只包含有限秩可逆算子。经典的例子包括紧算子理想（$\mathcal{K}$）、严格奇异算子理想（$\mathcal{S}$）和本质无关算子理想（$\mathcal{IN}$）。

设 $L(X,Y)$ 表示巴拿赫空间 X 与 Y之间的有界线性算子空间。若算子 $T \in L(X,Y)$在 X的任意无限维子空间上的限制都不是到其值域的同构，则称其为严格奇异算子。所有此类算子的集合记为$S(X,Y)$；当 $Y = X$时，简记为 $S(X)$。若存在 X 的一个有限余维子空间 Z ，使得 $T|_Z$ 是到其值域 TZ的同构，则称 $T \in L(X,Y)$为有限奇异（或上半 Fredholm）算子。否则称其为无穷奇异，这等价于：对每个$\varepsilon > 0$ ，都存在一个无限维子空间 $Z \subset X$ ，使得 $\|T|_Z\| < \varepsilon$ [26, 命题 3.2]。当 T为有限奇异算子时，其指标定义为 $\mathrm{ind}(T) := \dim(\ker\ T)\ - \dim(\mathrm{coker}\ T)$，且在 $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$中定义良好；此外，该指标是连续的（[26, 推论 4.1]）。

理想 $\mathcal{IN}$本质无关算子由满足以下条件的算子 $R \in L(X,\ Y)$ 构成：对于所有 $T \in L(Y,\ X)$，$\mathrm{Id}_X - TR$ 都是 Fredholm 算子（或者等价地，对于所有 $T \in L(Y,\ X)$，$\mathrm{Id}_Y - RT$ 都是 Fredholm 算子）。这里，若一个算子是上半弗雷德霍姆算子且其像的余维有限，则称其为 ***Fredholm*** 算子。因此，Fredholm 算子的指标 T 是 $\mathbb{Z}$的一个元素。$\mathcal{IN}$ 的一个关键性质是 Fredholm 算子在扰动下的稳定性：若 $F \in L(X,\ Y)$ 是 Fredholm 算子，且 $R \in \mathcal{IN}(X,\ Y)$，则 $F + R$ 仍是 Fredholm 算子（且指标不变）。这些理想满足包含关系 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{IN}$。

2020 *Mathematics Subject Classification*: 47L10, 46H10, 47L20, 46M18*Key words and phrases:* 算子理想、复结构、代数范数、Kalton-Peck 空间 两位作者均获得圣保罗研究基金会（FAPESP）资助，项目编号：2023/12916-1。V. Ferenczi 还获得了 CNPq 资助，项目编号：304194/2023-9。

Pietsch 提出的一个基本问题 [29] 是询问 $\mathcal{IN}$ 是否为最大的真算子理想。第二位署名作者的定理 2–3] [13, 以否定的方式解决了这个问题，证明不存在最大的真算子理想（按 Pietsch 的定义）。

1.2 扭和

有关巴拿赫空间中同调理论的全面论述，请参阅 [2] 。拟 Banach 空间的短正合列是由拟 Banach 空间和算子构成的图表

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} Z \longrightarrow 0 \tag{1}$$

其中每个箭头的像都与后续箭头的核一致。中间空间X 通常称为 Y 和 Z的扭曲和 。由开映射定理可知， X包含一个与 Y 同构的副本，使得相应的商与 Z同构。如果子空间和商固定，则认为两个短正合列等价:

定义 1.1。 两个正合列

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{i_1} X_1 \xrightarrow{\pi_1} Z \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{i_2} X_2 \xrightarrow{\pi_2} Z \longrightarrow 0,$$

等价　　当且仅当存在一个同构 $T:\ X_1 \to X_2$ ，使得该图表可交换　　e

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{i_1} & X_1 & \xrightarrow{\pi_1} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow T & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{i_2} & X_2 & \xrightarrow{\pi_2} & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

若正合列 (1) 等价于以下序列，则称其为平凡的

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow Y \oplus Z \longrightarrow Z \longrightarrow 0,$$

当且仅当 $i(Y)$ 在 X 中可补，或者存在一个有界线性截面$s:\ Z \to X$ $(\pi \circ s = \mathrm{Id}_Z)$ [2, 引理 2.1.5]。

根据 Kalton和Peck [22], 发展的理论，准巴拿赫空间的扭和与某些非线性映射相对应。

定义 1.2。 齐次映射 $\Omega:\ Z \to Y$ 若满足以下条件，则称为准线性映射

$$\|\Omega(z_1 + z_2) - \Omega(z_1) - \Omega(z_2)\| \leq C(\|z_1\| + \|z_2\|)$$

存在某个常数 $C > 0$ ，使得对任意 $z_1, z_2 \in Z$，条件均成立。用 $c(\Omega)$ 表示满足上述条件的最优常数 C 。

我们用 $Y \oplus_\Omega Z$ 表示赋予拟范数 $\|(y,z)\|_\Omega = \|y - \Omega z\|_Y + \|z\|_Z$ 的积空间 $Y \times Z$ 。此时，序列

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{i} Y \oplus_\Omega Z \xrightarrow{\pi} Z \longrightarrow 0,$$

其中 $i(y) = (y, 0)$ 且 $\pi(y,z) = z$ 是正合的，使得 Y 等距于其在 $Y \oplus_\Omega Z$ 中的副本，并且相应的商也等距于 Z。Kalton and Peck 证明了每一个短正合列都等价于上述类型中对应于某个拟线性映射的一个。

当对应的扭曲和是平凡的时，拟线性映射 Ω 是平凡的；这等价于存在某个 $= L + B$ 线性且 B 有界的映射 [2, , 使得 $\Omega = L + B$ 由其给出 L B [2, 引理 3.3.2]。

在 [22], Kalton and Peck 提出了一种构造非平凡拟线性映射的方法 $\ell_p \to \ell_p$，适用于整个范围 $0 < p < \infty$。该理论中的基本例子是*Kalton–Peck* 空间 $Z_p = \ell_p \oplus_{\Omega_p} \ell_p$，其中拟线性映射 Ωp 在有限支撑向量上定义为

$$\Omega_p(x)(n) = x(n) \log \frac{\|x\|_p}{|x(n)|}.$$

此构造得到一个由 ℓ_p 与其自身构成的非平凡扭曲和（更多细节另见 [2, 命题 3.2.7] ）。注意，对于 $0 < p \leq 1$， Z_p 是一个拟 Banach 空间；而一般而言，任何由 ℓ_p 与其自身构成的扭曲和都可以重新赋范，使其对于 $1 < p < \infty$ 成为巴拿赫空间（[2, 命题 3.4.5]）。

一类重要的非平凡正合列，是其商映射为严格奇异算子的正合列。

定义 1.3. </style}正合列 称为奇异的，如果其商映射是严格奇异算子。拟线性映射 Ω： $Z \to Y$ 称为奇异的，如果相应的正合正合列$0 \to Y \to Y \oplus_\Omega Z \to Z \to 0$ 是奇异的。

由此可知，拟线性映射 $\Omega\colon Z \to Y$ 是奇异的，当且仅当对于每个无穷维子空间 $W \subseteq Z$，其限制 $\Omega|_W$ 仍然是非平凡的（即， Y 的副本不是可补的π^{-1}（W）） [2, 命题 9.1.2]。Kalton 和 Peck [22, 定理 6.4] 证明，拟线性映射 Ωp 对于 $1 < p < \infty$是奇异的。对于 $p = 1$ [10] 和 $0 < p < 1$ [4]，结论也同样成立。

Kalton and Peck 还为巴拿赫空间 Z_p ($1 < p < \infty$) 建立了一种对偶性。具体而言，他们在 [22, 定理 5.1] （另见 [2, 命题 3.8.5]）中证明，对偶空间 Z_p^* 同构于 Z_q，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。该对偶性通过双线性形式实现 $\quad - \quad -$

$$B((w, z), (x, y)) = \langle y, w\rangle - \langle x, z\rangle,$$

对于 $(w, z) \in Z_p$ 与 $(x, y) \in Z_q$。在此框架下，对每一个有界线性算子 $S \in L(Z_p)$，都可通过上述对偶性定义其伴随算子 $S^* \in L(Z_q)$。更精确地说， S^* 是满足下述条件的唯一算子

$$B(S(w, z), (x, y)) = B((w, z), S^*(x, y)) \qquad \text{for all } (w, z) \in Z_p,\ (x, y) \in Z_q.$$

一个重要的未决问题是 Z_2 是否同构于其超平面。尽管 Banach 一般超平面问题已由 Gowers 解决 [17], 另见 Gowers 与 Maurey 所定义的 HI 空间类 [18], ， Z_2 的情形仍是著名的未决问题。

问题 1.4. 证明 *Kalton-Peck* 空间 Z_2 不同构于其超平面。

1.3 复结构

实巴拿赫空间 X 上的复结构，是一种赋予 X 复向量空间结构，同时保留其原有实结构及其拓扑的结构。注意，也可以在复空间上考虑复结构，只需考虑其底层的 $\mathbb{R}$-线性结构即可；但在这种情况下，原有复结构并不起任何特殊作用。因此，在本小节接下来的内容中，我们假设 X 是实的。

除重新赋范外， X 上的复结构与满足条件 $J^2 = -\mathrm{Id}$ 的 $\mathbb{R}$-线性算子 $J\colon X \to X$ 一一对应。对于每个这样的算子 J，我们将赋予如下（等价）范数的空间 X （其 $\mathbb{C}$-线性结构由 $ix := Jx$ 定义）记作 X^J

$$|||x||| = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \|\cos\theta x + \sin\theta Jx\|.$$

一种典范构造是与 X^2 上的复结构 $= (-y, x)$ 相关联的复化 $X_{\mathbb{C}} = (X \oplus X)^J J(x, y)$。对于实巴拿赫空间之间的算子 $T\colon X \to Y$， $\widehat{T} \in L(X_{\mathbb{C}}, Y_{\mathbb{C}})\widehat{\ }$ 表示其复化，定义为 $T(x, y) = (Tx, Ty)$。

如果存在一个 $\mathbb{R}$-线性同构 T: $X \to X$，使得 $J = T^{-1}IT$，则 X 上的两个复结构 I 和 J 等价；这意味着相关的复空间 X^I 和 X^J 通过 T 成为 $\mathbb{C}$-线性同构。这一工具在复结构的同构分类中至关重要。例如，实空间 ℓ_p、$L_p(0,1)$、c_0、$C([0,1])$ 具有唯一的复结构（这是 Kalton 的一个结果，见 [15]）。

实空间 Z_2上存在大量结构。例如，作为一个与其平方同构的空间，Z_2 可以具有复结构 [5]。它还具有非平凡的辛结构 [23]。通过对这些结构进行更深入的研究，或许可以证明，Z_2 的超平面至少缺少其中一种结构，从而解决问题 1.4。例如，Ferenczi-Galego [14]将一个空间定义为偶空间，当且仅当它具有复结构，但其超平面不具有复结构:

问题 1.5。证明 *Kalton-Peck* 空间的实版本是偶空间。

在 [5], 中，作为部分回答，已经证明，Z_2的超平面上的任何复结构都不可能使包含 ℓ_2 的副本保持不变。一个中间结果是，对于奇异扭和 $X = Y \oplus_\Omega Z$，Y 上的复结构不可能同时延拓为 X 上的复结构和 X的某个超平面上的复结构。

本文进一步探讨空间上的复结构与其超平面上的复结构之间的关系，并证明将上述 [5] 的结果推广到 ε-奇异扭和的一个版本，其中采用了适当的 ε-奇异性概念。这基于对 [14], 一项结果的推广: 我们以一个普适的定量估计取代代数估计，用以估计空间 X 上的复结构 I 与其某个超平面上的复结构 J 之间的差异。具体而言，对于算子 $T \in L(Y, X)$，令 $\|T\|_S$ 表示满足以下条件的 $\varepsilon > 0$ 的下确界: Y 的任意子空间都包含一个子空间 Z，使得 $\|T_{|Z}\| \le \varepsilon$。我们证明:

定理 1.6。若 X 是实巴拿赫空间，I 是 X 上的复结构，而 J 是其超平面 H 上的复结构，则 $\|I_{|H} - J\|_S \ge 2$。

1.4 代数范数的唯一性

关于代数范数唯一性问题的最新进展，以及与巴拿赫空间上算子代数相关的代数的参考文献，我们采用了 [34, 1]。若巴拿赫代数 A 上的所有代数范数都与（原有范数）等价，则称其具有唯一的代数范数。对于大多数经典巴拿赫空间 X（包括 Kalton-Peck 空间 Z_p），代数 $L(X)$ 具有唯一的代数范数；事实上，只要 X 具有“恒等算子的连续二分”，这一结论便成立，而同构于其平方的条件蕴含了这一性质（[19], 见 [34] 推论 1.1.12 ）。当 $X \not\simeq X^2$ 时，存在反例（第一个反例似乎出自 Read, [30], 见 [34] 定理 1.1.19）。

Calkin 代数，或形如 $L(X)/I$ 、对应于其他理想 I 的代数，是其他自然且经典的例子。Meyer [27] 证明，当 $X = c_0$ 或 ℓ_p, $1 \le p < \infty$ 时，Calkin 代数 $L(X)/K(X)$ 具有唯一的代数范数；其中 $K(X)$ 表示作用于 X 上的紧算子。Ware 的学位论文 [34], 将这一结果推广到了其他序列空间；而关于某个（奇异）空间 X，使得 $L(X)/K(X)$ 不具有唯一范数的例子，则由 Tarbard [33] 给出。最近，Johnson 和 Philips [20] 证明，这一结论对 $X = L_p$, $1 < p < \infty$ 的 Calkin 代数也成立（ $p = 1$ 的情形似乎仍未解决）。

另一方面，在 $p \ne 2$ 的情形中，在 [20] 构造了一个闭理想 $I(L_p)$，使得 $L(L_p)/I(L_p)$ 不具有唯一的代数范数。我们用 Kalton-Peck 空间给出另一个例子，它另外还是一个（非交换）*-代数:

定理 1.7. 代数 $L(Z_2)/S(Z_2)$ 具有两种不等价的 *-代数范数。

这一结果与对 Z_2 非平凡辛结构（实数和复数情形均如此）的研究及其与某个表示 Λ的关系密切相关。该表示将商空间 $L(Z_2)/S(Z_2)$识别为 [23]中定义的 $L(H)$的一个*-子代数。特别地，我们证明这个*-子代数并不完备，从而回答了 Kalton-Swanson [23] 提出的一个问题。

定理 1.8. *-代数 Λ（L（Z_2））在 L（H）中不是闭的

沿着同样的思路，我们回答 Kalton-Swanson 的另一个问题 [23]，该问题也作为一个开放问题出现在 Castillo-Gonz´alez-Pino [7] 中：

定理 1.9。*-代数 $L(Z_2)/S(Z_2)$，赋予商范数后，并不同构于一个 C^*-代数。

1.5 论文结构

引言之后，我们将给出算子奇异性的两种自然定量概念的定义，并探讨它们之间的关系（第 2.1 小节）。我们还将考察本质无关算子的一种定量概念；在某些情况下，这种概念更为精确（第 2.2 小节）。第三节将介绍关于复结构的新结果。第一系列结果给出使复结构的扰动等价于原复结构的条件（第 3.1 小节）；第二系列结果则给出这样的条件：若某算子的平方是 $-Id$ 的扰动，则该算子本身是某个复结构的扰动。最后，我们将探讨空间上的复结构与其超平面上的复结构之间的关系，并以定理 3.11（引言中的定理 1.6）作结。

在第四节中，我们转向扭和的背景，定义并研究 ε-奇异扭和，得出此类空间上复结构存在性的限制（命题 4.3），并推广了 [5] 的结果。

在第五节中，我们探讨巴拿赫空间上的一些辛结构，包括由插值诱导的扭曲希尔伯特空间上的自然辛结构，主要例子是 Kalton-Peck 空间 Z_2。最后，在第六节中，我们改进了对 Kalton-Swanson 定义的从 $L(Z_2)$ 到 $L(H)$ 的 *-代数同态 Λ 的描述，证明相对于 $L(Z_2)$ 上的 $\|.\|_S$ 半范数，该同态是等距的（推论 6.15），并定义了一个类似但更易研究的映射 β。本节其余部分，我们研究从 ℓ_2 到 Z_2 的映射的延拓性质。主要技术结果是：存在一个定义在 ℓ_2 上的范数为 1 的算子 t_n（可取为复结构），它可以延拓，但对 t_n 的任何紧扰动作任何延拓到 Z_2 上，其范数都至少为 n（推论 6.27）。由此得到主要结果：a) $\|.\|_S$ 在 $L(Z_2)/S(Z_2)$ 上不完备（推论 6.29，或等价地，定理 1.8）；b) 范数 $\|.\|_S$ 与通常的商范数在 $L(Z_2)/S(Z_2)$ 上不等价（定理 6.30 或定理 1.7）；以及 c) 商范数不是 B^*-代数范数（定理 6.31，或定理 1.9）。

2 算子的奇异性的定量概念

2.1 奇异性的概念

以下概念广为人知，尽管术语可能有所不同。相关参考文献见[24, 26]。

定义 2.1. 设 S 是巴拿赫空间 X 与 Y 之间的一个算子，且 $\varepsilon > 0$。我们称

(a) S 是 ε-奇异的，如果 X 的每个无限维子空间都包含一个归一化向量 x，使得 $\|Sx\| \leq \varepsilon$。*(b)* 如果对于 X的每个无限维子空间，都存在一个更小的无限维子空间 Z 使得 $\|S_{|Z}\| \leq \varepsilon$，则称 S 是 ε-强奇异的。*(c)* 如果 X 的每个有限余维子空间都包含一个归一化向量x，使得 $\|Sx\| \leq \varepsilon$，则称 S 是 ε-无穷奇异的。

我们列出几个显而易见的性质。对于固定的 $\varepsilon > 0$，ε-强奇异蕴含 ε-奇异，但似乎不存在某种逆命题。当一个算子对所有 $\varepsilon > 0$ 都是 ε-奇异时，它就是严格奇异的；等价地，当它对所有 $\varepsilon > 0$ 都是 ε-强奇异时，它也是严格奇异的。

根据定义，算子 S 是无穷奇异的，当且仅当它对所有 $\varepsilon > 0$ 都是 ε-无穷奇异的；也就是说，当且仅当对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 X 的一个无限维子空间 Z，使得 $\|S_{|Z}\| \leq \varepsilon$ [26, 命题 3.2，第 15] 页。

命题 2.2. 设 X 和 Y 是满足 维数 $X = \infty$的巴拿赫空间，且 T 是$L(X,Y)$中的一个算子。对于 $S(X,Y)$ 和 $K(X,Y)$的商范数，我们采用以下记号

$$\|T\|_{L(X,Y)/S(X,Y)} = \inf\{\|T - S\| : S \text{ is strictly singular}\}$$

$$\|T\|_{\text{Calkin}} = \inf\{\|T - K\| : K \text{ is compact}\},$$

并定义

$$\rho_s(T) = \inf\{\varepsilon : T \text{ is } \varepsilon - \text{ singular}\},$$

$$\|T\|_S = \inf\{\varepsilon : T \text{ is } \varepsilon - \text{ strongly singular}\}.$$

and

$$c(T) = \inf\{\varepsilon : T \text{ is } \varepsilon - \text{ infinitely singular}\}.$$

于是有以下关系：

(a) $c(T) \leq \rho_s(T) \leq \|T\|_S \leq \|T\|_{L(X,Y)/S(X,Y)} \leq \|T\|_{\text{Calkin}} \leq \|T\|$

(b) S是严格奇异的 $\Leftrightarrow \rho_s(T+S) = \rho_s(T)$ 对于每个 $T \in L(X,Y) \Leftrightarrow \|T+S\|_S = \|T\|_S$ 以及每个$T \in L(X, Y)$。

(c) $\rho_s(T+U) \leq \rho_s(T) + \|U\|_S$，即 ρ_s 关于 $\|.\|_S$是 1-利普希茨的。

(d) $\|T\|_S$ 是一个半范数，并由此在 $L(X,Y)/S(X,Y)$上诱导出一个（可能不完备的）范数；若$Y = X$，则它是一个代数范数，即 $\|TU\|_S \leq \|T\|_S \|U\|_S$

（*e*） $\rho_s(TU) \leq \min(\rho_s(T)\|U\|_S,\ \|T\|\rho_s(U))$

(f) $\|T^{-1}\|^{-1} \leq \|T^{-1}\|_S^{-1} \leq \rho_S(T)$

证明。(a) 由定义可立即得出。

注意

$$\|\|T\|\|_S = \sup_{Z \subseteq X} \inf_{W \subseteq Z} \|T_{|W}\|,$$

其中 Z 和 W 假定为无限维。在 [12] 中已证明，上述定义在 $L(X,Y)$ 上给出一个半范数，并且当 $X = Y$ 时，该半范数是次乘性的。这证明了 (d) 和 (b) 的第二部分。(b) 的第一部分由 (c) 得出，后者很容易验证。(e) 和 (f) 留给读者。

□

一般来说，$\|T\|_{\text{Calkin}}$、ρ_s（T）和 $\|T\|_S$可能彼此不同 [16]。另一方面，如果 T是 ℓ_p 上的算子 $1 \leq p < \infty$，众所周知，它是紧的当且仅当它是严格奇异的，也就是说，$\|T\|_{\text{Calkin}} = 0 \Leftrightarrow \rho_s$（$T$）$= 0$。这推广为以下数值估计：

命题 2.3。设 $1 \leq p < \infty$。对于任意 $T \in L$（ℓ_p），等式 $\|T\|_{\text{Calkin}} = \rho_s$（$T$）$= \|T\|_S$ 成立。

证明。考虑 P_N： $\ell_p \to \ell_p$ N，即与 ℓ_p 的典范基相对应的投影，并假设 $\varepsilon < \|T\|_{\text{Calkin}} \leq \|T - TP_N\| = \|T_{|[e_k, k>N]}\|$。因此，我们可以找到一个归一化递增序列（$w_n$），使得对所有 n，$\|T$（w_n）$\| > \varepsilon$。经过小扰动后，我们可以假设 $Tw_n = v_n$ 是相继的。于是，对于 $W = [w_n]$ 中任意一个归一化向量 $w = \sum_i \lambda_i w_i$（即 λ_i 的各项构成一个范数为 ℓ_p 的序列），$\|Tw\| = \|\sum_i \lambda_i v_i\| \geq \epsilon$。因此，我们有 ρ_s（T）$\geq \varepsilon$。

□

我们稍后将看到，这一结果可以推广到 ℓ_p 的某些自扩张。根据命题 2.2，也可得出 $\|\cdot\|_{\text{Calkin}}$ 和 $\|\cdot\|_S$ 在 L（ℓ_p）$/K$（ℓ_p）上重合。事实上，Meyer [27] 证明了，对于 $1 \leq p < \infty$，Calkin 代数 L（ℓ_p）$/K$（ℓ_p）具有唯一的代数范数。

2.2 弗雷德霍姆算子与非本质算子

回想一下，弗雷德霍姆算子的经典阿特金森刻画指出，算子 T 是弗雷德霍姆算子，当且仅当存在算子 A 和 B，使得 $AT-\mathrm{Id}$ 和 $TB-\mathrm{Id}$ 是紧算子。事实上，我们可以选取这样的算子，使其满足 $\|A\|=\|B\|=\|T_0^{-1}\|$，其中 T_0 是一个到其像上的同构，定义在 X 的一个有限余维闭子空间上。这意味着，弗雷德霍姆算子恰好是那些在 Calkin 代数中经商映射映出的元素可逆的算子。

我们引入以下新定义。

定义 2.4. 设 S 是巴拿赫空间 X 与 Y之间的一个算子，且 $C>0$。我们称

(a) 若对满足 $\|T\|<C$ 的每个 $T\in L(Y,X)$，Id_Y-ST（等价地，Id_X-TS）都是 *Fredholm* 算子，则称 S 是 C-本质无关的。*(b)* 若对满足 $\|T\|_S<C$ 的每个 $T\in L(Y,X)$，Id_Y-ST（等价地，Id_X-TS）都是 *Fredholm* 算子，则称 S 是 C-强本质无关的。

因此，C-强本质无关蕴含 C-本质无关。还要注意，恒等算子总是 1-本质无关的，但并非 $1+\varepsilon$-本质无关的，$\varepsilon>0$。还可以观察到，一个 C-本质无关算子（分别为 C-强本质无关算子）与一个本质无关算子的和，仍是 C-本质无关算子（分别为 C-强本质无关算子）。

注记 2.5. 算子 S 是本质无关的，当且仅当对所有 $C>0$，它都是 C-本质无关的；等价地，对所有 $C>0$，它都是 C-强本质无关的。

引理 2.6. 设 $S\in L(X)$ 是 C-本质无关的。那么它的复化 $\widehat{S}\in L(X_{\mathbb{C}})$ 是 $C/\sqrt{2}$-本质无关的。

证明. 设 $T\in L(X_{\mathbb{C}})$，其中 $\|T\|<C/\sqrt{2}$。我们需要证明 $\mathrm{Id}_{X_{\mathbb{C}}}-T\widehat{S}$ 是 Fredholm。记作$T=A+iB$。将 $T(x+ix)$ 写成 $=Ax-Bx+i(Ax+Bx)$，可得 $\|A-B\|\le\sup_{\|x\|=1}\|T(x+ix)\|\le\|T\|\sqrt{2}<C$，并且对 $\|A+B\|$ 也有类似的估计。因此，根据假设，存在算子 $U_1,U_2\in L(X)$，使得：

$$U_1(\mathrm{Id}_X-(A+B)S)=\mathrm{Id}_X+K_1$$

$$U_2(\mathrm{Id}_X-(A-B)S)=\mathrm{Id}_X+K_2,$$

其中 $K_1,K_2\in L(X)$ 是紧算子。现在，考虑由$U=\frac{1}{2}(U_1+U_2)+i\frac{1}{2}(U_2-U_1)$定义的算子 $U\in L(X_{\mathbb{C}})$。由于：

$$\mathrm{Id}_{X_{\mathbb{C}}}-T\widehat{S}=\mathrm{Id}_{X_{\mathbb{C}}}-AS+i(-BS),$$

我们得到：

$$U(\mathrm{Id}_{X_{\mathbb{C}}}-AS+i(-BS))=\mathrm{Id}+\frac{1}{2}(K_1+K_2)+i\frac{1}{2}(K_2-K_1)=\mathrm{Id}_{X_{\mathbb{C}}}+K,$$

其中 $K\in L(X_{\mathbb{C}})$ 是紧的。因此，$\mathrm{Id}_{X_{\mathbb{C}}}-TS$ 是 Fredholm。 □

我们不知道类似的结论是否也适用于 C强本质无关算子、 ε奇异算子或 ε强奇异算子。

命题 2.7. 设 $S\in L(X,Y)$。若 S 是 ε-奇异的，则 S 是 $1/\varepsilon$-强本质无关的。

证明。这基本上就是 [24, 命题 2.c.10] 的证明。设 T 为一个满足 $\|T\|_S < 1/\varepsilon$ 的算子。若 $\dim \ker(\mathrm{Id}_X - ST) = \infty$，则存在 X 的一个无穷维子空间 X'，使得 $STx = x$ 对所有 $x \in X'$ 都成立；取其子空间后，我们还可以假设 $\|T_{|X'}\| < 1/\varepsilon$。由此可知 $T(X')$ 是无限维的，且对于某个 $z \in X'$，有 $\|S(Tz)\| \leq \varepsilon \|T_{|X'}\| \|z\|$，这就产生了矛盾。

假设 $\mathrm{Id} - ST$ 没有闭值域。令 $\|T\|_S < C < \frac{1}{\varepsilon}$。那么根据 [24, 命题 2.c.4]，存在 X 的一个无穷维子空间 X'，使得 $\|(\mathrm{Id}_X - ST)_{|X'}\| \leq (1 - \varepsilon C)/2$；进一步取一个子空间后，我们还可以假设 $\|T_{|X'}\| < C$。因此，$ST_{|X'}$ 可逆，并且存在 $z \in S_{X'}$ 使得 $\|S(Tz)\| \leq \varepsilon \|T_{|X'}\| \leq C$，这又导出了矛盾。□

注意，命题 2.7 的逆命题并不成立。事实上，Kalton-Peck 空间 Z_2 中 ℓ_2 的典范嵌入 i 是本质无关的，但远非奇异。

引理 2.8. 设 $T\colon X \to Y$ 是一个 *Fredholm* 算子。那么存在一个常数 $C(T) > 0$，使得如果 S 对某个 $C > C(T)$ 是 C-本质无关的，则 $T + S$ 是 *Fredholm* 算子，并且 $i(T + S) = i(T)$。

证明。令 $U = T_0^{-1}$，其中 T_0 是 T 在某个有限余维子空间上的限制，使得 T_0 是到其像上的同构，并且 $T_0 X = TX$。由于 TX 在 Y 中可补，令 $P\colon Y \to Y$ 为到 TX 上的投影。定义 $C(T) = \|U\|\|P\|$。若 S 是 C-本质无关的，且 $C > C(T)$，则 $\mathrm{Id} + S(UP)$ 是 Fredholm。

现在，假设 $\dim \ker(T + S) = \infty$。那么存在一个无限维子空间 $X' \subseteq X_0$，使得 $(T + S)_{|X'} = 0$。由于对每个 $x \in X_0$，都有 $(T + S)x = (\mathrm{Id} + SUP)Tx$，因此 $\dim \ker(\mathrm{Id} + SUP) = \infty$，这就产生了矛盾。

若 $T + S$ 没有闭值域，则根据 [24, 命题 2.c.4], ，存在 X_0 的一个无限维子空间 X'，使得 $(T + S)_{|X'}$ 是紧的。这同样会导致矛盾，因为对每个 $x \in X'$，都有 $(T + S)x = (\mathrm{Id} + SUP)Tx$，且 $\mathrm{Id} + SUP$ 是 Fredholm。

□

由于典范嵌入 $i\colon \ell_2 \to Z_2$ 是上半弗雷德霍姆的，但同时也是本质无关的，因此上述引理不能直接推广到上半弗雷德霍姆算子。不过，经典结论如下：

命题 2.9. 设 $T\colon X \to Y$ 是一个上半弗雷德霍姆算子。那么存在 $\varepsilon(T) > 0$，使得只要 S 对某个 $\varepsilon < \varepsilon(T)$ 是 ε-奇异的，那么 $T + S$ 也为上半弗雷德霍姆，并且 $i(T + S) = i(T)$。

注意，如果 T_0 是 T 在某个有限余维子空间上的限制，且在该子空间上是到其像的同构，那么 $\varepsilon(T)$ 可以取为 $\|T_0^{-1}\|^{-1}$。

命题 2.10. 设 $S \in L(X)$。假设 S 是 $1/\varepsilon$-本质无关的。那么 S 的谱由半径为 ε 的闭球中的一个子集，以及一列有限重数的特征值组成；这列特征值要么是有限的，要么其模组成的序列收敛到 ε。

证明。我们注意到，当 $|\lambda| < 1/\varepsilon$ 时，$\mathrm{Id} - \lambda S$ 是 Fredholm 算子；根据 $1/\varepsilon$-本质无关性，这也可改述为：当 $|\alpha| > \varepsilon$ 时，$S - \alpha\mathrm{Id}$ 是 Fredholm 算子（由连续性知其指标为 0）。如果这样的 α 是谱中的一个元素，这就意味着它是一个具有有限重数的特征值，并且在谱中是孤立的。这表明，这类值的集合是有限的，或者是可数的，并在半径为 ε 的球面上有一个聚点（见 [24] 中引理 2.c.12 的证明）。

□

3 复结构与理想

本节旨在重新考察 [14] 和 [5] 关于复结构的非本质扰动的结果；例如，将扰动的 $\|.\|_S$-范数为零（即扰动是严格奇异的）这一条件推广为 $\|.\|_S$-范数足够小的情形。我们将在以下情境中进行讨论：空间 X 上的两个复结构，或分别定义在 X 及其某个超平面上的两个复结构。

3.1 复结构的扰动

下文中，设 X 是一个实无限维巴拿赫空间。

引理 3.1. 若 J 是 X上的复结构，则 $\|J\|^{-1} \leq \|J\|_S \leq \|J\|$

证明. 由命题 2.2 (f) 得出。 □

命题 3.2. 设 I 是 X上的复结构。设 J 是 X 上的复结构，并且$J-I$ 是关于 $c > \|I\|/2$的 c-本质无关，或者是关于 $C > \|I\|_S/2$的 C-强本质无关。那么 I 和 J 等价。

证明. 记作 $s = J - I$。算子 $T = 2I + s$ 是从 X^I 到 X^J的 $\mathbb{C}$-线性映射。此外，根据定义， T =2I($Id-Is$/2)作为实算子是 Fredholm 算子（其指标必为 0），因为 s 是 ($\|I\|$/2)+ε-本质无关，或是 ($\|I\|_S$/2) + ε-强本质无关。因此，算子 T是指标为 0 的 Fredholm 算子，并且是$\mathbb{C}$-线性映射。由此可得， X^I 和 X^J 是 $\mathbb{C}$-同构的。

□

命题 3.3. 设 I, J 是空间 X 上的复结构。若$(I-J)^2$ 是 C-本质无关且满足 $C > 1/4$，则 I 与 J 等价。特别地，若 $\rho_s((I-J)^2) < 4$，则 I 与 J 等价。

证明。 注意，若 I 和 J 是复结构，则 $(I + J)^2 + (I - J)^2 = -4\mathrm{Id}$。因此 $-\frac{1}{4}(I + J)^2 = \mathrm{Id} + \frac{1}{4}(I - J)^2$。若 $(I - J)^2$ 对 $C > 1/4$ 是 C-本质无关的，则 $I + J$ 是指标为 0 的 Fredholm 算子，因此 I 和 J 等价。

□

推论 3.4. 设 I, J 是空间 X 上的复结构。若$\rho_S(I - J)\|I - J\|_S < 4$，则 I 与 J 等价；特别地，若 $\|I - J\|_S < 2$，则它们等价。

证明。 命题 3.3 和命题 2.2(e)的结合。 □

3.2 平方接近于 $-\mathrm{Id}$ 的算子

接下来的一系列结果将本质无关扰动的情形从 [14] 推广开来：其一般原理是，如果算子 I 在空间 X 上的平方足够接近 $-\mathrm{Id}_X$，那么 I 必须接近某个复结构。在我们的第一个结果中，当相对于范数来衡量与 $-\mathrm{Id}_X$ 的接近程度时，我们就能得到在整个空间 X 上接近某个复结构的算子。

命题 3.5。 设 $I \in L(X)$ 使得 $\alpha = \|I^2 + \mathrm{Id}\| < 1$。那么存在 $S \in \mathcal{L}(X)$ 属于由 I 和 Id 生成的闭代数，且满足 $\|S\| \leq \|I\|(-1+(1-2\alpha)^{-1/2})$，使得 $(I+S)^2 = -\mathrm{Id}$。

证明。 我们将 $s = I^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n s^n$ R $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n =$ 称为 Id。该级数 $-1+ 1-z^{-1/2}$ $|z| < 1$ $I + IR^2 = -$ 收敛到一个算子，其中对于每个，()，并且我们注意到 () Id。取 $S = IR$ 即得结果，因为 $\|S\| \leq \|I\| \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\|s\|)^n = \|I\|(-1 + (1-\alpha)^{-1/2})$。 □

因此，如果一个实空间 X 不允许复结构，那么对于任意 $T \in L(X)$， $T^2 + \mathrm{Id}$ 的范数都必须至少为 1。少算子空间就是这方面的例子，即其中每个算子 T都是 $\lambda\,\mathrm{Id}$ 的严格奇异扰动，如 [18]所示；于是 $T^2 + \mathrm{Id} = (1 + \lambda^2)Id + S$实际上具有至少为 1 的 $\|.\|_S$-范数。

前述命题对于 C-本质无关或 ε-奇异性质也有相应版本，但在这种情况下，还必须考虑超平面上的复结构，正如 [14, 命题10]所示：

命题 3.6. 设 Y 是一个无限维实巴拿赫空间，且 $X = \mathbb{R} \oplus Y$。令$I \in L(X)$ 满足 $I^2 + \mathrm{Id}$ 对某个 $C > \sqrt{2}$ 是 C-本质无关的。那么存在一个算子$S \in L(X)$，经过有限秩扰动后属于由 I 和 Id 生成的闭代数，使得以下情况之一成立：

$$(I + S)^2 = -\mathrm{Id} \ \ or \ I + S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}$$

其中 $J \in L(Y)$ 满足 $J^2 = -\mathrm{Id}$。

此外，如果 $I^2 + Id$ 是 ε-强奇异的，$0 < \varepsilon < 1$，那么 S 可选为 $\|I\|_S\,(-1+(1-\varepsilon)^{-1/2})$-强奇异的。

证明。令 $s = I^2 +$表示 Id。经复化后，$\hat{s}$ 是 $C/\sqrt{2}$-本质无关的（由引理 2.6 得）。令 Γ 为一条矩形曲线，其水平边和垂直边关于水平轴对称，且包含于区域 $\{z \in \mathbb{C}:\ \sqrt{2}/C < |z| < 1\}$，并满足 $\Gamma \cap Sp(\hat{s}) = \emptyset$。令 $\succ \quad \prec U$ 和 V 分别为由 Γ围成的有界和无界开区域。令 $\widehat{\quad} \quad P \quad Q$和为与 $\mathrm{Sp}(\hat{s}) \cap U$ 和 $\mathrm{Sp}(\hat{s}) \cap V$对应的谱投影。于是$\hat{s} = \hat{s}P + \hat{s}Q.$。由于$\hat{s}P$的谱半径严格小于 1，按照 Ferenczi-Galego [14, 命题10] 在前一个命题中的论证，考虑 $R = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(sP)^n$ 和 $\widehat{R} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\hat{s}\widehat{P})^n$，其中对每个 $|z| < 1$，都有 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n = -1 + (1-z)^{-1/2}$（注意，根据泛函演算的基本性质，定义 R的级数在范数意义下收敛，因为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ 的收敛半径为 1）。由此可得 $(\widehat{IP} + \widehat{IR})^2 = -\widehat{P}$。注意，$IR = IsLP$，其中 $L = \sum_{n=1}^{\infty} b_n s^{n-1}$，因此 $IR = IsL - IsLQ$。

因此，在假设 $\|s\|_S \le \varepsilon < 1$ 且 s 是 $C > \sqrt{2}$-本质无关的条件下（特别是当 $\|s\|_S < \sqrt{2}/2$ 时，根据命题 2.7 此条件成立），我们可推得

$$\|IR\|_S = \|IsL\|_S \le \|I\|_S \sum_{n=1}^{\infty} b_n \|s\|_S^n = \|I\|_S(1 - (1 - \|s\|_S)^{-1/2}) \le \|I\|_S(1 - (1-\varepsilon)^{-1/2}).$$

注意，由命题 2.10 可知，Q 具有有限秩。若 Q 的秩为偶数，则通过 Ferenczi-Galego [14, 命题 10] 中的相同论证，可得一个作用在 QX 上的实有限秩算子 r，使得 $(\widehat{IQ} + \hat{r})^2 = -\widehat{Q}$。因此，$S = IR + r$ 满足 $(I+S)^2 = -\mathrm{Id}$，并且在 $\|s\|_S \le \varepsilon < 1$的情况下，$\|S\|_S \le \|I\|_S(1-(1-\varepsilon)^{-1/2})$。

若 Q 的秩为奇数，则 Ferenczi-Galego [14, 命题 10]中的论证也可得一个有限秩算子 r，使得 $I + (IR + r) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}$，这对应于分解 $\mathbb{R} \oplus Y$；其中某个算子 J 满足 $J^2 = -\mathrm{Id}$。

□

命题 3.7. 设 $0 < \varepsilon \le 2/3$。假设 J 是 X上的复结构，且 $S \in L(X)$ 是ε^{-1}-本质无关的。那么，$J + S$ 的谱中所有与 $\{-i, i\}$ 的距离严格大于$\alpha := 3\|J\|\varepsilon$ 的点，都是有限重数的特征值。

证明。设 λ属于 $J + S$的谱。由于$(J - \lambda\mathrm{Id})(J + \lambda\mathrm{Id}) = -1 - \lambda^2$，若 $\lambda \notin \{-i, i\}$，则$J - \lambda\mathrm{Id}$可逆，且其逆的范数至多为 $\frac{\|J\|+|\lambda|}{|1+\lambda^2|}$。若 $\varepsilon < \frac{|1+\lambda^2|}{\|J\|+|\lambda|}$，则 $J - \lambda\mathrm{Id} + S$仍是 Fredholm 算子，指标为 0，因此 λ 是 $J + S$ 的有限重数特征值。

最后我们注意到，如果 $|\lambda + i| > \alpha$ 和 $|\lambda - i| > \alpha$（且不失一般性地，$Im(\lambda) \ge 0$），那么 $|1 + \lambda^2| > \alpha$。如果$|\lambda| \le 2\|J\|$，则可得 $\frac{|1+\lambda^2|}{\|J\|+|\lambda|} > \frac{\alpha}{3\|J\|} = \varepsilon$。如果 $|\lambda| > 2\|J\|$，那么我们有 $\frac{|1+\lambda^2|}{\|J\|+|\lambda|} > \frac{2}{(|\lambda|^2-1)\,3|\lambda|} \ge \frac{2\|J\||\lambda|}{3|\lambda|} \ge \frac{2}{3} \ge \varepsilon$。 □

3.3 复结构与超平面

引理 3.8。设 I 和 J 分别是空间 X 和 X的超平面 H 上的复结构。那么，算子 $T = I_{|H} + i_{H,X}J$ 是一个从 H_J到 X_I的 $\mathbb{C}$-线性算子。

证明。事实上，对所有 $x \in H$，我们都有 $TJx = IJx - x$和 $ITx = -x + IJx$。 □

由此我们得到一个有趣的推论:

命题 3.9. 设 $1 < p < \infty$。假设 *Kalton* 空间 Z_p 不同构于其超平面。若 I 是 Z_p 上的复结构，且 J 是其超平面 H上的复结构，则算子$T = I_{|H} + i_{H,\ X}J \in L(H, X)$ 不是 *Fredholm* 算子。

证明. 由引理 3.8 可知，实算子 T 将是 Fredholm 算子，且指标为偶数。因此，对于某些整数 m, n, $H \oplus \mathbb{R}^{2m}$与 $Z_p \oplus \mathbb{R}^{2n}$ 将同构。由于 Z_p 与其偶余维子空间同构， Z_p 将与 H同构。 □

我们还有:

命题 3.10. 设 I 是空间 X 上的一个复结构， J 是其超平面 H上的一个复结构。那么存在 $0 < \lambda \leq 1$，使得 $I_{|H} - \lambda J$ 是无穷奇异的；并且存在 $0 < \lambda \leq 1$，使得 $J - \lambda I_{|H}$ 是无穷奇异的。

证明. 由于 $Ii_{HX} - i_{HX}J \in L(H, X)$ 是从 H^{-J}到 X^I的 $\mathbb{C}$-线性映射，若其为 Fredholm，则其指标为偶数。另一方面， Ii_{HX} 是 Fredholm 映射，指标为 -1。因此，根据 Fredholm 指标的连续性，必存在某个 $0 < \lambda \leq 1$，使得映射 $Ui_{hX} - \lambda i_{HX}J$不是 Fredholm 映射。以 Ii_{HX}替换 $i_{HX}J$，同样的推理也成立。 □

定理 3.11. 设 I 是空间 X 上的一个复结构，且 J 是超平面H 上的一个复结构，该超平面由投影 p_H 可补。那么，$(p_H I i_{H,X} - J)^2$ 不是 C-本质无关的，只要 $C > 1/4$。特别地， $\|I_{|H} - J\|_S \geq 2$。

证明。 若 p_H表示从 X到 H的一个投影，且 r_H为秩 1 投影 $r_H = \mathrm{Id} - p_H$，经过计算可得

$$(p_H I i_{H,X} + J)^2 + (p_H I i_{H,X} - J)^2 = 2p_H I p_H I i_{H,X} - 2\,\mathrm{Id}_H = -4\,\mathrm{Id}_H + F,$$

onde $F := -2p_H I r_H I i_{H,X}$ 是 H上的一个秩至多为 1 的算子。还要注意，根据引理 3.8，从 H到 H的算子 $p_H I i_{H,X} + J = p_H(I_{|H} + i_{H,X}J)$不可能是指标为偶数的 Fredholm 算子。

现在，若 $(p_H I i_{H,X} - J)^2$对 $C > 4$是 C-本质无关的，那么 $\mathrm{Id}_H - \frac{1}{4}(p_H I i_{H,X} - J)^2$在 H上将是指标为 0 的 Fredholm 算子。因此，根据上述等式，$(p_H I i_{H,X} + J)^2$ 将是指标为 0 的 Fredholm 算子，且 $p_H I i_{H,X} + J$ 也将是指标为 0 的 Fredholm 算子，矛盾。

由此可得 $\rho_S((p_H I i_{H,X} - J)^2) \geq 4$，特别是，由于 $\|p_H\|_S = 1$， $\rho_S(I_{|H} - i_{H,X}J)\|I_{|H} - i_{H,X}J\|_S \geq 4$，并且 $\|I_{|H} - J\|_S \geq 2$。 □

定义 3.12。 设 X 为巴拿赫空间， H 为 X 的一个给定超平面， $X = H \oplus \mathbb{R}e$ 为一个固定的分解。设 $\mathcal{I}(X)$ 为 X 上的复结构集合， $\mathcal{J}(X)$ 为 X上矩阵形式为 $\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$的算子集合，其中 J 是 H上的复结构；再设 $Z(X)$为 X 上的算子T集合，使得 $T^2 + Id$ 是严格奇异的。

设 $\mathcal{I}(X)$、 $\mathcal{J}(X)$ 和 $Z(X)$ 分别为与 $\mathcal{I}(X)$、 $\mathcal{J}(X)$、及 $Z(X)$ 相关的 $L(X)/S(X)$ 的元素集合，并注意到 $Z(X)$ 是 $L(X)/S(X)$ 中平方为 -1 的元素集合。根据 Ferenczi-Galego 的命题 8 和 10， $Z(X)$ 是 $\mathcal{I}(X)$ 与 $\mathcal{J}(X)$ 的不交并。可以证明:

命题 3.13。 设 X 为一个无穷维巴拿赫空间。那么集合 $Z(X)$在$L(X)/S(X)$ 中是闭集，其中 $\|.\|_S$。此外，若 H 是如上所述的 X 的一个超平面，则

$$d(\tilde{\mathcal{I}}(X), \tilde{\mathcal{J}}(X)) := \inf_{a \in \tilde{\mathcal{I}}(X), b \in \tilde{\mathcal{J}}(X)} \|a - b\|_S \geq 2$$

因此，集合 $\mathcal{I}(X)$ 和 $\mathcal{J}(X)$ 在 $Z(X)$ 中均为开闭集，其中 $\|.\|_S$。

证明。 若 $J_n \in Z(X)$ 是 X 上的算子序列，对于 $\|.\|_S$ 收敛到某个 J，那么由于 $\|.\|_S$ 是代数范数，J_n^2 对于 $\|.\|_S$ 收敛到 J^2。因此 $-\tilde{Id} = \tilde{J}^2$，从而 $J^2 + Id$ 是严格奇异的，这意味着 J 属于 $Z(X)$。断言 $d(\mathcal{I}(X)\ \mathcal{J}(X)) \geq 2$ 即为命题 3.11。 □

4 拟线性映射奇异性的量化版本 S

本节中的常数均相对于巴拿赫空间之间拟线性映射所关联的原始拟范数而言。当然，若希望用等价范数替换该拟范数，则这些估计在相差乘性常数的意义下仍然成立。

命题 4.1 (ε-Ω 的奇异性)**.** 设 $\Omega\colon Y \to X$ 为拟线性映射，并设

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} X \oplus_\Omega Y \xrightarrow{q} Y \longrightarrow 0$$

为相应的扭曲和。下列各项等价

(a) 商映射 q 是 ε-奇异的；

(b) 不存在无穷维子空间 $Z' \subseteq X \oplus_\Omega Y$，使其与 $i(X) \oplus Z'$在 $X \oplus_\Omega Y$ 中构成拓扑直和，且 Z' 是 ε^{-1}-可补的；

(c) 不存在无穷维子空间 $Y' \subseteq Y$以及线性映射 $L\colon Y' \to X$，使得 $(\Omega - L)|_{Y'}$ 的范数至多为 $\varepsilon^{-1} - 1$;

（*d*）对于任意无穷维子空间 $Z' \subseteq X \oplus_\Omega Y$, $d(i(X), S_{Z'}) < \varepsilon$。

当（*a*）（*b*）（*c*）（*d*）成立时，我们称Ω 是 ε-奇异的，或称 $X \oplus_\Omega Y$ 是 ε-奇异的。

证明。我们先证明（a）$\Leftrightarrow$（b）：若 Z' 证明 q 不是 ε-奇异的，则对所有 $z \in Z'$ 和 $x \in X$，$\|i(x) + z\| \geq \|q(i(x) + z)\| \geq \varepsilon\|z\|$，因此 Z'在 $i(X) \oplus Z'$中是 ε^{-1}-可补的。若 Z'在 $i(X) \oplus Z'$中是 ε^{-1}-可补的，则对每个 $z \in Z'$，$\|q(z)\| = d(z, i(X)) = \|z + i(x_0)\| \geq \varepsilon\|z\|$。

现在我们证明（b）$\Leftrightarrow$（c）：若 L 见证了（c）不成立，则子空间 $\{(Ly, y) \ y \in Y'\}$ 在其与 $i(X)$ 的直和中是ε^{-1}-可补的。事实上，对每个 $x \in X$，$\|(Ly, y)\|_\Omega = \|Ly - \Omega y\| + \|y\| \leq \varepsilon^{-1}\|y\| \leq \varepsilon^{-1}\|(x + Ly, y)\|_\Omega$。

若 Z' 见证了（b）不成立，则我们可以假设存在某个 $Y' \subseteq Y$和某个线性L，使得 $Z' = \{(Ly, y) \ y \in Y'\}$。这意味着存在如下形式的不等式

$$\|Ly - \Omega y\| + \|y\| \leq \varepsilon^{-1}(\|x + Ly - \Omega y\| + \|y\|)$$

因此，$\|\Omega - L\|$ 在 Y'上是 $\varepsilon^{-1} - 1$ 有界的。

最后，我们证明（b）$\Leftrightarrow$（d）：注意到，Z' 在 $i(X)$ 上是 ε^{-1}-可补的，当且仅当对每个 $x \in i(X)$ 和 $z \in Z'$，都有$\|z\| \leq \varepsilon^{-1}\|x + z\|$；这等价于 $d(i(X), S_{Z'}) \geq \varepsilon$。 □

命题 4.2. 考虑一个 ε-奇异扭和 $X \oplus_\Omega Y$，并设 Z 为一个巴拿赫空间。设$t\colon X \to Z$ 并设 T 为 t 到 $X \oplus_\Omega Y$ 的延拓。则 $\rho_s(T) \leq \|t\| + 2\varepsilon\|T\|$

证明。设 δ使得存在 $W \subseteq X \oplus_\Omega Y$，使得对所有 $w \in W$都有 $\|Tw\| \geq \delta\|w\|$。则由命题 4.1，存在归一化向量 $x \in X$，$w \in W$，使得 $d(x, w) \leq 2\varepsilon$。由此可得

$$\delta \leq \|T(w)\| \leq \|T(x)\| - \|T(w - x)\| \leq \|t\| + 2\|T\|\varepsilon.$$

□

命题 4.3. 设 $Z = X \oplus_\Omega Y$为一个 ε-奇异扭和。设 j 为 X上的一个复结构，它延拓为 Z 上范数至多为 K 的复结构。设 H 为 Z 的一个包含X的超平面。则 H 上任何延拓 j 的复结构，其范数至少为 $2\varepsilon^{-1} - K$。

证明。记 $\pi\colon Z \to Y$ 为商映射，I 为 j 到 Z 的延拓，其范数为 K；记 J 为 j 到 H 的一个延拓。由命题 3.11，$I_{|H} - J$ 对任意 $\alpha < 2$ 都不是 α-奇异的，因此取 H 的一个子空间 W，使得对所有 $w \in W$，$\|(I - J)w\| \geq \alpha\|w\|$。由于 $(I - J)_{|X} = 0$，我们推出对所有 $w \in W$ 和 $x \in X$

$$\alpha\|w\| \leq \|(I - J)(w + x)\| \leq \|I_{|H} - J\|\|w + x\|,$$

因此 $\alpha\|w\| \le \|I_{|H} - J\|\|\pi(w)\|$。由于 π 是 ε-奇异的，取 $w \in S_W$，使得 $\pi(w)$ 的范数至多为 ε，从而得到 $\alpha \le \|I_{|H} - J\|\varepsilon$。由此可得

$$2 \le \varepsilon\|I_{|H} - J\|$$

因此 $\|J| \ge 2\varepsilon^{-1} - \|I\| = 2\varepsilon^{-1} - K$。 □

注意，恒有 $\rho_s(\pi) \le \|\pi\| = 1$，从而在上述证明中得到估计 $\|J\| \ge 2 - K$。当 $K = 1$，即 I 等距时，估计变为 $\|J\| \ge 1$，这是精确的。

作为命题 4.3 的推论，我们重新得到 [5] 的一项主要结果。

推论 4.4 (Castillo-Cuellar-Ferenczi-Moreno 2017)。考虑一个正合列 $0 \to X \to Z \to Y \to 0$，其中商映射 π 是严格奇异的。设 j 是 X 上的一个复结构，它可以延拓为 Z上的一个复结构。那么，j 不能延拓为包含 X的 Z 的某个超平面上的复结构。

证明。超平面 H 上的复结构 J 若延拓 j，其范数将大于 $2\varepsilon^{-1} - K$，对所有 $\varepsilon > 0$ 均如此。

□

现在转向完全奇异性。众所周知，若扭曲和 $X \oplus_\Omega Y$ 是奇异的，且$T:\ X \oplus_\Omega Y \to Z$，那么 T 严格奇异当且仅当 $T_{|X}$ 严格奇异（目前看来，最早明确出现于 [11], 引理 2；用更同调的语言表述，也可由 [2]引理 9.1.5 推得）。下面的定量估计可以很容易地改进这一结论：

命题 4.5。设扭曲和 $X \oplus_\Omega Y$ 是奇异的，并令 $T:\ X \oplus_\Omega Y \to Z$。则$\rho_s(T) = \rho_s(T_{|X})$且 $\|T\|_S = \|T_{|X}\|_S$。

证明。对于第一个断言，我们只需证明 $\rho_s(T) \le \rho_s(T_{|X})$，因此设 $\delta > 0$ 和$W \subseteq X \oplus_\Omega Y$ 满足：对所有 $w \in W$，均有 $\|Tw\| \ge \delta\|w\|$。根据经典结果（[3, 引理 8],[11, 引理1]），存在 W 的一个子空间 W'，以及一个嵌入 $\alpha: W' \to X$，使得 $k = \alpha - i:\ W' \to X$ 是紧算子，且其范数至多为 $\varepsilon > 0$。于是，对任意 $z = \alpha(w) \in \alpha(W') \subseteq X$，$w \in W'$，我们有 $T(z) = T(kw + w) = T(kw) + Tw$ 的范数至少为 $\delta\|w\| - \varepsilon\|T\|\|w\| \ge (1+\varepsilon)^{-1}(\delta - \varepsilon\|T|)\|z\|$；因此 $T_{|X}$ 不是 $(1+\varepsilon)^{-1}(\delta - \varepsilon\|T|)$-奇异的。由于 ε 是任意的，结论得证。

第二个断言可以用类似的方式得到：如果 $\|T\|_S > \delta$ 和 $W \subseteq X \oplus_\Omega Y$ 满足每个 $W' \subseteq W$ 都包含一个满足 $\|Tw\| > \delta$ 的归一化向量 $w \in W'$，那么存在一个嵌入 $\alpha:\ W' \to X'$，其形式为 $i + k$；其中，$W' \subseteq W$ 和 $X' \subseteq iX$ 是某些子空间，且 k 是满足 $\|k\| < \varepsilon$ 的紧算子。由此可知，对于每个 $X'' \subseteq X'$，存在 $x = \alpha(w) \in X''$，使得$\|Tx\| \ge \|Tw\| - \|Tkw\| > \delta - \|T\|\varepsilon$，于是 $T_{|X}$ 不是 $\delta - \|T\|\varepsilon$-强奇异的。

□

定义 4.6。如果 Z 是一个扭曲和 $X \oplus_\Omega Y$，我们考虑限制映射

$$r : L(Z) \to L(X, Z)$$

以及诱导映射

$$\tilde{r} : L(Z)/S(Z) \to L(X, Z)/S(X, Z).$$

注 4.7。根据命题 *4.5*，若扭曲和 $Z = X \oplus_\Omega Y$ 是奇异的，则映射 $\tilde{r}$ 是单射，而且相对于 $\|.\|_S$-范数实际上是等距的。

由上文可得以下原则，用于在商$L(Z)/S(Z)$上构造不等价范数；我们将在第 6 章中将其应用于 Kalton-Peck 空间。

命题 4.8。设扭曲和 $Z = X \oplus_\Omega Y$ 是奇异的。假设对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个映射 $t_n \in L(X, Z)$，其范数至多为1，且可延拓为 $L(Z)$上的有界映射，但对任意 $s \in S(X, Z)$，$t_n + s$ 的任意延拓的范数都至少为 n。则商范数与范数 $\|.\|_S$ 在 $L(Z)/S(Z)$上是不等价的代数范数。

证明。如果 T_n 是 t_n 的任意延拓，那么根据命题 4.5，$\|T_n\|_S = \|t_n\|_S \le 1$，而 $\|T_n\|_{L(X)/S(X)} \ge n$。

□

5 由复插值诱导的辛结构与扭曲希尔伯特空间

回顾一下，若存在连续的交错双线性形式 $\omega: X\times X\to\mathbb{R}$ （实情形），或半双线性形式 $\omega: X\times X\to\mathbb{C}$（复情形），使得 $\omega(x,\ y)=-\omega(y,\ x)$（复情形下，$\omega(x,\ y)=-\omega(y,\ x)$）对所有 $x,\ y\in X$ 都成立，并且诱导算子 $L_\omega: X\to X^*,\ L_\omega(x)(y)=\omega(x,\ y)$ 是到 X^* 的同构（复情形下，是到共轭对偶 X^* 的同构），则称实（分别为复）巴拿赫空间 X 为辛空间。此条件意味着 X 是自反的，因此我们可以将 $L_\omega^*=-L_\omega$ （分别将 $L_\omega{}^*=-L_\omega$）与其对偶等同起来。

在 [23], 中，Kalton 和 Swanson 表明，Kalton–Peck空间 Z_2 具有如下定义的辛结构

$$\omega((x,y),(x',y'))=\langle x,y'\rangle_{\ell_2}-\langle y,x'\rangle_{\ell_2},\qquad (x,y),(x',y')\in Z_2,$$

他们利用这一形式，在 $L(Z_2)$ 上定义了一个对合 $*$，其中对于每个算子 $T\in L(Z_2)$，其伴随算子 T^* 由下式确定

$$\omega(Tu,\ v)=\omega(u,\ T^*v),\qquad u,\ v\in Z_2.$$

通过考虑 Z_2 的复版本，这一构造也可推广到复数情形。更一般地，在研究通过复插值获得的某些扭曲希尔伯特空间时，会自然地出现辛结构。

引理 5.1. 设 X 是一个自反的复巴拿赫空间，使得 (X,X^*) 是一个相容偶，并且 $X\cap X^*$ 在 X 和 X^* 中都稠密。那么 $(X,X^*)_{1/2}$ 与某个希尔伯特空间等距，且相应的导出空间是辛空间。

证明. 证明可由以下事实推出。

1）插值空间 $(X,X^*)_{1/2}$ 与某个希尔伯特空间等距，这一事实由 [35]可知。2）设 (X_0,X_1) 是一个复巴拿赫空间的相容偶。那么 $Z=(X_0,X_1)_{1/2}$ 和 $W=(X_1,X_0)_{1/2}$ 相等且范数相同。此外，$(x,y)\mapsto(x,-y)$ 是一个从 dZ 到 dW 上的线性等距映射。

事实上，$T: \mathcal{F}(X_0,\ X_1)\to\mathcal{F}(X_1,\ X_0)$ 由 $Tf(z)=f(1-z)$ 给出，对所有 $z\in\mathbb{S}$ 都是一个等距映射。因此，若 $B: Z\to\mathcal{F}(X_0,\ X_1)$ 是一个截面，那么 $C(x)(z)=B(x)(1-z)$ 是从 W 到 $\mathcal{F}(X_1,\ X_0)$ 的一个截面。此外，$d/dzB(x)(1-z)_{|1/2}=-B'(x)(1/2)$。

3) 设 $\overline{X}=(X_0,\ X_1)$ 是复巴拿赫空间的一个相容偶，满足 $\Delta(X)=X_0\cap X_1$ 在 X_0 中稠密且在 X_1 中稠密，并且至少有一个空间（X_0 或 X_1）是自反的。那么

- (Calderón，1964)$(X_0^*,\ X_1^*)$ 是一个相容偶，并且对于每个 $\theta\in(0,\ 1)$ 我们都有 $(,\ X_1^*)_\theta=(X_0,\ X_1)_\theta^*$ 等距。
- (Rochberg；Weiss，1983) 下图是交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X_\theta^* & \longrightarrow & (dX_\theta)^* & \longrightarrow & X_\theta^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow T & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & X_\theta^* & \longrightarrow & d(X_\theta^*) & \longrightarrow & X_\theta^* & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{2}$$

其中 $T(x^*,\ y^*)(x,\ y)=\langle x^*,\ y\rangle+\langle y^*,\ x\rangle$ 对于所有 $(x^*,\ y^*)\in d(X_\theta^*)$ 以及所有 $(x,\ y)\in dX_\theta$.

令 $Z=d((X,\ X^*)_{1/2})$。由此可得，$S: Z\times Z\to\mathbb{R}$ 定义为 $S(x,\ y)(z,\ w)=((x,\ y),\ (z,\ w)):=\langle x,\ w\rangle-\langle y,\ z\rangle$ 是 Z 上的辛结构。 □

在引理 5.1 的条件下，所有 $L(Z)$ 上有界算子构成的代数是一个带有对合 * 的 *-代数，其中 * 定义为

$$S(T\xi,\eta)=S(\xi,T^*\eta),$$

对所有 $\xi,\ \eta\in Z$。我们用 $L_S: Z\to Z^*$ 表示由$L_S(\xi)\eta=S(\xi,\ \eta)$给出的相应辛同构。因此 $T^*=L_S^{-1}T^+L_S$，其中 $T^+\in L(Z^*)$ 是 T 的共轭算子。

5.1 辛结构的扰动

与第 3.2 节对复结构的研究类似，本节将[6] 关于辛结构奇异扰动的一些结果推广到本质无关扰动的情形。在本节中， X 表示一个实或复自反无限维巴拿赫空间。

命题 5.2。 设 α： $X \to X^*$ 是一个同构，满足 $\|\alpha+\alpha^*\| < 2\|\alpha^{-1}\|^{-1}$ (实数情形下）或 $\|\alpha+\alpha^*\| < 2\|\alpha^{-1}\|^{-1}$, (复数情形下）。那么 X 具有辛结构。

证明。 在实数情形下，记 $\beta = \alpha - s/2$，其中 $s = \alpha + \alpha^*$。于是 $\beta^* = -\beta$，并且由于

$$\|\beta - \alpha\| = \|s/2\| < \|\alpha^{-1}\|^{-1}$$

根据经典的纽曼级数论证，对于小扰动下可逆性的稳定性，我们有 β 是一个同构。

□

命题 5.3。 设 α： $X \to X^*$ 是一个同构，满足 $\alpha + \alpha^*$ ($\alpha + \alpha^*$，复数情形下）是某个 $C > 2\|\alpha^{-1}\|$ 的 C- 本质无关映射。那么 X 或其超平面具有辛结构。

证明。 在实数情形下，令我们称 $\beta = \alpha - s/2$，其中 $s = \alpha + \alpha^*$。于是 $\beta^* = -\beta$，根据引理 2.8 β 是一个指标为 0 的 Fredholm 算子。证明的其余部分与 [6,命题 8.7]中的论证相同。

□

命题 5.4。 设 $\alpha : X \to X^*$ 是一个辛同构，且 $s : X \to X^*$ 对某个 $C > 2\|\alpha^{-1}\|$是 C-本质无关的。若 $\alpha + s$ 也是一个辛同构，则 α 与 $\alpha + s$ 等价（即存在一个同构 T: $X \to X$，使得 $T^*\alpha T = \alpha + s$。）

证明。 令我们称 $S = \alpha^{-1}s$。经过复化， $\widehat{S}$ 是 $\sqrt{2C}\|\alpha^{-1}\|^{-1}/2$-本质无关的。考虑一个矩形 Γ，其边为竖直和水平线段，且可求长、共轭不变，是一条简单闭曲线，包含于开单位圆盘内，包含半径为 $\sqrt{2}\|\alpha^{-1}\|/C$的开圆盘，并且$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$满足 $\Gamma \cap Sp(S) = \emptyset$。那么命题 2.10 保证， S 的谱中位于无界开域 $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ 内的所有点构成一个有限集，且都是有限重数的特征值。此后，证明的其余部分与 [6, 命题 8.9]中的论证相同。

□

6 关于 Calkin 代数以及到 $L(H)$中的同态

本节所讨论的空间（尤其是 Kalton-Peck 空间）可以再次取实数域或复数域。在 Kalton-Swanson 的论文 [23] 中，我们有以下重要结果，其中 H 是一个特定的不可分希尔伯特空间。

定理 6.1 (Kalton-Swanson 1982年)。 存在一个范数为 *1* 的 *-代数同态 Λ， 它将 $L(Z_2)$映到 $L(H)$，并将Id 映到 Id。此外， Λ 的核为 $S(Z_2)$。

空间 H 定义为 $L(Z_2)$ 对子空间 $Y = \{T : (T,T) = 0\}$ 取商后再完备化所得的空间，其中 (T,U) 表示定义在 $L(Z_2)$ 上的一个非平凡对称双线性形式，并满足 $(T,T) = \lim_{\mathcal{U}} \|T(e_n,0)\|^2_{Z_2}$。对于 $T \in L(Z_2)$， H中的对应元素记作 $\widetilde{T}$。

对于 $A \in L(Z_2)$，映射 $\Lambda(A)$ 定义在 H 上，定义如下:

$$\Lambda(A)\widetilde{T} = \widetilde{AT}, T \in L(Z_2).$$

这定义了从 $L(Z_2)/S(Z_2)$ 到 $L(H)$ 的范数为一的代数单同态 $\hat{\Lambda}$， Kalton 和 Swanson 还证明了，相对于第 5 节定义在 Z_2 上的辛结构，它是一个 *-同态。我们的目标是进一步研究此映射的性质，并将其扩展和推广到其他扭和。

回顾一下， B^*-代数是一个 Banach $*$-代数，其范数满足条件 $\|a^*a\| = \|a\|^2$，对所有 $a \in A$ ([31, pag 239]) 均成立；而 C^*-代数则定义为某个希尔伯特空间 H 上的 $L(H)$ 的闭 *-子代数（在 *-等距意义下）。一般而言，根据盖尔范德-奈马克-西格尔定理，可以从给定的复 B^*-代数 A 构造一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，使得 A 可等距嵌入 $L(\mathcal{H})$，成为一个 C*-子代数；因此，在复数情形下，这两个定义是一致的。特别地，复卡尔金代数 $L(\ell_2)/K(\ell_2)$ 嵌入为某个不可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的 $L(\mathcal{H})$ 的 C*-子代数。

类似地，我们现在将看到， $L(Z_2)/S(Z_2)$（实或复）可以嵌入为 $L(H)$的一个（非闭）*-子代数，其中 H 是来自 [23], 的不可分希尔伯特空间，如果赋予 $\|.\|_S$-范数。

6.1 ℓ_p的自扩张上的结构

给定 $T \in L(X,\ Y)$，回顾一下，我们将 $\|T\|_{\text{Calkin}} = \inf_{K\text{compact}}\|T+K\|$ 所对应的商范数记作 $L(X,\ Y)/K(X,\ Y)$，并且不等式 $\|T\|_S \le \|T\|_{\text{Calkin}} \le \|T\|_{L(X,Y)/S(X,\ Y)}$ 成立。

下文中， $\mathcal{U}$ 表示整数上的一个非平凡超滤子。

Pr命题 6.2。 设 $1 \le p < \infty$，令 Y为一个巴拿赫空间，并令 $T \in L(\ell_p,\ Y)$。定义 :

(a) $\alpha(T) =$下确界$\{\|T_{|Z}\|:\ \ Z \subset \ell_p$具有有限余维 $\}$;

(b) $\beta(T) = \sup\big\{\lim_{\mathcal{U}}\|Tw_n\| : (w_n)$ *is weakly null in* $\ell_p,\ \lim_{\mathcal{U}}\|w_n\| = 1\big\}$;

(c) $\gamma(T) =$极限$_{n\to\infty}\|T_{|X_n}\|$，其中 X_n表示 $\{e_k:\ \ k \ge n\}$的闭线性张成。

Then

$$\alpha(T) = \beta(T) = \gamma(T) = \|T\|_{\text{Calkin}}.$$

证明。等式 $\alpha(T) = \|T\|_{\text{Calkin}}$对巴拿赫空间之间的任意算子 T: $X \to Y$都成立。事实上，设 K: $X \to Y$是紧的，且 $\epsilon > 0$。那么存在 $y_1, \dots, y_n$属于 Y，使得对每个 $x \in B_X$，都有 $\min_k \|Kx - y_k\| < \epsilon$。考虑满足 $y_k^*(y_k) = \|y_k\|$的归一化 $y_k^* \in Y^*$，并令 $Z = \cap_{k=1}^n$核$K^*y_k^*$。现在固定 $x \in B_Z$，并令 y_k满足 $\|Kx - y_k\| < \epsilon$。由此可得 $\|y_k\| = |y_k^*(y_k - Kx)| < \epsilon$。因此， $\|Tx\| \le \|Tx - Kx\| + \|Kx - y_k\| + \|y_k\| < \|T - K\| + 2\epsilon$。我们得出结论: $\alpha(T) \le \|T\|_{\text{Calkin}}$。现在，若 $Z \subseteq X$具有有限余维，令 $X = Z \oplus F$，其中 F是有限维的。考虑 P: $X \to F$为一个投影，则 $K = TP$是紧的，且 $\|T\|_{\text{Calkin}} \le \|T - K\| = \|T_{|Z}\|$。

为证明 $\gamma(T) = \alpha(T)$，设 Z为 ℓ_p的有限余维子空间。存在$f_1, \dots, f_n \in \ell_p^* = \ell_q$使得 $Z = \cap_{i=1}^n \ker f_i$。由稠密性，对每个 $\epsilon > 0$，我们可得到有限支撑向量 $g_1, \dots, g_n$，使得 $\|f_i - g_i\|$很小，令 $W = \cap_{i=1}^n \ker g_i$。于是，对某个 k，有 $X_k \subseteq W$。由扰动估计可得 $\|T_{|X_k}\| \le \|T_{|W}\| \le \|T_Z\| + \epsilon$。因此，$\lim_n \|T_{|X_n}\| \le \alpha(T)$。

现在证明 $\beta(T) = \|T\|_{\text{Calkin}}$。取 ℓ_p中的一个弱零序列 (w_n)，满足 $\lim_{\mathcal{U}}\|w_n\| = 1$。对每个 $K \in K(\ell_p, Y)$，$\lim_{\mathcal{U}}\|Tw_n\| = \lim_{\mathcal{U}}\|(T-K)w_n\| \le \|T - K\|$。因此 $\beta(T) \le \|T\|_{\text{Calkin}}$。对于另一个不等式，固定 $\epsilon > 0$，并取有限支撑的归一化向量 $w_n \in X_n$，使得$\|T_{|X_n}\| - \epsilon < \|Tw_n\|$。取一个子序列后，我们可以假设 (w_n) 相继，因此 $\lim_n \|T_{|X_n}\| \le \lim_{\mathcal{U}}\|Tw_n\|$。

□

以下内容推广了命题 2.3

命题 6.3。 设 Y是 $\ell_p, 1 < p < \infty$的奇异自扩张。设 $T \in L(\ell_p, Y)$。那么

$$\rho_S(T) = \|T\|_S = \|T\|_{\text{Calkin}}.$$

证明。 如果 $\varepsilon < \|T\|_{\text{Calkin}} = \lim_n \|T_{[e_k, k \ge n]}\|$，那么我们可以找到 w_n归一化的相继序列，使得对每个 n都有 $\|Tw_n\| \ge \varepsilon$。令 $W = [w_n]_n$。由于 w_n 弱地趋于 0，且 $\pi T \in L(\ell_p)$ 是紧的，我们有 $\pi T w_n = d(Tw_n,\ \ell_p)$ 趋于 0。因此，取一个子序列并进行紧扰动后

在 T 上，我们可以假设 $Tw_n = v_n$ 属于 ℓ_p，进而假设 v_n 是相继的。于是，对于 S_W 中任意的 $w = \sum_i \lambda_i w_i$（即 λ_i 是一个 ℓ_p-范数为 1 的序列），$Tw = \sum_i \lambda_i v_i$ 的范数至少为 ε。因此我们有 $\rho_s(T) \geq \varepsilon$。 □

推论 6.4。设 Y 是 ℓ_p、$1 < p < \infty$ 的奇异自扩张。设 $T \in L(Y)$。则 $\rho_s(T) = \|T\|_S = \|T_{|\ell_p}\|_{\text{Calkin}}$。特别地，$T$ 是严格奇异的，当且仅当 $T_{|\ell_p}$ 是紧的。

证明。这可由命题 4.5 和命题 6.3 推出。 □

例如，若 i 表示 ℓ_p 到 Y 中的嵌入，而 π 表示商映射，则 $T := i\pi : Y \to Y$ 是严格奇异但非紧的，而 $T_{|\ell_p} = 0$。

当 $Y = Z_2$ 时，推论 6.4 是一个众所周知的结果；另一个证明以及对高维 Rochberg 空间的延拓见 [9]；同样的论证也适用于 Z_p，$1 < p < \infty$：

推论 6.5 ([9])。设 $T \in L(Z_p)$ $1 < p < \infty$。则 T 是严格奇异的，当且仅当 $T_{|\ell_p}$ 是紧的。

注记 6.6. 由此可知，若 Y 是 ℓ_p 的奇异自扩张，且 $A \in L(Y)$ 满足 $\|A\|_S < \varepsilon$，则 $A_{|\ell_p} = F + \varepsilon R$，其中 F 是有限秩的，且 $\|R\| \leq 1$。

事实上，由 $\|A\|_S = \|A_{|\ell_p}\|_S < \varepsilon$，我们有 $\|A_{\ell_p}\|_{\text{Calkin}} < \varepsilon$，因此 $A_{|\ell_p} = F + \varepsilon R$ 满足 $\|R\| \leq 1$。

推论 6.7. 设 Y 是 ℓ_p 的奇异自扩张，$1 < p < \infty$。我们考虑限制映射 $r_p \colon L(Y) \to L(\ell_p, Y)$。那么，下述映射是由 r_p 诱导的等距嵌入：

$$\widetilde{r_p} : (L(Y)/S(Y), \|.\|_S) \to (L(\ell_p, Y)/K(\ell_p, Y), \|.\|_{\text{Calkin}})$$
$$\widetilde{T} \mapsto \widetilde{T_{|\ell_p}}$$

6.2 ℓ_p 的奇异自扩张上的算子表示

我们借鉴了 [23] 中希尔伯特空间 H 的构造，定义一个更简单版本的 Kalton-Swanson 映射，该映射对 $1 < p < \infty$ 的所有取值均适用：

定义 6.8. 设 $1 \leq p < \infty$ 和 $W_p \subseteq (\ell_p)_{\mathcal{U}}$ 定义如下：

$$\widetilde{(x_n)_n} \in W_p \Leftrightarrow w - \lim x_n = 0.$$

空间 W_p 是 $(\ell_p)_{\mathcal{U}}$ 的闭子空间，因此特别地，$W := W_2$ 是一个希尔伯特空间。

命题 6.9. 设 Y 是 ℓ_p，$1 < p < \infty$ 的一个奇异自扩张。设 $\alpha_p \colon L(\ell_p, Y) \to L(W_p)$ 定义如下：

$$\alpha_p(T)(\widetilde{(x_n)_n}) = \widetilde{(Tx_n)_n} \in Y_{\mathcal{U}},$$

以及 $\beta_p = \alpha_p \circ r_p \colon L(Y) \to L(W_p)$，即

$$\beta_p(T)(\widetilde{(x_n)_n}) = \widetilde{(Tx_n)_n} \in Y_{\mathcal{U}},$$

Then

(a) α_p 且 β_p 定义良好，即对所有 $T \colon \ell_p \to Y$，$\alpha_p(T)$ 的取值都属于 $W_p \subseteq (\ell_p)_{\mathcal{U}} \subseteq Y_{\mathcal{U}}$.

(b) α_p 诱导出一个等距嵌入 $\widetilde{\alpha_p}$，将 $(L(\ell_p, Y)/K(\ell_p, Y)\ \|.\|_{\text{Calkin}})$ 嵌入到 $L(W_p)$.

(c) β_p 诱导出一个等距嵌入 $\beta_p = \widetilde{\alpha_p} \circ \widetilde{r_p}$，将 $(L(Y)/S(Y)\ \|.\|_S)$ 嵌入到 $L(W_p)$ 中。

证明。(*a*) 显然，Tx_n 在 Y中弱地收敛到 0。若 π 表示商映射，则 $\pi T \in L(\ell_p)$ 是严格奇异的，因此是紧的，所以 πTx_n 依范数收敛到 0。因此，设 $y_n \in \ell_p$ 满足$\sim\!\!\sim$ $\sim\!\!\sim d(Tx_n, y_n)$ 趋于 0。我们有 $(Tx_n)_n = (y_n)_n$ 属于 W_p。(*b*) 根据命题 6.2，我们有 $\|\alpha(T)\| = \|T\|_{\text{Calkin}}$。(*c*) 由 (*b*) 和推论 6.7 可得。

□

引理 6.10。 设 $1 \leq p < \infty$，设 $T \in L(Z_p)$，并设 (x_n) 是 ℓ_p 中的一个弱收敛到 0 的序列。*Then*

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \|i\pi T(\Omega_p x_n, x_n) - Tx_n\| = 0.$$

证明。我们先考虑 (x_n) 是相继的情形。由于 Z_p 是奇异的，算子 $\pi T_{|\ell_p}\colon \ell_p \to \ell_p$ 是严格奇异的，因而是紧的。因此，$\lim \|\pi Tx_n\| \to 0$。取子序列后，不妨设 $\sum \|Tx_n - y_n\| < \infty$，其中 (y_n) 是 ℓ_p 中的某个半归一化递增序列。令 W 和 U 分别为与序列 (x_n) 和 (y_n) 相关的块算子，其定义见 [23], 第 389 页。虽然该构造是针对 Z_2 给出的，但同样的论证表明，这些算子关于拟范数在 Z_p 上定义了等距映射。定义 $K\colon Z_p \to Z_p$，使得 $Ke_n = Tx_n - y_n$，并且 $K(0, e_n) = 0$。于是 K 是紧的，且 $(TW - U - K)_{|\ell_p} = 0$；由此可知，$TW - U - K$ 经由 π 因子分解，因此是严格奇异的，从而 $TW - U$ 也是严格奇异的。由 [22, 定理 5.4]（另见 [2, 引理 10.8.3]），我们有 $\lim \|\pi(TW - U)(0, e_n)\| = 0$；否则，$(TW - U)(0, e_n)$ 的某个子序列将等价于 Orlicz序列空间 ℓ_f 的通常基，其中 $f(t) = |t(-\log t)|^p$ 在 0 的某个邻域内。另一方面，

$$\|i\pi(TW - U)(0, e_n)\|_p = \||\pi(TW - U)(0, e_n)\| = \|i\pi T(\Omega_p x_n, x_n) - y_n\|,$$

由此得到了这一情形下的结果。

对于 (x_n) 弱收敛于零的一般情形，我们使用以下扰动论证：取一个子序列后，可以假设对每个 $n \in \mathbb{N}$，$x_n = w_n + \delta_n f_n$，其中 (w_n) 和 (f_n) 是归一化序列，且 $(w_n)_n$ 是相继的，$\text{supp} w_n \cap \text{supp}\, f_n = \emptyset$，并且 $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$。于是我们有

$$\|(\Omega_p x_n, x_n) - (\Omega_p w_n, w_n)\| = \|\Omega_p(w_n + \delta_n f_n) - \Omega_p w_n - \Omega_p(\delta_n f_n)\| + |\delta_n|.$$

此外，

$$\|\Omega_p(w_n + \delta_n f_n) - \Omega_p w_n - \Omega_p(\delta_n f_n)\| = \left\| \log\left(\frac{1}{(1+\delta_n^p)^{1/p}}\right) w_n + \delta_n \log\left(\frac{\delta_n}{(1+\delta_n^p)^{1/p}}\right) f_n \right\|_p + |\delta_n| =$$

$$\left(\left(-\frac{1}{p} \log(1+\delta_n^p) \right)^p + \left(\delta_n \log \tfrac{\delta_n}{(1+\delta_n^p)^{1/p}} \right)^p \right)^{1/p} + |\delta_n|.$$

由于 $\delta_n \to 0$，该式趋于 0。 □

设 $1 < p, q < \infty$，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。若 Y 是 ℓ_p 的奇异自扩张，$(y_n)_n$ 是 Y 中的一个序列，满足 $d(y_n, \ell_p)$ 趋于 0，并且 $(z_n)_n$ 是 ℓ_q 中的一个序列，那么我们以显然的方式定义 $< (y_n)_n, (z_n)_n >$：令其等于 $\lim_{\mathcal{U}} < r_n, z_n >$，其中 $(r_n)_n$ 是 ℓ_p 中的一个序列，满足 $d(r_n, y_n)$ 趋于 0。

命题 6.11。 设 $1 < p, q < \infty$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。若 $T \in L(Z_p)$、$(w_n)_n \in \ell_q$ 和 $(w'_n)_n \in \ell_p$ 是弱零序列，则

$$< (T^* w_n)_n, (w'_n)_n > = < (w_n)_n, (T w'_n)_n > .$$

证明。由引理 6.10 可知

$$< (T^* w_n)_n, (w'_n)_n > = \lim_{\mathcal{U}} < i\pi T^*(\Omega w_n, w_n), w'_n > .$$

注意恒等式 $< i\pi(x,y)\ x' >=< y, x' >= -B((x,y),(x',0))$，因此

$$< (T^*w_n)_n, (w_n')_n >= -\lim_{\mathcal{U}} B(T^*(\Omega w_n, w_n), (w_n', 0)) = -\lim_{\mathcal{U}} B((\Omega w_n, w_n), Tw_n').$$

选取 $y_n \in \ell_p$，使得 $d(Tw_n', y_n)$ 趋于 0，这就等于

$$-\lim_{\mathcal{U}} B((\Omega w_n, w_n), (y_n, 0)) = \lim_{\mathcal{U}} < w_n, y_n >=< (w_n)_n, (Tw_n')_n > .$$

因此 $<(T^*w_n)_n, (w_n')_n >=<(w_n)_n, (Tw_n')_n >$。 □

因此我们得到 Kalton-Swanson 映射 Λ 的一个更明确的形式:

命题 6.12。设 $1 < p, q < \infty$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。那么映射

$$\beta_p : (L(Z_p), \|.\|_S) \to L(W_p),$$

定义为

$$\beta_p(T)(\widetilde{(w_n)_n}) = \widetilde{(Tw_n)_n}$$

是等距的。此外，对于所有 $T \in L(Z_p)$，

$$\beta_p(T)^* = \beta_q(T^*).$$

证明。 β_p 是等距映射，这已在命题 6.9 中证明。若 $w = (w_n)_n \in W_q$ 且 $w' = (w_n')_n \in W_p$，要检验 *-同态性质，我们需要计算

$$< \beta_q(T^*) \circ w, w' >=< \widetilde{(T^*w_n)_n}, \widetilde{(w_n')_n} >= \lim_{\mathcal{U}} < T^*w_n, w_n' > .$$

另一方面

$$< w, \beta_p(T) \circ w' >=< \widetilde{(w_n)_n}, \widetilde{(Tw_n')_n} >= \lim_{\mathcal{U}} < w_n, Tw_n' > .$$

因此，命题 6.11 表明 $\beta_p(T)^* = \beta_q(T^*)$。 □

定义 6.13。我们用 β 表示映射 β_2，即

$$\beta : (L(Z_2), \|.\|_S) \to L(W)$$

是由下式定义的 *-等距映射

$$\beta(T)(\widetilde{(w_n)_n}) = \widetilde{(Tw_n)_n}.$$

我们用 β 表示从 $(L(Z_2)\ \|.\|_S)$ 到 $L(W)$ 的诱导 *-等距嵌入。

6.3 与 Kalton-Swanson 映射 Λ 的关系 Λ

回顾一下，$\alpha: L(\ell_2, Z_2) \to L(W)$ 定义为 $\alpha(T)((x_n)_n) = (Tx_n)_n \in W$，而 $r: Z_2 \to L(\ell_2, Z_2)$ 表示限制映射，其定义为 $r(T) = T_{|\ell_2}$。

命题 6.14. 对每个 $T \in L(Z_2)$，定义 $j(T) := (T(e_n, 0))_n \in W$。令 $j: H \to W$ 表示相应的等距嵌入。那么，对所有 $T \in L(Z_2)$，

$$\beta(T) \circ \tilde{j} = \tilde{j} \circ \Lambda(T)$$

证明. 回想一下， $H = L(Z_2)/\{(T,\ T) = 0\}$ 配备了与 $(T,\ T) = \lim_{\mathcal{U}} \|T(e_n,\ 0)\|^2_{Z_2}$ 相关的半范数，因此我们看到 j 确实诱导出一个等距嵌入 $\tilde{j}$，将 H 嵌入 W。设 $A \in L(Z_2)$，那么 $\beta(A) \in L(W)$ 定义为

$$\beta(A)(\widetilde{(x_n)_n}) = \widetilde{(Ax_n)_n}.$$

特别地，若 $T \in L(Z_2)$，则

$$\beta(A)((\widetilde{T(e_n, 0)})_n) = (\widetilde{AT(e_n, 0)})_n,$$

即 w ˜ ˜ ˜hich 意味着 $\beta(A)$ 从 jH 作用到 jH，并且 $\beta(A) \circ j = \alpha \circ r(A) \circ j = j \circ \Lambda(A)$.

□

因此，我们改进了 Kalton-Swanson 的结果，证明了 Λ 不仅具有等于 $S(Z_2)$ 的核，而且实际上在 $L(Z_2)/S(Z_2)$ 上关于 $\|.\|_S$-范数诱导了一个等距同态。

推论 6.15. *Kalton-Swanson* 映射 Λ诱导了一个从$(L(Z_2)/S(Z_2)\ \|.\|_S)$ 到 $(L(H)\ \|.\|)$的等距 *-代数同态 ˆΛ。

6.4 $L(Z_2)/S(Z_2)$ 中的完备化与闭包

Kalton 和 Swanson 提出问题： $\Lambda(L(Z_2))$ 是否在 $L(H)$ 中闭合， [23]第392页注记；这等价于询问 $\beta(L(Z_2))$ 是否在 $L(W)$ 中闭合。我们将通过研究 ℓ_2 到 Z_2 上算子的延拓性质，以否定的方式回答这一问题。

定义 6.16。 若 Y 是 $\ell_p, 1 < p < \infty$ 的自扩张，令

$$ext(\ell_p, Y) = r(L(Y)) = \{t \in L(\ell_p, Y) : t \text{ admits an extension } T \in L(Y)\}$$

并令

$$ext_K(\ell_p, Y) = ext(\ell_p, Y) + K(\ell_p, Y).$$

引理 6.17。 设 Y 是 $\ell_p, 1 < p < +\infty$ 的自扩张。则

(a) 我们有包含关系 $ext(\ell_p, Y) \subseteq ext_K(\ell_p, Y) \subseteq clos(ext(\ell_p, Y))$。

(b) $ext(\ell_p, Y)$ 的闭包与 $ext_K(\ell_p, Y)$ 的闭包相等。

(c) ext（ℓ_p, Y）是闭的，当且仅当它等于 L（ℓ_p, Y）。

证明。 （a）由于 ℓ_p 具有逼近性质，且有限秩算子总是可延拓的，因此我们有

$$K(\ell_p, Y) \subseteq clos(F(\ell_p, Y)) \subseteq clos(ext(\ell_p, Y)).$$

因此，第二个包含关系成立。（b）立即可得。（c）若 $ext(\ell_p,\ Y)$ 是闭的，应用逼近性质可知，所有紧算子都可延拓；由 [28] 可知，这意味着 $(\ell_p,\ Y)$ 是一个 UFO 对 [8], ；再由 Y 的自反性可知，$(\ell_p,\ Y)$ 是一个可延拓对（[8] 引理 1.2），也就是说， ℓ_p 上的所有算子都可延拓。

□

命题 6.18。 假设 $1 < p < \infty$，且 Y 是 ℓ_p的奇异自扩张。我们有

$$clos(r(L(Y))) = clos(ext(\ell_p, Y)) = clos(ext_K(\ell_p, Y)),$$

其中，闭包是 L（ℓ_p, Y） 中的 $\|.\|$-闭包。

证明。 证明可由定义和引理 6.17 得出

□

命题 **6.19.** 设 Y 是 $\ell_p, 1 < p < \infty$ 的奇异自扩张。以下条件等价

(a)（当 $Y = Z_2$ 时） $\Lambda(L(Z_2))$ 在 $L(H)$ 中是闭的 *(b)* $\beta(L(Y))$ 在 $L(W_p)$ 中是闭的 *(c)* $L(Y)/S(Y)$ 是 $\|.\|_S$-完备的 *(d)* $\|.\|_S$ 等价于 $L(Y)/S(Y)$ 上的商范数 *(e)* $r(L(Y)/S(Y))$ 在 $(L(\ell_p, Y)/K(\ell_p, Y)$ $\|.\|_{\text{Calkin}})$ 中是闭的 *(f)* $ext_K(\ell_p, Y)$ 在 $L(\ell_p, Y)$ 中按范数闭

证明。 (a)(b)(c) 的等价性是显然的，因为 β （以及 Λ）都在 $(L(Y)/S(Y)$ $\|.\|_S)$ 与各自的像之间诱导出一个等距映射；对 (e) 同样如此。与 (d) 的等价性是显然的，因为$\|.\|_S$ 总是被完备的商范数所控制。

˜(f) $\Rightarrow$ (c)：假设我们有一个绝对收敛级数 $\sum_n T_n$ in $(L(Y)/S(Y)$ $\|.\|_S)$，并记 $t_n = (T_n)_{|\ell_p}$。由于我们可以将 T_n 替换为任意有限秩扰动，因此可以将 t_n 替换为任意有限秩扰动；又由于 ℓ_p 具有逼近性质，我们不妨假设 $\|t_n\| \leq 2\|t_n\|_{\text{Calkin}} = 2\|T_n\|_S$。于是 $\sum_n (T_n)_{|\ell_p} = \sum_n t_n$ 在范数意义下收敛到映射 $s \in L(\ell_p, Y)$。如果 (f) 成立，那么极限映射 s 属于 $ext_K(\ell_p, Y)$，也就是说， $s + k$ 可延拓为映射 $S \in L(Y)$，其中 k是一个紧映射。因此，我们有 $\sum \tilde{T_n}$ 收敛到 $\tilde{S}$：事实上，
$\|\sum_{n=1}^N \tilde{T_n} - \tilde{S}\|_S = \|\sum_{n=1}^N t_n - s - k\|_{\text{Calkin}} \trianglelefteq \|\sum_{n=1}^N t_n - s\|$，而它收敛到 0。

(d) $\Rightarrow$ (f)：设 $\sum_n t_n$ 在 $ext_K(\ell_p, Y)$ 中绝对收敛，且 t 为其极限。设 $T_n \in L(Y)$ 满足 $k_n = (T_n)_{|\ell_p} - t_n$ 是紧算子。我们知道 $\sum_n \|\tilde{t_n}\|_{\text{Calkin}}$ 收敛，因此 $\sum \|T_n\|_S$ 收敛，故根据 (d)，将 $\|.\|_S$ 替换为 $L(Y)$ 上的商范数后，结论仍成立。我们可以用严格奇异扰动替换 T_n，使得 $\sum_n \|T_n\|$ 收敛。于是 $\sum_n T_n$ 收敛到某个 T，特别地，$\sum_n (T_n)_{\ell_p} = \sum_n t_n + k_n$ 收敛到 $T_{|\ell_p}$。由此可得 $\sum_n k_n$ 范数收敛到 $T_{|\ell_p} - t$。因此 $T_{|\ell_p} - t$ 是紧算子，这意味着 t 属于 $ext_K(\ell_p, Y)$。

□

注6.20。 已有证明表明 *[5]*，每当 Y 是一个非平凡的扭曲希尔伯特空间时，在 ℓ_2 上存在不能延拓为 Y上算子的复结构；因此 ext（ℓ_2、 Y） $\neq L$（ℓ_2、 Y），这意味着 ext（ℓ_2、 Y）不是闭的。

现在我们将这一结果改进为：当 Y是一个“渐近”非平凡的扭曲希尔伯特空间时，包括 Kalton-Peck 空间 Z_2, $ext_K(\ell_2$、 $Y)$不是闭的。

R回忆一下，一个 q拟线性映射 p Ω is C−平凡，当 Ω $- L$ 的范数至多为 C 对于某个线性 L。

在具有对称（或次对称）基的巴拿赫空间 X 上，若存在常数 $C > 0$ 使得下式成立，则称准线性映射 Ω为对称的 （分别称为次对称的）：

$$\| \Omega(x \circ \sigma) - \sigma \circ \Omega(x) \| \leq C\|x\|,$$

对所有 $x \in X$ 以及 ℕ的每个置换（分别为递增单射） σ，其中 σ 按照基 [21]对坐标进行置换，从而作用于 X。这意味着，相对于底层基的自然对称性（或次对称性），Ω的行为近似满足等变性。

定义6.21。 若存在 C，使得对任意 n，都存在 X 的有限余维子空间 Y，并且对 Y的任意 n维子空间F，Ω$|_F$ 都是 C-平凡的，则称 X 上的准线性映射Ω 是渐近平凡的。在这种情况下，我们也称诱导扭和是渐近平凡的。

非渐近平凡和的主要例子包括：(a) ℓ_p 的自扩张，其中 Ω 是非平凡且（子）对称的，包括 Kalton-Peck 空间 Z_p；或者更一般地，(b) 任何由具有次对称基的空间与其对偶进行插值所诱导的非平凡扭曲希尔伯特空间。

其他例子包括：(c) 由具有渐近ℓ_p基的空间与其对偶进行插值所诱导的扭曲希尔伯特空间， $p \neq 2$。另一方面，Suarez 的弱希尔伯特扭曲希尔伯特空间 [32] 是渐近平凡但非平凡的。此外，回顾 [5] 中的结论也会很有用：若一个准线性映射 Ω 满足以下条件，则称其为 超奇异：对任意 $C > 0$ ，都存在 $n \in \mathbb{N}$ ，使得对任意维数为 n的子空间 F ，Ω^F 都不是 C-平凡的；因此，超奇异映射不可能是渐近平凡的。

引理 6.22. 设 $F_k, k \in \mathbb{N}$ 是 $\mathbb{N}$ 的一个划分，其中各子集相继且基数为 n。设 X, Y是具有（子）对称基的空间， t 是 X 上的一个算子，并且对所有 $k \in \mathbb{N}$，子空间 $[e_i, i \in F_k]$ 都是t-不变的。若$\Omega : X \to Y$ 是一个（子）对称准线性映射，则 t 可延拓且可提升至 $X \oplus_\Omega Y$。

证明。对于 $A = \{a_k, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_k, k \in \mathbb{N}\}$，设 $a_k, b_k \in F_k$，令$t_{A,B} \in L(X, Y)$由$t_{A,B}(e_{a_k}) = e_{b_k}$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$定义，并且若 $i \notin A$，则$t_{A,B}(e_i) = 0$ 。算子 t 可表示为 n^2 个形如$t_{A,B}$的算子的线性组合，而每个算子$t_{A,B}$ 都可延拓且可提升至由$T_{A,B}(x, y) = (t_{A,B}x.t_{A,B}y)$定义的$T_{A,B}$ □

接下来，我们需要对 [5]引理 3.2 给出一个量化版本，以便通过某些平均值 $\nabla\Omega$ 来刻画 C-平凡性。若 Ω 是拟线性的，且 $(u_i)_i$ 是一个向量有限序列，作者定义

$$\nabla_{(u_i)_i}\Omega = \mathrm{Ave}_{\varepsilon_i=\pm 1}\|\Omega(\sum_i \varepsilon_i u_i) - \sum_i \varepsilon_i \Omega(u_i)\|.$$

引理 6.23. </style}设 是一个希尔伯特空间，Ω : $H \to H$ 是一个拟线性映射，而 W 是 H的一个闭子空间。存在普适常数 a, A, B，使得

(i) 若 Ω^W 是 C-平凡的，则对于 W 中任意归一化向量有限序列 $x = (x_k)_{k=1}^n$ 以及任意标量有限序列 $\lambda = (\lambda_k)_{k=1}^n$,

$$\nabla_{[\lambda x]}\Omega \leq aC\|\lambda\|_2.$$

(ii) 反过来，若对于所有 W 中的 x 及上述的 λ，都有 $\nabla_{[\lambda x]}\Omega \leq C\|\lambda\|_2$，则 Ω^W 是 $AC + B$-平凡的。

证明. </style}设 $\Omega|_W$ 对于 H的一个闭子空间 W 是 C-平凡的。那么我们可以写成 $\Omega|_W = B + L$，其中 B 是有界齐次映射，而 L 是线性的。设 $x = (x_k)_{k=1}^n$ 是 W 中的一个归一化向量序列，且 $\lambda = (\lambda_k)_{k=1}^n$ 是一个标量序列。由于 H 是 2 型，得到：

$$\begin{aligned}
\nabla_{[\lambda x]}\Omega &= \mathrm{Ave}_\pm \left\| B\left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda_k x_k\right) - \sum_{k=1}^n \varepsilon_k B(\lambda_k x_k)\right\| \\
&\leq \|B\|\mathrm{Ave}_\pm \left\|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda_k x_k\right\| + Ave_\pm \left\|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k B\lambda_k x_k\right\| \\
&\leq \|B\| k_2 \left(\sum_{k=1}^n \|\lambda_k x_k\|^2\right)^{1/2} + k_2\left(\sum_{k=1}^n \|B\lambda_k x_k\|^2\right)^{1/2} \\
&\leq 2k_2 C\|\lambda\|_2.
\end{aligned}$$

这里 k_2 是 ℓ_2的（其中一个）2 型常数。反过来，设 $(y_i, \lambda_i w_i)_{i=1}^n$ 是 $H \oplus_\Omega W$中的有限向量序列，其中 $w = (w_i)_{i=1}^n$ 归一化，且 $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i=1}^n$ 是一个符号序列，则

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (y_i, \lambda_i w_i)\right\|_\Omega &= \left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i y_i - \Omega\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \lambda_i w_i\right)\right\| + \left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \lambda_i w_i\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \Omega(\lambda_i w_i) - \Omega\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \lambda_i w_i\right)\right\| + \left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \left(y_i - \Omega(\lambda_i w_i)\right)\right\| + \left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \lambda_i w_i\right\|.
\end{aligned}$$

现在，对两边取平均，并利用 H 具有2型，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Ave}_{\pm}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(y_i,\lambda_i w_i)\right\|_{\Omega} &\le \nabla_{[\lambda w]}\Omega + k\left(\sum_{i=1}^{n}\|y_i-\Omega(\lambda_i w_i)\|^2\right)^{1/2} + k\left(\sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i w_i\|^2\right)^{1/2}\\ &\le (C+4k_2)\left(\sum_{i=1}^{n}\|(y_i,\lambda_i w_i)\|_{\Omega}^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

因此 $H\oplus_{\Omega}W$具有 2 型，常数为 $C+4k_2$。由 Maurey 延拓定理的[25] 推论 4可知，对于某个普适常数 c，H 是 $H\oplus_{\Omega}W$中 $c(C+4k_2)$-可补的，进而 Ω 在 W 上的限制是 $c(C+4k_2)$-平凡的。 □

回顾一下，分别定义在空间 X与 Y上的一对映射（τ，T）称为相容（相对于一个~准线性映射 Ω），如果存在 T到 $X\oplus_{\Omega}Y$的提升 T，其通过限制在 X 上诱导映射 τ。当 T 可以选取为范数至多为 C时，它~是 C-相容。经典相容性估计（例如参见 [5]）表明，若（τ，T）是 C-相容的，则

是 C-平凡的。这可由将 $\widetilde{T}$ 视为矩阵 $\begin{pmatrix}\tau & L\\ 0 & T\end{pmatrix}^{\Omega T-\tau\Omega}$ 并写出如下估计得出

$$\|\widetilde{T}\|\ge\|\widetilde{T}(\Omega x,x)\|_{\Omega}=\|(\tau\Omega x+Lx,Tx)\|_{\Omega}=\|Tx\|+\|(\tau\Omega-\Omega T+L)x\|,$$

对所有归一化的 x。

命题 6.24. 设 $Y=\ell_2\oplus_{\Omega}\ell_2$ 是一个非渐近平凡的扭曲希尔伯特空间，并令 $n\in\mathbb{N}$。则在 ℓ_2 上存在映射 t_n，使得 t_n 的任一紧扰动到 Y的任何提升的范数至少为 n。若Ω是（子）对称的，则 t_n 可以选取为可提升的。

证明。 我们遵循 [5]中定理 3.1 的思路。我们断言存在一个正交分解 $\ell_2=H_1\oplus H_2$（使用由该基的子序列生成的子空间），使得Ω$|_{H_1}$ 不是渐近平凡的，且Ω$|_{H_2}$ 不是超奇异的。事实上，例如若Ω$|_{H_1}$ 是渐近平凡的，则它不是超奇异的，且Ω$|_{H_2}$ 不可能是渐近平凡的，从而得证。若Ω$|_{H_1}$ 与Ω$|_{H_2}$ 都不是渐近平凡的，则由于如同 [5] 定理 3.1 的证明中那样，二者之一必为非超奇异的，我们同样得证。

由于Ω$|_{H_1}$ 不是渐近平凡的，对于稍后指定的常数 c_n，存在 n_0，使得 H_1 的每一个有限余维子空间都包含一个维数为 n_0 的子空间 E，使得限制Ω$|_E$ 不是 c_n-平凡的。我们考虑基数为 n_0的有限个互不相交的集合 F_k，$k\in\mathbb{N}$。因此，由引理 6.23，我们可以在 H_1 中找到归一化的$(e_i)_i$，使得 $[e_i,i\in F_k]$，$k\in\mathbb{N}$ 是相继的，并且对每个 k，

$$\nabla_{[(\lambda_i e_i)_{i\in F_k}]}\Omega\ge c_n$$

对于某个归一化的 $(\lambda_i)_{i\in F_k}$。另一方面，根据超奇异性的定义，[5], 我们可以在 H_2 中选取归一化的 $(f_i)_i$ 和 $C>0$，使得对于每个 k，Ω$|_{[f_i,i\in F_k]}$ 都是 C- 平凡的。我们还可以假设 $[f_i,i\in F_k]$，$k\in\mathbb{N}$ 是相继的。因此，根据引理 6.23，并适当改变常数，$\nabla_{[(\lambda_i f_i)_{i\in F_k}]}\Omega\le C$，只要 $\|(\lambda_i)_i\|_2=1$。我们还可以假设序列 $(e_i)_i$ 和 $(f_i)_i$ 在 ℓ_2 中互不相交支撑。

注意，只要通过限制得到诱导映射 U 存在提升的算子 $\widetilde{U}$，我们就将引理 6.23 应用于 $\|U\|$-平凡映射 $\Omega U-u\Omega$，得到

$$\nabla_{[\lambda_i f_i,i\in F_k]}(\Omega U-u\Omega)\le 2k_2\|\widetilde{U}\|\|(\lambda_i)_{i\in F_k}\|_2.$$

由三角不等式可得，对所有归一化的 $(\lambda_i)_{i\in F_k}$

$$\nabla_{[\lambda_i U f_i, i\in F_k]}\Omega \le C\|u\| + 2k_2\|\widetilde{U}\| \le (C+2k_2)\|\widetilde{U}\|.$$

我们将 M_n 记为 $\nabla_{[\lambda_1 x_1,\dots,\lambda_n x_n]}\Omega$ 的上确界，其中 $x_1,\dots,x_n$ 遍历所有范数不超过 1 的 x_i，而 $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ 遍历所有范数为 1 的 $\|.\|_2$ 元素。注意，由于 Ω 是准线性的，$M_n<\infty$。现在取 T 为 ℓ_2 上的任意算子，满足对所有 i都有 $Tf_i = e_i$；并假设 K 是 ℓ_2 上的 $\widetilde{}$紧算子，使得 $T+K$ 存在一个提升 T，其诱导映射为 τ。那么，在上述公式中，由于 $(T+K)f_i = e_i + Kf_i$，对于所有归一化的 $(\lambda_i)_{i\in F_k}$，我们得到：

$$\nabla_{[\lambda_i e_i + \lambda_i K f_i, i\in F_k]}\Omega \le (C+2k_2)\|\widetilde{T}\|.$$

于是，根据三角不等式以及 Ω 是准线性的这一事实：

$$\nabla_{[\lambda_i e_i, i\in F_k]}\Omega \le \nabla_{[\lambda_i K f_i, i\in F_k]}\Omega + (C+2k_2)\|\widetilde{T}\| + 2k_2 c(\Omega)(1+\|K_{|[f_i, i\in F_k]}\|)$$

给定 $\varepsilon>0$，并取足够大的 k，我们有

$$\|K_{|[f_i, i\in F_k]}\| \le \varepsilon,$$

因此，利用 Ω 的齐次性以及每个 F_k 的基数均为 n_0 这一事实，我们有

$$\nabla_{[\lambda_i K f_i, i\in F_k]}\Omega \le \varepsilon M_{n_0}.$$

由此可得

$$c_n \le \varepsilon M_{n_0} + (1+\varepsilon)2k_2 c(\Omega) + (C+2k_2)\|\tilde{T}\|,$$

因此

$$c_n \le 2k_2 c(\Omega) + (C+2k_2)\|\widetilde{T}\|.$$

因此，T的任何紧扰动都无法提升为范数小于 $C+2k_2{}^{-1}$的算子 $\widetilde{T}$，而我们只需选择 c_n，使得前一个表达式大于 n。

对于（子）对称的 Ω，在选定 $(e_i)_{i\in F_1}$ 和 $(f_i)_{i\in F_1}$之后，利用次对称性，我们可以假设 $(e_i)_{i\in F_k}$ 和 $(f_i)_{i\in F_k}$ 由一种映射得到，该映射是通过对 ℓ_2的基进行置换而诱导的，作用于 $(e_i)_{i\in F_1}$ 和 $(f_i)_{i\in F_1}$；并且可以将 T 平凡地延拓到整个 ℓ_2上。这意味着引理 6.22 适用，因此可以假设 T 可提升（且可延拓）到 Y。 □

请注意，很容易构造出使 t_n 成为例如复结构的情形，如 [5], 中的对称性，或满足其他所需性质。

推论 6.25. 设 $Y=\ell_2\oplus_\Omega\ell_2$ 是一个扭曲希尔伯特空间，且 Y^* 非渐近平凡，并设 $n\in\mathbb{N}$。那么存在一个映射 t_n，定义在 ℓ_2 上，使得将 t_n的任一紧扰动延拓到 Y^* 的范数都至少为 n。若 Ω 是（子）对称的，则可以选取 t_n 使其可延拓。

证明. 由一个简单的对偶论证即可得出。 □

推论 6.26. 设 $Y=\ell_2\oplus_\Omega\ell_2$ 是一个扭曲希尔伯特空间，且 Y^* 非渐近平凡。那么 $ext_K(\ell_2,Y) \neq L(\ell_2,Y)$。事实上，存在一个映射 $T\colon \ell_2\to\ell_2\subseteq Y$，它不属于$ext_K(\ell_2,Y)$。

证明. 我们将 $\mathbb{N}$ 划分为有限集 F_n，使得每种可能的偶数基数都无限次重复出现；并考虑序列 $(e_n)_n$ 和 $(f_n)_n$，它们在 ℓ_2中正交归一且支撑互不相交，并且 $(e_i)^{i\in\cup_{|F_k|=n}F_k}$ 和 $(f_i)^{i\in\cup_{|F_k|=n}F_k}$ 属于命题 6.24 中所考虑的类型。接着定义 T，使得对所有 $i\in\cup_k F_k$，$T(f_i)=e_i$。由此可知，T 的任何紧扰动都无法提升到 Y^*。结论由对偶性得出。 □

推论 6.27。对于每个 n，都存在一个作用于 ℓ_2 上的算子 t_n，使得 $t_n\in ext(\ell_2,\ Z_2)$，$\|t_n\|\le 1$，但对 t_n 的紧扰动的任何延拓到 Z_2 的范数都至少为 n。

证明。事实上，Kalton-Peck 映射是对称的。实际上，在这种情况下，可以参考 [5] ，其中给出了 $(e_n)_n$ 和 $(f_n)_n$的一个明确选取：$(e_n)_n$ 可选为 ℓ_2的典范基的一个子序列，这意味着 $\nabla_{[e_i,i\in F_k]}\Omega = \frac{1}{2}\sqrt{n}\log n$，因此 $c(n) = \frac{1}{2}\log n$；序列 $(f_n)_n$可以定义为基上的类 Rademacher 向量（公式见 [5] 第 3.2 节），由 Khintchine 不等式可知其满足$\nabla_{[f_i,i\in F_k]}\Omega \leq K_2\sqrt{n}$。 □

如前所述，在推论 6.27 中， t_n 可选为 ℓ_2 上的复结构。

命题 6.28。设 $Y = \ell_2 \oplus_\Omega \ell_2$ 是一个扭曲希尔伯特空间，其中Ω 是次对称且非平凡的。存在一个作用在 ℓ_2 上的算子 T，它不属于 $ext_K(\ell_2, Y)$，但属于 $\|.\|$闭包 $ext(\ell_2, Y)$。

证明。我们使用推论 6.25 中的 t_n，定义一个划分 $\mathbb{N} = \cup_n I_n$、递增双射 $\sigma_n : \mathbb{N} \to I_n$、相应的典范等距映射 $S_n : \ell_2 \to [e_i, i \in I_n]$ 以及投影 $P_n : \ell_2 \to [e_i, i \in I_n]$。然后令 $T = \sum_n n^{-1/2} S_n t_n S_n^{-1} P_n$。定义 T 的部分和可延拓，因此 T 属于 $clos(ext(\ell_2, Y))$；如果某个算子 $\widetilde{T}$延拓了 T的一个紧扰动，那么 $n^{1/2} S_n^{-1} \widetilde{T} S_n$就延拓了 t_n的一个紧扰动，这意味着对所有 n都有 $\|T\| \geq \sqrt{n}$；因此， T 的任何紧扰动都不可延拓。 □

现在我们能够对 Kalton 和 Swanson 在 [23] 中提出的第一个问题给出否定的回答。

推论 6.29。$(L(Z_2)/S(Z_2)\ \|.\|_S)$ 并不完备。等价地， $L(Z_2)$ 在 Λ 下的像在 $L(H)$中不是闭的。

证明。这是命题 6.19 和命题 6.28 的推论。按照命题 4.8 的思路，一个等价且更具说明性的论证如下，其中 Z_2 满足：若 T_n 是来自推论 6.27 的 t_n 的延拓，则 $\|T_n\|_{L(Z_2)/S(Z_2)} \geq n$ （因为 T_n 的每个严格奇异扰动限制在 t_n上都是一个紧扰动）。另一方面， $\|T_n\|_S = \|t_n\|_{\text{Calkin}} \leq 1$。因此， $\|.\|_S$ 不等价于 $L(Z_2)/S(Z_2)$上的商范数。 □

因此， Z_2 提供了一个具有不等价代数范数的代数的新例子。事实上，它们都是 *-代数范数，因为对合 * 关于这两种范数都是等距的。

定理 6.30。 *-代数 $L(Z_2)/S(Z_2)$ 存在两个不等价的 *-代数范数。

证明。 $\|.\|_S$ 由推论 6.15 诱导出一个 *-代数范数。通常的商范数也诱导出一个 *-代数范数，这一点可由以下事实推出：对于算子 $S \in L(Z_2)$， S 是严格奇异的，当且仅当其辛伴随 S^* 是严格奇异的（引理 9]）；此外还有 $\|S^*\| = \|S\|$。 □

更一般地说，对于所有次对称奇异扭曲希尔伯特空间，这两种代数范数都不等价；然而，我们不知道在这种更一般的情形下它们是否为 *-代数范数。

注意，由于存在 *-等距嵌入 β，赋范代数 $(L(Z_2)/S(Z_2)\ \|.\|_S)$ 有一个完备化，它是一个 C^*-代数（特别是满足关系 $\|a^*a\| = \|a\|^2$）。根据经典术语，[31] 第 4 章第 181 页，这意味着 $(L(Z_2)/S(Z_2)\ \|.\|)$ 是一个“A^*-代数”，其中 $\|.\|_S$ 是一种“辅助范数”。这尤其意味着，除等价意义外，商范数是唯一的巴拿赫代数范数。 [31] 推论 4.1.18。

在这条研究脉络中，我们的方法也回答了 Kalton-Swanson 提出的第二个问题，该问题也以 Castillo-Gonz´alez-Pino [7] 的形式出现。他们问， $L(Z_2)/S(Z_2)$ 是否与一个配备通常商范数 $\|.\|$ 的 aB^*- 代数（分别为 C^*- 代数） *- 同构。注意，这可由 $L(Z_2)/S(Z_2)\ \|.\|_S$ 完备推出（因为这样一来，$\|.\|$ 和 $\|.\|_S$ 就会等价），但我们知道事实并非如此。

定理 6.31. *-代数 $L(Z_2)/S(Z_2)$ 配备商范数后，并不与一个 B^*-代数 *-同构。

证明。设 t 是 ℓ_2 上的等距复结构，它可扩张为 Z_2 上的映射 T，并且满足：若$a = T \in L(Z_2)/S(Z_2)$，则 $\|a\| \geq n \in \mathbb{N}$ （推论 6.27、其后的评论以及推论 6.29 的证明）。那么 $\beta(T)$ 是 W上的酉算子，因此 $\beta(T^*T) = \beta(T)^*\beta(T) = Id_W$。因此$\beta(T^*T - Id) = 0$，从而有 $a^*a = 1$，并且 $\|a^*a\| = 1$。另一方面，$\|a\|^2 \geq n^2$。所以$\|.\|$ 不可能与一个 B^*代数范数 n-等价（因此也不可能与一个 C^*代数范数等价）。 □

7 问题与评论

关于复结构在 β下的像，我们有如下观察，这可由命题 3.13 得出：

备注 7.1. 设 Y是一个奇异扭曲希尔伯特空间，则 $I := \beta(\mathcal{I}(Y))$ 和 $J := \beta(\mathcal{J}(Y))$ 是希尔伯特空间 W 上的复结构集合，其中 $d(I, J) \geq 2$。

我们证明 $\|.\|_S$ 是 $L(Z_2)/S(Z_2)$上的 *-代数范数时，严重依赖于Z_2的特定性质，因此自然会提出以下问题：

问题 7.2. 当 Y 是一个次对称奇异扭曲希尔伯特空间时， $\|.\|_S$ 是否是 $L(Y)/S(Y)$ 上的 *-代数范数?

由于 J. Suarez 所考察的扭曲希尔伯特空间 X 是通过对 2-凸化 Tsirelson 空间及其对偶进行插值得到的，且它是渐近平凡的，因此我们的延拓技巧似乎不适用，我们也就提出以下问题：

问题 7.3. $L(X)/S(X)$ 在 $\|.\|_S$中是否完备？还是说， $L(X)/S(X)$ 上的商范数等价于某个 C^*-范数?

回想一下， [5]没有任何复结构可以延拓为 ℓ_2 的超平面上的复结构。更一般地说：

问题 7.4. 如果 j 是 ℓ_2 上的复结构，而 J 是 Z_2的一个包含 ℓ_2的超平面上的复结构，那么是否可以推出 $J_{|\ell_2} - j$ 不是严格奇异的？甚至是否存在某个 c，使得 $\|J_{|\ell_2} - j\|_S \geq c > 0$，其中 c 取决于 $\|j\|$ 和 $\|J\|$?

对半范数 $\|.\|_S$ 还需进行更深入的研究：

问题 7.5. 刻画满足以下条件的巴拿赫空间 X ： 半范数 $\|.\|_S$ 与 $L(X)/S(X)$上的商范数等价，甚至等距等价。

8 致谢

作者感谢 Niels Laustsen 对代数范数唯一性问题提出的意见并提供相关参考文献。

参考文献

[1] Arnott, M.、Laustsen, N. J. 巴拿赫空间上有界算子代数的商上的代数范数的唯一性，《泛函分析杂志》287（2024）110559。

[2] CabelloS´anchez, F., Castillo, J.M. F., 巴拿赫空间理论中的同调方法, 剑桥高等数学研究丛书第203卷, 剑桥大学出版社，2022年。

[3] Cabello S´anchez, F., Castillo, J. M. F. 和 Kalton, N. J., 《复插值与扭曲扭曲希尔伯特空间》，太平洋数学杂志 276 (2015)，第2期，287–307。[4] Cabello S´anchez, F., Castillo, J. M. F. 和Su´árez, N. J., 《关于严格奇异非线性中心化算子》，非线性分析 75 (2012) 3313–3321。[5] Castillo, J. M. F., Cuellar, W., Ferenczi, V., Moreno, Y., 《扭曲希尔伯特空间上的复结构》，以色列数学杂志 222, 787–814 (2017)[6] Castillo, J. M. F., Cuellar, W., Gonz´ález, M., Pino, R.《关于辛巴拿赫空间》。西班牙皇家精确、物理与自然科学研究院数学系列期刊 117, 56 (2023)[7] Castillo, J. M. F., Gonz´ález, M., Pino, R., 《Kalton-Peck 空间上的算子》 Z_2，以色列数学杂志 (2025) 在线 https://doi.org/10.1007/s11856-025-2754-x[8] Castillo, J. M. F., Ferenczi, V., Moreno, Y., 《关于一致有限可扩张巴拿赫空间》，J. Math. Anal. Appl. 410 (2), 670–686 (2014)[9] Castillo, J. M. F., Gonz´ález, M., Pino, R., 《Rochberg 空间的结构》，《泛函分析杂志》287 (2024) 110489[10] Castillo, J. M. F., Moreno, Y., 《严格奇异拟线性映射》，非线性分析 49 (2002), 897 – 903[11] Ferenczi, V., 《遗传有限可分解巴拿赫空间》。Studia Mathematica. v.123, p.135–149, 1997[12] Ferenczi, V.《遗传不可分解巴拿赫空间子空间上的算子》。伦敦数学学会通报 1997. Vol. 29. No. 3. pp. 338-344[13] Ferenczi, V., 《不存在最大的真算子理想》。数学年刊 387, 1043–1072 (2023).[14] Ferenczi, V. 和 Galego, E. M., 《无限维实巴拿赫空间》，J. Funct. Anal. 253 (2007) 534–549.[15] Ferenczi, V. 和 Galego, E. M., 《巴拿赫空间上的可数等距变换群》，美国数学会汇刊，362 (2010), p. 4385–4431,[16] Gonz´ález, M. 和 Martin´ón, A., 《关于算子量与 Milman 等距的注记》，Rev. Acad. Canar. Cienc., III (Num. 1) , 103–111 (1991)[17] Gowers, W. T.《Banach 超平面问题的一个解》，伦敦数学会通报 26 (1994) 523–530。[18] Gowers, W. T., Maurey, B.《无条件基序列问题》，J. Amer. Math. Soc. 6 (1993) 851–874。[19] B. E. Johnson, 《算子代数同态的连续性》，伦敦数学会杂志 42 (1967), 537—541。[20] Johnson, W. B., Philips, N. C.，准备中的手稿。[21] Kalton, N. J., 《K ¨othe 函数空间复插值过程的微分》，美国数学会汇刊 333 (1992)，第2期，479–529。[22] Kalton, N. J., Peck, N. T.《序列空间的扭和与三空间问题》，美国数学会汇刊 255 (1979) 1–30。[23] Kalton, N. J., Swanson, R. C.《一个没有拉格朗日子空间的辛巴拿赫空间》。美国数学会汇刊 273 (1982), 385–392。

[24] Lindenstrauss, J., Tzafriri, L.，《经典巴拿赫空间》第一卷：序列空间，数学及其边界领域成果，第 92 卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1977。[25] Maurey, B.，《延拓定理》，巴黎科学院 A 辑 279 （ 1974 ），329–332。[26] Maurey, B.，《算子理论与奇异巴拿赫空间》讲义。https://webusers.imj-prg.fr/~bernard.maurey/articles/csp.pdf[27] Meyer, M. J.，《某些 Calkin 代数的一个拓扑性质》，伦敦数学会通报 24（1992），591–598。[28] Moreno, Y., Plichko, A.，《关于自同构巴拿赫空间》，以色列数学杂志 169（2009），29–45。[29] Pietsch, A.《算子理想》。北荷兰出版社，阿姆斯特丹、纽约、牛津，1980。[30] Read, C. J.，《巴拿赫空间上有界算子代数的不连续导子》，伦敦数学会杂志（2）40（1989），305–326。[31] Rickart, C.，《巴拿赫代数通论》，394 页。79 先令。1960。（范诺斯特兰德，伦敦）。《数学公报》。1962；46（357）：258–259。[32] Su´arez de la Fuente, J.，《一个作为扭曲希尔伯特空间的弱希尔伯特空间》，朱西厄数学研究所杂志 19（3），855–867（2020）[33] Tarbard, M.，《具有少量但非极少量算子的 $\mathcal{L}_\infty$ 遗传不可分解可分巴拿赫空间，其 ℓ_1-对偶》，伦敦数学会杂志（2）85（2012），737–764。[34] Ware, G. K.，《Calkin 代数的范数唯一性性质》，博士学位论文，澳大利亚国立大学（2014）；可在线访问：https://openresearch-repository.anu.edu.au/handle/ 1885/14510。[35] Watbled, F.，《巴拿赫空间及其反对偶的复插值》，巴黎科学院 C. R. 321(I)（1995），1437–1440。
W. Cuellar Carrera, Departamento de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universi-dade de São Paulo, rua do Matão 1010, 05508-090 São Paulo SP, BRAZIL电子邮箱: cuellar@ime.usp.br

V. Ferenczi, Departamento de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de SãoPaulo, rua do Matão 1010, 05508-090 São Paulo SP, BRAZIL, and Equipe d'Analyse Fonctionnelle, Institut de Mathématiques de Jussieu, Sorbonne Université - UPMC, Case247, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, FRANCE电子邮箱: ferenczi@ime.usp.br