arXiv:2602.05061v1 [gr-qc] 4 Feb 2026

Tr零无穷远处度量的横向展开

Marc Mars*和 Gabriel S´anchez-P´erez†基础物理系，萨拉曼卡大学，Plaza de la Merced s/n，37008 萨拉曼卡，西班牙

2026年2月6日

摘要

本文研究零无穷远处任意阶的共形爱因斯坦方程，不对时空维数、$\mathscr{I}$的拓扑或韦尔张量的衰减条件施加任何限制。特别是，我们研究在假设零无穷远由截面（不一定是球面）分叶时，方程如何约束其几何结构。我们的方法不依赖坐标，并将共形因子 Ω 视为动力学变量。在确定 $\mathscr{I}$处的自由数据后，我们证明，任何两个在零无穷远处具有相同自由数据的渐近平坦时空，必然在任意阶上等距。此外，我们给出零无穷远的脱离式定义，并证明存在性定理：存在满足场方程至任意阶的渐近平坦时空 $\mathscr{I}$，实现给定的初始数据。

1 引言

引力辐射的研究是数学相对论中的核心问题之一。由于定义无穷远处衰减行为的度量本身也是一个动力学变量，必须在其上施加边界条件，因此这一问题在技术上也颇具挑战性。在彭罗斯的共形框架中，这一困难最容易得到处理 [53, 54]，：渐近平坦性和辐射由零边界的几何编码 $\mathscr{I}$，该边界附着于一个非物理时空（$\mathcal{M}$，g，Ω），从而使无穷远成为真正的几何对象。在这一框架下，人们提出了若干渐近平坦性的概念（例如参见 [55, 24]），通常要求在 $\mathscr{I}$的邻域内满足爱因斯坦场方程，并要求一些全局假设，例如（弱）渐近简单性 [55]。在四维时空中，这要求零无穷远具有拓扑结构$\mathbb{R}\times\mathbb{S}^2$ [50]，，进而意味着 $\mathscr{I}$ [63, 15]处的韦尔张量为零。因此，大多数关于渐近平坦性和辐射的标准定义，以及相关的新闻函数概念 [23, 23, 14]，，都与球面拓扑和四维时空密不可分，并依赖于重标度韦尔张量在零无穷远处为零这一假设。然而，已知爱因斯坦方程存在具有非球面$\mathscr{I}$的光滑解，即使在四维中也是如此，而且韦尔张量在该处未必为零 [59]。

如果给定一个已经紧化的时空，分析其在零无穷远处诱导的几何相对直接；而逆问题，即从 $\mathscr{I}$处预先给定的数据构造渐近平坦时空，则要微妙得多，并且依赖于场方程的一种正则共形表述 [17, 18]。目前关于渐近特征问题 [56, 33, 28] 的存在性结果仅适用于四维，并假设具有球面拓扑，且 $\mathscr{I}$处的韦尔张量为零。对于同样假设具有球面拓扑的渐近双曲面问题 [19, 20, 2]，，一般的初始数据会导致零无穷远处的韦尔张量非零，而这又与渐近展开中出现破坏 $\mathscr{I}$ [1]光滑性的对数项有关。这一行为与其他关于非光滑零无穷远的研究结果一致 [65, 7, 61, 62, 34]。

*marc@usal.es
†gasape21@usal.es

鉴于高维情形和非球面拓扑方面可用的结果相对较少，本文旨在全面分析共形零无穷远，不对时空维数、$\mathscr{I}$ 的拓扑（只要求其允许由截面构成的叶状结构），或无穷远处韦尔张量是否为零作任何限制。更确切地说，给定一个具有零无穷远的共形流形，我们研究渐近平坦性这一要求如何约束 $\mathscr{I}$的几何；这里，渐近平坦性是指共形爱因斯坦方程在无穷远处逐阶成立。通过分析这些方程，我们得以确定 $\mathscr{I}$处的自由数据，而不受其维数及其截面拓扑的限制。我们的方法完全不依赖坐标，并将共形因子 Ω 视为动力学变量，而非固定的背景量。确定自由数据后，我们证明，任何两个在 $\mathscr{I}$ 处具有相同自由数据的渐近平坦时空，必然在无穷阶意义下等距。我们还给出零无穷远的脱离式定义，并证明，给定这样的自由数据，存在一个渐近平坦时空，使预先指定的零超曲面成为其零无穷远。

为了研究脱离的零超曲面，采用 [48, 38, 39]中发展的超曲面数据形式体系很方便。该形式体系的基本构件是度量超曲面数据 $\{\mathcal{H}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\ell}, \ell^{(2)}\}$这一概念，其中 $\boldsymbol{\gamma}$是一个具有一个退化方向的对称张量， $\boldsymbol{\ell}$是一个一形式，而 $\ell^{(2)}$ 是定义在 $\mathcal{H}$上的标量函数。当 $\mathcal{H}$ 嵌入环境流形时，集合 $\{\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\ell}, \ell^{(2)}\}$ 分别编码环境度量 g 在 $\mathcal{H}$处完全切向、切向-横向以及完全横向的分量。度量超曲面

°数据唯一确定逆变数据 $\{P, n\}$，以及定义在 $\mathcal{H}$ 上的无挠联络 ∇。向量场 n 张成 $\boldsymbol{\gamma}$ 的核，即 $\boldsymbol{\gamma}(n, \cdot) = 0$。

虽然度量超曲面数据仅捕获环境度量的零阶信息，但自然会考虑在 $\mathcal{H}$ 处的高阶导数。令 $2\mathbf{Y}^{(k)}$ 表示沿任意横向向量场 ξ 对 g 作 k 阶李导数。我们将集合 $\{\mathbf{Y}^{(k)}\}_{k\geq 1}$ 称为横向或渐近展开。粗略地说，这一展开使我们能够沿横向逐阶重构环境度量。在先前的工作 [47]，中，我们通过证明以下结论使这一说法精确化：给定零度量超曲面数据 $\{\mathcal{H}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\ell}, \ell^{(2)}\}$ 以及定义在 $\mathcal{H}$ 上的指定张量集合 $\{\mathrm{Y}^{(k)}\}_{k\geq 1}$ ，存在一个环境流形 $(\mathcal{M}, g)$，使得对所有 $k \geq 1$，$\mathbf{Y}^{(k)} = \mathrm{Y}^{(k)}$ 。原则上，由此得到的时空不一定满足任何场方程。为了刻画使 $(\mathcal{M}, g)$ 满足指定方程（例如爱因斯坦方程）的张量集合 $\{\mathrm{Y}^{(k)}\}_{k\geq 1}$ ，我们在 [46] 中推导出一组恒等式，将环境里奇张量在 $\mathcal{H}$ 处的横向导数与张量 $\{\mathbf{Y}^{(k)}\}_{k\geq 1}$联系起来。

在 [46, 47] 中得到的恒等式非常适用于体区域中的爱因斯坦方程，但不适用于研究零无穷远。原因在于，爱因斯坦方程自然地以里奇张量表示，而共形爱因斯坦方程则涉及额外的结构。因此，本分析的第一步是将这些恒等式改写成适用于共形场方程的形式。所得恒等式不仅依赖于张量 $\{\mathbf{Y}^{(k)}\}_{k\geq 1}$，还依赖于 $\mathscr{I}$处共形因子 Ω 的横向导数，我们将其记为 $\{\sigma^{(k)}\}_{k\geq 1}$。

确立这些恒等式后，我们考虑一个共形流形 $(\mathcal{M}, g, \Omega)$，并通过施加[1] 来固定共形规范 $|\nabla\Omega|^2 = 0$，我们将其称为共形测地线规范。如 [44], 所示，一旦在与 $\mathscr{I}$横向的超曲面上指定 Ω 的取值，该规范便唯一确定。在此规范下逐阶分析共形爱因斯坦方程，可得出以下结论：

1. 在每个阶次，标量 $P^{ab}\mathrm{Y}^{(k)}_{ab}$、$\mathbf{Y}^{(k+1)}(n, n)$ 和 $\sigma^{(k+1)}$ 满足一个方程组

[1]为了 计算 $\mathscr{I}$ 处的横向展开，需要采用一个特定的代表元 of 共形 类，因此可以固定共形规范。

在 $\mathscr{I}$ 除一个值外， k均可求解，从而根据低阶数据以及 $\sigma^{(k+1)}$ 在选定截面 $\Sigma \hookrightarrow \mathscr{I}$ 上的取值确定这些量。这个初始条件体现了共形测地线规范中的剩余共形自由度。然而，当 $k = m_1$取一个非常特殊的值时，该系统不再可逆；此时我们改用另一个共形方程，即所谓的高阶瑞利方程，它使我们能够确定 $P^{ab}\mathrm{Y}^{(m_1)}{}_{ab}$， $\mathbf{Y}^{(m_1+1)}$ （n， n），以及 $\sigma^{(m_1+1)}$，前提是给定另一个自由函数 $\mathfrak{m}$ 在 Σ 上的取值。正如近期 [8], 所指出的，在四维中，零瑞利约束导出了邦迪质量损失公式。我们的结果表明，类似的结论在高维中也成立。

2. 一旦固定了 $P^{ab}\mathrm{Y}^{(k)}_{ab}$、$\mathbf{Y}^{(k+1)}(n,n)$ 和 $\sigma^{(k+1)}$，一形式 $\mathbf{Y}^{(k)}(n,\cdot)$ 就由共形方程完全确定；但在我们稍后讨论的 $k = m_2$ 的某个特定取值处除外。在该取值处，必须将 Σ上的另一个一形式 $\boldsymbol{\beta}$ 指定为自由数据，才能确定 $\mathbf{Y}^{(m_2)}(n,\cdot)$。

3. 最后，在确定了 $P^{ab}\mathrm{Y}^{(k)}_{ab}$、$\mathbf{Y}^{(k+1)}(n,n)$、 $\sigma^{(k+1)}$ 以及 $\mathbf{Y}^{(k)}(n,\cdot)$ 后，$\mathbf{Y}^{(k)}$ 的其余分量通常满足沿 n 的输运方程，该方程可从 Σ上的初始对称无迹张量 $\mathcal{Y}^{(k)}$ 出发进行积分。然而，对于偶数维时空以及 $k = m_3$ 的某个特定取值，$\mathbf{Y}^{(m_3)}$ 完全不满足输运方程，而$\mathbf{Y}^{(m_3)}$ 中未编码在 $P^{ab}\mathrm{Y}^{(m_3)}{}_{ab}$ 或 $\mathbf{Y}^{(m_3)}(n,\cdot)$ 中的分量，必须作为额外的自由数据加以指定。

我们所提出的几何与分离方法中的自由度数量，与四维 [58, 10]邦迪坐标分析的结果一致，在更高的偶数维中 [6, 57]也是如此。此外，张量 $\mathbf{Y}^{(m)}$ 只有在偶数维中才能自由指定，这一事实印证了 [31] 中已经指出的观点：奇数维时空中不存在光滑的辐射时空。这就是为什么高维中的大多数渐近平坦性定义都将时空限制为偶数维 [29, 60]。

第二和第三个条目中出现的特殊情形会导致两种潜在的阻碍，其思想与费弗曼–格雷厄姆障碍张量类似。这些障碍已在文献中特定情形下以其他名称出现（例如参见 [57]，其中它们被称为“库仑型”和“辐射型”异常）。下面更详细地看看这些阻碍为何会出现。在每一阶上确定一形式 $\mathbf{r}^{(k)} := \mathbf{Y}^{(k)}(n,\ \cdot)$ 的方程具有如下示意形式

$$\pounds_n \mathbf{r}^{(k)} + \text{lower-order terms} = 0. \tag{1}$$

该输运方程的初始条件由另一个共形方程给出，其形式如下：

$$(\mathfrak{n} - k)\,\mathbf{r}^{(k)}|_\Sigma + \text{lower-order terms} = 0, \tag{2}$$

其中 $\mathfrak{n}$ 表示 $\mathscr{I}$的维数。对于 $k \neq \mathfrak{n}$，方程（2）唯一确定 $\mathbf{r}^{(k)}|_\Sigma$，随后可将其作为初始数据来积分（1）。然而，对于 $k = \mathfrak{n}$，必须为$\mathbf{r}^{(\mathfrak{n})}$ 指定一个初始条件，这促使我们引入自由一形式 $\boldsymbol{\beta}$。此外，如果（2）中的低阶项不恒等于零，则所得时空在这一阶以上不可能是光滑的。从这个意义上说，方程（2）定义了一个障碍张量，我们称之为库仑型障碍张量，记为 $\mathcal{O}^\Sigma$。在第 6节中，我们将在四维时空中推导该障碍消失的充要条件，并将其与 $\mathscr{I}$处韦尔张量的消失联系起来。

关于 第 3 项，$\mathbf{Y}^{(k)}$ 的递归确定由另一个输运方程控制
具有.....形式的.....

$$\left(\frac{\mathfrak{n}-1}{2} - k\right) \pounds_n \mathbf{Y}^{(k)} + \text{lower-order terms} = 0. \tag{3}$$

对于 $k \neq \frac{\mathfrak{n}-1}{2}$，张量 $\mathrm{Y}^{(k)}$ 可由 Σ上的初始条件 $\mathcal{Y}^{(k)}$ 确定。当$k = \frac{\mathfrak{n}-1}{2}$（这仅在 $\mathfrak{n}$为奇数时出现）时，$\mathrm{Y}^{(k)}$ 完全不满足输运方程，而 $\mathrm{Y}^{(k)}$ 中未由 $P^{ab}\mathrm{Y}^{(k)}_{ab}$ 或 $\mathrm{Y}^{(k)}(n,\cdot)$编码的分量必须作为自由数据给定。此外，(3) 中的余项定义了另一个障碍张量，我们称之为辐射障碍张量，并记作 $\mathcal{O}^{\mathscr{I}}$。如果该张量不恒等于零，共形方程就无法在这一阶之后继续成立。我们在第 6 节中证明，这一障碍在四维时空中恒等于零；而在六维中，它与费弗曼–格雷厄姆障碍张量密切相关。我们还猜想，这种行为在高维中也会出现（猜想 6.3）。

一旦确定了自由数据 $\mathcal{D}$，我们便证明一个唯一性定理（定理5.2），表明任何两个在 $\mathscr{I}$ 处具有相同自由数据的渐近平坦时空，在各自的 $\mathscr{I}$处必然在无穷阶意义下等距。我们对渐近平坦性的定义比文献中通常采用的其他定义（例如上述定义）限制更少，因为它仅要求共形场方程在 $\mathscr{I}$ 处以无穷阶精度成立。唯一性结果的非正式表述如下。

定理 1.1（非正式表述，见定理 *5.2*）。设 $(\mathcal{M}, g, \Omega)$ 和 $(\mathcal{M}', g', \Omega')$ 是两个均以共形测地线规范表示的渐近平坦时空。假设它们各自的零无穷远具有相同的自由数据 $\mathcal{D}$。则 $(\mathcal{M}, g, \Omega)$ 和 $(\mathcal{M}', g', \Omega')$ 在 $\mathscr{I}$ 处无穷阶等距。

在确立自由数据完全刻画了零无穷远处的几何之后，我们证明其逆命题：给定抽象零超曲面上的这类自由数据，以及我们称为 $\mathscr{I}$-结构数据 （见定义 3.3），存在一个渐近平坦共形时空能够实现这些数据（定理 5.5）。该存在性定理的非正式表述如下。

定理 1.2（非正式版本，见定理 5.5）。给定 $\mathscr{I}$-结构数据和自由数据 $\mathcal{D}$，若辐射型障碍张量和库仑型障碍张量均为零，则存在一个能够实现这些数据的渐近平坦时空。

环境时空的构造在技术上颇为复杂，因为高阶共形场方程彼此高度耦合，且这种耦合随阶数递增；此外，待确定的方程数多于变量数。证明的一个关键部分是说明：一旦其余方程得到求解，冗余方程便会自动满足。这种冗余的核心在于缩并比安基恒等式。当环境时空已给定时，这种冗余无关紧要；但若要逐阶构造时空，它就成为一个核心问题，我们的存在性定理正是如此。

本文的结构如下。第2 节和3 节概述了本文所需的超曲面数据和共形几何方面的内容。在第4 节中，我们回顾了 [46] 中推导的恒等式，这些恒等式将横向展开与零超曲面处环境里奇张量的导数联系起来，并推导出适用于共形场方程的新恒等式。我们还逐阶分析方程中的冗余，并确定自由数据。在第5 节中，我们证明这些数据完全刻画了零无穷远处的几何，并且任意这样的数据集都可以由渐近平坦时空实现。最后，在第6 节中，我们详细研究了辐射型和库仑型障碍张量在其出现的最低时空维数下的性质。本文包含四个附录。附录A汇集了全文所用的若干恒等式。附录B给出了为清晰起见而未纳入正文的辅助计算。附录C 全面呈现了共形场方程。最后，附录D专门推导高阶 Raychaudhuri 方程。

符号与约定

本文中，$(\mathcal{M}, g)$ 表示一个任意的光滑 d 维半黎曼流形，其号差任意（p, q），且 p 与 q 均不为零。我们会根据需要采用无指标记法和抽象指标记号。环境指标用希腊字母表示，超曲面上的抽象指标用小写拉丁字母表示，而超曲面截面上的抽象指标则用大写拉丁字母表示。按照惯例，括住指标的方括号表示反对称化，圆括号表示对称化。对称张量积记作 $\otimes_s$。我们分别用 $\mathcal{F}(\mathcal{M})$、$\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 和 $\mathfrak{X}^\star(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{M}$ 上的光滑函数、向量场和一形式集合。子集 $\mathcal{F}^\star(\mathcal{M}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{M})$ 由 $\mathcal{M}$ 上处处非零的函数构成。函数 f 经微分同胚 Φ 的拉回记作 $\Phi^\star f$，或根据上下文简记为 f。(p, q)-张量指一个具有 p 个逆变指标和 q 个协变指标的张量场。给定任意一对 $(2, 0)$ 型张量 A^{ab} 和 $(0,2)$ 型张量 B_{cd}，我们记 $\operatorname{tr}_A \boldsymbol{B} := A^{ab}B_{ab}$。我们用符号 ∇ 表示 g 的列维-奇维塔联络，而黎曼曲率张量的约定为

$$R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

我们使用符号 $\pounds_X^{(m)} T$ 表示张量 T 沿 X 的 m 阶李导数，并用 $X^{(m)}(f)$ 表示函数 f 沿 X 的 m 阶方向导数。当 $m = 1$ 时，我们也分别记作 $\pounds_X T$ 和 $X(f)$；而当 $m = 0$ 时，它们就是恒等算子。所有流形均假定为连通且光滑。除非另有说明，嵌入超曲面均假定为双侧的。

2 超曲面数据形式体系回顾

本节回顾本文所需的超曲面数据形式体系相关概念。详情见 [38, 39]（另见 [48, 36]）。我们从一开始就限定在零情形。**零度量超曲面数据**是由以下元素组成的一组数据：$\{\mathcal{H}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\ell}, \ell^{(2)}\}$ 一个 $\mathfrak{n}$ 维流形 $\mathcal{H}$、一个对称、退化的（0，2）阶张量场 $\boldsymbol{\gamma}$（其在每一点都恰有一个退化方向）、一个一形式 $\boldsymbol{\ell}$ 以及一个定义在 $\ell^{(2)}$ 上的标量函数 $\mathcal{H}$，并要求由下式定义在 $\boldsymbol{\mathcal{A}}|_p$ 上的 $T_p\mathcal{H} \times \mathbb{R}$ 二阶协变对称张量

$$\mathcal{A}|_p\left((W, a), (V, b)\right) := \boldsymbol{\gamma}|_p(W, V) + a\boldsymbol{\ell}|_p(V) + b\boldsymbol{\ell}|_p(W) + ab\ell^{(2)}|_p$$

在每个 $p \in \mathcal{H}$ 处均非退化。五元组 $\{\mathcal{H}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\ell}, \ell^{(2)}, \mathbf{Y}\}$，其中 $\mathbf{Y}$ 是定义在 $\mathcal{H}$ 上的一个 $(0, 2)$ 对称张量场，称为**零超曲面数据**。$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 的非退化性使我们能够通过以下方式定义 P 这一二阶逆变对称张量场，以及定义在 $\mathcal{H}$ 上的向量 n：

$$\gamma_{ab}n^b = 0, \tag{4}$$
$$\ell_a n^a = 1, \tag{5}$$
$$P^{ab}\ell_b + \ell^{(2)}n^a = 0, \tag{6}$$
$$P^{ac}\gamma_{cb} + \ell_b n^a = \delta^a_b. \tag{7}$$

给定零超曲面数据，我们定义张量场

$$\mathbf{U} := \frac{1}{2}\pounds_n \boldsymbol{\gamma}, \tag{8}$$
$$\mathbf{F} := \frac{1}{2} d\boldsymbol{\ell}, \tag{9}$$

以及缩并 $\mathbf{s} := \mathbf{F}(n, \cdot)$、$\mathbf{r} := \mathbf{Y}(n, \cdot)$ 和 $\kappa_n := -\mathbf{Y}(n, n)$。注意，$\mathbf{s}(n) = 0$，因为 $\mathbf{F}$ 是一个二形式。引入由以下方式定义的 $(1,1)$ 张量 V 也很有用：

$$V^b{}_a := P^{bc}(\mathrm{Y}_{ac} + \mathrm{F}_{ac}) + \frac{1}{2}n^b \mathring{\nabla}_a \ell^{(2)}, \tag{10}$$

并写出其与 n^a 的缩并，即

$$V^b{}_a n^a = P^{bc}(\mathrm{r}_c + \mathrm{s}_c) + \frac{1}{2}n(\ell^{(2)})n^b. \tag{11}$$

请注意，这些定义完全独立于任何环境空间。为了与超曲面的标准概念相联系，我们称零度量超曲面数据 $\{\mathcal{H},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\ell},\ell^{(2)}\}$ 嵌入于半黎曼流形 $(\mathcal{M},\ g)$ 中（记作 $(\Phi,\ \xi)$），若存在一个嵌入 $\Phi\colon \mathcal{H}\hookrightarrow\mathcal{M}$，以及一个沿着 $\Phi(\mathcal{H})$ 处处横截于 $\Phi(\mathcal{H})$ 的向量场 ξ，称为支架场，使得

$$\Phi^\star(g)=\boldsymbol{\gamma},\qquad \Phi^\star\left(g(\xi,\cdot)\right)=\boldsymbol{\ell},\qquad \Phi^\star\left(g(\xi,\xi)\right)=\ell^{(2)}. \tag{12}$$

此外，若还满足以下条件，则零超曲面数据 $\{\mathcal{H},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\ell},\ell^{(2)},\mathbf{Y}\}$ 是嵌入的，

$$\frac{1}{2}\Phi^\star\left(\pounds_\xi g\right)=\mathbf{Y}. \tag{13}$$

对于嵌入数据，$\mathbf{U}$ 与 $\Phi(\mathcal{H})$ 的第二基本形式重合，其中采用满足 $\boldsymbol{\nu}(\xi)=1$ 的唯一法向一形式 $\boldsymbol{\nu}$。此外，引入 $\mathcal{H}$ 的一个（局部）基 $\{e_a\}$ 后，$\Phi(\mathcal{H})$ 处的逆度量 $g^{\alpha\beta}$ 可在基 $\{\xi,\widehat{e}_a:=\Phi_\star e_a\}$ 下写为

$$g^{\alpha\beta}\overset{\mathcal{H}}{=}P^{ab}\widehat{e}^\alpha_a\widehat{e}^\beta_b+n^a\widehat{e}^\alpha_a\xi^\beta+n^b\widehat{e}^\beta_b\xi^\alpha. \tag{14}$$

在嵌入图景中，支架向量的概念并不唯一，因为给定一个支架场 ξ，任何形如 $\xi'=z(\xi+\Phi_\star V)$ 的其他向量，只要满足 $(z,V)\in\mathcal{F}^\star(\mathcal{H})\times\mathfrak{X}(\mathcal{H})$，也都横向于 $\Phi(\mathcal{H})$。将此转译到抽象框架中，可将规范变换数据定义为

$$\mathcal{G}_{(z,V)}\left(\boldsymbol{\gamma}\right):=\boldsymbol{\gamma}, \tag{15}$$

$$\mathcal{G}_{(z,V)}\left(\boldsymbol{\ell}\right):=z\left(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\gamma}(V,\cdot)\right), \tag{16}$$

$$\mathcal{G}_{(z,V)}\left(\ell^{(2)}\right):=z^2\left(\ell^{(2)}+2\boldsymbol{\ell}(V)+\boldsymbol{\gamma}(V,V)\right), \tag{17}$$

$$\mathcal{G}_{(z,V)}\left(\mathbf{Y}\right):=z\mathbf{Y}+\boldsymbol{\ell}\otimes_s dz+\frac{1}{2}\pounds_{zV}\boldsymbol{\gamma}. \tag{18}$$

这些变换对以下对象诱导出相应的规范变换行为：P 和 n [38]，

$$\mathcal{G}_{(z,V)}\left(P\right)=P-2V\otimes_s n, \tag{19}$$

$$\mathcal{G}_{(z,V)}\left(n\right)=z^{-1}n. \tag{20}$$

给定零度量超曲面数据 $\{\mathcal{H},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\ell},\ell^{(2)}\}$，可以定义一个无挠联络 $\mathring{\nabla}$ 在 $\mathcal{H}$ 上，借助 [39]

$$\mathring{\nabla}_a\gamma_{bc}=-\ell_c\mathrm{U}_{ab}-\ell_b\mathrm{U}_{ac}, \tag{21}$$

$$\mathring{\nabla}_a\ell_b=\mathrm{F}_{ab}-\ell^{(2)}\mathrm{U}_{ab}, \tag{22}$$

在嵌入情形下，它可以与 g 的列维-奇维塔联络 ∇ 通过以下方式关联

$$\nabla_{\Phi_\star X}\Phi_\star Y\overset{\mathcal{H}}{=}\Phi_\star\mathring{\nabla}_X Y-\mathbf{Y}(X,Y)\nu-\mathbf{U}(X,Y)\xi,\qquad X,Y\in\mathfrak{X}(\mathcal{H}). \tag{23}$$

$\mathring{\nabla}$ 对逆变数据 $\{P,n\}$ 的作用结果为 [39]

$$\mathring{\nabla}_c n^b=\mathrm{s}_c n^b+P^{ba}\mathrm{U}_{ca}, \tag{24}$$

$$\mathring{\nabla}_c P^{ab}=-\left(n^aP^{bd}+n^bP^{ad}\right)\mathrm{F}_{cd}-n^an^b(d\ell^{(2)})_c. \tag{25}$$

在嵌入情形下，沿 $\mathcal{H}$ 切向方向的 ∇-导数为 ξ [38]

$$\widehat{e}^\rho_a\nabla_\rho\xi^\beta\overset{\mathcal{H}}{=}(\mathrm{r}-\mathrm{s})_a\xi^\beta+V^b{}_a\widehat{e}^\beta_b, \tag{26}$$

因此（参见（14））

$$g^{\mu\rho}\nabla_\rho\xi^\beta\overset{\mathcal{H}}{=}\left(P^{cd}\widehat{e}^\mu_d+n^c\xi^\mu\right)\left((\mathrm{r}-\mathrm{s})_c\xi^\beta+V^b{}_c\widehat{e}^\beta_b\right)+\nu^\mu\xi^\rho\nabla_\rho\xi^\beta. \tag{27}$$

(24) 的一个直接推论是，对于任意一形式 $\boldsymbol{\omega}$ [36]，

$$2n^b\mathring{\nabla}_{(a}\omega_{b)}=\pounds_n\omega_a+\mathring{\nabla}_a(\boldsymbol{\omega}(n))-2\left(\boldsymbol{\omega}(n)\mathrm{s}_a+P^{bc}\mathrm{U}_{ac}\omega_b\right), \tag{28}$$

当（ 25) 意味着，对于每个 (0，2) 张量 T_{ab} 其 P-迹沿着 n 的李导数 is

$$\mathrm{tr}_P\, \pounds_n \mathbf{T} := P^{ab}\pounds_n \mathrm{T}_{ab} = \pounds_n(\mathrm{tr}_P\, \mathbf{T}) + 4P^{ab}\mathrm{T}_{ac}\mathrm{s}_b n^c + 2P^{ac}P^{bd}\mathrm{U}_{cd}T_{ab} + n(\ell^{(2)})\mathbf{T}(n,n). \quad (29)$$

最后，我们将经常用到以下事实：每个（0，2）张量 T_{ab} 都可以唯一地分解为 [40]

$$\mathrm{T}_{ab} = \widehat{\mathrm{T}}_{ab} + \frac{\mathrm{tr}_P\, \mathrm{T} + \mathrm{T}(n,n)\ell^{(2)}}{\mathfrak{n}-1}\gamma_{ab} + 2\ell_{(a}\mathrm{T}_{b)c}n^c + \mathrm{T}(n,n)\ell_a\ell_b, \quad (30)$$

其中，$\widehat{\mathrm{T}}_{ab}$是位于所谓能量-动量映射的核上的张量，即满足 $P^{ab}\widehat{\mathrm{T}}_{ab} = 0$ 和 $\widehat{\mathrm{T}}_{ab}n^a = 0$ 的张量。我们通常称 $\widehat{\mathrm{T}}_{ab}$ 为 T_{ab} 的横向部分；或者，当 $\widehat{\mathrm{T}}_{ab} = \mathrm{T}_{ab}$ 时，我们称 T_{ab} 为横向张量。类似地，对于一形式 $\boldsymbol{\omega}$，我们定义

$$\widehat{\boldsymbol{\omega}} := \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}(n)\boldsymbol{\ell} \quad (31)$$

并称 $\widehat{\boldsymbol{\omega}}$ 为 $\boldsymbol{\omega}$ 的横向部分，它满足 $\widehat{\boldsymbol{\omega}}(n) = 0$。

3 拟爱因斯坦流形

本节回顾流形共形完备化的基本方面。相关结果众所周知。不过，我们的论述着重于“拟爱因斯坦”流形这一概念。例如，这一论述遵循 [11, 41]。我们首先回顾（$d \geq 3$）维度量 g 的舒滕张量定义，它用里奇张量表示，

$$\mathrm{Sch}_g := \frac{1}{d-2}\left(\mathrm{Ric}_g - \frac{\mathrm{Scal}_g}{2(d-1)}g\right). \quad (32)$$

我们将分别用符号 $L_{\alpha\beta}$ 和 $\underset{R}{L}$ 表示抽象指标记号中的 Schouten 张量及其迹。Schouten 标量与里奇标量的关系为 $L = \frac{R}{2(d-1)}$。由第二比安基恒等式可得

$$\nabla^\mu L_{\mu\alpha} - \nabla_\alpha L = 0, \quad (33) \qquad \nabla_\mu C^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = (d-3)\left(\nabla_\alpha L_{\beta\nu} - \nabla_\beta L_{\alpha\nu}\right), \quad (34)$$

$C^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ 为韦尔张量。在共形重标度 $\widehat{g} = \omega^2 g$ [64] 下，韦尔张量、Schouten 张量和里奇张量的变换如下：

$$\widehat{C}^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = C^\alpha{}_{\beta\mu\nu}, \quad (35)$$

$$\widehat{L}_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} - \frac{\nabla_\alpha\nabla_\beta\omega}{\omega} + \frac{2\nabla_\alpha\omega\nabla_\beta\omega}{\omega^2} - \frac{|\nabla\omega|_g^2}{2\omega^2}g_{\alpha\beta}, \quad (36)$$

$$\widehat{\nabla} = \nabla + \omega^{-1}\left(2\,\mathrm{Id}\otimes_s d\omega - \nabla\omega\otimes g\right), \quad (37)$$

$$\widehat{L} = \omega^{-2}\left(L - \frac{\Box_g\omega}{\omega} - \frac{(d-4)|\nabla\omega|_g^2}{2\omega^2}\right). \quad (38)$$

设 $(\mathcal{M}, [g])$ 是一个具有任意半黎曼号差的 d 维共形结构。对于每个 $g \in [g]$，我们构造微分算子

$$A_g(f) := (\mathrm{Hess}_g f + f\,\mathrm{Sch}_g)^{tf}, \qquad f \in \mathcal{F}(\mathcal{M}), \quad (39)$$

其中，“tf”表示相对于 g 的无迹部分。容易验证 $A_{\omega^2 g}(\omega f) = \omega A_g(f)$，因此

$$\Omega^{-2}g \in [g] \text{ is Einstein} \iff (\mathrm{Hess}_g\,\Omega + \Omega\,\mathrm{Sch}_g)^{tf} = 0.$$

该条件可用标量等价地改写为

$$q := \frac{\Box_g\Omega + \Omega L}{d} \quad (40)$$

如 $\mathrm{Hess}_g\,\Omega + \Omega\,\mathrm{Sch}_g - qg = 0$。这一讨论引出了以下定义。

定义 3.1。 设$(\mathcal{M}, g)$是一个维数为 $d \geq 3$的半黎曼流形，$\Omega \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$是一个非恒等于零的函数，而 $\mathcal{T}$是一个无迹二阶协变张量场。若四元组$(\mathcal{M}, g, \Omega\ \mathcal{T})$满足下式，则称其为拟爱因斯坦流形

$$\mathrm{Hess}_g\,\Omega + \Omega\,\mathrm{Sch}_g - qg = \mathcal{T}. \tag{41}$$

当 $\mathcal{T} = 0$时，拟爱因斯坦流形被称为真空拟爱因斯坦流形。注意，如果 $(\mathcal{M}, g,\Omega\ \mathcal{T})$ 是一个拟爱因斯坦流形，那么对于每个$\omega \in \mathcal{F}^\star(\mathcal{M})$，$(\mathcal{M}, \omega^2 g, \omega\Omega\ \omega\mathcal{T})$ 也是一个拟爱因斯坦流形。

$\widehat{\ }$由变换 $\Omega = \omega\Omega$并利用（37）和（38），可得 q在共形缩放下的变化为

$$\widehat{q} = \omega^{-1}\left(q + \frac{\langle\nabla\Omega, \nabla\omega\rangle_g}{\omega} + \frac{\Omega|\nabla\omega|_g^2}{2\omega^2}\right). \tag{42}$$

一个直接 由（41）和（34）可直接推出，对于任意拟爱因斯坦流形（$\mathcal{M}$， g，Ω $\mathcal{T}$） ，

$$\nabla_\mu q = \frac{1}{d-1}\nabla_\rho \mathcal{T}^\rho{}_\mu - L^\rho{}_\mu \nabla_\rho \Omega, \tag{43}$$

$$C^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\nabla_\alpha\Omega = \frac{\Omega}{d-3}\nabla_\alpha C^\alpha{}_{\beta\mu\nu} - 2\nabla_{[\mu}\mathcal{T}_{\nu]\beta} + \frac{2}{d-1}g_{\beta[\mu}\nabla^\rho\mathcal{T}_{\nu]\rho}. \tag{44}$$

此外，对于满足 $\Omega\nabla_\beta\mathcal{T}^{\alpha\beta} - (d-1)\mathcal{T}^{\alpha\beta}\nabla_\beta\Omega = 0$ 的任意拟爱因斯坦流形（这尤其适用于任意真空拟爱因斯坦流形），可以定义一个共形不变量

$$\lambda := 2q\Omega - |\nabla\Omega|_g^2. \tag{45}$$

其几何解释如下。考虑一个真空拟爱因斯坦流形（$\mathcal{M}$， g，Ω），并在子集 $\widehat{g} := \Omega^{-2}g$ 上定义度量 $\{\Omega \neq 0\}$。将 $\omega = \Omega^{-1}$ 代入（36），并利用拟爱因斯坦方程（41），

$$\widehat{L}_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} + \frac{\nabla_\alpha\nabla_\beta\Omega}{\Omega} - \frac{|\nabla\Omega|^2}{2\Omega^2}g_{\alpha\beta} = \frac{2q\Omega - |\nabla\Omega|_g^2}{2\Omega^2}g_{\alpha\beta} = \frac{\lambda}{2}\widehat{g}_{\alpha\beta}.$$

因此，除一个数值因子外， λ是与（$\mathcal{M}$， $[g]$）的爱因斯坦代表度量相关联的宇宙学常数。因此，讨论 λ-真空拟爱因斯坦流形是有意义的。

在 $\Omega \neq 0$ 所在的点处，可以定义重标度威尔张量 $\mathfrak{D}^\alpha{}_{\beta\mu\nu} := \Omega^{3-d}C^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$。由（44），

$$\nabla_\alpha\mathfrak{D}^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = 2(d-3)\Omega^{2-d}\left(\nabla_{[\mu}\mathcal{T}_{\nu]\beta} - \frac{1}{d-1}\nabla_\alpha\mathcal{T}^\alpha{}_{[\nu}g_{\mu]\beta}\right). \tag{46}$$

由此可知，对于 λ-真空拟爱因斯坦流形，重标度威尔张量在 $\{\Omega \neq 0\}$的闭包上满足一个正则偏微分方程。下面我们将证明， $\{\Omega \neq 0\}$ 在 $\mathcal{M}$上稠密，因此 $\mathfrak{D}^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$在整个 $\mathcal{M}$上都满足一个正则偏微分方程。然而，这并不意味着 $\mathfrak{D}^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ 可正则延拓至 $\{\Omega = 0\}$。引理的第一部分是众所周知的，参见例如 [35]。第二部分专家们可能也已知晓，但我们未能在文献中找到明确的证明。

引理 3.2. 设$(\mathcal{M}, g,\Omega)$ 为具有常数 λ且满足$\{\Omega = 0\} \neq \emptyset$的 λ-真空拟爱因斯坦流形。那么，

1. 若 $\lambda \neq 0$，$\{\Omega = 0\}$ 是一个嵌入超曲面，其非零法向量为 $\nabla\Omega$。此外，当 $\lambda > 0$时它是类空的，当 $\lambda < 0$时它是类时的。

2. 若 $\lambda = 0$，则除去（可能为空的）一组孤立点 $\{p_i\}$，$\{\Omega = 0\}$ 是一个具有处处非零法向量 $\nabla\Omega$的嵌入零超曲面。

证明。若点 $p \in \mathcal{M}$ 满足 $\Omega|_p = 0$ 且 $\nabla\Omega|_p = 0$，则称其为奇点。于是，由方程（45）可知，在情形 $\{\Omega = 0\}$ 下，该集合不可能含有任何奇点，因此它是一个光滑嵌入超曲面。向量场 $\nabla\Omega$ 是 $\{\Omega = 0\}$ 的法向量，再次根据方程（45），我们看到，当 $\{\Omega = 0\}$ 时它是类空的，而当 $\lambda > 0$ 时它是类时的 $\lambda < 0$。

对于条目 2.，我们首先证明奇点必然是孤立的。令 $p \in \{\Omega = 0\}$ 为一个奇点，并定义 $q_p := q(p)$。由 (42) 可知，q_p 的变换为 $\hat{}q_p = \omega(p)^{-1}q_p$，因此其为零或非零是一个共形不变的性质。下面证明 $q_p \neq 0$。令 $\{e_a\}$ 为 $T_p\mathcal{M}$ 的一个正交归一基，$\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ 为一个区间，并令 $\gamma(v)$、$v \in \mathcal{I}$ 为一条从 p 出发的仿射参数化测地线。令 $\{e_a(v)\}$ 为 $T_{\gamma(v)}\mathcal{M}$ 处的基，它由沿着 $\gamma(v)$ 对 $\{e_a\}$ 进行平行移动得到。定义以下量

$$\tilde{\Omega}(v) := \Omega(\gamma(v)), \qquad \tilde{\Omega}_a(v) := \langle \nabla\Omega|_{\gamma(v)}, e_a(v)\rangle_g, \qquad \tilde{q}(v) := q(\gamma(v)).$$

若 $\eta_{ab} := g(e_a, e_b)$，则对所有 $v \in \mathcal{I}$，$g(e_a(v)\ e_b(v)) = \eta_{ab}$。注意到

$$\nabla\Omega|_{\gamma(v)} = \eta^{ab}\tilde{\Omega}_a(v)e_b(v), \tag{47}$$

其中 $\eta^{ab} := \eta_{ab}$。下面建立以下方程，

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\Omega}}{dv} &= \langle\dot{\gamma}, \nabla\Omega|_{\gamma(v)}\rangle_g = \eta^{ab}\tilde{\Omega}_a(v)\langle\dot{\gamma}(v), e_a(v)\rangle_g, \\
\frac{d\tilde{\Omega}_a}{dv} &= (\nabla_{\dot{\gamma}}\nabla_{e_a}\Omega)|_\gamma = (\mathrm{Hess}_g\,\Omega)|_\gamma(\dot{\gamma}, e_a) = \tilde{q}\langle\dot{\gamma}, e_a\rangle_g - \tilde{\Omega}\,\mathrm{Sch}_g(\dot{\gamma}, e_a), \\
\frac{d\tilde{q}}{dv} &= \nabla_{\dot{\gamma}}q|_\gamma = -\,\mathrm{Sch}_g(\dot{\gamma}, \nabla\Omega) = -\eta^{ab}\,\mathrm{Sch}_g(\dot{\gamma}, e_a)\tilde{\Omega}_b,
\end{aligned} \tag{48}$$

其中第一个由 (47) 得出，第二个由 (41) 得出，最后一个由 (43) 得出。我们还计算以下结果以供后续使用

$$\frac{d^2\tilde{\Omega}}{dv^2} = \nabla_{\dot{\gamma}}\nabla_{\dot{\gamma}}\Omega|_\gamma = \mathrm{Hess}_g\,\Omega(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \tilde{q}g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) - \tilde{\Omega}\,\mathrm{Sch}_g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}). \tag{49}$$

~ ~方程（48）构成了关于 $\{\Omega、\Omega_a、\tilde{q}\}$ 的齐次常微分方程线性一阶系统。由于 ~ ~p 是一个奇点，因此 $\Omega(0) = \Omega_a(0) = 0$。此外，若 $q_p = 0$，则还有 $\tilde{q}(0) = 0$，故由解的唯一性，$\gamma(v)$ 上的所有点都将是满足 $q = 0$ 的奇点。由于 γ 是任意的，可知满足 $q = 0$ 的奇点集合是开集（显然也是闭集）。由于 $\mathcal{M}$ 是连通的，这个集合就是整个 $\mathcal{M}$，这与 Ω 不恒为零这一事实矛盾。因此，在任意奇点处都有 $q_p \neq 0$。接下来证明奇点是孤立的。由 $q_p \neq 0$，从（41）可得 $\mathrm{Hess}_g\Omega|_p \neq 0$，因此 p 是 Ω 的一个非退化临界点。根据莫尔斯引理 [5]，存在 p 的一个邻域 $\mathcal{U}$ 及坐标$\{x^\alpha\}_{\alpha=1}^d$，使得 $x^\alpha(p) = 0$，且 $\Omega = -(x^1)^2 - \cdots - (x^\sigma)^2 + (x^{\sigma+1})^2 + \cdots + (x^d)^2$,，其中数值 σ 为莫尔斯指数（即海森矩阵的惯性指数）。显然，微分 $d\Omega$ 在 $\mathcal{U}$ 上仅于 p 处消失，因此 p 是孤立的，而 $\nabla\Omega$ 是（$\{\Omega = 0\} \setminus \{p\}$）$\cup\mathcal{U}$ 的非零法向量，故由（45）可知该集合是一个光滑零超曲面（它也可能为空，例如当 g 为黎曼的时）。 □

接下来，我们将 $\mathscr{I}$ 定义为满足 $\Omega = 0$ 且 $\nabla\Omega \neq 0$的点集。方程 (41)、(43) 和 (46) 称为共形场方程 [21, 22]。它们的关键性质是在 $\mathscr{I}$处正则。

设 $(\mathcal{M}, g, \Omega)$ 为具有 $\lambda = 0$的 $d = \mathfrak{n}+1$ 维（真空）拟爱因斯坦流形。考虑嵌入 $\Phi: \mathscr{I} \hookrightarrow \mathcal{M}$ 以及支架场 ξ，并令 $\{\mathscr{I}, \gamma, \ell, \ell^{(2)}\}$ 为相应的嵌入零度量超曲面数据。由于 $\nabla\Omega$ 非零、为零且与 $\mathscr{I}$相切，因此必然存在非零函数 σ，使得 $\nabla\Omega = \sigma\nu$（因而 $\pounds_\xi\Omega = \sigma$）于 $\mathscr{I}$上。进一步地，将（41）拉回至 $\{\Omega = 0\}$，并注意到 $e_a^\alpha e_b^\beta\nabla_\alpha\nabla_\beta\Omega = \frac{1}{2}e_a^\alpha e_b^\beta\left(\pounds_{\nabla\Omega}g\right)_{\alpha\beta} = \sigma\mathrm{U}_{ab}$，可得

即 $\mathbf{U}=q\sigma^{-1}\boldsymbol{\gamma}$，因此 $\mathscr{I}$ 为全脐的。此外，共形自由度 $g'=\omega^2 g$ 在 $\mathscr{I}$ 上留下了如下形式的剩余共形自由度

$$\boldsymbol{\gamma}'=\omega^2\boldsymbol{\gamma},\qquad \boldsymbol{\ell}'=\omega^2\boldsymbol{\ell},\qquad \ell^{(2)\prime}=\omega^2\ell^{(2)},\qquad P'=\omega^{-2}P,\qquad n'=\omega^{-2}n.$$

由于 $\nabla'\Omega'=\omega^{-1}\nabla\Omega=\omega^{-1}\sigma\nu=\omega\sigma\nu'$ 在 $\mathscr{I}$ 上，因此函数 σ 按 $\sigma'=\omega\sigma$ 缩放，而 $q|_{\mathscr{I}}$ 按 (参见 (42)) 缩放 $q'\overset{\mathscr{I}}{=}\omega^{-1}q+\omega^{-2}\sigma\pounds_n\omega$。函数 q 和 ω 显然与支架场无关，因此 $q|_{\mathscr{I}}$ 和 $\omega|_{\mathscr{I}}$ 是规范不变量。另一方面 $\sigma=\pounds_\xi\Omega|_{\mathscr{I}}$ 具有如下规范变换行为

$$\mathcal{G}_{(z,V)}\sigma=z\sigma. \tag{50}$$

还要注意，$q|_{\mathscr{I}}$ 和 $\sigma|_{\mathscr{I}}$ 并非相互独立，因为由 (45) 可得，

$$\nabla^\alpha\Omega\nabla_\alpha\nabla_\beta\Omega=\frac{1}{2}\nabla_\beta\big(|\nabla\Omega|_g^2\big)\overset{\mathscr{I}}{=}q\nabla_\beta\Omega,$$

因此 $q|_{\mathscr{I}}$ 是 $\nabla\Omega=\sigma\nu$ 在 $\mathscr{I}$ 处的表面引力。鉴于 $\nabla_\nu\nu=\kappa_n\nu$ (参见 (23))，我们还有

$$\nabla_{\alpha\nu}(\sigma\nu)=(\pounds_n\sigma+\sigma\kappa_n)\sigma\nu,$$

因此 $q\overset{\mathscr{I}}{=}\pounds_n\sigma+\sigma\kappa_n$。有了这一关系，利用附录 138) 中的 (A ，很容易验证将 (40) 拉回到 $\Omega=0$ 后会自动成立。这引出了以下“普适结构”的定义。这一概念在文献中很常见，例如 [23, 3, 9, 27]。这里我们只是将其调整到度量超曲面数据的语境中。

定义 3.3。若 $\{\mathscr{I},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\ell},\ell^{(2)},\sigma,\mathfrak{q}\}$ 是 $\mathscr{I}$-结构数据，则称之为 $\{\mathscr{I},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\ell},\ell^{(2)}\}$ 为零度量超曲面数据、$\sigma\in\mathcal{F}^\star(\mathscr{I})$、$\mathfrak{q}\in\mathcal{F}(\mathscr{I})$ 且 $\mathbf{U}=\mathfrak{q}\sigma^{-1}\boldsymbol{\gamma}$。此外，$\sigma$ 和 $\mathfrak{q}$ 的规范变换分别为 $\mathcal{G}_{(z,V)}\sigma:=z\sigma$ 和 $\mathcal{G}_{(z,V)}\mathfrak{q}:=\mathfrak{q}$。进一步地，我们定义 $\{\mathscr{I},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\ell},\ell^{(2)},\sigma,\mathfrak{q}\}$ 的共形变换 $\mathcal{C}_\omega$，其中 $\omega\in\mathcal{F}^\star(\mathscr{I})$ 是一个规范不变函数（称为共形因子），其定义为

$$\mathcal{C}_\omega\boldsymbol{\gamma}=\omega^2\boldsymbol{\gamma},\qquad \mathcal{C}_\omega\boldsymbol{\ell}=\omega^2\boldsymbol{\ell},\qquad \mathcal{C}_\omega\ell^{(2)}=\omega^2\ell^{(2)},\qquad \mathcal{C}_\omega\sigma=\omega\sigma,\qquad \mathcal{C}_\omega\mathfrak{q}=\omega^{-1}\mathfrak{q}+\omega^{-2}\sigma\pounds_n\omega.$$

不难验证 $\mathcal{C}_\omega\circ\mathcal{G}_{(z,V)}=\mathcal{G}_{(z,V)}\circ\mathcal{C}_\omega$。

注意，给定 $\mathscr{I}$-结构数据和 $X\in\mathfrak{X}(\mathscr{I})$，沿 X 在 $\mathscr{I}$ 处的 -导数，根据（23）和（24），为

$$\nabla_X(\nabla\Omega)=\sigma P^{ab}\mathrm{U}_{bc}X^c e_a+\big(\sigma(\mathbf{s}-\mathbf{r})+d\sigma\big)(X)n=\mathfrak{q}X+\big(\sigma(\mathbf{s}-\mathbf{r})+d\sigma-\mathfrak{q}\boldsymbol{\ell}\big)(X)n. \tag{51}$$

接下来，我们定义嵌入版本的数据，以确保 σ 与 ν 和 ∇ 在 $\mathscr{I}$ 处的比例函数 Ω 相一致，并且 $\mathfrak{q}$ 是标量 q （40）中定义的拉回。

定义 3.4。我们称 $\{\mathscr{I},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\ell},\ell^{(2)},\sigma,\mathfrak{q}\}$ 在 (Φ,ξ) 中嵌入于 $(\mathcal{M},g,\Omega)$，如果 $\{\mathscr{I},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\ell},\ell^{(2)}\}$ 在 (Φ,ξ) 中嵌入于 $(\mathcal{M},g)$，$\Omega=0$ 属于 $\Phi(\mathscr{I})$，并且还满足 $\nabla\Omega\overset{\mathscr{I}}{=}\sigma\nu$ 和 $\mathfrak{q}=\sigma\kappa_n+\pounds_n\sigma$。

根据定义 $\mathfrak{q}$ 3.3 中的共形变换，可知，只要 $\mathscr{I}$ 存在截面，就总能找到一个满足以下条件的共形因子 ω：$\omega^2\mathfrak{q}+\sigma\pounds_n\omega=0$，因此 $\mathcal{C}_\omega\mathfrak{q}=0$。剩余的共形自由度是在任意截面上的函数 ω。在这些共形规范中的任意一种下 $\mathscr{I}$ 均为全测地的，$\mathbf{U}=0$。

4 度量的横向展开

在先前的工作中 [46, 47] ，我们计算了环境里奇张量的 m阶横向导数，并将其表示为一般零超曲面 g 上环境度规的横向导数$\mathcal{H}$。本节列出本文其余部分所需的结果。为简化记号，引入张量

$$\mathcal{K}^{(m)} := \pounds_\xi^{(m)} g, \qquad \mathbf{Y}^{(m)} := \frac{1}{2}\Phi^\star \mathcal{K}^{(m)}, \qquad \mathbf{r}^{(m)} := \mathbf{Y}^{(m)}(n,\cdot), \qquad \kappa^{(m)} := -\mathbf{Y}^{(m)}(n,n),$$

以及

$$\mathcal{R}^{(m)} := \Phi^\star\big(\pounds_\xi^{(m-1)} \mathrm{Ric}\,\big), \quad \dot{\mathcal{R}}^{(m)} := \Phi^\star\big(\pounds_\xi^{(m-1)} \mathrm{Ric}(\xi,\cdot)\big), \quad \ddot{\mathcal{R}}^{(m)} := \Phi^\star\big(\pounds_\xi^{(m-1)} \mathrm{Ric}(\xi,\xi)\big)$$

对于 $m \geq 1$。我们还记 $\mathcal{K}^{(0)} := g$。注意，$\mathbf{Y}^{(1)}$,$\mathbf{r}^{(1)}$, $\kappa^{(1)}$ 分别与 $\mathbf{Y}$,$\mathbf{r}$ κ_n相同。下文将张量 $\{\mathbf{Y}^{(1)}$,$\mathbf{Y}^{(2)}, \ldots\}$ 称为横向的（或渐近）展开。度量的其余导数，即在 $\mathcal{H}$ 处的张量 $\mathcal{K}^{(m)}(\xi,\cdot)$，由下式给出

$$\mathcal{K}^{(1)}(\xi,\ e_a) \overset{\mathcal{H}}{=} \frac{1}{2}\mathring{\nabla}_a \ell^{(2)}, \qquad \mathcal{K}^{(1)}(\xi,\xi) = 0, \qquad \mathcal{K}^{(m)}(\xi, e_a) \overset{\mathcal{H}}{=} 0, \qquad \mathcal{K}^{(m)}(\xi,\ \xi) \overset{\mathcal{H}}{=} 0 \qquad \forall m \geq 2 \tag{52}$$

在假设 $\nabla_\xi \xi = 0$ [46]下。注意，（52）与（14）共同推出

$$e_b^\mu \mathcal{K}_\mu{}^\rho \overset{\mathcal{H}}{=} \left(2P^{cd}\mathrm{Y}_{bc} + \frac{1}{2}n^d \mathring{\nabla}_b \ell^{(2)}\right) e_d^\rho + 2\mathrm{r}_b \xi^\rho, \qquad \xi^\mu \mathcal{K}_\mu{}^\rho \overset{\mathcal{H}}{=} \frac{1}{2}P^{ab}\mathring{\nabla}_a \ell^{(2)} e_b^\rho + \frac{1}{2}n(\ell^{(2)})\xi^\rho, \tag{53}$$

and

$$\mathcal{K}^\mu{}_\mu \overset{\mathcal{H}}{=} 2\,\mathrm{tr}_P\, \mathbf{Y} + n(\ell^{(2)}), \qquad \mathcal{K}^{(m)\mu}{}_\mu = 2\,\mathrm{tr}_P\, \mathbf{Y}^{(m)} \quad \forall m \geq 2. \tag{54}$$

特别地,

$$\nu^\mu \mathcal{K}_\mu{}^\rho \overset{\mathcal{H}}{=} \left(2P^{cd}\mathrm{r}_c + \frac{1}{2}n(\ell^{(2)})n^d\right) e_d^\rho - 2\kappa_n \xi^\rho. \tag{55}$$

还要回顾，对于任意两个对象 S 和 T，它们的任意乘积 $S \circledast T$（包括张量缩并）以及任意微分算子 $\mathcal{D}$,

$$\mathcal{D}^{(m)}\big(S \circledast T\big) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \big(\mathcal{D}^{(i)} S\big) \circledast \big(\mathcal{D}^{(m-i)} T\big). \tag{56}$$

一般而言，我们采用以下记号 $A^{(m)} := \pounds_\xi^{(m-1)} A$, $m \geq 1$对于任意张量 A。如[46], 交换子 $[\pounds_\xi^{(m)}$ 所示，$\nabla]$ 作用于 A 时由下式给出

$$\begin{aligned}[\pounds_\xi^{(m)}, \nabla_\gamma] A^{\alpha_1\cdots\alpha_q}_{\beta_1\cdots\beta_p} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k+1} \Bigg(&\sum_{j=1}^{q} A^{(m-k)\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\sigma\alpha_{j+1}\cdots\alpha_q}_{\beta_1\cdots\beta_p} \Sigma^{(k+1)\alpha_j}{}_{\sigma\gamma} \\ &- \sum_{i=1}^{p} A^{(m-k)\alpha_1\cdots\alpha_q}_{\beta_1\cdots\beta_{i-1}\sigma\beta_{i+1}\cdots\beta_p} \Sigma^{(k+1)\sigma}{}_{\beta_i\gamma} \Bigg), \end{aligned} \tag{57}$$

其中 $\Sigma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}$（$\nabla_\mu \mathcal{K}_{\nu\beta} + \nabla_\nu \mathcal{K}_{\mu\beta} - \nabla_\beta \mathcal{K}_{\mu\nu}$）以及 $\Sigma^{(m)} := \pounds_\xi^{(m-1)}\Sigma$。我们还定义张量 $\Sigma_{\alpha\mu\nu} := g_{\alpha\beta}\Sigma^\beta{}_{\mu\nu}$ 以及 $\Sigma^{(m)} := \pounds_\xi^{(m-1)}\Sigma$，并注意到 $\Sigma^{(m)}_{\alpha\mu\nu} \neq g_{\alpha\beta}\Sigma^{(m)\beta}{}_{\mu\nu}$。将（57）应用于 $A = df$ 即可得到如下结果。

命题 4.1。设 $\xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$，且 $m \geq 1$为整数。则对于任意函数 f，以下恒等式成立

$$\pounds_\xi^{(m)} \nabla_\alpha \nabla_\beta f = \nabla_\alpha \nabla_\beta \big(\pounds_\xi^{(m)}(f)\big) - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k+1} \nabla_\sigma \big(\pounds_\xi^{(k)}(f)\big) \Sigma^{(m-k)\sigma}{}_{\beta\alpha}. \tag{58}$$

因此，

$$\pounds_\xi^{(m)} \Box_g f = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \big(\pounds_\xi^{(i)} g^{\alpha\beta}\big) \left(\nabla_\alpha \nabla_\beta \big(\pounds_\xi^{(m-i)}(f)\big) - \sum_{k=0}^{m-i-1} \binom{m-i}{k+1} \nabla_\sigma \big(\pounds_\xi^{(k)}(f)\big) \Sigma^{(m-i-k)\sigma}{}_{\beta\alpha} \right). \tag{59}$$

证明。利用（57）以及 $A = df$ 和 $\pounds_\xi d = d\pounds_\xi$，使得 $A^{(k)} = d(\pounds_\xi^{(k-1)}(f))$，（58）即得。恒等式（59）可将（56）中的（58）代入后立即得到，即

$$\pounds_\xi^{(m)} \Box_g f = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \big(\pounds_\xi^{(i)} g^{\alpha\beta}\big) \pounds_\xi^{(m-i)} \nabla_\alpha \nabla_\beta f.$$

□

文献 [46, 47] 中的主要结果之一是计算 $\mathcal{R}_{ab}^{(m)}$、$\dot{\mathcal{R}}_a^{(m)}$和 $\ddot{\mathcal{R}}^{(m)}$ 的首阶项，即 $\dot{\mathcal{R}}_a^{(m)}$和 $\ddot{\mathcal{R}}^{(m)}$，精确到 $m+1$ 阶，以及 $\mathcal{R}_{ab}^{(m)}$，精确到 m阶。本文还需要 $\dot{\mathcal{R}}_a^{(m)}$，精确到 m阶。为避免正文过于冗长，我们将计算推迟到附录 B。结果如下。

命题 4.2 ([46] 和命题 B.2)**.** 设 $\{\mathcal{H}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\ell}, \ell^{(2)}\}$ 是零度量超曲面数据(Φ, ξ)嵌入于 $(\mathcal{M}, g)$，并将 ξ 从 $\Phi(\mathcal{H})$ 通过 $\nabla_\xi \xi = 0$延拓。设 $m \geq 2$ 为一个整数。则，

$$\ddot{\mathcal{R}}^{(m)} = -\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m+1)} + \mathcal{O}^{(m)}, \tag{60}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{R}}_a^{(m)} &= \mathrm{r}_a^{(m+1)} + P^{bc} \mathring{\nabla}_b \mathrm{Y}_{ac}^{(m)} - 2m P^{bc} \mathrm{r}_b \mathrm{Y}_{ac}^{(m)} - \mathring{\nabla}_a \big(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m)}\big) + \big(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m)}\big)(\mathrm{r}_a - \mathrm{s}_a) \\ &\quad + \big(P^{bc} \mathrm{Y}_{ab} - 3V^c{}_a\big) \mathrm{r}_c^{(m)} + \left(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y} - \frac{m}{2} n(\ell^{(2)})\right) \mathrm{r}_a^{(m)} + \mathcal{O}_a^{(m-1)}, \end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ab}^{(m)} &= -2\pounds_n \mathrm{Y}_{ab}^{(m)} - (2m\kappa_n + \operatorname{tr}_P \mathbf{U})\, \mathrm{Y}_{ab}^{(m)} - (\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m)}) \mathrm{U}_{ab} + 4P^{cd} \mathrm{U}_{c(a} \mathrm{Y}_{b)d}^{(m)} \\ &\quad + 4(\mathrm{s} - \mathrm{r})_{(a} \mathrm{r}_{b)}^{(m)} + 2\mathring{\nabla}_{(a} \mathrm{r}_{b)}^{(m)} - 2\kappa^{(m)} \mathrm{Y}_{ab} + \mathcal{O}_{ab}^{(m-1)}, \end{aligned} \tag{62}$$

其中，$\mathcal{O}^{(m)}$、$\mathcal{O}_a^{(m)}$和 $\mathcal{O}_{ab}^{(m)}$ 分别是仅依赖于度量数据 $\{\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\ell}, \ell^{(2)}\}$ 和 $\{\mathbf{Y}.....\mathbf{Y}^{(m)}\}$的标量、一形式和一个*(0,2)*阶对称张量。此外，

$$\mathcal{R}_{ab}^{(m)} n^b = -\pounds_n \mathrm{r}_a^{(m)} - \big(2(m-1)\kappa_n + \operatorname{tr}_P \mathbf{U}\big) \mathrm{r}_a^{(m)} - \mathring{\nabla}_a \kappa^{(m)} + \mathcal{O}_{ab}^{(m-1)} n^b, \tag{63}$$

$$\begin{aligned} P^{ab} \mathcal{R}_{ab}^{(m)} &= -2\pounds_n \big(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m)}\big) - 2\,(m\kappa_n + \operatorname{tr}_P \mathbf{U}) \operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m)} + 2\kappa^{(m)} \big(n(\ell^{(2)}) - \operatorname{tr}_P \mathbf{Y}\big) \\ &\quad - 4P\big(\mathbf{r} + \mathbf{s}, \mathbf{r}^{(m)}\big) + 2 \operatorname{div}_P \mathbf{r}^{(m)} + P^{ab} \mathcal{O}_{ab}^{(m-1)}, \end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{R}}_a^{(m)} n^a &= -\kappa^{(m+1)} + \operatorname{div}_P \mathbf{r}^{(m)} - P^{ab} P^{cd} \mathrm{U}_{bd} \mathrm{Y}_{ac}^{(m)} - \pounds_n \big(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m)}\big) - \kappa_n \operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m)} \\ &\quad - 2P\big((m+1)\mathbf{r} + 2\mathbf{s}, \mathbf{r}^{(m)}\big) - \left(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y} - \frac{m+3}{2} n(\ell^{(2)})\right) \kappa^{(m)} + \mathcal{O}_a^{(m-1)} n^a. \end{aligned} \tag{65}$$

情形 $m = 1$ 下对应的表达式，即对于 $\mathcal{R}_{ab}^{(1)}$、$\dot{\mathcal{R}}_a^{(1)}$和 $\ddot{\mathcal{R}}^{(1)}$，如下所示[37, 46]

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ab}^{(1)} = \mathcal{R}_{ab} &= \mathring{R}_{(ab)} - 2\pounds_n \mathrm{Y}_{ab} - (2\kappa_n + \operatorname{tr}_P \mathbf{U}) \mathrm{Y}_{ab} + \mathring{\nabla}_{(a} \big(\mathrm{s}_{b)} + 2\mathrm{r}_{b)}\big) \\ &\quad - 2\mathrm{r}_a \mathrm{r}_b + 4\mathrm{r}_{(a} \mathrm{s}_{b)} - \mathrm{s}_a \mathrm{s}_b - (\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}) \mathrm{U}_{ab} + 2P^{cd} \mathrm{U}_{d(a} \big(2\mathrm{Y}_{b)c} + \mathrm{F}_{b)c}\big), \end{aligned} \tag{66}$$

$$\ddot{\mathcal{R}}^{(1)} = \ddot{\mathcal{R}} = -P^{ab} \mathrm{Y}_{ab}^{(2)} + P^{ab} P^{cd} (\mathrm{Y} + \mathrm{F})_{ac} (\mathrm{Y} + \mathrm{F})_{bd} + P^{ab} (\mathrm{r} - \mathrm{s})_a \mathring{\nabla}_b \ell^{(2)}, \tag{67}$$

$$\dot{\mathcal{R}}_c^{(1)} = \dot{\mathcal{R}}_c = \mathrm{r}_c^{(2)} - P^{ab} A_{abc} - P^{ab} (\mathrm{r} + \mathrm{s})_a (\mathrm{Y} + \mathrm{F})_{cb} + \frac{1}{2} \kappa_n \mathring{\nabla}_c \ell^{(2)} - \frac{1}{2} n(\ell^{(2)}) (\mathrm{r} - \mathrm{s})_c, \tag{68}$$

°其中 R_{ab} 是 ∇ 的里奇张量，而 A 为

$$A_{bcd} \coloneqq 2\mathring{\nabla}_{[d}\mathrm{F}_{c]b} + 2\mathring{\nabla}_{[d}\mathrm{Y}_{c]b} + \mathrm{U}_{b[d}\mathring{\nabla}_{c]}\ell^{(2)} + 2\mathrm{Y}_{b[d}(\mathrm{r}-\mathrm{s})_{c]}$$

并且满足（第三个等式是在 [37]中得到的结果）

$$\begin{aligned}
P^{ab}A_{abc}n^c &= \frac{1}{2}P^{ab}(A_{abc}+A_{bac})n^c = -\frac{1}{2}P^{ab}(A_{acb}+A_{bca})n^c \\
&= P^{ab}\left(\pounds_n \mathrm{Y}_{ab} - \mathring{\nabla}_a(\mathrm{r}+\mathrm{s})_b + \kappa_n \mathrm{Y}_{ab} + (\mathrm{r}-\mathrm{s})_a(\mathrm{r}-\mathrm{s})_b - \frac{1}{2}n(\ell^{(2)})\mathrm{U}_{ab} - P^{cd}\mathrm{Y}_{ac}\mathrm{U}_{bd}\right) \\
&\overset{(29)}{=} \pounds_n\big(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}\big) + P^{ab}P^{cd}\mathrm{U}_{ac}\mathrm{Y}_{bd} - \operatorname{div}_P(\mathbf{r}+\mathbf{s}) + \big(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y} - n(\ell^{(2)})\big)\kappa_n \\
&\quad + P(\mathbf{r}+\mathbf{s},\mathbf{r}+\mathbf{s}) - \frac{1}{2}n(\ell^{(2)})\operatorname{tr}_P \mathbf{U}.
\end{aligned}$$

因此，将（68）与 n^c 缩并得到

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{R}}^{(1)}_a n^a &= -\kappa^{(2)} - P^{ab}A_{abc}n^c - P(\mathbf{r}+\mathbf{s},\mathbf{r}+\mathbf{s}) + n(\ell^{(2)})\kappa_n \\
&= -\kappa^{(2)} - \pounds_n\big(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}\big) + \operatorname{div}(\mathbf{r}+\mathbf{s}) + \big(2n(\ell^{(2)}) - \operatorname{tr}_P \mathbf{Y}\big)\kappa_n + \frac{1}{2}\big(\operatorname{tr}_P \mathbf{U}\big)n(\ell^{(2)}) \\
&\quad - P^{ad}P^{bc}\mathrm{U}_{ab}\mathrm{Y}_{cd} - 4P(\mathbf{r},\mathbf{s}) - 2P(\mathbf{r},\mathbf{r}) - 2P(\mathbf{s},\mathbf{s}).
\end{aligned} \tag{69}$$

$\mathcal{R}^{(1)}_{ab}$ 与 P 以及 n的缩并为 [37]

$$\mathcal{R}^{(1)}_{ab}n^a = -\pounds_n(\mathrm{r}_b - \mathrm{s}_b) - \mathring{\nabla}_b\kappa_n - (\operatorname{tr}_P \mathbf{U})(\mathrm{r}_b - \mathrm{s}_b) - \mathring{\nabla}_b(\operatorname{tr}_P \mathbf{U}) + P^{cd}\mathring{\nabla}_c\mathrm{U}_{bd} - 2P^{cd}\mathrm{U}_{bd}s_c, \tag{70}$$

$$\mathcal{R}^{(1)}_{ab}n^a n^b = -n(\operatorname{tr}_P \mathbf{U}) + (\operatorname{tr}_P \mathbf{U})\kappa_n - P^{ab}P^{cd}\mathrm{U}_{ac}\mathrm{U}_{bd}, \tag{71}$$

$$\begin{aligned}
P^{ab}\mathcal{R}^{(1)}_{ab} &= \operatorname{tr}_P \mathring{R} - 2\pounds_n(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}) - 2\big(\kappa_n + \operatorname{tr}_P \mathbf{U}\big)\operatorname{tr}_P \mathbf{Y} + \operatorname{div}_P(\mathbf{s}+2\mathbf{r}) - 2P(\mathbf{r},\mathbf{r}) \\
&\quad - 4P(\mathbf{r},\mathbf{s}) - P(\mathbf{s},\mathbf{s}) + 2\kappa_n n(\ell^{(2)}).
\end{aligned} \tag{72}$$

表达式（72）和（69已足以计算 $\mathcal{H}$处的环境标量曲率。事实上，利用（14）、 $R^{(1)} = R \overset{\mathcal{H}}{=} \operatorname{tr}_P \mathcal{R} + 2\dot{\mathcal{R}}_a n^a$，并代入（72）和（69），可得

$$\begin{aligned}
R^{(1)} = R = &-2\kappa^{(2)} - 4\pounds_n(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}) - 2\big(2\kappa_n + \operatorname{tr}_P \mathbf{U}\big)\operatorname{tr}_P \mathbf{Y} + 3\operatorname{div}\mathbf{s} + 4\operatorname{div}\mathbf{r} - 5P(\mathbf{s},\mathbf{s}) \\
&- 6P(\mathbf{r},\mathbf{r}) - 12P(\mathbf{r},\mathbf{s}) - 2P^{ab}P^{cd}\mathrm{U}_{ac}\mathrm{Y}_{bd} + \big(\operatorname{tr}_P \mathbf{U} + 6\kappa_n\big)n(\ell^{(2)}) + \operatorname{tr}_P \mathring{R}.
\end{aligned} \tag{73}$$

在计算标量曲率 $R^{(m)}$的高阶导数之前， $m \geq 2$我们先回顾 [46, 47]中的以下记号。

记号 4.3。 设 $(\mathcal{M}, g)$ 为一个半黎曼流形，且 $\mathcal{H}$ 为一个超曲面。给定两个环境张量 T 和 S，记号 $T \overset{[m]}{=} S$ 表示 $T - S$ 不依赖于 g 的 m 阶或更高阶导数。当 T 和 S 是 $\mathcal{H}$上的张量时，我们用 $T \ {}_{(m)}= \ S$ 表示$T - S$ 不依赖于 g 在 $\mathcal{H}$ 处的 m 阶或更高阶横向的导数。显然，对于满足 $T \overset{[m]}{=} S$的两个环境张量 T 和 S，它们在 $\mathcal{H}$ 上的拉回满足 $\Phi^\star T \ {}_{(m)}= \ \Phi^\star S$。

将 $\pounds_\xi^{(m-1)}$ 应用于 $g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$，针对 $m \geq 2$ 并利用恒等式（56）和 $\pounds_\xi g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\mathcal{K}_{\mu\nu}$ 可得

$$R^{(m)} \overset{[m]}{=} g^{\alpha\beta}R^{(m)}_{\alpha\beta} - (m-1)g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\mathcal{K}_{\mu\nu}R^{(m-1)}_{\alpha\beta} \overset{[m]}{=} P^{ab}\mathcal{R}^{(m)}_{ab} + 2\dot{\mathcal{R}}^{(m)}_a n^a - (m-1)g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\mathcal{K}_{\mu\nu}R^{(m-1)}_{\alpha\beta},$$

其中，在第二个等式中，我们代入了（14）。前两项分别为（64）和（65）。关于第三项，我们注意到，（62）意味着，形式为 $\mathbf{Y}^{(m)}$ 和 $\mathbf{Y}^{(m+1)}$ 的项只有在.....时才会出现

当张量 $R^{(m-1)}_{\alpha\beta}$ 至少与 ξ 收缩一次时，即（参见（14））

$$\begin{aligned} g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\mathcal{K}_{\mu\nu}R^{(m-1)}_{\alpha\beta} &\overset{(m)}{=} \big(2P^{ac}e^{\mu}_{c}\nu^{\nu}e^{\alpha}_{a}\xi^{\beta}+2\xi^{\mu}\nu^{\nu}\nu^{\alpha}\xi^{\beta}+\nu^{\mu}\nu^{\nu}\xi^{\alpha}\xi^{\beta}\big)\mathcal{K}_{\mu\nu}R^{(m-1)}_{\alpha\beta}\\ &\overset{(m)}{=} 4P^{ab}\mathrm{r}_{a}\dot{\mathcal{R}}^{(m-1)}_{b}+n(\ell^{(2)})\dot{\mathcal{R}}^{(m-1)}_{a}n^{a}-2\kappa_{n}\ddot{\mathcal{R}}^{(m-1)}\\ &\overset{(m)}{=} 4P^{ab}\mathrm{r}_{a}\mathrm{r}^{(m)}_{b}-n(\ell^{(2)})\kappa^{(m)}+2\kappa_{n}\operatorname{tr}_{P}\mathbf{Y}^{(m)}, \end{aligned}$$

其中在第二行中，我们使用了 $\mathcal{K}_{ab}=2\mathrm{Y}_{ab}$ 和 $\mathcal{K}_{\mu\nu}\xi^{\mu}e^{\nu}_{a}=\frac{1}{2}\mathring{\nabla}_{a}\ell^{(2)}$（见（52）），在第三行中则使用了（61）、（65）和（60）。最后，将这些结果、（64）和（65）代入 $R^{(m)}$的表达式，得到

$$\begin{aligned} R^{(m)} \overset{(m)}{=}& -2\kappa^{(m+1)}-4\mathcal{L}_{n}\big(\operatorname{tr}_{P}\mathbf{Y}^{(m)}\big)-2\big(2m\kappa_{n}+\operatorname{tr}_{P}\mathbf{U}\big)\operatorname{tr}_{P}\mathbf{Y}^{(m)}-2P^{ab}P^{cd}\mathrm{U}_{ac}\mathrm{Y}^{(m)}_{bd}\\ &+4\operatorname{div}_{P}\mathbf{r}^{(m)}-4P\big((2m+1)\mathbf{r}+3\mathbf{s},\mathrm{r}^{(m)}_{b}\big)+2\big((m+2)n(\ell^{(2)})-2\operatorname{tr}_{P}\mathbf{Y}\big)\kappa^{(m)}. \end{aligned} \tag{74}$$

一个直接的推论是

$$R^{(m)} \overset{(m+1)}{=} -2\kappa^{(m+1)}. \tag{75}$$

备注 4.4。根据*4.3*中引入的记号，由（60）、（61）、（62）和（74）可知$\mathcal{R}^{(m)}_{ab}{}_{(m+1)}=0$, $\dot{\mathcal{R}}^{(m)}_{a}{}_{(m+2)}=0$, $\ddot{\mathcal{R}}^{(m)}\overset{(m+2)}{=}0$ 和 $R^{(m)}\overset{(m+2)}{=}0$。

接下来，我们回顾下文将用到的 [46, 47] 一般存在性与唯一性结果。命题 4.5 引用了 [46] 中的结果，其中我们构造了两个微分同胚超曲面的邻域之间的一个微分同胚。命题 4.6 引用了 [46] 中的一项结果，其中利用这个微分同胚，推导出了关于两个微分同胚超曲面的若干充分条件，使得它们的两个邻域之间存在一个等距映射。最后，在定理4.7中，我们回顾了 [47] 中的一项结果，其中根据零超曲面处的预期展开构造了一个环境时空。

命题 *4.5*。设 $\Phi:\mathcal{H}\hookrightarrow\mathcal{M}$ 和 $\Phi':\mathcal{H}'\hookrightarrow\mathcal{M}'$ 是分别嵌入于环境流形 $(\mathcal{M},g)$ 和 $(\mathcal{M}',g')$ 中的两个嵌入超曲面，并设 ξ, ξ' 分别是 $\Phi(\mathcal{H})$、$\Phi'(\mathcal{H}')$ 的支架场，且沿测地线延拓。假设存在一个微分同胚 $\chi:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}'$。那么，存在 $\Phi(\mathcal{H})$ 和 $\Phi'(\mathcal{H}')$ 的开邻域 $\mathcal{U}\subset\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{U}'\subset\mathcal{M}'$，以及唯一的微分同胚$\Psi:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{U}'$，满足 $\Psi_{\star}\xi=\xi'$ 和 $\Phi'\circ\chi=\Psi\circ\Phi$。

命题 4.6。设 $\{\mathcal{H},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\ell},\ell^{(2)}\}$（分别地，$\{\mathcal{H}',\boldsymbol{\gamma}',\boldsymbol{\ell}',\ell^{(2)\prime}\}$）是零度量超曲面数据（$\Phi,\xi$），嵌入于（$\mathcal{M},g$）中（分别地，嵌入于（$\mathcal{M}',g'$）中（$\Phi',\xi'$）），其中 ξ 和 ξ' 沿测地线延拓。假设存在一个微分同胚 $\chi:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}'$，使得

$$\chi^{\star}\{\mathcal{H}',\boldsymbol{\gamma}',\boldsymbol{\ell}',\ell^{(2)\prime}\}:=\{\chi^{\star}\mathcal{H}',\chi^{\star}\boldsymbol{\gamma}',\chi^{\star}\boldsymbol{\ell}',\chi^{\star}\ell^{(2)\prime}\}=\{\mathcal{H},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\ell},\ell^{(2)}\}$$

且 $\chi^{\star}\mathbf{Y}^{(k)\prime}=\mathbf{Y}^{(k)}$ 对每个 $k\geq1$。那么，存在邻域 $\mathcal{U}\subset\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{U}'\subset\mathcal{M}'$ 的$\Phi(\mathcal{H})$ 和 $\Phi'(\mathcal{H}')$ 以及一个微分同胚 $\Psi:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{U}'$满足 $\Psi_{\star}\xi=\xi'$和 $\Phi'\circ\chi=\Psi\circ\Phi$ *(*如命题*4.5*中所述*)*，使得

$$\Psi^{\star}\pounds^{(i)}_{\xi'}g'\overset{\mathcal{H}}{=}\pounds^{(i)}_{\xi}g \tag{76}$$

对每个 $i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。

定理 *4.7.* 设 $\{\mathcal{H},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\ell},\ell^{(2)}\}$ 为零度量超曲面数据，且 $\{\mathrm{Y}^{(k)}\}_{k\geq1}$ 是定义在 $\mathcal{H}$上的一个 *(0, 2)* 阶对称张量场序列。那么存在一个半黎曼流形 $(\mathcal{M},g)$、一个嵌入 $\Phi:\mathcal{H}\hookrightarrow\mathcal{M}$ 以及一个支架向量 ξ，使其在 $\mathcal{M}$ 上满足 $\nabla_{\xi}\xi=0$，并且 *(i)*$\{\mathcal{H},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\ell},\ell^{(2)}\}$ 是嵌入于 $(\mathcal{M},g)$中的零度量超曲面数据 (Φ,ξ)，且 *(ii)* $\{\mathrm{Y}^{(k)}\}_{k\geq1}$ 是 g 在 $\Phi(\mathcal{H})$处的横向展开，即对于每个 $k\geq1$，都有 $\mathrm{Y}^{(k)}=\mathrm{Y}^{(k)}:=\frac{1}{2}\Phi^{\star}\big(\pounds^{(k)}_{\xi}g\big)$。

我们强调，本定理中的环境时空 $(\mathcal{M}, g)$ 不必是解析的（即该级数不必收敛）。本定理证明中的一个重要要素是博雷尔引理 [26], ，我们稍后还会用到以下特定形式的该引理。

引理 4.8 （博雷尔）。 设 $\mathcal{M}$ 为光滑流形， $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{M}$ 为带有支架场 ξ 的嵌入的光滑超曲面，$\{\sigma^{(k)}\}_{k\geq 0}$ 为定义在 $\mathcal{H}$上的函数族。那么，存在一个定义在 $\mathcal{M}$ 中 $\mathcal{H}$ 的某个邻域内的函数 Ω，使得对每个 $k \geq 0$都有 $\pounds_\xi^{(k)} \Omega|_{\mathcal{H}} = \sigma^{(k)}$ 。

本文的主要思路是分析拟爱因斯坦方程如何确定零无穷远处的几何，也就是说，当在 $\mathscr{I}$ 处将共形爱因斯坦方程施加到无穷阶时，度量的横向展开受到怎样的约束。为分析这一问题，方便起见，我们引入以下张量

$$\mathcal{Q}_{\alpha\beta} := (\mathfrak{n}-1)\big(\nabla_\alpha\nabla_\beta\Omega + \Omega L_{\alpha\beta}\big) = (\mathfrak{n}-1)\nabla_\alpha\nabla_\beta\Omega + \Omega\left(R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2\mathfrak{n}}g_{\alpha\beta}\right), \tag{77}$$

$$\mathcal{L}_\alpha := (\mathfrak{n}-1)L_{\alpha\beta}\nabla^\beta\Omega = R_{\alpha\beta}\nabla^\beta\Omega - \frac{R}{2\mathfrak{n}}\nabla_\alpha\Omega, \tag{78}$$

以及函数 $f := |\nabla\Omega|^2$。这些张量显然满足关系

$$\mathcal{Q}_{\alpha\beta}\nabla^\beta\Omega = \frac{\mathfrak{n}-1}{2}\nabla_\alpha f + \Omega\mathcal{L}_\alpha. \tag{79}$$

不那么显然的是恒等式

$$\nabla_\mu\big(\operatorname{tr}_g \mathcal{Q}\big) + \mathfrak{n}\mathcal{L}_\mu = \nabla_\rho\mathcal{Q}^\rho{}_\mu, \tag{80}$$

该式由比安基恒等式（43）得到，其中将 迹$_{\mathfrak{n}^2-1}^{g}\mathcal{Q}$和 $(\mathfrak{n}-1)\mathcal{T} = \mathcal{Q} -$迹$_{\mathfrak{n}+1}^{\mathcal{Q}}g$代入。按照本文的一般记号，我们引入张量

$$\mathcal{Q}^{(m)}_{\alpha\beta} := \pounds_\xi^{(m-1)}\mathcal{Q}_{\alpha\beta}, \qquad \mathcal{L}^{(m)}_{\alpha} := \pounds_\xi^{(m-1)}\mathcal{L}_{\alpha}, \qquad f^{(m)} := \pounds_\xi^{(m-1)} f$$

and

$$\mathcal{Q}^{(m)}_{ab} := \big(\Phi^\star\mathcal{Q}^{(m)}\big)_{ab}, \qquad \dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_{a} = \big(\Phi^\star\mathcal{Q}^{(m)}(\xi,\cdot)\big)_{a}, \qquad \ddot{\mathcal{Q}}^{(m)} := \Phi^\star\big(\mathcal{Q}^{(m)}(\xi,\xi)\big), \tag{81}$$

$$\mathcal{L}^{(m)}_{a} := \big(\Phi^\star\mathcal{L}^{(m)}\big)_{a}, \qquad \dot{\mathcal{L}}^{(m)} := \Phi^\star\big(\mathcal{L}^{(m)}(\xi)\big). \tag{82}$$

我们也将 Ω 在 $\mathscr{I}$ 处的横向导数记为 $\sigma^{(k)} := \pounds_\xi^{(k)}\Omega|_{\mathscr{I}}$。注意， $\sigma^{(1)}$ 与此前引入的函数 σ 一致，因此我们将不加区分地使用这两个符号。正如前面提到的，这个函数在 $\mathscr{I}$上任何地方都不能为零。

现在的思路是在 $\mathscr{I}$ 处施加无限阶的共形方程，以考察 $\{\mathbf{Y}^{(k)}\}_{k\geq 1}$ 和 $\{\sigma^{(k)}\}_{k\geq 1}$ 受到怎样的约束。这显然取决于共形因子 Ω 的选取方式。文献中一种常用且合理的选择是要求变换后的里奇标量为零，这相当于求解一个形式如下的波动方程： $\Box_g\Omega = \Omega F$ ，其中函数 F，参见 [21]。另一种有趣的可能性是通过求解 $|\nabla\Omega|^2 = 0$来确定 Ω。接下来引用 [44] 中的一项结果；我们在那里证明了，这种共形规范在 $\mathscr{I}$ 附近总是局部存在的，并且取决于横截于 $\mathscr{I}$的超曲面上的一个自由函数。

引理 4.9. 设$(\mathcal{M}, g, \Omega)$ 为一个带有 $\lambda = 0$ 的共形流形，且 $\mathcal{H}$ 为横向于 $\mathscr{I}$的超曲面。设 ω_0 为 $\mathcal{H}$ 上的非零函数。则在 $\mathscr{I}\cap\mathcal{H}$ 的某个邻域内存在唯一的$(\widetilde{g} = \omega^2 g, \widetilde{\Omega} = \omega\Omega)$，使得 $|\tilde{\nabla}\widetilde{\Omega}|^2_{\widetilde{g}} = 0$ 且 $\widetilde{\Omega} \overset{\mathcal{H}}{=} \omega_0\Omega$。

在上述两种选择中，均可验证 $\mathscr{I}$ 是全测地的；就超曲面数据而言，这意味着$\mathbf{U} = 0$。然而，在一般的共形规范下， $\mathscr{I}$ 仅是全脐的。本文主要关注选择 $|\nabla\Omega|^2 = 0$，因此

命题 4.11 如下列出张量 $\mathcal{Q}^{(m)}_{ab}$、$\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_{a}$、$\ddot{\mathcal{Q}}^{(m)}$、$\mathcal{L}^{(m)}_{a}$、$\dot{\mathcal{L}}^{(m)}$和 $f^{(m)}$ 在假设 $\mathbf{U}=0$下的表达式。每项计算均做到所需的阶数。鉴于还存在其他共形选择，我们在附录 C 中不作假设 $\mathbf{U}=0$，计算一般情形下的完整表达式。命题 4.11 中的公式只是将这些表达式特化到 $\mathbf{U}=0$的情形。我们还将记号 $\overset{(m)}{=}$ 在记号 4.3 中的含义扩展如下。

记号 4.10。设$(\mathcal{M},g,\Omega)$ 为具有零无穷远 $\mathscr{I}$的共形流形，且 T，S是定义在 $\mathscr{I}$上的两个张量。我们用 $T\overset{(m)}{=}S$表示 $T-S$不依赖于 $\mathscr{I}$ 处 g 和 Ω 的阶数为 m 或更高的横向导数。

命题 4.11。设 $\mathscr{I}=\{\Omega=0\}$在(Φ,ξ)中嵌入于$(\mathcal{M},g)$，并沿测地线将 ξ延拓到 $\Phi(\mathscr{I})$之外。假设$\mathbf{U}=0$。那么，对于每个 $m\geq 2$，

$$\mathcal{Q}^{(m+1)}_{ab}\overset{(m)}{=}(\mathfrak{n}-1-2m)\sigma^{(1)}\pounds_n\mathrm{Y}^{(m)}_{ab}+m\Big((\mathfrak{n}-1)(\pounds_n\sigma+\sigma\kappa_n)+(\mathfrak{n}-1-2m)\sigma^{(1)}\kappa_n\Big)\mathrm{Y}^{(m)}_{ab}$$
$$+\frac{m\sigma^{(1)}}{\mathfrak{n}}\Big(\kappa^{(m+1)}+2\pounds_n\big(\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(m)}\big)+2m\kappa_n\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(m)}\Big)\gamma_{ab}+\widetilde{\mathscr{R}}^{(m)}_{ab},\tag{83}$$

$$\dot{\mathcal{Q}}^{(m+1)}_{a}\overset{(m+1)}{=}(\mathfrak{n}-1)\big(\mathring{\nabla}_a\sigma^{(m+1)}-\sigma^{(m+1)}(\mathrm{r}-\mathrm{s})_a\big)-(\mathfrak{n}-1-m)\sigma^{(1)}\mathrm{r}^{(m+1)}_a+\frac{m\sigma^{(1)}}{\mathfrak{n}}\kappa^{(m+1)}\ell_a,\tag{84}$$

$$\ddot{\mathcal{Q}}^{(m+1)}\overset{(m+1)}{=}(\mathfrak{n}-1)\sigma^{(m+2)}-m\sigma^{(1)}\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(m+1)}+\frac{m\sigma^{(1)}\ell^{(2)}}{\mathfrak{n}}\kappa^{(m+1)},\tag{85}$$

$$\mathcal{L}^{(m)}_{a}\overset{(m)}{=}-\sigma^{(1)}\pounds_n\mathrm{r}^{(m)}_a+(m-1)(\pounds_n\sigma^{(1)})\mathrm{r}^{(m)}_a-\sigma^{(1)}\mathring{\nabla}_a\kappa^{(m)}+\frac{(m-1)\kappa^{(m)}}{\mathfrak{n}}\mathring{\nabla}_a\sigma^{(1)},\tag{86}$$

$$\mathfrak{n}\dot{\mathcal{L}}^{(m)}\overset{(m)}{=}-(\mathfrak{n}-1)\sigma^{(1)}\kappa^{(m+1)}-(\mathfrak{n}-2)\sigma^{(1)}\pounds_n\big(\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(m)}\big)$$
$$+\Big(\big(2m(1-\mathfrak{n})+\mathfrak{n}\big)\sigma^{(1)}\kappa_n-(m-1)\mathfrak{n}\pounds_n\sigma^{(1)}\Big)\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(m)}+\dot{\mathscr{R}}^{(m)}_{\mathcal{L}},\tag{87}$$

$$f^{(m+1)}\overset{(m)}{=}2\sigma^{(1)}\big(\pounds_n\sigma^{(m)}+\sigma^{(1)}\kappa^{(m)}\big)+2m\big(\pounds_n\sigma^{(1)}+2\sigma^{(1)}\kappa_n\big)\sigma^{(m)},\tag{88}$$

其中 $\widetilde{\mathscr{R}}^{(m)}_{ab}$，$\dot{\mathscr{R}}^{(m)}_{\mathcal{L}}$ 是依赖于$\mathbf{r}^{(m)}$，$\sigma^{(m)}$ 及低阶项的张量；为简洁起见，我们没有写出这些项（只需在各自的证明中进行所有计算，便可轻易得出）。

证明。前三个表达式是命题 $\mathbf{U}=0$ 的情形化结果，来自C.3；接下来的两个来自命题C.2，最后一个来自命题C.4。 □

张量 $\mathcal{L}^{(1)}_{\mu}$、$\mathcal{Q}^{(1)}_{\alpha\beta}$、$\mathcal{Q}^{(2)}_{\alpha\beta}$和 $f_{(2)}$不在此命题的涵盖范围内。同样，在假设$\mathbf{U}=0$ 下，它们由下式给出（参见附录206）-（209）、（193）-（194）以及（211））C）

$$\mathcal{Q}^{(1)}_{ab}=0,\qquad \dot{\mathcal{Q}}^{(1)}_{a}=\mathring{\nabla}_a\sigma^{(1)}-\sigma^{(1)}(\mathrm{r}-\mathrm{s})_a,\qquad \ddot{\mathcal{Q}}^{(1)}=\sigma^{(2)},\tag{89}$$

$$\mathcal{Q}^{(2)}_{ab}=(\mathfrak{n}-3)\sigma^{(1)}\pounds_n\mathrm{Y}_{ab}+\big((\mathfrak{n}-1)(\pounds_n\sigma+\sigma\kappa_n)+(\mathfrak{n}-3)\sigma^{(1)}\kappa_n\big)\mathrm{Y}_{ab}+(\mathfrak{n}-1)\mathring{\nabla}_a\mathring{\nabla}_b\sigma^{(1)}$$
$$-2\sigma^{(1)}(\mathfrak{n}-2)\mathring{\nabla}_{(a}\mathrm{r}_{b)}+\sigma^{(1)}\big(\mathring{\nabla}_{(a}\mathrm{s}_{b)}-2\mathrm{r}_a\mathrm{r}_b+4\mathrm{r}_{(a}\mathrm{s}_{b)}-\mathrm{s}_a\mathrm{s}_b+\mathring{R}_{(ab)}\big)-\frac{\sigma R}{2\mathfrak{n}}\gamma_{ab},\tag{90}$$

$$\dot{\mathcal{Q}}^{(2)}_{a}=-(\mathfrak{n}-2)\sigma^{(1)}\mathrm{r}^{(2)}_a-(\mathfrak{n}-1)V_a{}^b\mathring{\nabla}_b\sigma^{(1)}-\frac{1}{2}\sigma^{(1)}(\mathfrak{n}-2)n(\ell^{(2)})(\mathrm{r}-\mathrm{s})_a+2\sigma^{(1)}(\mathfrak{n}-1)V^c{}_a\mathrm{r}_c$$
$$-\sigma^{(1)}P^{bc}A_{bca}-\sigma^{(1)}P^{cb}(\mathrm{r}+\mathrm{s})_c(\mathrm{Y}_{ab}+\mathrm{F}_{ab})+\frac{1}{2}\sigma^{(1)}\kappa_n\mathring{\nabla}_a\ell^{(2)}-\frac{\sigma^{(1)}R}{2\mathfrak{n}}\ell_a,\tag{91}$$

$$\ddot{\mathcal{Q}}^{(2)}=(\mathfrak{n}-1)\sigma^{(2)}-\sigma^{(1)}\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(2)}+\sigma^{(1)}P^{ab}P^{cd}(\mathrm{Y}+\mathrm{F})_{ac}(\mathrm{Y}+\mathrm{F})_{bd}+\sigma^{(1)}P(\mathbf{r}-\mathbf{s},d\ell^{(2)})$$
$$-\frac{R}{2\mathfrak{n}}\sigma^{(1)}\ell^{(2)},\tag{92}$$

$$\frac{2\mathfrak{n}}{\sigma^{(1)}}\dot{\mathcal{L}}^{(1)} = -2(\mathfrak{n}-1)\kappa^{(2)} - 2(\mathfrak{n}-2)\mathcal{L}_n\big(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}\big) - 2(\mathfrak{n}-2)\kappa_n \operatorname{tr}_P \mathbf{Y} + 2(\mathfrak{n}-2)\operatorname{div}\mathbf{r} + (2\mathfrak{n}-3)\operatorname{div}\mathbf{s} + 2(2\mathfrak{n}-3)\kappa_n n(\ell^{(2)}) - 2(2\mathfrak{n}-3)P(\mathbf{r},\mathbf{r}) - (4\mathfrak{n}-5)P(\mathbf{s},\mathbf{s}) - 4(2\mathfrak{n}-3)P(\mathbf{r},\mathbf{s}) - \operatorname{tr}_P \mathring{R}, \tag{93}$$

$$\frac{1}{\sigma^{(1)}}\mathcal{L}_a^{(1)} = -\mathcal{L}_n(\mathrm{r}_b - \mathrm{s}_b) - \mathring{\nabla}_b\kappa_n, \tag{94}$$

其中 R 由（73）明确给出。此外（参见（211））

$$f^{(2)} = 2\sigma(\mathcal{L}_n\sigma + \sigma\kappa_n). \tag{95}$$

虽然 $f^{(3)}$ 已在命题 4.11中给出，但我们很快就会用到它的显式表达式（参见（212））

$$f^{(3)} = 2\sigma^{(1)}\big(\sigma^{(1)}\kappa^{(2)} + \mathcal{L}_n\sigma^{(2)}\big) + 2\big(2\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}n(\ell^{(2)})\big)\big(\mathcal{L}_n\sigma^{(1)} + 2\sigma^{(1)}\kappa_n\big) + 8\sigma^{(1)}P\big(\mathbf{r},\sigma^{(1)}\mathbf{r} - d\sigma^{(1)}\big) + 2P^{ab}\mathring{\nabla}_a\sigma^{(1)}\mathring{\nabla}_b\sigma^{(1)}. \tag{96}$$

由（206）可直接得出，对于每一个满足 $\mathscr{I}$-结构数据的嵌入$\mathcal{Q}_a = \mathfrak{q}\ell_a$， ∇_X 导数 $\nabla\Omega$ 在 $\mathscr{I}$ 处由下式给出（见（51））

$$\nabla_X(\nabla\Omega) \overset{\mathscr{I}}{=} \mathfrak{q}X,$$

因此，在满足 $\mathscr{I}$的共形规范中写出的每一个 $\mathfrak{q}=0$ -结构数据，都是弱孤立视界（见 [4]）。

在满足 $|\nabla\Omega|^2 = 0$的共形规范中，我们必须求解的“高阶共形方程”为 $\mathcal{Q}_{ab}^{(m)} = 0$， $\dot{\mathcal{Q}}_a^{(m)} = 0$， $\ddot{\mathcal{Q}}^{(m)} = 0$， $\mathcal{L}_a^{(m)} = 0$， $\dot{\mathcal{L}}^{(m)} = 0$ 以及 $f^{(m)} = 0$ 对每一个$m \geq 1$。注意，对每个 m，方程数比待确定的度量分量（$\mathbf{Y}^{(m)}$ 和 $\sigma^{(m)}$）多出 $2(\mathfrak{n}+1)$。这种超定性与恒等式（79）和（80）有关。对（ m 79）取横向导数，并应用（57），即可得到

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(m+1-k)}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(\mathcal{L}_\xi^{(j)}g^{\beta\mu})\nabla_\mu\mathcal{L}_\xi^{(k-j)}\Omega = \frac{\mathfrak{n}-1}{2}\nabla_\alpha\mathcal{L}_\xi^{(m)}f + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(\mathcal{L}_\xi^{(k)}\Omega)\mathcal{L}_\alpha^{(m-k+1)}, \tag{97}$$

并将$\mathcal{L}_\xi^{(m-1)}$ 应用于（80），得到

$$\left(\nabla_\rho\mathcal{Q}^{(m)\rho}{}_\mu + \sum_{k=0}^{m-2}\binom{m-1}{k+1}\left(\mathcal{Q}^{(m-1-k)\sigma}{}_\mu\Sigma^{(k+1)\rho}{}_{\rho\sigma} - \mathcal{Q}^{(m-1-k)\rho}{}_\sigma\Sigma^{(k+1)\sigma}{}_{\rho\mu}\right)\right) = = \nabla_\mu\left(\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}(\mathcal{L}_\xi^{(k)}g^{\alpha\beta})\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(m-k)}\right) + \mathfrak{n}\mathcal{L}_\mu^{(m)}. \tag{98}$$

在接下来的两个引理中，我们证明这些恒等式的一些直接推论。它们对于第5 节逐阶证明以下事实至关重要：只要其余方程成立，$2(\mathfrak{n}+1)$个冗余方程的集合便会自动满足。这与 [47]中的命题 4.5类似（尽管要复杂得多）。每个引理都有其自身的一般假设，即拟爱因斯坦方程在某个特定阶数之前均成立，并分为若干条目，每个条目还附加了其他条件。尽管有些条目可以直接由其他条目推出，但在第5节中每个条目都会被单独使用。为清晰起见，我们因此分别陈述它们。

引理 4.12. 固定 $m \geq 1$，并假设对每个 $k = 1, \ldots, m-1$，只要$m \geq 2$，就有 $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(k)} = 0$和 $\mathcal{L}_{\alpha\beta}^{(k)} = 0$。

1. 若 $\mathcal{Q}^{(m)}_{ab}n^b=0$，则

$$\sigma^{(1)}\mathcal{Q}^{(m+1)}_{ab}n^an^b+m\big(2\sigma^{(1)}\kappa_n+\pounds_n\sigma^{(1)}\big)\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_an^a=\frac{\mathfrak{n}-1}{2}\pounds_nf^{(m+1)}+m\sigma^{(1)}\mathcal{L}^{(m)}_an^a. \tag{99}$$

2. 如果 $\mathcal{Q}^{(m)}_{ab}=0$，那么

$$\sigma^{(1)}\mathcal{Q}^{(m+1)}_{ab}n^b+m\big(2\sigma^{(1)}\kappa_n+\pounds_n\sigma^{(1)}\big)\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_a=\frac{\mathfrak{n}-1}{2}\mathring{\nabla}_af^{(m+1)}+m\sigma^{(1)}\mathcal{L}^{(m)}_a \tag{100}$$

3. 如果 $\mathcal{Q}^{(m)}_{ab}=0$ 和 $\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_a=0$，那么

$$\sigma^{(1)}\dot{\mathcal{Q}}^{(m+1)}_an^a+m\big(2\sigma^{(1)}\kappa_n+\pounds_n\sigma^{(1)}\big)\ddot{Q}^{(m)}=\frac{\mathfrak{n}-1}{2}f^{(m+2)}+m\sigma^{(1)}\dot{\mathcal{L}}^{(m)} \tag{101}$$

and

$$\sigma^{(1)}\mathcal{Q}^{(m+1)}_{ab}n^b=\frac{\mathfrak{n}-1}{2}\mathring{\nabla}_af^{(m+1)}+m\sigma^{(1)}\mathcal{L}^{(m)}_a. \tag{102}$$

证明。直接由（97），

$$\mathcal{Q}^{(m+1)}_{\alpha\beta}\nabla^\beta\Omega+m\mathcal{Q}^{(m)}_{\alpha\beta}\Big((\pounds_\xi g^{\beta\mu})\nabla_\mu\Omega+g^{\beta\mu}\nabla_\mu\pounds_\xi\Omega\Big)\overset{\mathscr{I}}{=}\frac{\mathfrak{n}-1}{2}\nabla_\alpha\pounds^{(m)}_\xi f+m\sigma^{(1)}\mathcal{L}^{(m)}_\alpha,$$

代入 $\nabla^\beta\Omega\overset{\mathscr{I}}{=}\sigma^{(1)}\nu^\beta$、（55）和（14）后，得到

$$\begin{aligned}\sigma^{(1)}\mathcal{Q}^{(m+1)}_{\alpha\beta}\nu^\beta+m\mathcal{Q}^{(m)}_{\alpha\beta}\left(P^{bc}\big(\mathring{\nabla}_c\sigma^{(1)}-2\sigma^{(1)}\mathrm{r}_c\big)e^\beta_b+\left(\sigma^{(2)}-\frac{1}{2}\sigma^{(1)}n(\ell^{(2)})\right)\nu^\beta\right)\\+m\big(2\sigma^{(1)}\kappa_n+\pounds_n\sigma^{(1)}\big)\xi^\beta\mathcal{Q}^{(m)}_{\alpha\beta}\overset{\mathscr{I}}{=}\frac{\mathfrak{n}-1}{2}\nabla_\alpha\pounds^{(m)}_\xi f+m\sigma^{(1)}\mathcal{L}^{(m)}_\alpha.\end{aligned} \tag{103}$$

将此恒等式与 ν^α 缩并，并利用 $\mathcal{Q}^{(m)}_{ab}n^b=0$，立即得到（99）。为证明（100），将（103）与 e^α_a 缩并，并利用假设 $\mathcal{Q}^{(m)}_{ab}=0$。恒等式（102）由（100）立即推出。最后，为证明（101），将（103）与 ξ^α 缩并，并使用$\mathcal{Q}^{(m)}_{ab}=0$ 和 $\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_a=0$。

□

Lemma 4.13. 固定 $m\geq1$，并假设对于每个 $k=1,\ldots,m-1$，只要 $m\geq2$，就有 $\mathcal{Q}^{(k)}_{\alpha\beta}=0$.

1. 若 $\mathcal{Q}^{(m)}_{ab}n^b=0$，则

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^{(m+1)}_{ab}n^an^b=\pounds_n\big(\operatorname{tr}_P\mathcal{Q}^{(m)}\big)+\frac{\operatorname{tr}_P\mathbf{U}}{\mathfrak{n}-1}\operatorname{tr}_P\mathcal{Q}^{(m)}+P^{bc}P^{da}\mathrm{U}_{bd}\widehat{\mathcal{Q}}^{(m)}_{ac}+\pounds_n\big(\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_an^a\big)\\-\big(2\kappa_n+\operatorname{tr}_P\mathbf{U}\big)\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_an^a+\mathfrak{n}\mathcal{L}^{(m)}_an^a.\end{aligned} \tag{104}$$

2. 若 $\mathcal{Q}^{(m)}_{ab}=0$，则

$$\mathcal{Q}^{(m+1)}_{ab}n^b+\pounds_n\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_a+\big(2\kappa_n+\operatorname{tr}_P\mathbf{U}\big)\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_a=2\mathring{\nabla}_a\big(\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_bn^b\big)+\mathfrak{n}\mathcal{L}^{(m)}_a. \tag{105}$$

3. 若 $\mathcal{Q}^{(m)}_{ab}=0$ 和 $\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_a=0$，则

$$\pounds_n\ddot{\mathcal{Q}}^{(m)}+\big((3-2m)\kappa_n+\operatorname{tr}_P\mathbf{U}\big)\ddot{\mathcal{Q}}^{(m)}=\dot{\mathcal{Q}}^{(m+1)}_an^a+\operatorname{tr}_P\mathcal{Q}^{(m+1)}+\mathfrak{n}\dot{\mathcal{L}}^{(m)}. \tag{106}$$

4. 最后，如果 $\mathcal{Q}^{(m)}_{\alpha\beta}=0$，那么

$$\dot{\mathcal{Q}}^{(m+1)}_an^a+\operatorname{tr}_P\mathcal{Q}^{(m+1)}+\mathfrak{n}\dot{\mathcal{L}}^{(m)}=0 \tag{107}$$

and

$$\mathcal{Q}^{(m+1)}_{ab}n^an^b=\mathfrak{n}\mathcal{L}^{(m)}_an^a. \tag{108}$$

证明。关系式（107）和（108）分别是（106）和（105）的特例，因此只需证明（104）-（106）。我们的策略是在 $\mathscr{I}$ 处写出（98），然后先计算它与 e^{μ}_{c} 的缩并，再计算它与 ξ^{μ}的缩并。前者将证明（104）-（105），后者则将确立（106）。在假设 $\mathcal{Q}^{(k)}_{\alpha\beta}=0$ 对 $k=1,\ .....,\ m-1$成立的情况下，恒等式（98）写作

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{\mathscr{I}}{=} -\nabla_{\rho}\mathcal{Q}^{(m)\rho}{}_{\mu}+\nabla_{\mu}\left(g^{\alpha\beta}\mathcal{Q}^{(m)}_{\alpha\beta}+(m-1)\big(\pounds_{\xi}g^{\alpha\beta}\big)\mathcal{Q}^{(m-1)}_{\alpha\beta}\right)+\mathfrak{n}\mathcal{L}^{(m)}_{\mu}\\
&\overset{\mathscr{I}}{=} -\nabla_{\rho}\mathcal{Q}^{(m)\rho}{}_{\mu}+g^{\alpha\beta}\nabla_{\mu}\mathcal{Q}^{(m)}_{\alpha\beta}-(m-1)\mathcal{K}^{\alpha\beta}\nabla_{\mu}\mathcal{Q}^{(m-1)}_{\alpha\beta}+\mathfrak{n}\mathcal{L}^{(m)}_{\mu}
\end{aligned}
\tag{109}
$$

其中在第二行中，我们使用了 $\mathcal{Q}^{(m-1)}_{\alpha\beta}\overset{\mathscr{I}}{=}0$ 和 $\pounds_{\xi}g^{\alpha\beta}=-\mathcal{K}^{\alpha\beta}$。

现在，我们在 109 式两边与 e^{μ}_{c} 缩并，并采用假设 $\mathcal{Q}^{(m)}_{ab}n^{b}=0$，即（参见 30 式） $\mathcal{Q}^{(m)}_{ab}=\operatorname{tr}^{P}_{\mathfrak{n}-1}\mathcal{Q}^{(m)}\gamma_{ab}+\widehat{\mathcal{Q}}^{(m)}_{ab}$，由此即可得到 104 式和 105 式。这个缩并为

$$
0\overset{\mathscr{I}}{=}-\big(\operatorname{div}\mathcal{Q}^{(m)}\big)_{a}+\mathring{\nabla}_{a}\left(\operatorname{tr}_{P}\mathcal{Q}^{(m)}+2\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_{b}n^{b}\right)+\mathfrak{n}\mathcal{L}^{(m)}_{a}
\tag{110}
$$

因为 $\mathcal{Q}^{(m-1)}_{\alpha\beta}$ 的切向导数在 $\mathscr{I}$处消失。只有第一项需要进一步分析。在附录 A 中，我们回顾了若干关于拉回到零超曲面上的一般恒等式$\mathcal{H}$。将命题 A.2 应用于 $\mathcal{H}=\mathscr{I}$并使用 $\mathcal{Q}^{(m)}_{ab}n^{b}=0$，可得

$$
\begin{aligned}
\big(\operatorname{div}\mathcal{Q}^{(m)}\big)_{a} &= \mathcal{Q}^{(m+1)}_{ab}n^{b}+P^{bc}\mathring{\nabla}_{b}\mathcal{Q}^{(m)}_{ac}+n^{b}\mathring{\nabla}_{b}\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_{a}+\big(2\kappa_{n}+\operatorname{tr}_{P}\mathbf{U}\big)\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_{a}\\
&\quad -2P^{bc}(\mathrm{r}+\mathrm{s})_{b}\mathcal{Q}^{(m)}_{ac}+P^{bc}\mathrm{U}_{ba}\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_{c}+\mathrm{s}_{a}\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_{b}n^{b}\\
&= \mathcal{Q}^{(m+1)}_{ab}n^{b}+P^{bc}\mathring{\nabla}_{b}\mathcal{Q}^{(m)}_{ac}+\pounds_{n}\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_{a}+\big(2\kappa_{n}+\operatorname{tr}_{P}\mathbf{U}\big)\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_{a}-2P^{bc}(\mathrm{r}+\mathrm{s})_{b}\mathcal{Q}^{(m)}_{ac},
\end{aligned}
$$

其中我们使用了（参见（24）） $\pounds_{n}\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_{a}=n^{b}\mathring{\nabla}_{b}\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_{a}+P^{bc}\mathrm{U}_{ba}\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_{c}+\mathrm{s}_{a}\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_{b}n^{b}$。由于 $\mathcal{Q}^{(m)}_{ab}=\operatorname{tr}^{P}_{\mathfrak{n}-1}\mathcal{Q}^{(m)}\gamma_{ab}+\widehat{\mathcal{Q}}^{(m)}_{ab}$，可以进一步利用下式展开第二项和第五项

$$
\begin{aligned}
P^{bc}\mathring{\nabla}_{b}\mathcal{Q}^{(m)}_{ac} &\underset{(21)}{=} \frac{1}{\mathfrak{n}-1}\left(P^{bc}\gamma_{ac}\mathring{\nabla}_{b}(\operatorname{tr}_{P}\mathcal{Q}^{(m)})-2\operatorname{tr}_{P}\mathcal{Q}^{(m)}P^{bc}\mathrm{U}_{b(a}\ell_{c)}\right)+P^{bc}\mathring{\nabla}_{b}\widehat{\mathcal{Q}}^{(m)}_{ac}\\
&\underset{(7),(6)}{=} \frac{1}{\mathfrak{n}-1}\left(\mathring{\nabla}_{a}(\operatorname{tr}_{P}\mathcal{Q}^{(m)})-\big(\pounds_{n}\big(\operatorname{tr}_{P}\mathcal{Q}^{(m)}\big)+\operatorname{tr}_{P}\mathbf{U}\operatorname{tr}_{P}\mathcal{Q}^{(m)}\big)\ell_{a}\right)+P^{bc}\mathring{\nabla}_{b}\widehat{\mathcal{Q}}^{(m)}_{ac}
\end{aligned}
$$

and

$$
P^{bc}\mathcal{Q}^{(m)}_{ac}\overset{(7)}{=}\frac{\operatorname{tr}_{P}\mathcal{Q}^{(m)}}{\mathfrak{n}-1}(\delta^{b}_{a}-n^{b}\ell_{a})+P^{bc}\widehat{\mathcal{Q}}^{(m)}_{ac}.
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\big(\operatorname{div}\mathcal{Q}^{(m)}\big)_{a} &= \mathcal{Q}^{(m+1)}_{ab}n^{b}+\pounds_{n}\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_{a}+\big(2\kappa_{n}+\operatorname{tr}_{P}\mathbf{U}\big)\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_{a}+P^{bc}\mathring{\nabla}_{b}\widehat{\mathcal{Q}}^{(m)}_{ac}-2P^{bc}(\mathrm{r}+\mathrm{s})_{b}\widehat{\mathcal{Q}}^{(m)}_{ac}\\
&\quad+\frac{1}{\mathfrak{n}-1}\left(\mathring{\nabla}_{a}\operatorname{tr}_{P}\mathcal{Q}^{(m)}-\pounds_{n}\big(\operatorname{tr}_{P}\mathcal{Q}^{(m)}\big)\ell_{a}-\big((2\kappa_{n}+\operatorname{tr}_{P}\mathbf{U})\ell_{a}+2(\mathrm{r}+\mathrm{s})_{a}\big)\operatorname{tr}_{P}\mathcal{Q}^{(m)}\right).
\end{aligned}
$$

将其代入（110）并化简可得

$$
\begin{aligned}
0 &= -\mathcal{Q}^{(m+1)}_{ab}n^{b}-\pounds_{n}\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_{a}-\big(2\kappa_{n}+\operatorname{tr}_{P}\mathbf{U}\big)\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_{a}+\frac{1}{\mathfrak{n}-1}\left((\mathfrak{n}-2)\mathring{\nabla}_{a}\operatorname{tr}_{P}\mathcal{Q}^{(m)}+\pounds_{n}\big(\operatorname{tr}_{P}\mathcal{Q}^{(m)}\big)\ell_{a}\right)\\
&\quad+\frac{1}{\mathfrak{n}-1}\Big(\big(2\kappa_{n}+\operatorname{tr}_{P}\mathbf{U}\big)\ell_{a}+2(\mathrm{r}+\mathrm{s})_{a}\Big)\operatorname{tr}_{P}\mathcal{Q}^{(m)}-P^{bc}\mathring{\nabla}_{b}\widehat{\mathcal{Q}}^{(m)}_{ac}+2P^{bc}(\mathrm{r}+\mathrm{s})_{b}\widehat{\mathcal{Q}}^{(m)}_{ac}\\
&\quad+2\mathring{\nabla}_{a}\big(\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_{b}n^{b}\big)+\mathfrak{n}\mathcal{L}^{(m)}_{a}.
\end{aligned}
$$

与 n^{a} 缩并后，注意到 104) 给出 $\widehat{\mathcal{Q}}^{(m)}_{ab}n^{a}=0$ 和 $n^{a}\mathring{\nabla}_{b}\widehat{\mathcal{Q}}^{(m)}_{ac}=-P^{ad}\mathrm{U}_{db}\widehat{\mathcal{Q}}^{(m)}_{ac}$(参见 (24))，而 (105) 只需在该表达式中令 $\operatorname{tr}_{P}\mathcal{Q}^{(m)}=0$ 和 $\widehat{\mathcal{Q}}^{(m)}_{ab}=0$。

为证明 (106)，现在将 (109) 与 ξ^μ 缩并，并使用

$$\xi^\mu\nabla_\rho\mathcal{Q}^{(m)\rho}{}_\mu = \nabla_\rho\dot{\mathcal{Q}}^{(m)\rho} - \mathcal{Q}^{(m)\rho}{}_\mu\nabla_\rho\xi^\mu, \qquad \xi^\mu\nabla_\mu\mathcal{Q}^{(m)}_{\alpha\beta} = \mathcal{Q}^{(m+1)}_{\alpha\beta} - 2\mathcal{Q}^{(m)}_{\mu(\alpha}\nabla_{\beta)}\xi^\mu,$$

并且 $\xi^\mu\nabla_\mu\mathcal{Q}^{(m-1)}_{\alpha\beta} \overset{\mathscr{I}}{=} \mathcal{Q}^{(m)}_{\alpha\beta}$ （因为 $\mathcal{Q}^{(m-1)}_{\alpha\beta} = 0$）得到

$$0 \overset{\mathscr{I}}{=} -\nabla_\rho\dot{\mathcal{Q}}^{(m)\rho} - \mathcal{Q}^{(m)\rho}{}_\mu\nabla_\rho\xi^\mu + g^{\alpha\beta}\mathcal{Q}^{(m+1)}_{\alpha\beta} - (m-1)\mathcal{K}^{\alpha\beta}\mathcal{Q}^{(m)}_{\alpha\beta} + \mathfrak{n}\dot{\mathcal{L}}^{(m)}.$$

第一项由命题 A.2给出，在假设 $\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_a = 0$ 下为 $\nabla_\rho\dot{\mathcal{Q}}^{(m)\rho} = \dot{\mathcal{Q}}^{(m+1)}_a n^a + \pounds_n\ddot{\mathcal{Q}}^{(m)} + \big(2\kappa_n + \mathrm{tr}_P\,\mathbf{U}\big)\ddot{\mathcal{Q}}^{(m)}$。注意到，在满足条目 3. 的假设，即 $\mathcal{Q}^{(m)}_{ab} = 0$ 和 $\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_a = 0$之后，根据式（27），第二项可计算得出；此时只有含有两个支架场的项保留下来，$\mathcal{Q}^{(m)\rho}{}_\mu\nabla_\rho\xi^\mu = -\kappa_n\ddot{\mathcal{Q}}^{(m)}$。第三项则为 $g^{\alpha\beta}\mathcal{Q}^{(m+1)}_{\alpha\beta} \underset{(14)}{=} \mathrm{tr}_P\,\mathcal{Q}^{(m+1)} +$
$2\dot{\mathcal{Q}}^{(m+1)}_a n^a$，对于第四项，我们再次利用唯一不为零的部分是与 ξ 进行两次缩并，从而得到

$$\mathcal{K}^{\alpha\beta}\mathcal{Q}^{(m)}_{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu}\mathcal{K}_\mu{}^\beta\mathcal{Q}^{(m)}_{\alpha\beta} \underset{(14)}{=} \nu^\mu\xi^\alpha\mathcal{K}_\mu{}^\beta\mathcal{Q}^{(m)}_{\alpha\beta} \underset{(55)}{=} -2\kappa_n\xi^\alpha\xi^\beta\mathcal{Q}^{(m)}_{\alpha\beta} = -2\kappa_n\ddot{\mathcal{Q}}^{(m)}.$$

将四项相加，$\mathfrak{n}\dot{\mathcal{L}}^{(m)}$，式（106）得证。 □

结合式（100）和（105），可得以下推论。

推论 4.14。设 $m \geq 1$，并假设对每个 $k = 1, \ldots, m-1$，都有 $\mathcal{Q}^{(k)}_{\alpha\beta} = 0$和 $\mathcal{L}^{(k)}_\mu = 0$，且 $f^{(m+1)} = 0$、$\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_a n^a = 0$、$\mathcal{Q}^{(m)}_{ab}n^a = 0$以及迹$_P\,\mathcal{Q}^{(m)} = 0$。若 $m = \mathfrak{n}$，则 $\mathcal{Q}^{(\mathfrak{n}+1)}(n,\ n) = \mathfrak{n}\mathcal{L}^{(\mathfrak{n})}_a n^a$；若 $m \neq \mathfrak{n}$，则 $\mathcal{Q}^{(m+1)}(n,\ n) = \mathcal{L}^{(m)}_a n^a = 0$。

证明。从 (99) 可得 $\mathcal{Q}^{(m+1)}(n,n) = m\mathcal{L}^{(m)}_a n^a$，而从 $\mathcal{Q}_{ab} = 0$ 我们有 $\mathbf{U}_{ab} = 0$ （见 (206)），因此由 (104) 得到 $\mathcal{Q}^{(m+1)}(n,n) = \mathfrak{n}\mathcal{L}^{(m)}_a n^a$。当 $\mathfrak{n} = m$ 时，$\mathcal{Q}^{(m+1)}(n,n) = \mathfrak{n}\mathcal{L}^{(m)}_a n^a$；而当 $\mathfrak{n} \neq m$ 时，$\mathcal{Q}^{(m+1)}(n,n) = \mathcal{L}^{(m)}_a n^a = 0$。 □

正如下文将详细说明的，这些结果表明，对于 m的一般取值，确定 $\mathscr{I}$ 处的横向展开，归结为逐阶分析方程 $\ddot{\mathcal{Q}}^{(m)} = 0$、$f^{(m)} = 0$、$\dot{\mathcal{L}}^{(m)} = 0$ 以及 $\widehat{\mathcal{L}}^{(m)}_a := \mathcal{L}^{(m)}_a - (\mathcal{L}^{(m)}_b n^b)\ell_a = 0$ （参见 (31)）和（参见 (30)）

$$\widehat{\mathcal{Q}}^{(m)}_{ab} := \mathcal{Q}^{(m)}_{ab} - \frac{\mathrm{tr}_P\,\mathcal{Q}^{(m)} + \mathcal{Q}^{(m)}(n,n)\ell^{(2)}}{\mathfrak{n}-1}\gamma_{ab} - 2\ell_{(a}\mathcal{Q}^{(m)}_{b)c}n^c - \mathcal{Q}^{(m)}(n,n)\ell_a\ell_b = 0.$$

其余方程将证明可由引理4.12和4.13以及推论4.14自动满足。

命题 4.15。设$(\mathcal{M}, g, \Omega)$ 是一个具有零无穷远的$(\mathfrak{n}+1)$维共形流形$\mathscr{I}$，并假设 $\mathscr{I}$ 具有一个截面 Σ。固定一个整数 $\ell \geq 1$，并假设对于每个 $k \leq \ell$，方程$\mathcal{L}^{(k)}_\mu = 0$、$\mathcal{Q}^{(k)}_{\mu\nu} = 0$对每个 $f^{(k)} = 0$都成立；此外，当$\ell = \mathfrak{n} - 1$且 $f^{(\mathfrak{n}+1)}|_\Sigma = 0$时，$\mathcal{L}^{(\mathfrak{n})}_a n^a = 0$成立；当 $\ell = \mathfrak{n} - 2$时。那么，

1. $\dot{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)}_a n^a = 0,\ \mathcal{Q}^{(\ell+1)}_{ab}n^b = 0,\ P^{ab}\mathcal{Q}^{(\ell+1)}_{ab} = 0$ *and* $\mathcal{Q}^{(\ell+2)}_{ab}n^a n^b = \mathcal{L}^{(\ell+1)}_a n^a = 0.$

   进一步假设 $\widehat{\mathcal{L}}^{(\ell+1)}_a = 0$、$\widehat{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)}_a|_\Sigma = 0$ 和 $\widehat{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)}_{ab} = 0$。那么，

2. $\dot{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)}_a = 0$ *and* $\mathcal{Q}^{(\ell+2)}_{ab}n^b = 0.$

如果，更 外，我们假设 $\ddot{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)} = \dot{\mathcal{L}}^{(\ell+1)} = 0$ 并且，在 $\ell \neq \mathfrak{n} - 2$的条件下，$f^{(\ell+3)} = 0$。*Th en*
多

3. $P^{ab}\mathcal{Q}^{(\ell+2)}_{ab}=0$、 $\dot{\mathcal{Q}}^{(\ell+2)}_{a}n^a=0$，并且如果 $\ell=\mathfrak{n}-2$，还有 $f^{(\mathfrak{n}+1)}=0$和 $\mathcal{Q}^{(\mathfrak{n}+1)}_{ab}n^an^b=0$。

证明。为了证明条目 1.、2. 和 3.，我们利用引理 4.12 和 4.13 中针对 U $=0$ 特化的恒等式（因为 $\mathcal{Q}_{ab}=0$，见 (206)）。首先我们证明，在关于 $k\leq\ell$的假设 $\mathcal{L}^{(k)}_{\mu}=0$、 $\mathcal{Q}^{(k)}_{\mu\nu}=0$以及关于 $k\leq\ell+2$的 $f^{(k)}=0$ 下，方程$\dot{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)}_{a}n^a=0$、 $\mathcal{Q}^{(\ell+1)}_{ab}n^b=0$ 和 $P^{ab}\mathcal{Q}^{(\ell+1)}_{ab}=0$ 成立。在当前假设下，引理 4.12 中带有 $m=\ell$ 的条目 3. 的所有条件均得到验证，且方程 (102) 简化为 $\mathcal{Q}^{(\ell+1)}_{ab}n^b=0$。类似地， $P^{ab}\mathcal{Q}^{(\ell+1)}_{ab}=0$ 也是 (107) 对于 $m=\ell$的结果。本条目中其余两个论断现在可由推论 4.14 对 $m=\ell+1$ 直接得出（注意，当 $\ell+1=\mathfrak{n}$时，$\mathcal{L}^{(\ell+1)}_{a}n^a=\mathcal{L}^{(\mathfrak{n})}_{a}n^a=0$ 由假设成立）。

现在我们证明条目 2。首先注意，结果 $\mathcal{L}^{(\ell+1)}_{a}n^a=0$ 与假设$\widehat{\mathcal{L}}^{(\ell+1)}_{a}=0$ 结合可得 $\mathcal{L}^{(\ell+1)}_{a}=0$，而条目 1 中的结果与假设 $\widehat{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)}_{ab}=0$结合可得 $\mathcal{Q}^{(\ell+1)}_{ab}=0$。由于根据条目 1，我们还有 $\dot{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)}_{a}n^a=0$，恒等式 (100) 和 (105) 对于$m=\ell+1$ 可简化为

$$\begin{aligned}\sigma^{(1)}\mathcal{Q}^{(\ell+2)}_{ab}n^b+(\ell+1)\big(2\sigma^{(1)}\kappa_n+\pounds_n\sigma^{(1)}\big)\dot{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)}_{a}&=0,\\ \mathcal{Q}^{(\ell+2)}_{ab}n^b+\pounds_n\dot{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)}_{a}+2\kappa_n\dot{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)}_{a}&=0.\end{aligned}$$

在第二个方程中解出 $\mathcal{Q}^{(\ell+2)}_{ab}n^b$ 并代入第一个方程，得到

$$\sigma^{(1)}\pounds_n\dot{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)}_{a}-\big(2\ell\sigma^{(1)}\kappa_n+(\ell+1)\pounds_n\sigma^{(1)}\big)\dot{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)}_{a}=0.$$

这是关于 $\dot{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)}_{a}$的齐次输运方程，并且由于 $\dot{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)}_{a}\overset{\Sigma}{=}0$ （因为 $\widehat{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)}_{a}\overset{\Sigma}{=}0$和 $\dot{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)}_{a}n^a=0$ 处处成立，特别是在 Σ处），可以得出 $\dot{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)}_{a}=0$，从而得到 $\mathcal{Q}^{(\ell+2)}_{ab}n^b=0$。

现在只需证明条目 3。该条目具有附加假设 $\ddot{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)}=\dot{\mathcal{L}}^{(\ell+1)}=0$（这意味着 $\mathcal{Q}^{(\ell+1)}_{\alpha\beta}=0$ 和 $\mathcal{L}^{(\ell+1)}_{\mu}=0$），并且在 $\ell\neq\mathfrak{n}-2$的条件下，有 $f^{(\ell+3)}=0$。于是，根据 $m=\ell+1$ 的（101）式，有 $\dot{\mathcal{Q}}^{(\ell+2)}_{a}n^a=0$；又由于 $\mathcal{Q}^{(\ell+1)}_{\alpha\beta}=0$，由引理 4.13 中关于 $m=\ell+1$ 的条目 4.，我们得到 $\mathrm{tr}_P\,\mathcal{Q}^{(\ell+2)}=0$，这就证明了 $\ell\neq\mathfrak{n}-2$ 情形下的该条目。对于 $\ell=\mathfrak{n}-2$ 情形，我们无法利用（101）式证明 $\dot{\mathcal{Q}}^{(\mathfrak{n})}_{a}n^a=0$，因为我们尚不知道 $f^{(\mathfrak{n}+1)}=0$。因此，我们的策略是考虑 $m=\mathfrak{n}-1$ 的恒等式（101）和（107），以及 $m=\mathfrak{n}$ 的恒等式（99）和（104）（回顾 $\mathcal{Q}^{(\mathfrak{n}-1)}_{\alpha\beta}=0$、$\mathcal{L}^{(\mathfrak{n}-1)}_{\mu}=0$、 $\mathcal{L}^{(\mathfrak{n})}_{a}n^a=0$，并且根据条目 2.，有 $\mathcal{Q}^{(\mathfrak{n})}_{ab}n^a=0$），

$$\begin{aligned}\sigma^{(1)}\dot{\mathcal{Q}}^{(\mathfrak{n})}_{a}n^a-\frac{\mathfrak{n}-1}{2}f^{(\mathfrak{n}+1)}&=0,\\ \dot{\mathcal{Q}}^{(\mathfrak{n})}_{a}n^a+\mathrm{tr}_P\,\mathcal{Q}^{(\mathfrak{n})}&=0,\\ \sigma^{(1)}\mathcal{Q}^{(\mathfrak{n}+1)}_{ab}n^an^b+\mathfrak{n}\big(2\sigma^{(1)}\kappa_n+\pounds_n\sigma^{(1)}\big)\dot{\mathcal{Q}}^{(\mathfrak{n})}_{a}n^a-\frac{\mathfrak{n}-1}{2}\pounds_nf^{(\mathfrak{n}+1)}&=0,\\ \mathcal{Q}^{(\mathfrak{n}+1)}_{ab}n^an^b-\pounds_n\big(\mathrm{tr}_P\,\mathcal{Q}^{(\mathfrak{n})}\big)-\pounds_n\big(\dot{\mathcal{Q}}^{(\mathfrak{n})}_{a}n^a\big)+2\kappa_n\dot{\mathcal{Q}}^{(\mathfrak{n})}_{a}n^a&=0.\end{aligned}$$

将第二式与第四式结合可得 $\mathcal{Q}^{(\mathfrak{n}+1)}_{ab}n^an^b+2\kappa_n\dot{\mathcal{Q}}^{(\mathfrak{n})}_{a}n^a=0$，将其代入第三式并考虑到第一式，则得到

$$\sigma^{(1)}\pounds_nf^{(\mathfrak{n}+1)}-\big(2(\mathfrak{n}-1)\sigma^{(1)}\kappa_n+\mathfrak{n}\pounds_n\sigma^{(1)}\big)f^{(\mathfrak{n}+1)}=0.$$

由于 $f^{(\mathfrak{n}+1)}|_{\Sigma}=0$我们得出 $f_{(\mathfrak{n}+1)}=0$，因此， $\dot{\mathcal{Q}}^{(\mathfrak{n})}_{a}n^a=0$、$\mathrm{tr}_P\,\mathcal{Q}^{(\mathfrak{n})}=0$和$\mathcal{Q}^{(\mathfrak{n}+1)}_{ab}n^an^b=0$ 也成立。 □

该命题表明，只需在所有阶数上分析方程 $\widehat{\mathcal{L}}_a^{(k)}=0$、$\ddot{\mathcal{Q}}^{(k)}=0$、$\dot{\mathcal{L}}^{(k)}=0$、$\widehat{\mathcal{Q}}_a^{(k)}|_\Sigma=0$和 $\widehat{\mathcal{Q}}_{ab}^{(k)}=0$，以及 $f^{(k)}=0$（$k=\mathfrak{n}+1$除外）、$f^{(\mathfrak{n}+1)}|_\Sigma=0$和$\mathcal{L}_a^{(\mathfrak{n})}n^a=0$，因为其余的共形方程都可由它们推出。注意，方程的数量与每一阶需要确定的自由度相符（即一个对称张量 $\mathrm{Y}^{(k)}$ 和一个标量函数 $\sigma^{(k)}$）。事实上，约化后的方程组 $\widehat{\mathcal{L}}_a^{(k)}=0$、$\ddot{\mathcal{Q}}^{(k)}=0$、$\dot{\mathcal{L}}^{(k)}=0$、$f^{(k)}=0$ 和 $\widehat{\mathcal{Q}}_{ab}^{(k)}=0$ 恰好构成 $(\mathfrak{n}-1)+1+1+1+\frac{(\mathfrak{n}+1)(\mathfrak{n}-2)}{2}=\frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}+1)}{2}+1$个方程，这与 $\mathrm{Y}^{(k)}$ 和 $\sigma^{(k)}$的自由度数量相同。该命题的一个直接推论如下，这一推论将在定理5.5中发挥作用。

推论 4.16. 设$(\mathcal{M},g,\Omega)$ 是一个具有零无穷远$\mathscr{I}$ 的$(\mathfrak{n}+1)$维共形流形，并假设 $\mathscr{I}$ 有一个截面 Σ。固定一个整数 $\ell\geq 1$，并假设方程$\mathcal{L}_\mu^{(k)}=0$, $\mathcal{Q}_{\mu\nu}^{(k)}=0$对每个 $k\leq\ell$, $f^{(k)}=0$以及每个 $k\leq\ell+2$ 均成立；此外，当$\ell=\mathfrak{n}-1$且 $f^{(\mathfrak{n}+1)}|_\Sigma=0$时，$\mathcal{L}_a^{(\mathfrak{n})}n^a=0$也成立。于是，

1. $\mathcal{L}_a^{(\ell+1)}n^a=0.$

进一步假设 $\mathcal{L}_a^{(\ell+1)}=0$, $\widehat{\mathcal{Q}}_a^{(\ell+1)}|_\Sigma=0$ 和 $\mathcal{Q}_{ab}^{(\ell+1)}=0$。于是，

2. $\mathcal{Q}_{ab}^{(\ell+2)}n^b=0$ *and* $\dot{\mathcal{Q}}_a^{(\ell+1)}=0.$

如果，此 此外，我们假设 $\ddot{\mathcal{Q}}^{(\ell+1)}=\dot{\mathcal{L}}^{(\ell+1)}=0$，并且在满足 $\ell\neq\mathfrak{n}-2$的条件下，假设 $f^{(\ell+3)}=0$。那么 en 外

3. $P^{ab}\mathcal{Q}_{ab}^{(\ell+2)}=0.$

实际上，完全可以更省力地直接证明推论 4.16 。然而，若以这种方式呈现，我们就无法统计需要确定的自由度数量，也无法最终判断哪些方程需要施加，哪些方程又会由其他方程自动满足。

在下面的注释中，我们将说明命题 4.15 下方提到的简化方程组如何约束零无穷远处的渐近展开。稍后，在第 5 节中，我们将利用这些经上述考量确定的自由数据来刻画零无穷远处的完整渐近展开。

注释 *4.17*。考虑一个带有零无穷远 $\mathscr{I}$（假设其允许一个截面 $\iota:\Sigma\hookrightarrow\mathscr{I}$）的共形流形 $(\mathcal{M},g,\Omega)$，并照例将嵌入度量超曲面数据记为 $\{\gamma,\ell,\ell^{(2)}\}$，将渐近展开记为 $\{Y^{(k)}\}$，将 Ω 在 $\mathscr{I}$处的横向导数记为 $\{\sigma^{(k)}\}$。我们的思路是考察上文推论 *4.16* 所述的简化共形方程组如何逐阶约束 $\{\gamma,\ell,\ell^{(2)}\}$, $\{Y^{(k)}\}_{k\geq1}$和 $\{\sigma^{(k)}\}_{k\geq2}$（量 $\sigma^{(1)}$ 属于数据的一部分，见定义 *3.3* 和 *3.4*）。显然，首个限制是 $U=\frac{1}{2}\pounds_n\gamma=0$。方程$\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(1)}=0$（见（*89*））对数据施加以下两个额外限制：*(i)* $r=s+d(\log|\sigma^{(1)}|)$，以及 *(ii)* $\sigma^{(2)}=0$，因此整个一形式 r 由度量数据和 σ确定。特别是，这意味着 Ω 的表面引力为零，$\kappa:=\sigma^{(1)}\kappa_n+\pounds_n\sigma^{(1)}=0$，因此 $f^{(2)}=0$和 $\mathcal{L}_a^{(1)}=0$ 自动成立（由（*95*）和（*94*）可知）。此外，方程 $\dot{\mathcal{L}}^{(1)}=0$ *(93)* 和$f^{(3)}=0$*(96)*约束一对 $\{\kappa^{(2)},\pounds_n(\mathrm{tr}_PY)\}$，使得给定 Σ处的一个函数 χ，存在唯一的一对 $\{\kappa^{(2)},\mathrm{tr}_PY\}$ 满足 $\dot{\mathcal{L}}^{(1)}=f^{(3)}=0$和 $\mathrm{tr}_PY|_\Sigma=\chi$。对于 $\mathfrak{n}\neq3$，张量 Y 中尚未确定的剩余$\widehat{\ }$部分，即 Y，将由方程$\widehat{\mathcal{Q}}_{ab}^{(2)}=0$ 完全约束（该方程等价于（*90*），因为根据命题 *4.15* 的条目 *1*，对于 $\ell=1$, $\mathcal{Q}_{ab}^{(2)}n^b=0$和 $P^{ab}\mathcal{Q}_{ab}^{(2)}=0$），其约束由 $\widehat{\ }Y|_\Sigma$给出。要严格证明这一结论，需要分析这些方程之间的相容性，这将在定理 *5.5* 中完成。

当 $\mathfrak{n}=3$时，方程 $\widehat{\mathcal{Q}}_{ab}^{(2)}=0$ 并未约束 $\widehat{\ }\mathbf{Y}$，因为 $\pounds$ 前面的系数$n\mathbf{Y}$ 和 $\mathbf{Y}$ 在 (90) 中均为零。原则上，这可能意味着 $\widehat{\mathcal{Q}}_{ab}^{(2)}=0$ 是对数据 $\{\gamma,\ell,\ell^{(2)},\chi\}$的一项新限制。然而，维数为 $\mathfrak{n}=3$ 的张量 $\mathcal{Q}_{ab}^{(2)}$ 恒等于零，

因此它不会对数据施加任何新限制。要证明这一点，只需在一个规范下证明，其中 $\sigma^{(1)}=1$ 和 $\ell^{(2)}=0$ （由变换律 *(50)* 和 *(17)* 可容易看出，这种规范总是可以实现），因为只要 $\mathcal{Q}^{(1)}_{\alpha\beta}=0$， $\mathcal{Q}^{(2)}_{ab}$ 是否为零就是一个规范不变性质（这是下面引理 *6.2* 的一个特例）。因此，在此规范下，我们也有 $r=s$ 和 $\kappa_n=0$。在这些假设下，由 $\dot{\mathcal{L}}^{(1)}=f^{(3)}=0$ 得到的 $\kappa^{(2)}$ 和 $\pounds_n(\mathrm{tr}_P Y)$ 的值分别为 $\kappa^{(2)}=-4P(s,s)$ 和 $\pounds_n(\mathrm{tr}_P Y)=-\frac{1}{2}\big(\mathrm{tr}_P \mathring{R}-5\,\mathrm{div}\, s+9P(s,s)\big)$。

因此，$\mathscr{I}$ 处的标量曲率为 $R=3(\mathrm{tr}_P R+P(\mathbf{s},\mathbf{s})-\mathrm{div}\,\mathbf{s})$（见 (73)）。将其代入 (90) 中的 $\mathfrak{n}=3$ 可得

$$\mathcal{Q}^{(2)}_{ab}=\mathring{R}_{(ab)}+\mathrm{s}_a\mathrm{s}_b-\mathring{\nabla}_{(a}\mathrm{s}_{b)}-\frac{1}{2}\Big(\mathrm{tr}_P\,\mathring{R}+P(\mathbf{s},\mathbf{s})-\mathrm{div}\,\mathbf{s}\Big)\gamma_{ab}.$$

这个张量显然是无迹的，并且它与 n^a 的缩并为零，这是因为 $\gamma_{ab}n^a=0$ 且$\big(\mathring{R}_{(ab)}+\mathrm{s}_a\mathrm{s}_b-\mathring{\nabla}_{(a}\mathrm{s}_{b)}\big)n^a=0$（见 [37]）。此外，它在一个截面上的拉回为 [37]$\mathcal{Q}^{(2)}_{AB}=R^h_{AB}-\frac{R^h}{2}h_{AB}$，在二维中恒等于零。因此我们得出结论，当 $\mathcal{Q}^{(2)}_{ab}=0$ 为三维时，方程 $\mathscr{I}$ 成立。

对于高阶导数，思路类似，但存在一些重要差异。假设我们已经知道如何为每个 $k=1,\dots,m-1$ 固定 $\{Y^{(k)},\sigma^{(k+1)},\kappa^{(k+1)}\}$。那么，方程 $\mathcal{L}^{(m)}_a=0$ *(86)* 和 $\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_a|_\Sigma=0$ *(84)* 将约束一形式 $r^{(m)}$ 的其余部分，前提是 $m\neq\mathfrak{n}$；而方程 $\ddot{\mathcal{Q}}^{(m)}=0$、$\dot{\mathcal{L}}^{(m)}=0$ 和 $f^{(m+2)}=0$（参见 *(85)*、*(87)* 和 *(88)*）则为

$$\begin{aligned}(\mathfrak{n}-1)\sigma^{(m+1)}-(m-1)\sigma^{(1)}\,\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}&=L^m_{\ddot{\mathcal{Q}}},\\ (\mathfrak{n}-1)\sigma^{(1)}\kappa^{(m+1)}+(\mathfrak{n}-2)\sigma^{(1)}\pounds_n\big(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}\big)+F_m\,\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}&=L^m_{\dot{\mathcal{L}}},\\ \sigma^{(1)}\pounds_n\sigma^{(m+1)}+(\sigma^{(1)})^2\kappa^{(m+1)}+(m+1)\big(\pounds_n\sigma^{(1)}+2\sigma^{(1)}\kappa_n\big)\sigma^{(m+1)}&=L^{m+2}_f,\end{aligned}\tag{111}$$

其中，$L^m_{\ddot{\mathcal{Q}}}$、$L^m_{\dot{\mathcal{L}}}$ 和 L^{m+2}_f 汇集了我们已知其约束方式的低阶项，而 $F_m:=\big((2m(\mathfrak{n}-1)-\mathfrak{n})\sigma^{(1)}\kappa_n+(m-1)\mathfrak{n}\pounds_n\sigma^{(1)}\big)$。给定 $\sigma^{(m+1)}|_\Sigma$（这是与引理 *4.9* 中剩余的共形自由度相关的一个完全自由的函数），当 $m\neq\mathfrak{n}-1$ 时，该系统对 $\{\sigma^{(m+1)},\kappa^{(m+1)},\mathrm{tr}_P Y^{(m)}\}$ 存在唯一解。事实上，对第一个方程沿 n 取李导数，并将其与 *(111)* 中的三个方程结合，可得（具体的组合方式可从右端读出）

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{n}-m-1)(\sigma^{(1)})^2\pounds_n\big(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}\big)+\sigma^{(1)}G_m\,\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}\\ &=\sigma^{(1)}L^m_{\dot{\mathcal{L}}}-(\mathfrak{n}-1)L^{m+2}_f+\sigma^{(1)}\pounds_n\big(L^m_{\ddot{\mathcal{Q}}}\big)+(m+1)\big(\pounds_n\sigma^{(1)}+2\sigma^{(1)}\kappa_n\big)L^m_{\ddot{\mathcal{Q}}},\end{aligned}\tag{112}$$

其中 $G_m:=m(\mathfrak{n}-m-1)\sigma\kappa_n+(m-1)(\mathfrak{n}-m-2)\kappa=m(\mathfrak{n}-m-1)\sigma\kappa_n$（回顾一下，表面引力 $\kappa=\sigma\kappa_n+\pounds_n\sigma$ 已证明为零）。对于 $\mathrm{tr}_P Y^{(m)}$，这给出了唯一解，其“初始”数据由 *(111)* 中的第一个方程确定，即 $\mathrm{tr}_P Y^{(m)}|_\Sigma=\frac{1}{(m-1)\sigma^{(1)}}\big((\mathfrak{n}-1)\sigma^{(m+1)}|_\Sigma-L^m_{\ddot{\mathcal{Q}}}|_\Sigma\big)$，但 $m=\mathfrak{n}-1$ 时除外，因为此时 $\pounds_n\big(\mathrm{tr}_P Y^{(m)}\big)$ 前的系数为零，且 $G_{\mathfrak{n}-1}=0$。最后，方程 $\widehat{\mathcal{Q}}^{(m+1)}_{ab}=0$ 与 *(83)* 等价，因为 $\mathcal{Q}^{(m+1)}_{ab}n^b=0$，并且对于 $\ell=m$，由命题 *4.15* 的条目 *1* 可知 $P^{ab}\mathcal{Q}^{(m+1)}_{ab}=0$；该方程约束 $Y^{(m)}$ 的剩余部分，即 $\widehat{\ }Y^{(m)}$，使其由自由数据 $\widehat{\ }Y^{(m)}|_\Sigma$ 决定，条件是 $2m\neq\mathfrak{n}-1$。和之前一样，这一结论需要检查其与其余方程的相容性，见下文定理 *5.5*。现在我们来分析“特殊”情形 $m=\frac{\mathfrak{n}-1}{2}$、$m=\mathfrak{n}-1$ 和 $m=\mathfrak{n}$。

情形 $m=\frac{\mathfrak{n}-1}{2}$ （$\mathfrak{n}$ 偶数）

在这种情形下， $\mathcal{Q}_{ab}^{(m+1)}$ 中（参见 *(83)*）乘在 $\pounds_n Y^{(m)}$ 和 $Y^{(m)}$ 前的系数为零（回顾一下，$\kappa=0$），因此方程 $\widehat{\mathcal{Q}}_{ab}^{(m+1)}=0$ 不会用 $\widehat{\ }Y^{(m)}|_\Sigma$来约束 $\widehat{\ }Y^{(m)}$。相反，它成为对剩余自由数据的潜在约束，即度量超曲面数据 $\{\gamma,\ell,\ell^{(2)}\}$、函数 $tr_P Y|_\Sigma$、 $\{\sigma^{(k)}|_\Sigma\}_{k\leq m}$ 以及张量 $\{\widehat{\ }Y^{(k)}|_\Sigma\}_{k<m}$。我们将由此得到的张量记为 $\mathcal{O}^{\mathscr{I}}_{ab}$，并称之为“辐射障碍张量”。它是对称的（因为 $\mathcal{Q}$），且根据命题 *4.15* 的条目 *1*，它还是横向的，即 $P^{ab}\mathcal{O}^{\mathscr{I}}_{ab}=0$ 且 $\mathcal{O}^{\mathscr{I}}_{ab}n^a=0$。第 *6* 节将对 $\mathcal{O}^{\mathscr{I}}_{ab}$ 进行更详细的分析。

情形 $m=\mathfrak{n}-1$

如前所述，当 $m=\mathfrak{n}-1$ 时，系统（*111*）不再像在 m 的其余取值情形下那样，将张量集合 $\{\sigma^{(\mathfrak{n})},\kappa^{(\mathfrak{n})},tr_P Y^{(\mathfrak{n}-1)}\}$ 表示为关于 $\sigma^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma$ 的形式。相反，通过方程$\ddot{Q}^{(\mathfrak{n}-1)}=0$、 $\dot{\mathcal{L}}^{(\mathfrak{n}-1)}=0$、 $\mathcal{L}_a^{(\mathfrak{n})}n^a=0$ 和 $f^{(\mathfrak{n}+1)}|_\Sigma=0$，这些量完全由 $\sigma^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma$ 和 $\kappa^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma$ 确定（也就是说，我们用 $f^{(\mathfrak{n}+1)}|_\Sigma=0$ 和 $\mathcal{L}_a^{(\mathfrak{n})}n^a=0$ 替换系统（*111*）中的第三个方程$f^{(\mathfrak{n}+1)}=0$），下文将对此进行讨论。首先，方程 $\ddot{Q}^{(\mathfrak{n}-1)}=0$ 和 $\dot{\mathcal{L}}^{(\mathfrak{n}-1)}=0$（见（*85*）和（*87*））具有如下形式

$$(\mathfrak{n}-1)\sigma^{(\mathfrak{n})}-(\mathfrak{n}-2)\sigma^{(1)}\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(\mathfrak{n}-1)}=L^{\mathfrak{n}-1}_{\ddot{\mathcal{Q}}}, \tag{113}$$

$$(\mathfrak{n}-1)\sigma^{(1)}\kappa^{(\mathfrak{n})}+(\mathfrak{n}-2)\sigma^{(1)}\pounds_n\big(\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(\mathfrak{n}-1)}\big)+F\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(\mathfrak{n}-1)}=L^{\mathfrak{n}-1}_{\dot{\mathcal{L}}}. \tag{114}$$

将由 $\kappa^{(\mathfrak{n})}$ 从 (114) 得到的表达式代入方程 $\mathcal{L}_a^{(\mathfrak{n})}n^a=0$ *(*参见可得[2] 关于 $\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(\mathfrak{n}-1)}$ 的二 (216)*)* 阶输运方程，其形式为

$$\sigma\pounds_n^{(2)}\big(\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(\mathfrak{n}-1)}\big)+\widetilde{H}_1\pounds_n\big(\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(\mathfrak{n}-1)}\big)+\widetilde{H}_2\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(\mathfrak{n}-1)}+known\ terms=0 \tag{115}$$

对于某些函数 $\widetilde{H}_i$， $i=1$、2。因此，给定 $\sigma^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma$和 $\kappa^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma$后，便可从 $\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(\mathfrak{n}-1)}|_\Sigma$和 $\pounds_n\sigma^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma$唯一确定 $\ddot{Q}^{(\mathfrak{n}-1)}|_\Sigma=0$和 $f^{(\mathfrak{n}+1)}|_\Sigma=0$*(*参见 (112)中的第三个方程，须记住它只是对 (88)的改写*)*，即

$$(\mathfrak{n}-1)\sigma^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma-(\mathfrak{n}-2)\sigma^{(1)}\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(\mathfrak{n}-1)}|_\Sigma=L^{\mathfrak{n}-1}_{\ddot{\mathcal{Q}}}|_\Sigma,$$
$$\sigma^{(1)}\pounds_n\sigma^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma+(\sigma^{(1)})^2\kappa^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma+\mathfrak{n}\big(\pounds_n\sigma^{(1)}+2\sigma^{(1)}\kappa_n\big)\sigma^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma=L^{\mathfrak{n}+1}_f|_\Sigma,$$

并由 $\pounds_n\sigma^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma$ 利用（*113*）可得 $\pounds_n\big(Y^{(\mathfrak{n}-1)}\big)|_\Sigma$。以初始数据 $tr_P Y^{(\mathfrak{n}-1)}|_\Sigma$ 和 $\pounds_n\big(Y^{(\mathfrak{n}-1)}\big)|_\Sigma$ 对（*115*）积分，可得处处成立的 $tr_P Y^{(\mathfrak{n}-1)}$。一旦已知 $tr_P Y^{(\mathfrak{n}-1)}$，方程（*113*）和（*114*）便可唯一确定 $\sigma^{(\mathfrak{n})}$和 $\kappa^{(\mathfrak{n})}$。此外，由于初始条件 $\pounds_n\big(Y^{(\mathfrak{n}-1)}\big)|_\Sigma$经过调整，使得 $f^{(\mathfrak{n}+1)}|_\Sigma=0$，命题 *4.15* 保证 $f^{(\mathfrak{n}+1)}=0$处处成立。总之，我们已证明方程 $\ddot{\mathcal{Q}}^{(\mathfrak{n}-1)}=0$、 $\dot{\mathcal{L}}^{(\mathfrak{n}-1)}=0$、 $\mathcal{L}_a^{(\mathfrak{n})}n^a=0$和 $f^{(\mathfrak{n}+1)}=0$构成一个相容系统，可据此根据 $\{\sigma^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma,\kappa^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma\}$唯一确定 $\{\sigma^{(\mathfrak{n})},\kappa^{(\mathfrak{n})},tr_P Y^{(\mathfrak{n}-1)}\}$。特别地，关于 $m=\mathfrak{n}-2$ 的系统（*111*）是相容的，因此方程（*112*）成立。由于当 $m=\mathfrak{n}-1$时，该方程左端恒等于零，因此右端也恒等于零，这意味着在这种情形下不存在阻碍。

情形 $m=\mathfrak{n}$

对于 m的这个取值，乘在 $\mathbf{r}^{(m+1)}$ 上的系数在 (84) 中消失，因此方程 $\dot{\mathcal{Q}}^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma=0$ 不会对一形式 $\mathbf{r}^{(\mathfrak{n})}$ 在 Σ上施加任何新的约束。相反，张量 $\dot{\mathcal{Q}}^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma$ 仅依赖于 $\sigma^{(\mathfrak{n})}$、 $\kappa^{(\mathfrak{n})}$ 以及已确定的低阶项，

[2]方程 （216）是在特定规范下写出的，因此在选择另一种标架时会发生变化 g ξ。然而 其二阶特征是规范不变的。

因此， $\dot{\mathcal{Q}}^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma = 0$ 成为自由数据的一个潜在约束。我们将所得张量记为 $\mathcal{O}_a^\Sigma$，并称之为“库仑型障碍”。注意，根据命题 *4.15* 的第 *1* 项，它满足 $\mathcal{O}_a^{\mathscr{I}} n^a = 0$。第 *6*节将对该障碍张量进行更详细的分析。

总之，当 $\mathfrak{n}$ 为偶数时，可在 $\mathscr{I}$ 自由指定的数据包括：

1. 满足 $\{\gamma, \ell, \ell^{(2)}\}$ U $= 0$ 的度量超曲面数据；2. 在 $\{\sigma, \sigma^{(2)} = 0, \sigma^{(3)}, ...\}$ 上的函数族 Σ (σ 属于纯度量超曲面规范，参见（50））；3. 在 ${}_P\mathbf{Y}$ 上的标量 tr Σ；4. 在 $\{\widehat{\mathrm{Y}}^{(1)}_{AB}$、$\widehat{\mathrm{Y}}^{(2)}_{AB}$、...$\}$ 上的张量族 Σ；以及 5. 在 $\mathbf{r}^{(\mathfrak{n})}$ 上的完整一形式 Σ。

当 $\mathfrak{n}$ 为奇数时，还必须指定张量 $\widehat{\mathbf{Y}}^{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})}$ 在 $\mathscr{I}$ 上。显然，这些额外数据必须与第 4 点中已指定的 $\widehat{\mathbf{Y}}^{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})}|_\Sigma$ 相兼容。确保这一点的一种方法是直接指定 $\pounds_n \widehat{\mathbf{Y}}^{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})}$，并利用在 Σ 处已给定的数据求解 $\widehat{\mathbf{Y}}^{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})}$。

5 存在性与唯一性结果

在本节中，我们证明注记4.17 中所述的自由数据完全刻画了零无穷远处的几何结构（定理 5.2）；反之，给定这样的自由数据，存在实现该数据的共形时空（定理5.5）。首先建立如下有限阶与无穷阶渐近平坦性的概念是方便的。

定义 5.1. 设 $(\mathcal{M}, g, \Omega)$ 是具有零无穷远 $\mathscr{I}$ 的共形流形。我们称 $(\mathcal{M}, g, \Omega)$为 k-渐近平坦，若它满足拟爱因斯坦方程 (41) 且带有 $\mathcal{T}^{(\ell)}_{\alpha\beta} \overset{\mathscr{I}}{=} 0$，对每个 $\ell \leq k$。当 $k = \infty$ 时，我们简称 $(\mathcal{M}, g, \Omega)$ 是渐近平坦的。

这一定义比文献中通常采用的其他定义限制更少（参见例如综述[16, 3] 或经典文献 [54, 23]），但它非常适合我们在本文中进行的渐近展开分析。我们现在可以建立唯一性定理。

定理 5.2. 设 $(\mathcal{M}, g, \Omega)$、$(\mathcal{M}', g', \Omega')$ 是两个渐近平坦流形，其对应的零无穷远为 $\Phi: \mathscr{I} \hookrightarrow \mathcal{M}$, $\Phi': \mathscr{I}' \hookrightarrow \mathcal{M}'$。在 $(\mathcal{M}, g, \Omega)$ 和 $(\mathcal{M}', g', \Omega')$ 上分别选取任意共形规范，使得 $|\nabla\Omega|^2_g = 0$ *and* $|\nabla'\Omega'|^2_{g'} = 0$, 并令 ξ, ξ' 分别为 $\Phi(\mathscr{I}), \Phi'(\mathscr{I}')$ 的支架场，沿测地线延拓。假设 $\mathscr{I}$ 存在一个截面 $\iota: \Sigma \hookrightarrow \mathscr{I}$，并且

存在一个微分同胚 $\chi: \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{I}'$。令 $\iota' := \chi \circ \iota$，使得 $\Sigma' := \chi(\Sigma) \overset{\iota'}{\hookrightarrow} \mathscr{I}'$，并令 Ψ 为命题 *4.5* 中构造的、在 $\Phi(\Sigma), \Phi'(\Sigma')$ 的邻域 $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}, \mathcal{U} \subset \mathcal{M}'$ 之间的微分同胚。定义函数 $\omega := \Omega^{-1}\Psi^\star\Omega'$，它在 $\mathcal{U}$ 上光滑且处处非零，并令 $Y^{(k)} := \Phi^\star \pounds^{(k)}_\xi (\omega^2 g)$ 且 $\varpi := \Phi^\star\omega$。最后，假设

1. $\chi^\star\{\gamma', \ell', \ell^{(2)\prime}\} = \{\varpi^2\gamma, \varpi^2\ell, \varpi^2\ell^{(2)}\}$, *2.* $\chi^\star \operatorname{tr}_{P'} \mathbf{Y}'|_\Sigma = \varpi^{-2} \operatorname{tr}_P \mathbf{Y}|_\Sigma$ 以及 $\chi^\star \widehat{\mathbf{Y}}'^{(k)}|_\Sigma = \widehat{\mathbf{Y}}^{(k)}|_\Sigma$ 对每个 $k \geq 1$, *3.* $\chi^\star \mathbf{r}'^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma = \mathbf{r}^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma$,

4. and $\chi^\star \widehat{\mathbf{Y}}'^{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})} = \widehat{\mathbf{Y}}^{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})}$ *for* $\mathfrak{n}$ *odd.*

那么，对于所有 $k \geq 0$,

$$\Psi^\star \pounds^{(k)}_{\xi'} g' \overset{\mathscr{I}}{=} \pounds^{(k)}_\xi (\omega^2 g).$$

证明。令 $g\tilde{:}=\omega^2 g$ 且 $\Omega:\tilde{=}\,\omega\Omega$。由于 $\Phi_\star\xi=\xi'$，我们有 $\Psi^\star\sigma^{(k)\prime}=\sigma^{(k)}$，对每个 $k\geq 0$ 都成立；又已知 $\chi^\star\{\boldsymbol{\gamma}',\boldsymbol{\ell}',\ell^{(2)\prime}\}=\{\varpi^2\boldsymbol{\gamma},\varpi^2\boldsymbol{\ell},\varpi^2\ell^{(2)}\}$，根据命题 4.6，只需证明对于所有 $k\geq 1$，$\chi^\star\mathrm{Y}'^{(k)}=\mathrm{Y}^{(k)}$。注意到，除特殊阶数外，在每个阶数上约束 $\mathrm{Y}'^{(k)}$ 和 $\mathrm{Y}^{(k)}$ 的方程（见注释 4.17）完全相同，且具有相同的初始条件（依据条目 2.），因此必然逐阶推出 $\mathrm{Y}'^{(k)}=\mathrm{Y}^{(k)}$。第一个例外与一形式 $\mathrm{r}^{(\mathfrak{n})}$ 有关：共形方程仅将其约束到某个截面上的取值；但由于根据条目 3.，有 $\chi^\star\mathrm{r}'^{(\mathfrak{n})}=\mathrm{r}^{(\mathfrak{n})}$ 于 Σ，因此 $\chi^\star\mathrm{r}'^{(\mathfrak{n})}=\mathrm{r}^{(\mathfrak{n})}$ 处处成立。此外，当 $\mathfrak{n}$ 为偶数时，关于 $\hat{\mathrm{Y}}^{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})}$ 还有另一个例外情形，因为共形方程完全不对其施加约束。条目 4. 处理了这一点，它规定 $\chi^\star\hat{\mathrm{Y}}'^{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})}=\hat{\mathrm{Y}}^{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})}$。因此，共形方程以及条目 1.-4. 中“自由数据”的一致性完全确定了横向展开，再直接应用命题 4.6 即得所求。

□

注 5.3。请注意，定理的陈述已经排除了注 *4.17*中讨论的所有可能障碍，因为 $(\mathcal{M},\ g,\ \Omega)$ 和 $(\mathcal{M}',\ g',\ \Omega')$ 均假设为渐近平坦（如定义 *5.1*所述）。只需付出相近的努力，便可证明：对于可微性为 Ψ 且障碍张量非零的渐近平坦度量，$\frac{\mathfrak{n}-3}{2}$ 是直到 $\mathcal{C}^{\frac{\mathfrak{n}-3}{2}}$ 阶的渐近等距；或者对于 $\frac{\mathfrak{n}-1}{2}$ -渐近平坦的光滑度量，$\frac{\mathfrak{n}-1}{2}$ 是直到 阶的等距映射。

注 *5.4*。值得将定理 *5.2* 中的唯一性结果与我们先前的工作联系起来：在该工作中，我们考察了由 *Fefferman-Graham* 环境度量导出的共形流形 $(\mathcal{M},g,\Omega)$，并证明它们与容许可积共形 *Killing* 向量 $\pounds_\eta g=2\psi g$、以 $\mathscr{I}$ 为其中一个视界且满足 $\pounds_\eta\Omega=(\psi-1)\Omega$ 的流形 $(\mathcal{M},g,\Omega)$ 一一对应。正如 *[44]*，中所证明的，对于这类流形，总可以选取共形规范，使得 $\psi=0$，从而 η 是 *Killing* 向量。现在，我们将此与以下事实联系起来：在假设 η 是 *Killing* 向量且对于某个函数 α 有 $\eta\overset{\mathscr{I}}{=}\alpha\nu$ 的条件下，横向展开 $\{Y^{(k)}\}$ 的每一项都满足如下约束：*[46, 47]*

$$\alpha\pounds_n\mathbf{Y}^{(m)}=m\pounds_n(\alpha)\mathbf{Y}^{(m)}-2d\alpha\otimes_s\mathbf{r}^{(m)}+\mathcal{P}^{(m)}\qquad\forall m\geq 1,\tag{116}$$

其中 $\mathcal{P}^{(1)}:=\boldsymbol{\ell}\otimes_s d\big(\pounds_n\alpha\big)+\frac{1}{2}\pounds^{X_\eta}\boldsymbol{\gamma}$,

$$\mathcal{P}^{(m)}:=m\pounds_{X_\eta}\mathbf{Y}^{(m-1)}-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{m}\binom{m}{i}\Phi^\star\Big(\pounds_{\pounds_\xi^{(i)}\eta}\pounds_\xi^{(m-i)}g\Big)\qquad m\geq 1,\tag{117}$$

并且 $X_\eta^a=-\frac{1}{2}\alpha n\ (\ell^{(2)})\ n^a+P^{ab}\big(2\alpha\mathrm{s}_b+\mathring{\nabla}_b\alpha\big)$。正如 *[46]*，中所证明的，当 η是非退化的，即其表面引力处处非零时，总可以选取 $\xi|_{\mathscr{I}}$ 并沿测地线延拓，使得$\mathcal{P}^{(1)}=\boldsymbol{\ell}\otimes_s d\big(\pounds_n\alpha\big)$ 以及 $\mathcal{P}^{(m)}=0$ 对每个 $m\geq 2$都成立。对 （116）关于 $m\geq 2$，在该规范下分别进行一次和两次 n 压缩可得

$$\alpha\pounds_n\mathbf{r}^{(m)}=(m-1)\pounds_n(\alpha)\mathbf{r}^{(m)}+\kappa^{(m)}d\alpha,\qquad\alpha\pounds_n\kappa^{(m)}=(m-2)\pounds_n(\alpha)\kappa^{(m)}.$$

取 Σ 为分叉曲面，其中 $\alpha=0$ 且 $\pounds_n\alpha\neq 0$，由此可得，定理*5.2* 中条目 *2.* 的自由数据必须是平凡的。注意，这一结论是规范不变的，因为 $\mathbf{Y}'^{(k)}$ 在规范变换下的首阶为 $z^k\mathbf{Y}^{(k)}$。此外，条件 $\eta\ (\Omega)=-$ 在所有阶上都满足 Ω，这意味着自由函数 $\{\sigma^{(k)}\}_{k\geq 1}$ 在 Σ 处也为零。综上，唯一的

剩余自由度是一个无迹张量 $\Psi_{AB}\big|_\Sigma$ 对于 $\mathfrak{n}$ 奇数情形，其完整的$\mathbf{Y}^{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})}$受方程(116)约束。这种自由度与我们通过另一种论证得到的自由度一致；在 *[44]*，中，我们将该张量与 *Fefferman-Graham* 环境度规构造中出现的自由数据联系起来。

现在我们证明本文的主要结果之一，即给定 $\mathscr{I}$-结构数据（如定义3.3所述），以及定理5.2中所描述的自由数据，只要障碍张量消失，就可以构造出一个光滑的渐近平坦[3] 时空（$\mathcal{M}, g, \Omega$）。

定理 5.5。 设 $\{\mathscr{I}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\ell}, \ell^{(2)}, \sigma, \mathfrak{q} = 0\}$ 是一个 $\mathfrak{n}$维的 $\mathscr{I}$-结构数据，它允许一个截面 $\iota: \Sigma \hookrightarrow \mathscr{I}$，其诱导度量为 $h := \iota^\star \boldsymbol{\gamma}$。设

a. χ 是定义在 Σ上的一个标量函数，

b. $\{\sigma_\Sigma^{(k)}\}_{k\geq 3}$ 是定义在 Σ上的一组标量函数，

c. $\{\mathcal{Y}_{AB}^{(k)}\}_{k\geq 1}$ 是定义在 Σ 上的一组关于 h无迹的对称张量，

d. $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\mathfrak{m}$分别是定义在 Σ上的一个一形式和一个函数，并且

e. 对于奇数 $\mathfrak{n}$，设 $\widehat{\mathbb{Y}}_{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})ab}$是定义在 $\mathscr{I}$上的一个满足 $\iota^\star \widehat{\mathbb{Y}}^{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})} = \mathcal{Y}^{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})}$的对称横向张量。

假设由该数据按注释 *4.17* 所述构造的障碍张量 $\mathcal{O}_a^\Sigma$ 与 $\mathcal{O}_{ab}^{\mathscr{I}}$ 均消失。则存在光滑共形流形 $(\mathcal{M}, g, \Omega)$、嵌入 $\Phi: \mathscr{I} \hookrightarrow \mathcal{M}$ 以及测地向量 ξ，使得 *(i)* $(\mathcal{M}, g, \Omega)$ 在 $\mathscr{I} = \{\Omega = 0\}$ 处满足 $|\nabla\Omega|_g^2 = 0$ 以及拟爱因斯坦方程至无穷阶，*(ii)* $\{\mathscr{I}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\ell}, \ell^{(2)}, \sigma, \mathfrak{q}\}$ 在 $(\mathcal{M}, g)$ 中按定义 *3.4* 的意义是 (Φ, ξ)-嵌入的，且 *(iii)* 对每个 $k \geq 3$ 有 $tr_P Y|_\Sigma = \chi$、$\pounds_\xi^{(2)} \Omega|_\Sigma = 0$ 以及 $\pounds_\xi^{(k)} \Omega|_\Sigma = \sigma_\Sigma^{(k)}$，对每个 $k \geq 1$ 有 $(\iota^\star Y^{(k)})^{tf} = \mathcal{Y}^{(k)}$，$\iota^\star \boldsymbol{r}^{(\mathfrak{n})} = \boldsymbol{\beta}$ 以及 $\kappa^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma = \mathfrak{m}$。此外，当 $\mathfrak{n}$ 为奇数时，还有 $\widehat{Y}_{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})\,ab} = \widehat{Y}_{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})\,ab}$。

备注： 注意，假设 $\mathfrak{q} = 0$ 从一开始就不失一般性，因为根据定义 *3.4* 之后的说明，总可以实现一个共形规范，使得 $\mathfrak{q} = 0$ 成立。

证明。证明策略与我们在 [47] 定理 4.7 中采用的策略相似，但也存在一些重要差异。其思路是利用定理 4.7 和引理 4.8，从一组定义在 $\mathscr{I}$上的“抽象”张量 $\{\mathrm{Y}^{(k)}\}_{k\geq 1}$和函数 $\{\sigma^{(k)}\}_{k\geq 1}$构造一个时空 $(\mathcal{M}, g)$ 及一个函数 Ω，使得 $(\mathcal{M}, g, \Omega)$ 在 $\mathscr{I}$处以无穷阶满足拟爱因斯坦方程。为此，我们将根据第 4 节中推导出的方程，分别构造每个 $\mathrm{Y}^{(k)}$和 $\sigma^{(k)}$；这些方程是在对所有 k 令 $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(k)} = 0$, $\mathcal{L}_\mu^{(k)} = 0$ 和 $f^{(k)} = 0$，并将每个 $\mathrm{Y}^{(k)}$ 替换为 $\mathrm{Y}^{(k)}$之后得到的。为保持记号一致，我们引入 $\mathrm{r}^{(k)} := \mathrm{Y}^{(k)}(n, \cdot)$ 和 $\mathrm{k}^{(k)} := -\mathrm{Y}^{(k)}(n, n)$，分别表示预期的张量 $\mathrm{r}^{(k)}$ 和 $\kappa^{(k)}$。

1. 策略

为了构造抽象展开 $\{\mathrm{Y}^{(k)}\}$，会遇到如下困难。假设我们想利用方程 $\mathcal{Q}_{ab}^{(k+1)} = 0$，根据 Σ 上的某个初始条件来构造 $\mathrm{Y}^{(k)}$。观察（83）右端（回想一下，张量 $\widetilde{O}_{ab}^{(k)}$ 汇集了依赖于 $\mathrm{r}^{(k)}$ 和 $\sigma^{(k)}$的附加项），便会立即发现，由于 $\widetilde{O}_{ab}^{(k)}$ 中含有 $\mathrm{r}^{(k)}$ 的 $\mathring{\nabla}$-导数，以及 $\mathrm{tr}_P \mathrm{Y}^{(k)}$，这并不是一个输运方程，而是一个偏微分系统。这是一个复杂的系统，据我们所知，目前还没有可用的存在性定理。此外，其中还出现了阶数更高的标量 $\kappa^{(k+1)}$。因此，我们的策略是先构造一个合适的一形式 $\boldsymbol{c}^{(k)}$ 和三个标量函数 $t^{(k)}$、$\mathfrak{c}^{(k)}$ 和 $\mathfrak{c}^{(k+1)}$，然后将方程 $\mathcal{Q}_{ab}^{(k+1)} = 0$ 改写为以 $\mathfrak{c}^{(k)}$ 代替 $\mathrm{k}^{(k)}$、以 $\boldsymbol{c}^{(k)}$ 代替 $\mathrm{r}^{(k)}$、以 $t^{(k)}$ 代替 $\mathrm{tr}_P \mathrm{Y}^{(k)}$，并以 $\mathfrak{c}^{(k+1)}$ 代替 $\kappa^{(k+1)}$。所得方程现在是真正关于 $\mathrm{Y}^{(k)}$ 的输运方程，由此我们可以根据 Σ 处的初始条件构造 $\mathrm{Y}^{(k)}$。之后，我们需要完成

[3]按照定义 5.1，如前所述，这比文献中的其他概念都弱。显然，诸如 $\Omega^{-2} g$ 在 $\mathscr{I}$ 的某个完整邻域内是真空 $\mathscr{I}$ 这样的更强结论，不可能仅凭在 处给出的数据证明。

这一论证，证明对于每个 $k \geq 1$，都有 $\boldsymbol{c}^{(k)}(n) = -\mathfrak{c}^{(k)}$、$\mathrm{Y}^{(k)}(n, \cdot) \coloneqq \mathbf{r}^{(k)} = \boldsymbol{c}^{(k)}$、$\mathrm{tr}_P \mathrm{Y}^{(k)} = t^{(k)}$，以及 $\mathrm{Y}^{(k+1)}(n, n) = -\mathfrak{c}^{(k+1)}$。

现在我们逐步给出该论证的概要：假设对于$m \geq 1$ 的给定值[4]，我们已经构造了集合 $\{\mathrm{Y}^{(k)}、\sigma^{(k)}\}_{k \leq m}$ 以及 $\sigma^{(m+1)}$ 和 $\mathfrak{c}^{(m+1)}$，使得方程 $\mathcal{Q}^{(k)}_{\alpha\beta} = 0$、$\mathcal{L}^{(k)}_{\mu} = 0$ 和 $f^{(k+2)} = 0$ 对所有 $k \leq m$以及 $\mathcal{Q}^{(m+1)}_{ab} = 0$ 均成立，其中对每个 $k \leq m$作替换$\mathrm{Y}^{(k)} \to \mathrm{Y}^{(k)}$，以及 $\kappa^{(m+1)} \to \mathfrak{c}^{(m+1)}$。然后我们按以下步骤构造$\mathrm{Y}^{(m+1)}$、$\sigma^{(m+2)}$ 和 $\mathfrak{c}^{(m+2)}$：

1. 我们定义 $\boldsymbol{c}^{(m+1)}|_{\Sigma}$ 为满足以下条件的唯一一形式：(i) $\boldsymbol{c}^{(m+1)}(n)|_{\Sigma} = -\mathfrak{c}^{(m+1)}|_{\Sigma}$ 以及 (ii) 方程 $\iota^{\star}\dot{\mathcal{Q}}^{(m+1)}_{a} = 0$ （见（84））， 并作替换$\mathbf{Y}^{(k)} \to \mathbb{Y}^{(k)}$，对每个$k \leq m$、$\mathbf{r}^{(m+1)} \to \boldsymbol{c}^{(m+1)}$ 以及 $\kappa^{(m+1)} \to \mathfrak{c}^{(m+1)}$。

2. 给定 $\boldsymbol{c}^{(m+1)}|_{\Sigma}$后，我们通过求解方程 $\boldsymbol{c}^{(m+1)}$ 来积分一形式 $\mathcal{L}^{(m+1)}_{a} = 0$ (86)，并作如下替换：$\mathbf{Y}^{(k)} \to \mathbb{Y}^{(k)}$，对每个 $k \leq m$、$\mathbf{r}^{(m+1)} \to \boldsymbol{c}^{(m+1)}$ 和 $\kappa^{(m+1)} \to \mathfrak{c}^{(m+1)}$。我们强调，在此阶段，工作假设是函数 $\mathfrak{c}^{(m+1)}$ 已被固定。

3. 确定 $\boldsymbol{c}^{(m+1)}$后，我们通过求解方程组 $\sigma^{(m+2)}$、$t^{(m+1)}$ 和 $\mathfrak{c}^{(m+2)}$ 来构造三个函数 $f^{(m+3)} = \dot{\mathcal{L}}^{(m+1)} = \ddot{\mathcal{Q}}^{(m+1)} = 0$，并作如下替换：$\mathbf{Y}^{(k)} \to \mathbb{Y}^{(k)}$，对每个 $k \leq m$、$\mathbf{r}^{(m+1)} \to \boldsymbol{c}^{(m+1)}$、$\kappa^{(m+1)} \to \mathfrak{c}^{(m+1)}$，$\mathrm{tr}_P \mathbf{Y}^{(m+1)} \to t^{(m+1)}$和 $\kappa^{(m+2)} \to \mathfrak{c}^{(m+2)}$，从一个初始条件出发 $\sigma^{(m+2)}|_{\Sigma} = \sigma^{(m+2)}_{\Sigma}$ （见（111）以及随后关于解的存在性的讨论）。自由函数 $\sigma^{(m+2)}_{\Sigma}$ 仅编码了剩余共形自由度，如引理 4.9所述。

4. 最后，利用刚确定的张量 $\boldsymbol{c}^{(m+1)}$、$\sigma^{(m+2)}$、$t^{(m+1)}$ 和 $\mathfrak{c}^{(m+2)}$，通过积分方程 $\mathcal{Q}^{(m+2)}_{ab} = 0$ 来构造 $\mathrm{Y}^{(m+1)}$；其中，对每个 $k \leq m$，将 $\mathbf{Y}^{(k)} \to \mathrm{Y}^{(k)}$ 替换为 $\mathbf{r}^{(m+1)} \to \boldsymbol{c}^{(m+1)}$，$\kappa^{(m+1)} \to \mathfrak{c}^{(m+1)}$, $\mathrm{tr}_P \mathbf{Y}^{(m+1)} \to t^{(m+1)}$, $\kappa^{(m+2)} \to \mathfrak{c}^{(m+2)}$和 $\mathbf{Y}^{(m+1)} \to \mathrm{Y}^{(m+1)}$，并取初始条件 $\mathrm{tr}_P \mathrm{Y}^{(m+1)}|_{\Sigma} = t^{(m+1)}|_{\Sigma}$、$\mathrm{Y}^{(m+1)}(n, \cdot)|_{\Sigma} = \boldsymbol{c}^{(m+1)}|_{\Sigma}$ 和 $(\mathrm{Y}^{(m+1)}_{AB})^{tf}|_{\Sigma} = \mathcal{Y}^{(m+1)}_{AB}$。

为了完成论证，我们需要证明，对于所有 $k \leq m+1$，集合 $\{\mathrm{Y}^{(k)}, \sigma^{(k)}\}_{k \leq m+1}$ 以及函数 $\sigma^{(m+2)}$ 和 $\mathfrak{c}^{(m+2)}$ 都满足方程 $\mathcal{Q}^{(k)}_{\alpha\beta} = 0$、$\mathcal{L}^{(k)}_{\mu} = 0$ 和 $f^{(k+2)} = 0$，并且满足 $\mathcal{Q}^{(m+2)}_{ab} = 0$ （每一项中，对每个 $k \leq m+1$，都将 $\mathrm{Y}^{(k)} \to \mathrm{Y}^{(k)}$ 替换为 $\kappa^{(m+2)} \to \mathfrak{c}^{(m+2)}$）。这等价于证明以下三点：（1）标量 $\boldsymbol{c}^{(m+1)}(n)$ 与 $-\mathfrak{c}^{(m+1)}$ 相同；（2）$\mathbf{r}^{(m+1)} \coloneqq \mathrm{Y}^{(m+1)}(n, \cdot)$ 与 $\boldsymbol{c}^{(m+1)}$ 一致；（3）$\mathrm{tr}_P \mathrm{Y}^{(m+1)}$ 与 $t^{(m+1)}$ 相同。最后，我们将利用定理 4.7 和引理 4.8，根据集合 $\{\mathrm{Y}^{(k)}, \sigma^{(k)}\}_{k \geq 1}$ 构造共形流形 $(\mathcal{M}, g, \Omega)$。鉴于这些张量满足 $\mathcal{Q}^{(k)}_{\alpha\beta} = 0$、$\mathcal{L}^{(k)}_{\mu} = 0$ 和 $f^{(k)} = 0$ （对于每个 $k \geq 1$，将 $\mathrm{Y}^{(k)} \to \mathrm{Y}^{(k)}$ 替换为相应项），显然 $(\mathcal{M}, g, \Omega)$ 也将满足任意阶的 $\mathcal{Q}^{(k)}_{\alpha\beta} = 0$、$\mathcal{L}^{(k)}_{\mu} = 0$ 和 $f^{(k)} = 0$，因为对于每个 $k \geq 1$，都有 $\mathrm{Y}^{(k)} = \mathrm{Y}^{(k)}$ 和 $\pounds^{(k)}_{\xi} \Omega|_{\mathscr{I}} = \sigma^{(k)}$。

2. 一阶

一阶情形较为特殊，因为正如前面多次提到的，共形方程在最低阶时具有不同的结构形式。这一点体现在一形式 $\boldsymbol{c}$ 以及标量 $\mathfrak{c}$、t 和 $\sigma^{(2)}$ 的构造方式上。我们先定义 $\boldsymbol{c} \coloneqq \mathrm{s} + d\log|\sigma|$（参见 (89)），以及标量[5] $\mathfrak{c} \coloneqq -\pounds_n(\log|\sigma|)$、$\sigma^{(2)} = 0$（见 (89)）和 $\mathfrak{c}^{(2)} \coloneqq \mathfrak{c}n(\ell^{(2)}) - 4P(\boldsymbol{c}, \mathrm{s}) -$

[4]为便于论证，假设 $m+1$ 不是例外值 $\mathfrak{n}$、$\mathfrak{n}-1$ 或 $\frac{\mathfrak{n}-1}{2}$ 之一。这些情况将另行处理。[5]注意，根据构造，$\mathfrak{c} = -\boldsymbol{c}(n)$，因此我们无需在这一阶证明这一点，这与其他阶数不同。

。 。2P(∇ log |σ|,∇ log |σ|)（将κ(2) → c(2)、 σ(2) → 0、r → c 和 κn → c代入后令 (96) 等于零即可得到）。现在，我们可以通过积分常微分方程 L̇(1) = 0 （见 (93)）来构造函数 t：将 r 替换为 c，将 κn 替换为 c，将 κ(2) 替换为 c(2)，并将 trP Y 替换为 t，同时取初始条件 t|Σ = χ。接下来，若 n > 3，我们通过积分输运方程 Q(2) ab = 0 （参见 (90)）来构造张量 Yab；该方程是在将 r 替换为 c、将 κn 替换为 c、将 κ(2) 替换为 c(2)，并将 trP Y 替换为 t后得到的，其初始条件为 $Y^{tf}_{AB}|_\Sigma = \mathcal{Y}_{AB}$、trP Y|Σ = t|Σ 和 r|Σ = c|Σ，即

$$\begin{aligned} 0 &= (n-3)\sigma \pounds_n \mathbb{Y}_{ab} + (n-3)\sigma \mathfrak{c}\mathbb{Y}_{ab} + (n-1)\mathring{\nabla}_a\mathring{\nabla}_b\sigma - 2\sigma(n-2)\mathring{\nabla}_{(a}c_{b)} \\ &\quad + \sigma\big(\mathring{\nabla}_{(a}\mathrm{s}_{b)} - 2c_ac_b + 4c_{(a}\mathrm{s}_{b)} - \mathrm{s}_a\mathrm{s}_b + \mathring{R}_{(ab)}\big) - \frac{\sigma\mathfrak{R}}{2n}\gamma_{ab}, \end{aligned} \tag{118}$$

其中 ℜ 由（73）给出，并作相应替换（trP Y → t， κ(2) → c(2)，r → c，κn → c）。若 n = 3我们直接通过分解（30），取值 $\mathbb{Y}_{ab}n^b = c_a$、trP Y = t，并令其横向部分由定理条目（e）中规定的数据 $\widehat{\mathbb{Y}}_{ab}$ 定义对称张量 Yab。回想一下，对于 n = 3 方程 $\mathcal{Q}^{(2)}_{ab} = 0$ 自动成立。

现在我们证明，在情形 n > 3中，r = c 和 trP Y = t 处处成立（对于 n = 3，这由构造可知）。首先，将方程（118）与 n 收缩，并两次使用恒等式（28）（分别取ωa = ca 和 ωa = sa），再使用 $\mathring{R}_{(ab)}n^b = \frac{1}{2}\pounds_n \mathrm{s}_a$ [37]，得到

$$\begin{aligned} 0 &= (n-3)\sigma\pounds_n \mathbb{r}_a + (n-3)\sigma\mathfrak{c}\mathbb{r}_a + (n-1)n^b\mathring{\nabla}_a\mathring{\nabla}_b\sigma - \sigma(n-2)(\pounds_n c_a - \mathring{\nabla}_a\mathfrak{c} + 2\mathfrak{c}\mathrm{s}_a) \\ &\quad + \sigma\pounds_n\mathrm{s}_a + 2\sigma\mathfrak{c}(c_a - \mathrm{s}_a). \end{aligned} \tag{119}$$

再次将其与 n 收缩，并回忆记号 kn := −r(n) = −Y(n, n)，

$$0 = -(n-3)\sigma\pounds_n\mathbb{k}_n - (n-3)\sigma\mathfrak{c}\,\mathbb{k}_n + (n-1)n^an^b\mathring{\nabla}_a\mathring{\nabla}_b\sigma + 2\sigma(n-2)\pounds_n\mathfrak{c} - 2\sigma\mathfrak{c}^2. \tag{120}$$

此外，将 (118) 与 P^{ab} 缩并后，利用 (29)，得到

$$\begin{aligned} 0 &= (n-3)\sigma\pounds_n(\mathrm{tr}_P\,\mathbb{Y}) + 4\sigma(n-3)P(\mathbb{r},\mathbf{s}) - \sigma(n-3)n(\ell^{(2)})\mathbb{k}_n + (n-3)\sigma\mathfrak{c}\,\mathrm{tr}_P\,\mathbb{Y} + (n-1)\Box_P\sigma \\ &\quad - 2\sigma(n-2)\,\mathrm{div}_P\,\boldsymbol{c} + \sigma\big(\,\mathrm{div}_P\,\mathbf{s} - 2P(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}) + 4P(\boldsymbol{c},\boldsymbol{s}) - P(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}) + \mathrm{tr}_P\,\mathring{R}\big) - \frac{n-1}{2n}\sigma\mathfrak{R}. \end{aligned} \tag{121}$$

接下来，我们利用定理 4.7，根据由 (参见 (30)) 定义的序列$\{\mathrm{T}^{(k)}_{ab}\}_{k\geq 1}$ 构造一个辅助时空 ($\mathcal{M}_1$, g_1)

$$\mathrm{T}^{(1)}_{ab} := \frac{t - \mathfrak{c}\ell^{(2)}}{n-1}\gamma_{ab} + 2\widehat{c}_{(a}\ell_{b)} - \mathfrak{c}\ell_a\ell_b + \widehat{\mathbb{Y}}_{ab}, \qquad \mathrm{T}^{(2)}_{ab} := -\mathfrak{c}^{(2)}\ell_a\ell_b,$$

并且对每个 k ≥ 3，$\mathrm{T}^{(k)}_{ab} = 0$。显然可以验证 $P^{ab}\mathrm{T}^{(1)}_{ab} = t$、$\mathrm{T}^{(1)}_{ab}n^a = \widehat{c}_b - \mathfrak{c}\ell_b = c_b$ 和 $\mathrm{T}^{(2)}_{ab}n^an^b = -\mathfrak{c}^{(2)}$。我们还利用博雷尔引理 4.8，根据序列 {0, σ, 0, 0, ...} 在 $\mathcal{M}_1$ 上构造一个函数 Ω1。由于 ($\mathcal{M}_1, g_1, \Omega_1$) 满足 $\mathcal{L}^{(1)}_\mu = 0$、$\mathcal{Q}^{(1)}_{\alpha\beta} = 0$ 和 f，(1) = f(2) = f(3) = 0(L̇ = 0、Q̇a = 0、Q̈ = 0 和 f(3) = 0 均由构造成立，而 Qab = 0、La = 0 和f(1) = f(2) = 0 自动成立，参见 (89)、(94)、(95))，命题 4.15 的第一项（其中 ℓ = 1）保证它也满足 $\mathcal{Q}^{(2)}_{ab}n^a = 0$ 和 $P^{ab}\mathcal{Q}^{(2)}_{ab} = 0$，由此可得：

1. 标量 c = −T(1)(n, n) 满足与 kn (参见方程 (120)) 相同的方程，只需将 kn → c替换为，即

$$0 = -(n-3)\sigma\pounds_n\mathfrak{c} - (n-1)\sigma\mathfrak{c}^2 + (n-1)n^an^b\mathring{\nabla}_a\mathring{\nabla}_b\sigma + 2\sigma(n-2)\pounds_n\mathfrak{c}.$$

将两个方程相减后，便得到

$$0 = (n-3)\sigma\pounds_n(\mathbb{k}_n - \mathfrak{c}) + (n-1)\sigma\mathfrak{c}(\mathbb{k}_n - \mathfrak{c}).$$

这是关于 kn − c的线性齐次常微分方程，并且由于 kn 和 c 在 Σ 上一致（这是因为我们在求解（118）时施加了初始数据），因此得出 kn = c 处处成立。

2. 一旦确认 $\mathbb{k}_n = \mathfrak{c}$ 成立，一形式 $\boldsymbol{c} = \mathbf{T}^{(1)}(n,\cdot)$ 满足与 $\mathbb{r}$ (119) 相同的方程，只需将 $\mathbb{r} \to \boldsymbol{c}$替换为，即

$$0 = (\mathfrak{n}-3)\sigma \pounds_n c_a + (\mathfrak{n}-3)\sigma \mathfrak{c} c_a + (\mathfrak{n}-1) n^b \mathring{\nabla}_a \mathring{\nabla}_b \sigma - \sigma(\mathfrak{n}-2)(\pounds_n c_a - \mathring{\nabla}_a \mathfrak{c} + 2\mathfrak{c}\mathrm{s}_a) + \sigma \pounds_n \mathrm{s}_a + 2\sigma\mathfrak{c}(c_a - \mathrm{s}_a),$$

因此从（119）中减去它，并利用 $\mathbb{r}|_\Sigma = \boldsymbol{c}|_\Sigma$，可得 $\boldsymbol{c} = \mathbb{r}$ 处处成立。

3. 最后，一旦我们证明了 $\boldsymbol{c} = \mathbb{r}$，标量 $t = P^{ab}\mathrm{T}^{(1)}_{ab}$ 就满足与 $\mathrm{tr}_P \mathbb{Y}$ （121）相同的方程，只需将 $\mathrm{tr}_P \mathbb{Y} \to t$替换为，即

$$0 = (\mathfrak{n}-3)\sigma \pounds_n t + 4\sigma(\mathfrak{n}-3)P(\mathbb{r},\mathbf{s}) - \sigma(\mathfrak{n}-3)n(\ell^{(2)})\mathbb{k}_n + (\mathfrak{n}-3)\sigma\mathfrak{c}t + (\mathfrak{n}-1)\Box_P\sigma - 2\sigma(\mathfrak{n}-2)\,\mathrm{div}_P\,\boldsymbol{c} + \sigma\big(\mathrm{div}_P\,\mathbf{s} - 2P(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}) + 4P(\boldsymbol{c},\boldsymbol{s}) - P(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}) + \mathrm{tr}_P\,\mathring{R}\big) - \frac{\mathfrak{n}-1}{2\mathfrak{n}}\sigma\mathfrak{R}.$$

将它们相减，并利用它们在 Σ 处重合这一点，我们还可得出 $t = \mathrm{tr}_P\mathrm{Y}$ 处处成立。

请注意，此时我们已经构造出了 $\sigma^{(2)}$、$\mathfrak{c}^{(2)}$ 以及完整的张量 Y_{ab}。该构造保证方程 $\ddot{Q}^{(1)} = 0$、$f^{(3)} = 0$、$\dot{\mathcal{Q}}^{(1)}_a = 0$、$\dot{\mathcal{L}}^{(1)} = 0$ 和 $\mathcal{Q}^{(2)}_{ab} = 0$均得到满足。还要记住，$\mathcal{Q}^{(1)}_{ab} = 0$ 和 $\mathcal{L}^{(1)}_a = 0$ 会自动成立。

3. 高阶项

对于高阶项，我们采用类似的策略。固定 $m \geq 1$（假设 $m+1$ 不是例外值之一，即 $m+1 \neq \frac{\mathfrak{n}-1}{2}$、$m+1 \neq \mathfrak{n}$ 和 $m+1 \neq \mathfrak{n}-1$），并假设我们已经构造出 $\{\mathrm{Y}^{(k)},\ \sigma^{(k)}\}$，对所有 $k \leq m$ 都成立，同时 $\sigma^{(m+1)}$ 和 $\mathfrak{c}^{(m+1)}$ 也成立；并且方程 $\mathcal{Q}^{(k)}_{\alpha\beta} = 0$、$\mathcal{L}^{(k)}_\mu = 0$、$f^{(k+2)} = 0$（其中将 $\{\mathbf{Y}^{(k)} \to$ 替换为 $\mathrm{Y}^{(k)}\}_{k\leq m}$ 和 $\kappa^{(m+1)} \to \mathfrak{c}^{(m+1)}$）对每个 $k \leq m$ 都成立，此外 $\mathcal{Q}^{(m+1)}_{ab} = 0$ 也成立。请注意，这正是一阶时我们所取得的结果。现在，我们按照证明策略中说明的步骤 1.-4. 进行。

1. 我们根据条件 (i) 唯一地构造 $\boldsymbol{c}^{(m+1)}|_\Sigma$ $\boldsymbol{c}^{(m+1)}(n)|_\Sigma = -\mathfrak{c}^{(m+1)}|_\Sigma$，并使得 (ii) 将 $\mathbf{Y}^{(k)} \to \mathrm{Y}^{(k)}$ 替换到方程 $\iota^\star \dot{\mathcal{Q}}^{(m+1)}_a = 0$ 中后，对每个 $k \leq m$ 和 $\kappa^{(m+1)} \to \mathfrak{c}^{(m+1)}$ 都成立。

2. 给定 $\boldsymbol{c}^{(m+1)}|_\Sigma$，我们通过求解方程 $\mathcal{L}^{(m+1)}_a = 0$ (86)，并将 $\mathbf{Y}^{(k)} \to \mathbb{Y}^{(k)}$ 替换为每个 $k \leq m$、$\mathbf{r}^{(m+1)} \to \boldsymbol{c}^{(m+1)}$ 和 $\kappa^{(m+1)} \to \mathfrak{c}^{(m+1)}$，来对一形式 $\boldsymbol{c}^{(m+1)}$ 积分，即

$$-\sigma\pounds_n c^{(m+1)}_a + m\pounds_n\sigma c^{(m+1)}_a - \sigma\mathring{\nabla}_a\mathfrak{c}^{(m+1)} - \frac{m}{\mathfrak{n}}\mathfrak{c}^{(m+1)}\mathring{\nabla}_a\sigma = \text{lower order terms.} \tag{122}$$

为了证明 $\boldsymbol{c}^{(m+1)}(n) = -\mathfrak{c}^{(m+1)}$，稍后我们将需要它与 n 的缩并，即

$$-\sigma\pounds_n\big(c^{(m+1)}_a n^a\big) + m(\pounds_n\sigma)\,c^{(m+1)}_a n^a - \sigma\pounds_n\mathfrak{c}^{(m+1)} - \frac{m}{\mathfrak{n}}\mathfrak{c}^{(m+1)}\pounds_n\sigma = \text{lower order terms.} \tag{123}$$

3. 利用 $\boldsymbol{c}^{(m+1)}$（在第 2 节中构造），我们通过求解方程组 $f^{(m+3)} = \dot{\mathcal{L}}^{(m+1)} = \ddot{\mathcal{Q}}^{(m+1)} = 0$（见（111））并将 $\mathbf{Y}^{(k)} \to \mathbb{Y}^{(k)}$ 替换为每个 $k \leq m$、$\kappa^{(m+1)} \to \mathfrak{c}^{(m+1)}$、$\mathbf{r}^{(m+1)} \to \boldsymbol{c}^{(m+1)}$、$\mathrm{tr}_P\mathbf{Y}^{(m+1)} \to t^{(m+1)}$ 和 $\kappa^{(m+2)} \to \mathfrak{c}^{(m+2)}$），从初始条件 $\sigma^{(m+2)}|_\Sigma = \sigma^{(m+2)}_\Sigma$，构造三个函数 $\sigma^{(m+2)}$、$t^{(m+1)}$ 和 $\mathfrak{c}^{(m+2)}$。

4. 最后，我们通过积分方程 $\mathcal{Q}^{(m+2)}_{ab} = 0$ 构造 $\mathrm{Y}^{(m+1)}_{ab}$，替换为$\mathbf{Y}^{(k)} \to \mathrm{Y}^{(k)}$（对每个 $k \leq m$）、$\mathbf{r}^{(m+1)} \to \boldsymbol{c}^{(m+1)}$、$\kappa^{(m+1)} \to \mathfrak{c}^{(m+1)}$、$\mathrm{tr}_P\mathbf{Y}^{(m+1)} \to t^{(m+1)}$、$\kappa^{(m+2)} \to \mathfrak{c}^{(m+2)}$ 以及$\mathbf{Y}^{(m+1)} \to \mathrm{Y}^{(m+1)}$，初始条件为 $\mathrm{tr}_P\mathrm{Y}^{(m+1)}|_\Sigma = t^{(m+1)}|_\Sigma$、$\mathrm{Y}^{(m+1)}(n,\cdot)|_\Sigma = \boldsymbol{c}^{(m+1)}|_\Sigma$ 和 $(\mathrm{Y}^{(m+1)}_{AB})^{tf}|_\Sigma = \mathcal{Y}^{(m+1)}_{AB}$。

一旦张量 $\{\mathbf{Y}^{(k)},\sigma^{(k)}\}_{k\leq m+1}$ 以及函数 $\sigma^{(m+2)}$ 和 $\mathfrak{c}^{(m+2)}$ 构造完成，我们需要验证方程 $\mathcal{Q}^{(k)}_{\alpha\beta}=0$、$\mathcal{L}^{(k)}_{\mu}=0$ 和 $f^{(k+2)}=0$ 对所有 $k\leq m+1$成立，并且 $\mathcal{Q}^{(m+2)}_{ab}=0$ 也成立（每一项均作替换$\mathbf{Y}^{(k)}\to\mathrm{Y}^{(k)}$，对每个 $k\leq m+1$，以及 $\kappa^{(m+2)}\to\mathfrak{c}^{(m+2)}$）。为此，只需证明 (1) $\boldsymbol{c}^{(m+1)}(n)=-\mathfrak{c}^{(m+1)}$、(2) $\mathrm{Y}^{(m+1)}(n,\cdot)=\boldsymbol{c}^{(m+1)}$以及 (3) $\mathrm{tr}_P\,\mathrm{Y}^{(m+1)}=t^{(m+1)}$。

为证明这三项论断，我们将利用定理 4.7 根据序列 $\{\mathbf{T}^{(k)}\}_{k\geq1}$，构造一个辅助时空（$\mathcal{M}_m$，$g_m$），其中 $\mathbf{T}^{(k)}=\mathbb{Y}^{(k)}$ 对所有 $k\leq m$ 均成立，

$$\mathrm{T}^{(m+1)}_{ab}:=\frac{t^{(m+1)}-\mathfrak{c}^{(m+1)}\ell^{(2)}}{\mathfrak{n}-1}\gamma_{ab}+2\widehat{c}^{(m+1)}_{(a}\ell_{b)}-\mathfrak{c}^{(m+1)}\ell_a\ell_b+\widehat{\mathbb{Y}}^{(m+1)}_{ab},\qquad \mathrm{T}^{(m+2)}_{ab}:=-\mathfrak{c}^{(m+2)}\ell_a\ell_b,$$

并且对每个 $k\geq m+3$，都有 $\mathrm{T}^{(k)}_{ab}=0$。我们还将利用序列$\{0,\sigma,0,...,\sigma^{(m+2)},0,...\}$，通过博雷尔引理 4.8，在 $\mathcal{M}_m$ 上构造一个函数 Ω_m。注意，$P^{ab}\mathrm{T}^{(m+1)}_{ab}=t^{(m+1)}$、$\mathrm{T}^{(m+1)}_{ab}n^b=\widehat{c}^{(m+1)}-\mathfrak{c}^{(m+1)}\ell_a$、$\mathrm{T}^{(m+1)}_{ab}n^an^b=-\mathfrak{c}^{(m+1)}$ 和 $\mathrm{T}^{(m+2)}_{ab}n^an^b=-\mathfrak{c}^{(m+2)}$，但我们尚不知道 $\boldsymbol{c}^{(m+1)}(n)=-\mathfrak{c}^{(m+1)}$。为证明这一点，我们注意到，根据构造，该时空满足方程 $\mathcal{Q}^{(k)}_{\alpha\beta}=0$, $\mathcal{L}^{(k)}_{\mu}=0$，其中 $k\leq m$，且 $f^{(k)}=0$，其中 $k\leq m+2$。因此，推论 4.16 中针对 $\ell=m$ 的第 1 项首先给出 $\mathcal{L}^{(m+1)}_an^a=0$，根据（86），其形式为

$$\sigma\pounds_n\mathfrak{c}^{(m+1)}-m(\pounds_n\sigma)\,\mathfrak{c}^{(m+1)}-\sigma\pounds_n\mathfrak{c}^{(m+1)}+\frac{m}{\mathfrak{n}}\mathfrak{c}^{(m+1)}\pounds_n\sigma=\text{lower order terms.}$$

关键在于，按构造，这个方程中的低阶项与（123）中的低阶项相同。因此，将两个方程相减，我们得到关于$c^{(m+1)}_an^a+\mathfrak{c}^{(m+1)}$的齐次一阶常微分方程；又由于 $\boldsymbol{c}^{(m+1)}(n)|_\Sigma=-\mathfrak{c}^{(m+1)}|_\Sigma$，我们得出 $\boldsymbol{c}^{(m+1)}(n)=-\mathfrak{c}^{(m+1)}$ 处处成立。

既然我们已经证明了 $\boldsymbol{c}^{(m+1)}(n)=-\mathfrak{c}^{(m+1)}$，那么我们也有 $\mathrm{T}^{(m+1)}_{ab}n^b=\widehat{c}^{(m+1)}-\mathfrak{c}^{(m+1)}\ell_a=c^{(m+1)}_a$，现在可以证明另外两个结论，即 $\mathrm{Y}^{(m+1)}(n,\cdot)=\boldsymbol{c}^{(m+1)}$ 以及 $\mathrm{tr}_P\mathrm{Y}^{(m+1)}=t^{(m+1)}$。首先注意，$(\mathcal{M}_m,g_m,\Omega_m)$ 满足 $\mathcal{L}^{(m+1)}_a=0$, $\iota^\star\dot{\mathcal{Q}}^{(m+1)}_a=0$, $\ddot{\mathcal{Q}}^{(m+1)}=\dot{\mathcal{L}}^{(m+1)}=f^{(m+3)}=0$ $\boldsymbol{c}^{(m+1)}$（因为我们正是利用这些方程得到了 ,$\sigma^{(m+2)}$, $t^{(m+1)}$ 和 $\mathfrak{c}^{(m+2)}$），并且满足 $\mathcal{Q}^{(m+1)}_{ab}=0$（根据假设）。然后，推论 4.16 中的第 2、3 条（取 $\ell=m$）表明，$(\mathcal{M}_m,g_m,\Omega_m)$ 也满足 $\mathcal{Q}^{(m+2)}_{ab}n^an^b=0$, $\mathcal{Q}^{(m+2)}_{ab}n^a=0$和$P^{ab}\mathcal{Q}^{(m+2)}_{ab}=0$。由 (83) 及 $\mathrm{Y}^{(m+1)}\to\mathrm{T}^{(m+1)}$，我们得到（对于第三个方程，我们使用 (29)，并简记 $N^{\mathfrak{n}}_m:=\mathfrak{n}-3-2m\neq0$）

$$\begin{aligned}
0&=-N^{\mathfrak{n}}_m\sigma\pounds_n\mathfrak{c}^{(m+1)}-(m+1)N^{\mathfrak{n}}_m\sigma\mathbb{k}_n\mathfrak{c}^{(m+1)}+\widetilde{O}^{(m+1)}_{ab}[\boldsymbol{c}^{(m+1)},\mathfrak{c}^{(m+1)},\sigma^{(m+1)}]n^an^b+\text{l.o.t},\\
0&=N^{\mathfrak{n}}_m\sigma\pounds_n\boldsymbol{c}^{(m+1)}_b+(m+1)N^{\mathfrak{n}}_m\sigma\mathbb{k}_n\boldsymbol{c}^{(m+1)}_b+\widetilde{O}^{(m+1)}_{ab}[\boldsymbol{c}^{(m+1)},\mathfrak{c}^{(m+1)},\sigma^{(m+1)}]n^a+\text{l.o.t},\\
0&=N^{\mathfrak{n}}_m\sigma\big(\pounds_nt^{(m+1)}+4P(\boldsymbol{c}^{(m+1)},\mathbf{s})-n(\ell^{(2)})\mathfrak{c}^{(m+1)}\big)+(m+1)N^{\mathfrak{n}}_m\mathbb{k}_nt^{(m+1)}\\
&\quad+\frac{(m+1)(\mathfrak{n}-1)\sigma}{\mathfrak{n}}\Big(\mathfrak{c}^{(m+2)}+2\pounds_nt^{(m+1)}+2(m+1)\mathbb{k}_nt^{(m+1)}\Big)\\
&\quad+P^{ab}\widetilde{O}^{(m+1)}_{ab}[\boldsymbol{c}^{(m+1)},\mathfrak{c}^{(m+1)},\sigma^{(m+1)}]+\text{l.o.t}.
\end{aligned}$$

但是张量 $\mathrm{Y}^{(m+1)}$ 是方程 $\mathcal{Q}^{(m+2)}_{ab}=0$ 的解，只需作如下替换：$\mathbf{Y}^{(k)}\to\mathrm{Y}^{(k)}$ 对任意 $k\leq m$，$\mathbf{r}^{(m+1)}\to\boldsymbol{c}^{(m+1)}$, $\kappa^{(m+1)}\to\mathfrak{c}^{(m+1)}$, $\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m+1)}\to t^{(m+1)}$, $\kappa^{(m+2)}\to\mathfrak{c}^{(m+2)}$以及 $\mathbf{Y}^{(m+1)}\to\mathrm{Y}^{(m+1)}$。这意味着方程 $\mathcal{Q}^{(m+2)}_{ab}n^an^b=0$, $\mathcal{Q}^{(m+2)}_{ab}n^a=0$ 以及

$P^{ab}\mathcal{Q}^{(m+2)}_{ab}=0$ （作相应替换后）也成立。具体而言

$$
\begin{aligned}
0 &= -N^{\mathfrak{n}}_m\sigma\pounds_n\mathbb{k}^{(m+1)} - (m+1)N^{\mathfrak{n}}_m\sigma\mathbb{k}_n\mathbb{k}^{(m+1)} + \widetilde{O}^{(m+1)}_{ab}[\boldsymbol{c}^{(m+1)},\mathfrak{c}^{(m+1)},\sigma^{(m+1)}]n^a n^b + \text{l.o.t},\\
0 &= N^{\mathfrak{n}}_m\sigma\pounds_n\mathbb{r}^{(m+1)}_b + (m+1)N^{\mathfrak{n}}_m\sigma\mathbb{k}_n\mathbb{r}^{(m+1)}_b + \widetilde{O}^{(m+1)}_{ab}[\boldsymbol{c}^{(m+1)},\mathfrak{c}^{(m+1)},\sigma^{(m+1)}]n^a + \text{l.o.t},\\
0 &= N^{\mathfrak{n}}_m\sigma\big(\pounds_n\big(\operatorname{tr}_P\mathbb{Y}^{(m+1)}\big) + 4P(\mathbb{r}^{(m+1)},\mathbf{s}) - n(\ell^{(2)})\mathbb{k}^{(m+1)}\big) + (m+1)N^{\mathfrak{n}}_m\sigma\mathbb{k}_n\operatorname{tr}_P\mathbb{Y}^{(m+1)}\\
&\quad + \frac{(m+1)(\mathfrak{n}-1)\sigma}{\mathfrak{n}}\Big(\mathfrak{c}^{(m+2)} + 2\pounds_n t^{(m+1)} + 2(m+1)\mathbb{k}_n t^{(m+1)}\Big)\\
&\quad + P^{ab}\widetilde{O}^{(m+1)}_{ab}[\boldsymbol{c}^{(m+1)},\mathfrak{c}^{(m+1)},\sigma^{(m+1)}] + \text{l.o.t}.
\end{aligned}
$$

将两个系统相减，并回顾 $N^{\mathfrak{n}}_m\neq 0$（因为我们假设了 $m+1\neq \frac{\mathfrak{n}-1}{2}$）且低阶项相同（由构造可知），便得到关于 $\mathfrak{c}^{(m+1)}-\mathbb{k}^{(m+1)}$、$\boldsymbol{c}^{(m+1)}-\mathbb{r}^{(m+1)}$ 和 $t^{(m+1)}-\operatorname{tr}_P\mathbb{Y}^{(m+1)}$ 的齐次常微分方程分层系统。由于这些量在 Σ 处为零（这是因为构造 $\mathbb{Y}^{(m+1)}_{ab}$ 时采用了相应的初始条件），因此可得它们处处为零。

综上，我们刚刚构造的张量 $\mathbb{Y}^{(m+1)}$、$\sigma^{(m+2)}$ 和 $\mathfrak{c}^{(m+2)}$ 满足方程 .tions $\mathcal{Q}^{(m+2)}_{ab}=0$、$\mathcal{L}^{(m+1)}_a=0$、$\dot{\mathcal{L}}^{(m+1)}=\ddot{\mathcal{Q}}^{(m+1)}=f^{(m+3)}=0$ 和 $\hat{\mathcal{Q}}^{(m+1)}_a|_\Sigma=0$。对（$\mathcal{M}_m$、$g_m$、$\Omega_m$）应用推论 4.16 中的条目 2（取 $\ell=m$），可知 $\mathbb{Y}^{(m+1)}$ 也满足 $\dot{\mathcal{Q}}^{(m+1)}_a=0$，因为 $\mathbb{Y}^{(m+1)}_{ab}=\mathbb{T}^{(m+1)}_{ab}$。于是，方程 $\mathcal{Q}^{(k)}_{\alpha\beta}=0$、$\mathcal{L}^{(k)}_\mu=0$ 和 $f^{(k+2)}=0$ 对所有 $k\le m+1$ 都成立，且 $\mathcal{Q}^{(m+2)}_{ab}=0$ 也成立。归纳论证至此完成。为了结束证明，我们只需分析三个特殊情形。

- 在情形 $m+1=\frac{\mathfrak{n}-1}{2}$（当 $\mathfrak{n}$ 为奇数时），唯一的变化是不能使用方程$\mathcal{Q}^{(\frac{\mathfrak{n}+1}{2})}{}_{ab}=0$来构造$\mathbb{Y}^{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})}$。我们改用分解式（30）来构造它，其中 $\mathbb{r}^{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})}$ 为：$=\boldsymbol{c}^{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})}$，$\operatorname{tr}_P\mathbb{Y}^{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})}$ 为：$=t^{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})}$，而横向部分由自由数据 $\hat{\mathbb{Y}}^{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})}$ 给出。注意，根据假设，方程 $\mathcal{Q}^{(\frac{\mathfrak{n}+1}{2})}{}_{ab}=0$ 仍然成立，因为我们已假定 $\mathcal{O}^{\mathscr{I}}_{ab}=0$。显然，此处无需证明 $\mathbb{Y}^{(m+1)}(n,\cdot)=\boldsymbol{c}^{(m+1)}$ 和 $\operatorname{tr}_P\mathbb{Y}^{(m+1)}=t^{(m+1)}$。论证的其余部分保持不变。

- 当 $m+1=\mathfrak{n}-1$ 时，问题在于系统（111）无法确定这些量$\{\sigma^{(\mathfrak{n})},\mathfrak{c}^{(\mathfrak{n})},t^{(\mathfrak{n}-1)}\}$，因此我们改为通过将 $\operatorname{tr}_P\mathbb{Y}^{(\mathfrak{n}-1)}\to t^{(\mathfrak{n}-1)}$ 替代进去，来积分二阶输运方程（115）；初始条件为 $t^{(\mathfrak{n}-1)}|_\Sigma$ 以及 $\pounds_n t^{(\mathfrak{n}-1)}|_\Sigma$，后者由 $\sigma^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma$ 和 $\mathfrak{c}^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma$ 确定：$=\mathfrak{m}$ 利用方程 $\ddot{\mathcal{Q}}^{(\mathfrak{n}-1)}|_\Sigma=0$ 和 $f^{(\mathfrak{n}+1)}|_\Sigma=0$，具体做法正如注释 4.17 中所述。其余论证步骤完全相同。

- 最后，对于 $m+1=\mathfrak{n}$，问题在于无法施加方程 $\dot{\hat{\mathcal{Q}}}^{(\mathfrak{n})a}|_\Sigma=0$ 来求得一形式 $\boldsymbol{c}^{(\mathfrak{n})}$ 在 Σ 处的值，因此我们将 $\iota^\star\boldsymbol{c}^{(\mathfrak{n})}=\boldsymbol{\beta}^{(\mathfrak{n})}$ 和 $\boldsymbol{c}^{(\mathfrak{n})}(n)|_\Sigma=-\mathfrak{c}^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma$ 确立为初始条件。再次注意，方程 $\dot{\hat{\mathcal{Q}}}^{(\mathfrak{n})a}|_\Sigma=0$ 根据假设成立，因为我们已假定 $\mathcal{O}^\Sigma_a=0$。论证以相同方式继续。

一旦构造出完整的集合 $\{\sigma^{(k)}\}_{k\ge0}$和 $\{\mathbb{Y}^{(k)}\}_{k\ge1}$，我们便利用博雷尔引理4.8和定理4.7来构造函数 Ω 和时空（$\mathcal{M}$，g），使其满足 $f^{(k)}=0$，$\mathcal{Q}^{(k)}_{\alpha\beta}=0$ 以及 $\mathcal{L}^{(k)}_\alpha=0$，对所有 $k\ge1$均成立。因此，（$\mathcal{M}$，g，Ω）在 $\mathscr{I}$处至无穷阶满足共形爱因斯坦方程，并实现初始数据。 □

6 $\mathscr{I}$处的障碍张量：四维和六维情形

本节旨在研究最低非平凡阶的障碍张量，即四维时空（$\mathfrak{n}=3$）中的库仑型障碍张量 $\mathcal{O}^\Sigma_a$ 以及

六维时空（$\mathfrak{n}=5$）中的辐射障碍张量 $\mathcal{O}^{\mathscr{I}}_{ab}$，因为请注意， $\mathcal{Q}^{(2)}_{ab}$ 在四维时空中恒等为零。首先，我们给出障碍张量的精确定义。

定义 6.1。 设 $(\mathcal{M}, g, \Omega)$ 是一个具有零无穷远$\Phi:\ \mathscr{I}\hookrightarrow\mathcal{M}$ 的$(\mathfrak{n}+1)$维共形流形，且写成满足 $|\nabla\Omega|^2=0$的共形规范。设 ξ 为沿测地线延伸至$\Phi(\mathscr{I})$ 之外的支架场， $\iota:\ \Sigma\hookrightarrow\mathscr{I}$为一个截面，且 $\mathcal{Q}:=(\mathfrak{n}-1)\big(\mathrm{Hess}\,\Omega+\Omega\,\mathrm{Sch}_g\big)$。我们通过以下方式定义辐射障碍张量 $\mathcal{O}^{\mathscr{I}}$ （当 $\mathfrak{n}$ 为奇数时）和库仑型障碍张量 $\mathcal{O}^{\Sigma}$ （对任意 $\mathfrak{n}$）：

$$\mathcal{O}^{\mathscr{I}}:=\Phi^{\star}\big(\pounds_{\xi}^{(\frac{\mathfrak{n}-1}{2})}\mathcal{Q}\big),\qquad \mathcal{O}^{\Sigma}:=\iota^{\star}\Phi^{\star}\big(\pounds_{\xi}^{(\mathfrak{n}-1)}\mathcal{Q}(\xi,\cdot)\big).$$

也可以在任意共形规范下定义障碍张量，但这超出了本文的讨论范围。

6.1 四维中的库仑型障碍

如上一节所述，方程$\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_a|_\Sigma=0$ 中乘在 $\mathbf{r}^{(m)}$ 上的因子（$\mathfrak{n}-m$）在 $m=\mathfrak{n}$时会导致两个重要后果。首先，该方程不约束一形式 $\widehat{\ }\mathbf{r}^{(\mathfrak{n})}|_\Sigma$ 的取值（因此它成为自由数据）；其次，若方程的其余部分不为零，则共形时空要么不光滑，要么不满足高于 $m-1$阶的爱因斯坦方程。这个余项定义了库仑型障碍张量 $\mathcal{O}^{\Sigma}_a$。在四维时空中， $\mathcal{O}^{\mathscr{I}}_a=\dot{\mathcal{Q}}^{(3)}_a$，因此它取决于 $\mathscr{I}$结构数据 $\mathbf{Y}$、$\mathbf{Y}^{(2)}$、$\sigma^{(3)}$ 和 $\kappa^{(3)}$。解出方程 $\mathcal{Q}^{(1)}_{\alpha\beta}=\mathcal{Q}^{(2)}_{\alpha\beta}=0$、 $\mathcal{L}_\mu=\mathcal{L}^{(2)}_\mu=0$、 $f^{(2)}=f(3)=0$、 $\mathcal{L}^{(3)}_a n^a=0$和 $f(4)|_\Sigma=0$后，这些张量即可由 Σ 上的自由数据 $\{\chi,\sigma^{(3)}_\Sigma,\mathfrak{m},\mathcal{Y}^{(1)}_{AB}\}$ 以及 $\mathscr{I}$上的辐射场 $\widehat{\ }\mathbf{Y}_{ab}$唯一确定。还需注意，根据命题 4.15，方程 $\dot{\mathcal{Q}}^{(3)}_a n^a=0$、 $\mathcal{Q}^{(3)}_{ab}n^a=0$、 $P^{ab}\mathcal{Q}^{(3)}_{ab}=0$和 $f^{(4)}=0$自动成立，因此特别地，障碍张量满足 $\mathcal{O}^{\Sigma}_a n^a=0$。

为了找出使 $\mathcal{O}^{\Sigma}_a$ 消失的充要条件，我们注意到，由于 $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$ 消失至包括 2 阶在内的阶数，因此只需在任意规范下研究张量 $\dot{\mathcal{Q}}^{(3)}_a$，因为其消失是一个规范不变的陈述。这是以下简单观察的结果。

引理 6.2。 假设对于所有 $k=1$、...、 m， $\mathcal{Q}^{(k)}_{\alpha\beta}=0$。令 $\xi'=z(\xi+V)$，其中 z 和 V 任意延拓到 $\mathscr{I}$ 之外。则， $\mathcal{Q}^{(m+1)\prime}_{ab}:=(\pounds^{(m)}_{\xi'}\mathcal{Q})_{ab}=z^m\mathcal{Q}^{(m+1)}_{ab}$ 。

证明。 将 $\xi'=z(\xi+V)$ 代入 $\pounds^{(m)}_{\xi'}\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$，并对所有 $k=1,\dots,m$ 使用 $\mathcal{Q}^{(k)}_{\alpha\beta}=0$，即可立即得到该结果。 □

因此，只需在一种规范下分析 $\mathcal{O}^{\Sigma}_a$，在该规范中， $\sigma^{(1)}=1$、 $\ell^{(2)}=0$ 以及 $\boldsymbol{\ell}$ 在 $\mathscr{I}$ 的截面上的拉回均为零， $\boldsymbol{\ell}_{\|}=0$。这立即推出 $\mathbf{s}=0$ [43, 42]，进而得到 $\mathbf{r}=\mathbf{s}+d\sigma^{(1)}=0$。此外， Σ 处的张量 P 可分解为 $P^{ab}=h^{AB}e^a_A e^b_B$，其中 h^{AB} 是 h_{AB} 的逆度量， $\{e_A\}$ 是 Σ 中的一个基，其对偶基为 $\{\boldsymbol{\theta}^A\}$，因此 $\delta^\alpha_\rho=e^\alpha_B\theta^B_\rho+\xi^\alpha\nu_\rho+\nu^\alpha\xi_\rho$。由于张量 $\mathcal{Q}$ 涉及度量的三阶导数，而二阶拟爱因斯坦方程已施加，因此可以预期， $\mathcal{Q}$ 可能与韦尔张量的导数有关。我们通过对恒等式 (44) 施加横向导数，并在 $\mathscr{I}$ 处计算结果，来探究这一想法。由于 $\mathcal{Q}$ 在二阶以内均为零，我们可以作如下代换： $\mathcal{T}_{\alpha\beta}=\frac{1}{\mathfrak{n}-1}\mathcal{Q}_{\alpha\beta}=\frac{2}{(\mathfrak{n}-1)}\mathcal{P}_{\alpha\beta}$，其中某个张量 $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ 满足

$\mathcal{Q}^{(3)} = \mathcal{P}^{(1)}$ 在 $\mathscr{I}$处。将恒等式 (44)（回忆一下 $d = \mathfrak{n}+1$）改写为关于 $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$的形式，得到

$$C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\nabla_\alpha\Omega - \frac{\Omega}{\mathfrak{n}-2}\nabla_\alpha C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = -\frac{\Omega}{\mathfrak{n}-1}\left(\Omega\nabla_{[\mu}\mathcal{P}_{\nu]\beta} + 2\mathcal{P}_{\beta[\nu}\nabla_{\mu]}\Omega\right) + \frac{\Omega}{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)}g_{\beta[\mu}\left(\Omega\nabla^\rho\mathcal{P}_{\nu]\rho} + 2\mathcal{P}_{\rho[\nu}\nabla^\rho\Omega\right).$$

应用 ∇_ξ （此处沿 ξ 取协变导数而非李导数更为有用），并在$\Omega = 0$ 处对结果求值，得到（我们利用 $\xi(\Omega) \overset{\mathscr{I}}{=} \sigma^{(1)} \overset{\mathscr{I}}{=} 1$，因而 $\nu_\mu \overset{\mathscr{I}}{=} \nabla_\mu\Omega$）

$$\nu_\alpha\xi^\rho\nabla_\rho C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\xi^\rho\nabla_\rho\nabla_\alpha\Omega - \frac{1}{\mathfrak{n}-2}\nabla_\alpha C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \overset{\mathscr{I}}{=} -\frac{2}{\mathfrak{n}-1}\mathcal{P}_{\beta[\nu}\nu_{\mu]} + \frac{2}{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)}g_{\beta[\mu}\mathcal{P}_{\nu]\rho}\nu^\rho.$$

左边第二项因 $\xi^\rho\nabla_\rho\nabla_\alpha\Omega \overset{\mathscr{I}}{=} \frac{1}{\mathfrak{n}-1}\mathcal{Q}^{(1)}_{\rho\alpha}\xi^\rho - \Omega\xi^\rho L_{\rho\alpha} \overset{\mathscr{I}}{=} 0$而为零，因此我们得到

$$\nu_\alpha\xi^\rho\nabla_\rho C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} - \frac{1}{\mathfrak{n}-2}\nabla_\alpha C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \overset{\mathscr{I}}{=} -\frac{2}{\mathfrak{n}-1}\mathcal{P}_{\beta[\nu}\nu_{\mu]} + \frac{2}{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)}g_{\beta[\mu}\mathcal{P}_{\nu]\rho}\nu^\rho. \tag{124}$$

我们现在将此方程与 $\xi^\beta e^\mu_A\xi^\nu$ 缩并，以使张量 $\mathfrak{E}_{\alpha\beta} := \xi^\mu\xi^\nu C_{\alpha\mu\beta\nu}$ 出现。(124)与 $\xi^\beta e^\mu_A\xi^\nu$ 的缩并随后在利用 $e^\mu_A\nu_\mu = e^\mu_A\xi_\mu = \xi^\mu\xi_\mu = 0$、 $\nu_\alpha\xi^\alpha = 1$ 和$\nabla_\xi\xi = 0$之后给出，

$$\nu_\alpha e^\mu_A\xi^\rho\nabla_\rho\mathfrak{E}^{\alpha}{}_{\mu} - \frac{1}{\mathfrak{n}-2}\xi^\beta e^\mu_A\xi^\nu\nabla_\alpha C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \overset{\mathscr{I}}{=} \frac{1}{\mathfrak{n}-1}\xi^\beta e^\mu_A\mathcal{P}_{\beta\mu} \overset{\mathscr{I}}{=} \frac{1}{\mathfrak{n}-1}\dot{\mathcal{Q}}^{(3)}_A.$$

我们仍需进一步阐明左边的第二项。注意，由于$\mathbf{r} = \mathbf{s} = 0$ 和$\ell^{(2)} = 0$，我们由(27)、(10)和(11)得到 $\nabla^\alpha\xi^\beta = P^{ac}V^b{}_c e^\alpha_a e^\beta_b = P^{ac}P^{bd}(\mathrm{Y}_{cd} + \mathrm{F}_{cd})e^\alpha_a e^\beta_b = h^{AC}h^{BD}(\mathrm{Y}_{CD} + \mathrm{F}_{CD})e^\alpha_A e^\beta_B$，因而

$$\begin{aligned}\xi^\beta e^\mu_A\xi^\nu\nabla_\alpha C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} &\overset{\mathscr{I}}{=} e^\mu_A\nabla_\alpha\mathfrak{E}^{\alpha}{}_{\mu} - e^\mu_A C_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\xi^\beta\nabla^\alpha\xi^\nu + \xi^\nu\nabla^\alpha\xi^\beta\right)\\ &\overset{\mathscr{I}}{=} e^\mu_A\nabla_\alpha\mathfrak{E}^{\alpha}{}_{\mu} + \left({}^{(2)}C^B{}_A{}^C + {}^{(2)}C_A{}^{BC}\right)(\mathrm{Y}_{BC} + \mathrm{F}_{BC}),\end{aligned}$$

其中，我们回顾附录A 中${}^{(2)}C_{\alpha\beta\mu} := \xi^\nu C_{\alpha\nu\beta\mu}$的记号。最后，我们在右端第一项中使用 $\delta^\alpha_\rho = e^\alpha_B\theta^B_\rho + \xi^\alpha\nu_\rho + \nu^\alpha\xi_\rho$，得到

$$\begin{aligned}e^\mu_A\nabla_\alpha\mathfrak{E}^{\alpha}{}_{\mu} &\overset{\mathscr{I}}{=} e^\mu_A e^\alpha_B\theta^B_\rho\nabla_\alpha\mathfrak{E}^{\rho}{}_{\mu} + \nu_\rho e^\mu_A\xi^\alpha\nabla_\alpha\mathfrak{E}^{\rho}{}_{\mu} + e^\mu_A\nu^\alpha\xi_\rho\nabla_\alpha\mathfrak{E}^{\rho}{}_{\mu}\\ &\overset{\mathscr{I}}{=} \nabla^h_B\mathfrak{E}^B{}_A + \nu_\alpha e^\mu_A\xi^\rho\nabla_\rho\mathfrak{E}^{\alpha}{}_{\mu},\end{aligned}$$

第一项中我们使用了 $e^\mu_A e^\alpha_B\theta^B_\rho\nabla_\alpha\mathfrak{E}^{\rho}{}_{\mu} = \nabla^h_B\mathfrak{E}^B{}_A$ （因为 $\mathfrak{E}$ 同时与 ξ和 ν正交），第三项为零，因为 $\nu^\alpha\nabla_\alpha\xi^\rho \overset{\mathscr{I}}{=} 0$ （由（26）和（11）可知），且 $\mathfrak{E}(\xi, \cdot) = 0$。因此，我们得出

$$(\mathfrak{n}-3)\nu_\alpha e^\mu_A\xi^\rho\nabla_\rho\mathfrak{E}^{\alpha}{}_{\mu} - \nabla^h_B\mathfrak{E}^B{}_A - \left({}^{(2)}C^B{}_A{}^C + {}^{(2)}C_A{}^{BC}\right)(\mathrm{Y}_{BC} + \mathrm{F}_{BC}) \overset{\mathscr{I}}{=} \frac{\mathfrak{n}-2}{\mathfrak{n}-1}\dot{\mathcal{Q}}^{(3)}_A. \tag{125}$$

在四维时空（$\mathfrak{n} = 3$）中，首项消失，张量${}^{(2)}C_{ABC}$ 为零，因为恒等式（44）意味着 $C_{\alpha\beta\mu\nu}\nu^\alpha \overset{\mathscr{I}}{=} 0$，因此 $C_{\alpha\beta\mu\nu}$在 $\mathscr{I}$处具有 Petrov 类型 N，且其在 $\mathscr{I}$ 处所有非零分量均由 $\mathfrak{E}_{\alpha\beta}$ 编码（见 [51, 15]）。由于 $\dot{\mathcal{Q}}^{(3)}_A = \mathcal{O}^\Sigma_A$，库仑型障碍张量消失的充要条件是 $\mathfrak{E}_{AB}$ 无散。当 $\mathscr{I}$ 的切片为二维球面时（例如对于渐近简单时空[50]），由于$\mathbb{S}^2$ [63] 上不存在横向无迹张量，这意味着 $\mathcal{O}^\Sigma_a = 0$ 当且仅当 $\mathfrak{E}_{AB} = 0$,

因此完整的韦尔张量在 $\mathscr{I}$ 处消失。对于 $\mathscr{I}$ 的其他拓扑类型，例如 $\mathbb{R}\times T^2$（见 [59]），$\mathfrak{E}_{AB}$ 无散并不意味着 $\mathfrak{E}_{AB}=0$。由此可以构造四维、光滑、渐近平坦时空（按定义5.1的含义），作为定理5.5 在 $\mathscr{I}\not\simeq\mathbb{R}\times\mathbb{S}^2$ 条件下的一个特例，其韦尔张量在 $\mathscr{I}$ 处不消失。若要以更强的意义确立存在性，即时空 $\Omega^{-2}g$ 在 $\mathscr{I}$ 的某个邻域内为里奇平坦，这是一个有趣且尚未解决的问题。据我们所知，渐近特征问题目前仅在假设韦尔张量于 $\mathscr{I}$ [33, 28]处消失（且维数为 4）的条件下得到了解决。

方程（125）在高维情形下也很有意思，因为如果希望将 Weyl 张量作为变量，通过展开迭代确定，那么可以利用（125）计算二阶项 $\nu_\alpha e^\mu_A\xi^\rho\nabla_\rho\mathfrak{E}^\alpha{}_\mu$ 关于 $\mathfrak{E}$、${}^{(2)}C_{ABC}$ 和 $\dot{\mathcal{Q}}^{(3)}$，前提是 $\mathfrak{n}\neq 3$（回想一下，在高维情形下，张量 ${}^{(2)}C_{ABC}$ 未必为零，见 [51]）。当 $\mathfrak{n}=3$ 库仑型障碍也会在这种方法中显现出来。

6.2 六维中的辐射障碍

如前所述，当 $\mathfrak{n}$ 为奇数时，方程 $\mathcal{Q}^{\left(\frac{\mathfrak{n}+1}{2}\right)}{}_{ab}=0$ 无法确定完整的张量 $\mathrm{Y}^{\left(\frac{\mathfrak{n}-1}{2}\right)}$。此外，在假设前几阶条件均已满足后，张量 $\mathcal{Q}^{\left(\frac{\mathfrak{n}+1}{2}\right)}{}_{ab}$ 最终仅依赖于零度量超曲面数据 χ、$\{\sigma^{(k)}_\Sigma\}_{k\leq\frac{\mathfrak{n}+1}{2}}$ 和 $\{\mathcal{Y}^{(k)}_{AB}\}_{k\leq\frac{\mathfrak{n}-3}{2}}$。这定义了辐射障碍张量 $\mathcal{O}^{\mathscr{I}}_{ab}$，其是否为零决定了 $\mathcal{Q}^{\left(\frac{\mathfrak{n}+1}{2}\right)}{}_{ab}=0$ 能否成立。这一行为令人联想到环境度量背景下的费弗曼–格雷厄姆障碍张量 $\mathcal{O}^{FG}$ [12, 13]。回想一下，对于 $\mathfrak{n}=3$，张量 $\mathcal{O}^{\mathscr{I}}_{ab}$ 会自动为零，就像 $\mathcal{O}^{FG}$ 一样，而且二者出现在同一阶。这表明 $\mathcal{O}^{\mathscr{I}}_{ab}$ 与 $\mathscr{I}$ 截面上的 FG 阻碍张量之间存在紧密联系。要确立这一联系，需要详细理解式（83）中出现的所有低阶项。这项工作颇具挑战，远超本文的讨论范围，因此本节仅分析第一个非平凡情形，即 $\mathfrak{n}=5$（也就是六维时空），其中 $\mathcal{O}^{\mathscr{I}}_{ab}=\mathcal{Q}^{(3)}_{ab}$。

设 $(\mathcal{M},g,\Omega)$ 是一个六维共形流形，且 $\lambda=0$ 满足 $\mathcal{Q}^{(1)}_{\alpha\beta}=\mathcal{Q}^{(2)}_{\alpha\beta}=0$、$\mathcal{L}^{(1)}_\mu=\mathcal{L}^{(2)}_\mu=0$ 和 $f^{(1)}=f(2)=f(3)=f(4)=0$。根据命题 4.15 的条目 1.，我们知道张量 $\mathcal{Q}^{(3)}_{ab}$ 满足 $P^{ab}\mathcal{Q}^{(3)}_{ab}=0$ 和 $\mathcal{Q}^{(3)}_{ab}n^b=0$。在引理 6.2 中，我们已经证明，对于任意支架场变换 $\xi'=z(\xi+V)$（其中 z 和 V 在 $\mathscr{I}$ 之外任意延拓），都有 $\mathcal{Q}^{(3)\prime}_{ab}=z^2\mathcal{Q}^{(3)}_{ab}$。因此，为了分析 $\mathscr{I}$ 处的障碍张量，只需在一个简单的规范下计算 $\mathcal{Q}^{(3)}_{ab}$。与上一小节一样，我们选择满足以下条件的规范：$\sigma^{(1)}=1$、$\ell^{(2)}=0$，且 $\boldsymbol{\ell}$ 在 $\mathscr{I}$ 的各截面上的拉回为零，$\boldsymbol{\ell}_\parallel=0$。更具体地说，我们将在高斯零坐标 $\{t,u,x^A\}$ 中进行计算，在这些坐标下，$\mathscr{I}=\{t=0\}$ 的一个邻域内的度量具有如下形式

$$g=2dudt+\phi du^2+2\beta_A dx^A du+\mu_{AB}dx^Adx^B,$$

其中 ϕ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 在 $t=0$ 处消失，且支架场为 $\xi=\partial_t$。沿用附录 D中的相同记号，我们有 $\gamma_{ab}=\delta^A_a\delta^B_b h_{AB}$，其中 $h_{AB}:=\mu_{AB}|_{t=0}$，$\kappa^{(m)}=-\frac{1}{2}\dot{\phi}^{(m)}$，$\mathrm{r}^{(m)}_A=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\beta}}^{(m)}$，$\mathrm{Y}^{(m)}_{AB}=\frac{1}{2}\dot{\mu}^{(m)}_{AB}$，$P^{ab}=\mu^{AB}\delta^a_A\delta^b_B$ 以及 $n^a=\delta^a_u$。特别地，我们用撇号表示对 u 求导，用点号表示对 t求导。

手工计算拟爱因斯坦方程（包括所有项）很快就会变得难以处理。因此，鉴于我们需要拟爱因斯坦方程截至 $\mathcal{Q}^{(3)}_{ab}$ 阶的完整表达式，我们借助 `xAct` 软件包 [66] 在Mathematica中完成了计算。计算结果带来如下结论。首先，方程 $\mathcal{Q}^{(1)}_{AB}=0$，$\dot{\mathcal{Q}}^{(1)}_A=0$，$\dot{\mathcal{Q}}^{(1)}_u=0$ 和 $\ddot{\mathcal{Q}}^{(1)}=0$ 在 $\mathscr{I}$ 处蕴含 $h'_{AB}=0$、$\mathrm{r}_A=0$、$\kappa_n=0$ 和$\sigma^{(2)}=0$，而 $\mathcal{Q}^{(1)}_{Au}=\mathcal{Q}^{(1)}_{uu}=\mathcal{L}^{(1)}_A=\mathcal{L}^{(1)}_u=0$ 则自动成立。接下来，方程 $f^{(3)}=0$

确定了 $\kappa^{(2)}=0$，将其代入 $\dot{\mathcal{L}}^{(1)}=0$ 可得 $\pounds_n\big(P^{AB}\mathrm{Y}_{AB}\big)=-\frac{R^h}{4}$。随后可以验证，$\mu^{AB}\mathcal{Q}^{(2)}_{AB}=\mathcal{Q}^{(2)}_{uA}=\mathcal{Q}^{(2)}_{uu}=0$ 自动成立，并由 $\mathcal{Q}^{(2)}_{AB}=0$ 得到

$$\pounds_n\mathrm{Y}_{AB}=-L^h_{AB}, \tag{126}$$

其中，L^h_{AB} 是 h_{AB}的舒滕张量。还可以验证，$\dot{\mathcal{Q}}^{(2)}_u=\mathcal{L}^{(2)}_u=0$ 自动成立。于是，方程 $\dot{\mathcal{Q}}_A=0$ 给出 $\mathbf{r}^{(2)}_A=\frac{1}{3}\left(D_B\mathrm{Y}^B{}_A-D_A\mathrm{Y}^B{}_B\right)$，其中 D 是 h的 Levi-Civita 导数，而 $\mathcal{L}^{(2)}_A=\mathcal{Q}^{(3)}_{Au}=\mathcal{Q}^{(3)}_{uu}=0$ 也自动满足。接下来，方程$\ddot{\mathcal{Q}}^{(2)}=0$、$f^{(4)}=0$ 和 $\dot{\mathcal{L}}^{(2)}=0$ 分别为，

$$\begin{aligned}4\sigma^{(3)}+\mathrm{Y}^{AB}\mathrm{Y}_{AB}-\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(2)}&=0,\\ \pounds_n\sigma^{(3)}+\kappa^{(3)}&=0,\\ 6\pounds_n\big(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(2)}\big)+8\kappa^{(3)}+6\mathrm{Y}^{AB}R^h_{AB}-R^h\,\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}&=0.\end{aligned}$$

对第一个方程关于 u 求导并求解该系统，可得 $\pounds_n\sigma^{(3)}=\phi^{(3)}=0$ 以及 $\pounds_n(\mathrm{tr}_P\mathbf{Y}^{(2)})=-2h^{AB}h^{CD}L^h_{AC}\mathrm{Y}_{BD}$。现在可以验证，$P^{ab}\mathcal{Q}^{(3)}_{ab}=0$ 自动成立。将这些表达式代入张量 $\mathcal{Q}^{(3)}_{AB}$，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^{(3)}_{AB}=-\frac{1}{3}\Big(&6\Box_h\mathrm{Y}_{AB}-6D^CD_{(A}\mathrm{Y}_{B)C}+6W^h_{ACBD}\mathrm{Y}^{CD}-2D_{(A}D^C\mathrm{Y}_{B)C}+2D_AD_B\mathrm{Y}^C{}_C\\&-2\left(\Box_h\mathrm{Y}^C{}_C-D^CD^D\mathrm{Y}_{CD}\right)h_{AB}\Big),\end{aligned} \tag{127}$$

其中 W^h_{ACBD} 表示 h_{AB}的韦尔张量。注意，右端显然是无迹的。根据前几节中的一般结果，方程 $\mathcal{Q}^{(3)}_{AB}=0$并不能通过输运方程确定张量 $\mathrm{Y}^{(2)}_{AB}$。相反，(127) 的右端定义了一个对称无迹张量

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^{\mathscr{I}}_{AB}\coloneqq-\frac{1}{3}\Big(&6\Box_h\mathrm{Y}_{AB}-6D^CD_{(A}\mathrm{Y}_{B)C}+6W^h_{ACBD}\mathrm{Y}^{CD}-2D_{(A}D^C\mathrm{Y}_{B)C}+2D_AD_B\mathrm{Y}^C{}_C\\&-2\left(\Box_h\mathrm{Y}^C{}_C-D^CD^D\mathrm{Y}_{CD}\right)h_{AB}\Big),\end{aligned} \tag{128}$$

它仅由 h_{AB} $_{AB}$ $\mathcal{O}^{\mathscr{I}}_{AB}$ ∂_u $\partial_u h_{AB}=$和 Y 构成。沿着 0 126 .....对其求导，并利用.....、( ) 以及恒等式 $D_{(A}D^CL^h_{B)C}=h^{CD}D_AD_BL^h_{CD}$(该式可直接由缩并比安基恒等式推出，见(33))，可得

$$\partial_u\mathcal{Q}^{(3)}_{AB}=2\left(\Box_hL^h_{AB}-D^CD_{(A}L^h_{B)C}+W^h_{ACBD}\mathrm{Y}^{CD}\right).$$

右端圆括号中的项恰好是 h_{AB} 的巴赫张量（例如参见 [13]），记作 B^h_{AB}。综上，我们得到 $\partial_u\mathcal{Q}^{(3)}_{AB}=2B^h_{AB}$。对于四维共形度量，巴赫张量恰好就是费弗曼-格雷厄姆阻碍张量。这有力支持了我们的预期：$\mathcal{O}^{\mathscr{I}}$ 与相应维数的 Fefferman–Graham 阻碍张量 $\mathcal{O}^{FG}$ 密切相关。

现在我们给出另一种论证，以证明 $\partial_u\mathcal{Q}^{(3)}_{AB}$ 必定与 FG 阻碍张量成正比。在近期的工作 [44]中，我们证明了与共形类 $[h]$ 相关联的 Fefferman–Graham 环境度规存在一个零无穷远，其 $\mathscr{I}$-结构恰好由 h给出。此外，我们证明了 $\mathcal{Q}^{(3)}_{AB}$ 沿 ∂_u 在 $\mathscr{I}$ 处的导数与 $[h]$的 Fefferman–Graham 障碍张量成正比。由于 $\partial_u\mathcal{Q}^{(3)}_{AB}$ （127）的导数仅取决于 h_{AB}，因此对于在 h_{AB} 处具有相同 $\mathscr{I}$的所有时空，该导数都必须相同。因此，唯一可能的情况是，在四维中 $\partial_u\mathcal{Q}^{(3)}_{AB}$ 与 FG 阻碍张量成正比，即

巴赫张量。

总之， h_{AB}的巴赫张量消失，加上截面 $\mathcal{O}^{\mathscr{I}}_{AB}=0$ 上的条件 Σ （根据（127），该条件可解释为对自由数据 Y 的限制$_{AB|\Sigma}$），保证完整的障碍张量 $\mathcal{O}^{\mathscr{I}}$ 在 $\mathscr{I}$上处处消失。因此，定理 $\mathcal{O}^{\mathscr{I}}_{ab}=0$ 5.5 中针对 $\mathfrak{n}=5$ 的假设可以放宽为 $B^h_{AB}=0$ 和$\mathcal{O}^{\mathscr{I}}_{AB}|_\Sigma=0$。请注意，Fefferman–Graham 阻碍张量具有共形协变性，因此条件 $B^h_{AB}=0$ 不依赖于该 $\mathscr{I}$-结构的共形代表元。

我们最近在 [44]关于 Fefferman–Graham 环境度量的共形无穷远几何刻画的研究成果，以及对一般情形的初步分析，表明高维中也会出现类似的图景，即沿 n 对辐射障碍张量取足够多次导数后，会得到 Fefferman–Graham 阻碍张量。因此，我们预期以下猜想成立。

猜想 6.3。 设 $\{\mathscr{I},\gamma,\ell,\ell^{(2)},\sigma,\mathfrak{q}\}$ 是奇数维 $\mathscr{I}$ 结构数据，且存在一个截面 $\iota:\ \Sigma\hookrightarrow\mathscr{I}$，其诱导度量为 $h:=\iota^\star\gamma$，并设 $\mathcal{O}^{\mathscr{I}}_{ab}$ 为辐射障碍张量。记 $[h]$ 的费弗曼–格雷厄姆障碍张量为 $\mathcal{O}^{FG}$。那么，

$$\iota^\star\big(\pounds_n^{(\frac{\mathfrak{n}-3}{2})}\mathcal{O}^{\mathscr{I}}\big)=c_{\mathfrak{n}}\,\mathcal{O}^{FG},$$

其中 $c_{\mathfrak{n}}$ 是仅依赖于 $\mathfrak{n}$ 的常数。

注意，例如当 h 为爱因斯坦度量或共形平坦度量时，费弗曼–格雷厄姆障碍张量会消失，此外还有其他情形 [13]。要证明这一猜想，需要详细分析（83）中出现的低阶项。我们计划在未来的工作中分析这一问题。

7 结论与未来工作

本文分析了共形爱因斯坦方程如何约束零无穷远处的几何，同时不对时空维数、韦尔张量的衰减条件或 $\mathscr{I}$ 的拓扑施加任何限制，只要求存在一个截面。我们的分析识别出了一组定义在 $\mathscr{I}$ 上的自由张量，它们在这一框架下完全刻画了渐近平坦时空。此外，我们证明，只要障碍张量消失，任意此类自由数据的选择都会产生一个光滑渐近平坦时空。

未来研究有几个自然方向。首先，有必要阐明定理 $\mathfrak{m}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 中出现的自由张量的物理诠释，并将其与5.5中发展的高维邦迪质量和角动量概念联系起来。 [29, 32, 60, 25, 30]在我们的框架内解决这一问题，需要对这些量给出适当的共形协变定义，并为新闻张量和 Geroch 的 ρ-张量构造合适的高维推广。其次，我们计划进一步研究任意维数和共形规范下的辐射障碍张量，以及它与费弗曼–格雷厄姆障碍张量的关系，正如猜想 6.3所 conjecture 的那样。在此背景下，若能将我们的结果与 [57]及类似文献中的结果联系起来，将尤其有趣；这些文献允许无穷远处的渐近展开中出现对数项。

其他尚待解决的问题包括：将 [43, 42]中引入的双零数据概念扩展到渐近特征问题，并纳入本研究所识别的新自由数据。值得探究的是，一旦获得适用于高维，或具有非球面拓扑的四维情形的共形方程存在性定理，这种分离出的对象是否足以构造一个在 $\mathscr{I}$邻域内满足爱因斯坦方程的共形时空。最后，另一个有前景的方向是纳入 Killing 和相似初始数据，利用 [45], 中发展的一般恒等式，并研究这一背景下相应的渐近 KID 问题（见 [52]）。

致谢

本研究得到了由 MICIU/AEI/10.13039/ 501100011033 资助的项目 PID2024-158938NB-I00 以及“欧洲区域发展基金：建设欧洲之路”的支持。M. Mars 感谢 SA097P24（JCyL）和 RED2022-134301-T 项目提供的经费支持；后者由 MCIN/AEI/10.13039/ 501100011033 资助。G. S´anchez-P´erez 也感谢西班牙大学部提供的博士奖学金 FPU20/03751。

A 拉回到零超曲面

在本附录中，我们将 [46, 47, 45] 中的若干结果具体应用于零情形，并证明了关于函数 Hessian 的其他拉回恒等式（命题 A.4）。给定 $\mathcal{M}$上的一个 $(0,p)$ 张量场 $T_{\alpha_1\cdots\alpha_p}$，我们用记号 $T_{a_1\cdots a_p}$ 表示其到 $\mathcal{H}$的拉回，并用 $(i,j)T_{\alpha_1\cdots\alpha_{p-1}}$表示先对第 j 个槽位、再对第 i 个槽位进行缩并，即 $(i,j)T = (i)\big((j)T\big)$（注意，$(i,j)$的顺序很重要）。类似地，$(i)T_{a_1\cdots a_{p-1}}$ 表示将 $(i)T_{\alpha_1\cdots\alpha_{p-1}}$ 拉回到 $\mathcal{H}$。其余量在第 2 节中定义。

命题 A.1. 设$(\mathcal{M},g)$ 为一个半黎曼流形，且 $\Phi:\ \mathcal{H}\hookrightarrow\mathcal{M}$ 是一个配有支架场 ξ 的光滑嵌入零超曲面。设 T 是定义在 $\mathcal{M}$ 上的一个$(0,p)$张量，并且 $f\in\mathcal{F}(\mathcal{M})$。那么，对于任意 $j\geq 1$

$$(\nabla T)_{ba_1\cdots a_p} = \mathring{\nabla}_b T_{a_1\cdots a_p} + \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Y}_{ba_i} T_{a_1\cdots a_{i-1}ca_{i+1}\cdots a_p} n^c + \sum_{i=1}^{p} \mathrm{U}_{ba_i} \big({}^{(i)}T\big)_{a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_p}, \tag{129}$$

$$\Big({}^{(1)}\nabla T\Big)_{a_1\cdots a_p} = (\pounds_\xi T)_{a_1\cdots a_p} - \sum_{i=1}^{p} (\mathrm{r}-\mathrm{s})_{a_i} \big({}^{(i)}T\big)_{a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_p} - \sum_{i=1}^{p} V^c{}_{a_i} T_{a_1\cdots a_{i-1}ca_{i+1}\cdots a_p}, \tag{130}$$

$$\begin{aligned}\Big({}^{(j+1)}\nabla T\Big)_{ba_1\cdots a_{p-1}} &= \mathring{\nabla}_b \big({}^{(j)}T\big)_{a_1\cdots a_{p-1}} + \sum_{i=1}^{p-1} \mathrm{Y}_{ba_i} \big({}^{(j)}T\big)_{a_1\cdots a_{i-1}ca_{i+1}\cdots a_{p-1}} n^c \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p-1} \mathrm{U}_{ba_i} \big({}^{(i,j)}T\big)_{a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_{p-1}} - (\mathrm{r}-\mathrm{s})_b \big({}^{(j)}T\big)_{a_1\cdots a_{p-1}} \\ &\quad - V^c{}_b T_{a_1\cdots a_{j-1}ca_j\cdots a_{p-1}}.\end{aligned} \tag{131}$$

命题 A.2. 设$(\mathcal{M},g)$ 为一个半黎曼流形，$\Phi:\ \mathcal{H}\hookrightarrow\mathcal{M}$ 为一个带有支架场 ξ 的光滑零超曲面。设 T 是 $\mathcal{M}$ 上的一个 $(0,p+1)$ 阶张量，并用散度 T 表示由 (散度 $T)^{\alpha_1\cdots\alpha_p} := g^{\mu\nu}\nabla_\mu T_{\nu\alpha_1\cdots\alpha_p}$ 定义的 p-协变张量。那么，

$$\begin{aligned}\Phi^\star\left(\operatorname{div} T\right)_{a_1\cdots a_p} &= n^b(\pounds_\xi T)_{ba_1\cdots a_p} + P^{bc}\mathring{\nabla}_b T_{ca_1\cdots a_p} + n^b\mathring{\nabla}_b\big({}^{(1)}T\big)_{a_1\cdots a_p} + \big(2\kappa_n + \operatorname{tr}_P \mathbf{U}\big)\big({}^{(1)}T\big)_{a_1\cdots a_p} \\ &\quad + (\operatorname{tr}_P \mathbf{Y} - n(\ell^{(2)}))n^c T_{ca_1\cdots a_p} - 2P^{ac}(\mathrm{r}+\mathrm{s})_a T_{ca_1\cdots a_p} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p} P^{bc}\mathrm{Y}_{ba_i} T_{ca_1\cdots a_{i-1}da_{i+1}\cdots a_p} n^d + \sum_{i=1}^{p} P^{bc}\mathrm{U}_{ba_i}\big({}^{(i+1)}T\big)_{ca_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_p} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{p}(\mathrm{r}-\mathrm{s})_{a_i} n^b \big({}^{(i+1)}T\big)_{ba_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_p} - \sum_{i=1}^{p} V^c{}_{a_i} n^b T_{ba_1\cdots a_{i-1}ca_{i+1}\cdots a_p} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p} \mathrm{r}_{a_i}\big({}^{(1)}T\big)_{a_1\cdots a_{i-1}ba_{i+1}\cdots a_p} n^b.\end{aligned}$$

命题 A.3. 设$(\mathcal{M},g)$ 为一个半黎曼流形， $\Phi:\mathcal{H}\hookrightarrow\mathcal{M}$ 为一个带有测地支架 ξ 的光滑嵌入零超曲面，并设 T 是 $\mathcal{M}$ 上的一个$(0,p)$阶张量。那么，

$$e_b^{\mu}\xi^{\alpha_1}\cdots\xi^{\alpha_p}\nabla_{\mu}T_{\alpha_1\cdots\alpha_p}\overset{\mathcal{H}}{=}\mathring{\nabla}_b\big(T(\xi,\cdots,\xi)\big)-pT(\xi,\cdots,\xi)\,(\mathrm{r}-\mathrm{s})_b - \sum_{i=1}^{p}V^c{}_b\big({}^{(1,\ldots,i-1,i+1,\ldots p)}T\big)_c, \tag{132}$$

$$\xi^{\mu}\xi^{\alpha_1}\cdots\xi^{\alpha_p}\nabla_{\mu}T_{\alpha_1\cdots\alpha_p}\overset{\mathcal{H}}{=}\big(\pounds_{\xi}T\big)(\xi,\cdots,\xi), \tag{133}$$

$$\xi^{\mu}\xi^{\nu}e_{a_1}^{\alpha_1}\cdots e_{a_{p-1}}^{\alpha_{p-1}}\nabla_{\mu}T_{\nu\alpha_1\cdots\alpha_{p-1}}\overset{\mathcal{H}}{=}\big(\pounds_{\xi}({}^{(1)}T)\big)_{a_1\cdots a_{p-1}}-\sum_{i=1}^{p-1}V^b{}_{a_i}\big({}^{(1)}T\big)_{a_1\cdots a_{i-1}ba_{i+1}\cdots a_{p-1}} - \sum_{i=1}^{p-1}(\mathrm{r}-\mathrm{s})_{a_i}\big({}^{(i,1)}T\big)_{a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_{p-1}}. \tag{134}$$

命题 A.4。 设$(\mathcal{M},g)$ 为半黎曼流形，且 $\Phi:\mathcal{H}\hookrightarrow\mathcal{M}$ 为带测地支架场 ξ的光滑零超曲面。设 f 是 $\mathcal{M}$上的函数。那么，

$$\Phi^{\star}\,(\mathrm{Hess}\,f)_{ab}=\mathring{\nabla}_a\mathring{\nabla}_b f+\pounds_n(f)\mathrm{Y}_{ab}+\pounds_{\xi}(f)\mathrm{U}_{ab}, \tag{135}$$

$$\Phi^{\star}\big((\mathrm{Hess}\,f)(\xi,\cdot)\big)_a=\mathring{\nabla}_a\big(\pounds_{\xi}f\big)-\pounds_{\xi}f(\mathrm{r}-\mathrm{s})_a-V^b{}_a\mathring{\nabla}_b f, \tag{136}$$

$$\Phi^{\star}\big(\big(\mathrm{Hess}\,f\big)(\xi,\xi)\big)=\pounds_{\xi}^{(2)}f. \tag{137}$$

因此，

$$\Box_g f\overset{\mathcal{H}}{=}\Box_P f+\big(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}-n(\ell^{(2)})\big)\pounds_n f+(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{U}+2\kappa_n)\,\pounds_{\xi}f+2\pounds_n\big(\pounds_{\xi}f\big)-2P^{ab}(\mathrm{r}+\mathrm{s})_a\mathring{\nabla}_b f, \tag{138}$$

其中 $\Box_P:=P^{ab}\mathring{\nabla}_a\mathring{\nabla}_b$。

证明。 恒等式 (135) 已在 [45] 中得到证明。为证明第二个恒等式，我们将 $\nabla_\alpha\nabla_\beta f$ 与 $e_a^\alpha\xi^\beta$ 收缩，并使用 (26)，

$$e_a^{\alpha}\xi^{\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}f=\nabla_{e_a}(\pounds_{\xi}f)-(\nabla_{e_a}\xi)^{\beta}\nabla_{\beta}f=\mathring{\nabla}_{e_a}(\pounds_{\xi}f)-(\mathrm{r}_a-\mathrm{s}_a)\pounds_{\xi}f-e_a^cV^b{}_c\mathring{\nabla}_b f.$$

表达式 (137) 是显然的，因为 $\xi^\alpha\xi^\beta\nabla_\alpha\nabla_\beta f=\nabla_\xi\nabla_\xi f-\nabla_{\nabla_\xi\xi}f=\pounds_\xi^{(2)}f-\pounds_{a_\xi}f$。最后，恒等式 (138) 由以下关系推出（见 (14)）： $g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta f=P^{ab}e_a^\alpha e_b^\beta\nabla_\alpha\nabla_\beta f+2\xi^\alpha\nu^\beta\nabla_\alpha\nabla_\beta f$代入 (135)-(136) 后，并使用 (11)。 □

B 附录：辅助计算及 (61)

在本附录中，我们计算张量 $\Sigma^{(m)}$ 和 $\Sigma^{(m)}$ 的若干缩并，这些缩并既用于证明（61），也将在下文附录 C 中使用。首先回顾在 [46,命题 4.21],

$$\Sigma^{(m)}_{cab}\overset{(m)}{=}\mathring{\nabla}_a\mathrm{Y}^{(m)}_{bc}+\mathring{\nabla}_b\mathrm{Y}^{(m)}_{ac}-\mathring{\nabla}_c\mathrm{Y}^{(m)}_{ab}+2\mathrm{r}^{(m)}_c\mathrm{Y}_{ab}+2\mathrm{r}_c\mathrm{Y}^{(m)}_{ab}, \tag{139}$$

$$\big({}^{(3)}\Sigma^{(m)}\big)_{ab}\overset{(m+1)}{=}-\big({}^{(1)}\Sigma^{(m)}\big)_{ab}\overset{(m+1)}{=}\mathrm{Y}^{(m+1)}_{ab}, \tag{140}$$

$$\xi^{\beta}\Sigma^{(m)\mu}{}_{\mu\beta}\overset{(m+1)}{=}\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m+1)}. \tag{141}$$

接下来这些表达式也在 [46] （公式（65）、（67）和（68））中得到证明，并且对 $m\geq 1$ 有效，因此也需要用到

$$\Sigma^{(m)}_{\mu\alpha\beta} \overset{[m]}{=} \Sigma^{(m)}_{\mu\alpha\beta} - (m-1)\mathcal{K}^{\rho}{}_{\mu}\Sigma^{(m-1)}_{\rho\alpha\beta}, \quad (142) \qquad \Sigma^{(m)}_{\rho\alpha\beta} \overset{[m+1]}{=} \Sigma^{(m)}_{\rho\alpha\beta}, \quad (143)$$

$$\Sigma^{(m)}_{\mu\alpha\beta} \overset{[m]}{=} \nabla_{(\alpha}\mathcal{K}^{(m)}_{\beta)\mu} - \frac{1}{2}\nabla_{\mu}\mathcal{K}^{(m)}_{\alpha\beta} - \mathcal{K}^{\varepsilon}{}_{\mu}\nabla_{(\alpha}\mathcal{K}^{(m-1)}_{\beta)\varepsilon} + \frac{1}{2}\mathcal{K}^{\varepsilon}{}_{\mu}\nabla_{\varepsilon}\mathcal{K}^{(m-1)}_{\alpha\beta}. \quad (144)$$

注意，这三个恒等式在 $m=1$ 时变为精确等式。本附录后文还需要用到 $\xi^{\beta}\Sigma^{(m)}_{\mu\alpha\beta}$ 的若干缩并，接下来我们将对其进行计算。首先注意，（144）与 ξ^{β} 的缩并可写为

$$\xi^{\beta}\Sigma^{(m)}_{\mu\alpha\beta} \overset{[m]}{=} \frac{1}{2}\xi^{\beta}\nabla_{\beta}\mathcal{K}^{(m)}_{\alpha\mu} + \xi^{\beta}\nabla_{[\alpha}\mathcal{K}^{(m)}_{\mu]\beta} - \frac{1}{2}\mathcal{K}^{\varepsilon}{}_{\mu}\xi^{\beta}\nabla_{\beta}\mathcal{K}^{(m-1)}_{\alpha\varepsilon} - \mathcal{K}^{\varepsilon}{}_{\mu}\xi^{\beta}\nabla_{[\alpha}\mathcal{K}^{(m-1)}_{\varepsilon]\beta}.$$

现在利用这两个恒等式（53），得到（附录A中引入的记号在此处同样适用）

$$\begin{aligned} e^{\mu}_{c}e^{\alpha}_{a}\xi^{\beta}\Sigma^{(m)}_{\mu\alpha\beta} &\overset{(m)}{=} \frac{1}{2}\big({}^{(1)}\nabla\mathcal{K}^{(m)}\big)_{ac} + \big({}^{(2)}\nabla\mathcal{K}^{(m)}\big)_{[ac]} - \mathrm{r}_{c}\big({}^{(2,3)}\nabla\mathcal{K}^{(m-1)}\big)_{a} \\ &\quad + \left(2P^{bd}\mathrm{Y}_{bc} + \frac{1}{2}n^{d}\mathring{\nabla}_{c}\ell^{(2)}\right)\left(\big({}^{(2)}\nabla\mathcal{K}^{(m-1)}\big)_{[da]} - \frac{1}{2}\big({}^{(1)}\nabla\mathcal{K}^{(m-1)}\big)_{ad}\right), \quad (145) \\ e^{\mu}_{c}\xi^{\alpha}\xi^{\beta}\Sigma^{(m)}_{\mu\alpha\beta} &\overset{(m)}{=} \big({}^{(1,2)}\nabla\mathcal{K}^{(m)}\big)_{c} - \frac{1}{2}\big({}^{(2,3)}\nabla\mathcal{K}^{(m)}\big)_{c} - \mathrm{r}_{c}\big({}^{(1,2,3)}\nabla\mathcal{K}^{(m-1)}\big) \\ &\quad - \left(2P^{bd}\mathrm{Y}_{bc} + \frac{1}{2}n^{d}\mathring{\nabla}_{c}\ell^{(2)}\right)\left(\big({}^{(1,2)}\nabla\mathcal{K}^{(m-1)}\big)_{d} - \frac{1}{2}\big({}^{(2,3)}\nabla\mathcal{K}^{(m-1)}\big)_{d}\right) \quad (146) \\ \xi^{\mu}e^{\alpha}_{a}\xi^{\beta}\Sigma^{(m)}_{\mu\alpha\beta} &\overset{(m)}{=} \frac{1}{2}\big({}^{(2,3)}\nabla\mathcal{K}^{(m)}\big)_{a} + \frac{1}{2}P^{bc}\mathring{\nabla}_{b}\ell^{(2)}\big({}^{(2)}\nabla\mathcal{K}^{(m-1)}\big)_{[ca]} - \frac{1}{4}P^{bc}\mathring{\nabla}_{b}\ell^{(2)}\big({}^{(1)}\nabla\mathcal{K}^{(m-1)}\big)_{ac} \\ &\quad - \frac{1}{4}n(\ell^{(2)})\big({}^{(2,3)}\nabla\mathcal{K}^{(m-1)}\big)_{a}. \quad (147) \end{aligned}$$

对（142）中的指标取迹 μ、α，并利用（144），可得

$$\Sigma^{(m)\mu}{}_{\mu\beta} \overset{[m]}{=} \frac{1}{2}\left(\nabla_{\beta}\mathcal{K}^{(m)\mu}{}_{\mu} - m\mathcal{K}^{\mu\rho}\nabla_{\beta}\mathcal{K}^{(m-1)}_{\mu\rho}\right). \quad (148)$$

最后，里奇张量的 $m-1$ 李导数为 [46, 式（63）]，，其中 $m\geq 2$,

$$\pounds^{(m-1)}_{\xi}R_{\alpha\beta} \overset{[m]}{=} \nabla_{\mu}\Sigma^{(m-1)\mu}{}_{\alpha\beta} - \nabla_{\beta}\Sigma^{(m-1)\mu}{}_{\mu\alpha}. \quad (149)$$

命题 B.1。设 $\{\mathcal{H},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\ell},\ell^{(2)}\}$ 是嵌入于 (Φ,ξ) 中的零度量超曲面数据 $(\mathcal{M},g)$，并将 ξ 从 $\Phi(\mathcal{H})$ 沿 $\nabla_{\xi}\xi=0$ 延拓至其外部。那么，对于任意 $m\geq 2$,

$$\Sigma^{(m)}_{cab} \overset{(m)}{=} \mathring{\nabla}_{a}\mathrm{Y}^{(m)}_{bc} + \mathring{\nabla}_{b}\mathrm{Y}^{(m)}_{ac} - \mathring{\nabla}_{c}\mathrm{Y}^{(m)}_{ab} + 2\mathrm{r}^{(m)}_{c}\mathrm{Y}_{ab} + 2m\mathrm{r}_{c}\mathrm{Y}^{(m)}_{ab}, \quad (150)$$

$$e^{\beta}_{a}\Sigma^{(m)\mu}{}_{\mu\beta} \overset{(m)}{=} \mathring{\nabla}_{a}\big(\operatorname{tr}_{P}\mathbf{Y}^{(m)}\big), \quad (151) \qquad \big({}^{(2,3)}\Sigma^{(m)}\big)_{a} \overset{(m+1)}{=} \big({}^{(1,3)}\Sigma^{(m)}\big)_{a} \overset{(m+1)}{=} 0, \quad (152)$$

$$\big({}^{(3)}\Sigma^{(m)}\big)_{ca} \overset{(m)}{=} \mathrm{Y}^{(m+1)}_{ac} - 2V^{b}{}_{a}\mathrm{Y}^{(m)}_{cb} - 2P^{bd}\mathrm{Y}_{bc}\mathrm{Y}^{(m)}_{ad} - \frac{1}{2}\mathrm{r}^{(m)}_{a}\mathring{\nabla}_{c}\ell^{(2)}, \quad (153)$$

$$\big({}^{(3)}\Sigma^{(m)}\big)_{ca} \overset{(m)}{=} \mathrm{Y}^{(m+1)}_{ac} - 2V^{b}{}_{a}\mathrm{Y}^{(m)}_{cb} - 2mP^{bd}\mathrm{Y}_{bc}\mathrm{Y}^{(m)}_{ad} - \left(m-\frac{1}{2}\right)\mathrm{r}^{(m)}_{a}\mathring{\nabla}_{c}\ell^{(2)}. \quad (154)$$

作为推论，

$$n^{c}\Sigma^{(m)}_{cab} \overset{(m)}{=} 2\mathring{\nabla}_{(a}\mathrm{r}^{(m)}_{b)} - \pounds_{n}\mathrm{Y}^{(m)}_{ab} - 2\kappa^{(m)}\mathrm{Y}_{ab} - 2m\kappa_{n}\mathrm{Y}^{(m)}_{ab}, \quad (155)$$

$$\big({}^{(3)}\Sigma^{(m)}\big)_{ca}n^{c} \overset{(m)}{=} \mathrm{r}^{(m+1)}_{a} - 2V^{b}{}_{a}\mathrm{r}^{(m)}_{b} - 2P^{bc}\mathrm{r}_{b}\mathrm{Y}^{(m)}_{ac} - \frac{1}{2}n(\ell^{(2)})\mathrm{r}^{(m)}_{a}, \quad (156)$$

$$\big({}^{(3)}\Sigma^{(m)}\big)_{ca}n^{c} \overset{(m)}{=} \mathrm{r}^{(m+1)}_{a} - 2V^{b}{}_{a}\mathrm{r}^{(m)}_{b} - 2mP^{bc}\mathrm{r}_{b}\mathrm{Y}^{(m)}_{ac} - \frac{m}{2}n(\ell^{(2)})\mathrm{r}^{(m)}_{a}. \quad (157)$$

证明。恒等式（150）将由（139）和（142）推出。第二个式子的拉回在考虑到（53）、（140）以及 $\Sigma^{(m-1)}_{cab}{}_{(m)} = 0$（由（139）得到）。

$$\Sigma^{(m)}_{cab} \overset{(m)}{=} \Sigma^{(m)}_{cab} + 2(m-1)\mathrm{r}_c \mathrm{Y}^{(m)}_{ab}.$$

在此代入 $\Sigma^{(m)}_{cab}$，即来自 (139) 的表达式，得到 (150)。将 (150) 与 n^c 缩并，得到 (155)，在利用

$$n^c\big(\mathring{\nabla}_a \mathrm{Y}^{(m)}_{bc} + \mathring{\nabla}_b \mathrm{Y}^{(m)}_{ac} - \mathring{\nabla}_c \mathrm{Y}^{(m)}_{ab}\big) = 2\mathring{\nabla}_{(a}\mathrm{r}^{(m)}_{b)} - \pounds_n \mathrm{Y}^{(m)}_{ab}.$$

为证明 (151)，我们只需将 (148) 与 e^β_a 缩并，并利用 (54)（注意，对 $\mathcal{K}^{(m-1)}$ 取切向导数时，其至多具有横向阶数 $m-1$）。

其余恒等式将依赖于 (145)-(147)。在应用它们之前，我们需要确定形如 $({}^{(i)}\nabla\mathcal{K}^{(m)})_{ab}$ 和 $({}^{(i,j)}\nabla\mathcal{K}^{(m)})_a$ 的项，其中 i、j取各种值。对于前者，我们使用 (130)-(131)；对于后者，则使用 (132)-(134)。同时考虑到 (52)，结果为

$$\begin{aligned}
&\big({}^{(1)}\nabla\mathcal{K}^{(m)}\big)_{ac} \overset{(m)}{=} \mathcal{K}^{(m+1)}_{ac} - 2V^b{}_{(a}\mathcal{K}^{(m)}_{c)b}, \qquad \big({}^{(2)}\nabla\mathcal{K}^{(m)}\big)_{[ac]} \overset{(m)}{=} V^b{}_{[c}\mathcal{K}^{(m)}_{a]b}, \\
&\big({}^{(1,2)}\nabla\mathcal{K}^{(m)}\big)_c \overset{(m)}{=} 0, \qquad \big({}^{(2,3)}\nabla\mathcal{K}^{(m)}\big)_c \overset{(m)}{=} 0, \qquad \big({}^{(1,2,3)}\nabla\mathcal{K}^{(m-1)}\big) \overset{(m)}{=} 0.
\end{aligned} \tag{158}$$

注意，这些表达式直接推出

$$\begin{aligned}
&\big({}^{(1)}\nabla\mathcal{K}^{(m-1)}\big)_{ad} \overset{(m)}{=} \mathcal{K}^{(m)}_{ad}, \qquad \big({}^{(2)}\nabla\mathcal{K}^{(m-1)}\big)_{[da]} \overset{(m)}{=} 0, \\
&\big({}^{(2,3)}\nabla\mathcal{K}^{(m-1)}\big)_a \overset{(m)}{=} \big({}^{(1,2)}\nabla\mathcal{K}^{(m-1)}\big)_c \overset{(m)}{=} 0.
\end{aligned} \tag{159}$$

有了所有这些表达式，恒等式 (146) 和 (147) 分别变为

$$\big({}^{(2,3)}\Sigma^{(m)}\big)_c \overset{(m+1)}{=} 0, \qquad \big({}^{(1,3)}\Sigma^{(m)}\big)_c \overset{(m+1)}{=} 0,$$

由此证明了 (152)。将 (158)-(159) 代入 (145)，并将 $\mathcal{K}^{(m)}_{ab} = 2\mathrm{Y}^{(m)}_{ab}$ 代入，得到

$$\begin{aligned}
\big({}^{(3)}\Sigma^{(m)}\big)_{ca} &\overset{(m)}{=} \frac{1}{2}\mathcal{K}^{(m+1)}_{ac} - V^b{}_{(a}\mathcal{K}^{(m)}_{c)b} + V^b{}_{[c}\mathcal{K}^{(m)}_{a]b} - \frac{1}{2}\left(2P^{bd}\mathrm{Y}_{bc} + \frac{1}{2}n^d\mathring{\nabla}_c\ell^{(2)}\right)\mathcal{K}^{(m)}_{ad} \\
&\overset{(m)}{=} \mathrm{Y}^{(m+1)}_{ac} - 2V^b{}_a\mathrm{Y}^{(m)}_{cb} - 2P^{bd}\mathrm{Y}_{bc}\mathrm{Y}^{(m)}_{ad} - \frac{1}{2}\mathrm{r}^{(m)}_a\mathring{\nabla}_c\ell^{(2)},
\end{aligned}$$

即153。与 n^c 缩并得到156。现在，恒等式154可通过将152、153和53代入142得到，即

$$\begin{aligned}
e^\mu_c e^\alpha_a \xi^\beta \Sigma^{(m)}_{\mu\alpha\beta} &\overset{(m)}{=} e^\mu_c e^\alpha_a \xi^\beta \Sigma^{(m)}_{\mu\alpha\beta} - (m-1)\mathcal{K}_\mu{}^\rho e^\mu_c e^\alpha_a \xi^\beta \Sigma^{(m-1)}_{\rho\alpha\beta} \\
&\overset{(m)}{=} \big({}^{(3)}\Sigma^{(m)}\big)_{ca} - (m-1)\left(2P^{bd}\mathrm{Y}_{cb} + \frac{1}{2}n^d\mathring{\nabla}_c\ell^{(2)}\right)\big({}^{(3)}\Sigma^{(m-1)}\big)_{da} - 2\mathrm{r}_c\big({}^{(1,3)}\Sigma^{(m-1)}\big)_a \\
&\overset{(m)}{=} \mathrm{Y}^{(m+1)}_{ac} - 2V^b{}_a\mathrm{Y}^{(m)}_{cb} - 2mP^{bd}\mathrm{Y}_{bc}\mathrm{Y}^{(m)}_{ad} - \frac{m}{2}\mathrm{r}^{(m)}_a\mathring{\nabla}_c\ell^{(2)}.
\end{aligned}$$

最后，157是它与 n^c 的缩并。 □

我们已经具备了计算 $\dot{\mathcal{R}}^{(m)}_a$ 至 m 阶所需的全部要素。

命题 B.2. 设 $\mathcal{H}$ 是嵌入于$(\mathcal{M}, g)$ 中的(Φ, ξ)零超曲面，并通过 $\nabla_\xi\xi = 0$将 ξ从 $\Phi(\mathcal{H})$ 向外延拓。那么，对于任意 $m \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{R}}^{(m)}_a \overset{(m)}{=}\ & \mathrm{r}^{(m+1)}_a + P^{bc}\mathring{\nabla}_b\mathrm{Y}^{(m)}_{ac} - 2mP^{bc}\mathrm{r}_b\mathrm{Y}^{(m)}_{ac} - \mathring{\nabla}_a\big(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}\big) + \big(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}\big)(\mathrm{r}_a - \mathrm{s}_a) \\
&+ \big(P^{bc}\mathrm{Y}_{ab} - 3V^c{}_a\big)\mathrm{r}^{(m)}_c + \left(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y} - \frac{m}{2}n(\ell^{(2)})\right)\mathrm{r}^{(m)}_a,
\end{aligned} \tag{160}$$

因此

$$\dot{\mathcal{R}}_a^{(m)} n^a \overset{(m)}{=} -\kappa^{(m+1)} + P^{bc}\mathring{\nabla}_b \mathrm{r}_c^{(m)} - P^{bc}P^{ad}\mathrm{U}_{bd}\mathrm{Y}_{ac}^{(m)} - \pounds_n\big(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m)}\big) - \kappa_n \operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m)} \\ - 2P^{bc}\big((m+1)\mathrm{r}_b + 2\mathrm{s}_b\big)\mathrm{r}_c^{(m)} + \left(\frac{m+3}{2} n(\ell^{(2)}) - \operatorname{tr}_P \mathbf{Y}\right)\kappa^{(m)}. \tag{161}$$

证明。由（149），

$$\widehat{e}_a^\alpha \xi^\beta \pounds_\xi^{(m-1)} R_{\alpha\beta} \overset{[m]}{=} \widehat{e}_a^\alpha \xi^\beta \nabla_\mu \Sigma^{(m-1)\mu}{}_{\alpha\beta} - \widehat{e}_a^\alpha \xi^\beta \nabla_\beta \Sigma^{(m-1)\mu}{}_{\mu\alpha} \\ \overset{[m]}{=} \widehat{e}_a^\alpha \nabla_\mu\big(\xi^\beta \Sigma^{(m-1)\mu}{}_{\alpha\beta}\big) - \widehat{e}_a^\alpha \Sigma^{(m-1)\mu}{}_{\alpha\beta}\nabla_\mu \xi^\beta - \widehat{e}_a^\alpha \xi^\beta \nabla_\beta\big(\Sigma^{(m-1)\mu}{}_{\mu\alpha}\big). \tag{162}$$

我们分别计算各项。对于第一项，应用命题 A.2 于 $T = {}^{(3)}\Sigma^{(m-1)}$，并考虑 $\big({}^{(3)}\Sigma^{(m-1)}\big)_{ab}{}^{(m)} = \mathrm{Y}_{ab}^{(m)}$（由（140）和（143））以及 ${}^{(2,\,3)}\Sigma^{(m-1)}{}^{(m)} = {}^{(1,\,3)}\Sigma^{(m-1)}{}^{(m)} = 0$（由（152）和（143））。因此，

$$\widehat{e}_a^\alpha \nabla_\mu\big(\xi^\beta \Sigma^{(m-1)\mu}{}_{\alpha\beta}\big) \overset{(m)}{=} n^b \widehat{e}_a^\alpha \widehat{e}_b^\mu \xi^\beta \pounds_\xi \Sigma_{\mu\alpha\beta}^{(m-1)} + P^{bc}\mathring{\nabla}_b \mathrm{Y}_{ca}^{(m)} + \big(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y} - n(\ell^{(2)})\big)\mathrm{r}_a^{(m)} \\ - 2P^{bc}(\mathrm{r}+\mathrm{s})_b \mathrm{Y}_{ca}^{(m)} + P^{bc}\mathrm{Y}_{ba}\mathrm{r}_c^{(m)} - V^c{}_a \mathrm{r}_c^{(m)}. \tag{163}$$

只有第一项需要进一步分析。注意到

$$\pounds_\xi \Sigma_{\mu\alpha\beta}^{(m-1)} = \pounds_\xi\big(g_{\mu\nu}\Sigma^{(m-1)\nu}{}_{\alpha\beta}\big) = \mathcal{K}_{\mu\nu}\Sigma^{(m-1)\nu}{}_{\alpha\beta} + g_{\mu\nu}\Sigma^{(m)\nu}{}_{\alpha\beta} \underset{(142)}{\overset{[m]}{=}} \Sigma_{\mu\alpha\beta}^{(m)} - (m-2)\mathcal{K}_\mu{}^\rho \Sigma_{\rho\alpha\beta}^{(m-1)},$$

so

$$n^b e_a^\alpha e_b^\mu \xi^\beta \pounds_\xi \Sigma_{\mu\alpha\beta}^{(m-1)} \overset{[m]}{=} n^b e_a^\alpha e_b^\mu \xi^\beta \Sigma_{\mu\alpha\beta}^{(m)} - (m-2) n^b e_a^\alpha e_b^\mu \xi^\beta \mathcal{K}_\mu{}^\rho \Sigma_{\rho\alpha\beta}^{(m-1)}. \tag{164}$$

右端的第一项可直接由（156给出，而对于第二项，我们使用

$$n^b e_a^\alpha e_b^\mu \xi^\beta \mathcal{K}_\mu{}^\rho \Sigma_{\rho\alpha\beta}^{(m-1)} \underset{(53)}{=} \left(2P^{cd}\mathrm{r}_c + \frac{1}{2}n(\ell^{(2)})n^d\right)\big({}^{(3)}\Sigma^{(m-1)}\big)_{da} + 2\mathrm{r}_b\big({}^{(1,3)}\Sigma^{(m-1)}\big)_a \\ \underset{(140)}{\overset{(m)}{=}} 2P^{cd}\mathrm{r}_c \mathrm{Y}_{da}^{(m)} + \frac{1}{2}n(\ell^{(2)})\mathrm{r}_a^{(m)},$$

w这里在第二行中也使用了（152）。将其以及（156）代入（164）得到 s

$$n^b e_a^\alpha e_b^\mu \xi^\beta \pounds_\xi \Sigma_{\mu\alpha\beta}^{(m-1)} \overset{(m)}{=} \mathrm{r}_a^{(m+1)} - 2V^c{}_a \mathrm{r}_c^{(m)} - 2(m-1)P^{bc}\mathrm{r}_b \mathrm{Y}_{ca}^{(m)} - \frac{1}{2}(m-1)n(\ell^{(2)})\mathrm{r}_a^{(m)},$$

因此（163）可写成

$$\widehat{e}_a^\alpha \nabla_\mu\big(\xi^\beta \Sigma^{(m-1)\mu}{}_{\alpha\beta}\big) \overset{(m)}{=} \mathrm{r}_a^{(m+1)} - 3V^c{}_a \mathrm{r}_c^{(m)} - 2P^{bc}\big(m\mathrm{r}_b + \mathrm{s}_b\big)\mathrm{Y}_{ca}^{(m)} \\ + \left(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y} - \frac{m+1}{2}n(\ell^{(2)})\right)\mathrm{r}_a^{(m)} + P^{bc}\mathring{\nabla}_b \mathrm{Y}_{ca}^{(m)} + P^{bc}\mathrm{Y}_{ab}\mathrm{r}_c^{(m)}. \tag{165}$$

对于（162）中的第二项，我们代入（27），并利用 $e_a^\alpha \xi^\mu \xi^\beta \Sigma_{\mu\alpha\beta}^{(m-1)}{}^{(m)} = 0$（根据（152））以及 $e_c^\mu e_a^\alpha e_b^\beta \Sigma_{\mu\alpha\beta}^{(m-1)}{}^{(m)} = 0$（根据（139）），得到

$$-g^{\mu\rho}\widehat{e}_a^\alpha \Sigma_{\mu\alpha\beta}^{(m-1)} \nabla_\rho \xi^\beta \overset{(m)}{=} -P^{cd}(\mathrm{r}-\mathrm{s})_c\big({}^{(3)}\Sigma^{(m-1)}\big)_{da} - V^b{}_c n^c\big({}^{(1)}\Sigma^{(m-1)}\big)_{ab} \\ \underset{(140)}{\overset{(m)}{=}} 2P^{bc}\mathrm{s}_b \mathrm{Y}_{ca}^{(m)} + \frac{1}{2}n(\ell^{(2)})\mathrm{r}_a^{(m)}, \tag{166}$$

其中，在第二个等号处我们还代入了（11）。最后，（162）中的最后一项 is

$$
\begin{aligned}
-\widehat{e}_a^{\alpha}\xi^{\beta}\nabla_{\beta}\big(\Sigma^{(m-1)\mu}{}_{\mu\alpha}\big) &= -e_a^{\alpha}\pounds_{\xi}\Sigma^{(m-1)\mu}{}_{\mu\alpha} + e_a^{\alpha}\Sigma^{(m-1)\mu}{}_{\mu\beta}\nabla_{\alpha}\xi^{\beta} \\
&= -e_a^{\alpha}\Sigma^{(m)\mu}{}_{\mu\alpha} + e_a^{\alpha}\Sigma^{(m-1)\mu}{}_{\mu\beta}\nabla_{\alpha}\xi^{\beta} \\
&\overset{(m)}{=} -\mathring{\nabla}_a\big(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m)}\big) + \operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m)}(\mathrm{r}_a - \mathrm{s}_a),
\end{aligned}
\tag{167}
$$

其中在最后一步中，我们使用了26式（对 $e_a^{\alpha}\nabla_{\alpha}\xi^{\beta}$ ），并回顾了151式和141式。现在，只需将165式–167式代入162式，即可得到160式。为证明161式，只需将160式与 n^a 缩并，并使用24式和11式。 □

我们以 Σ_{cab}、 $({}^{(3)}\Sigma)_{ca}$ 和 $({}^{(2,3)}\Sigma)_{c}$的显式表达式结束本附录。尽管它们是 [45]，中推导出的更一般恒等式的特殊情形，我们仍为完整起见重新推导这些表达式，并避免引入额外记号以便与 [46]中的结果衔接。我们强调，这一结果并不包含在命题B.1 中，因为通常而言， m的最低取值需要采用不同的处理方式。

命题 B.3。 令 $\{\mathcal{H}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\ell}, \ell^{(2)}\}$ 为嵌入于 （Φ、 ξ）中的 $\mathcal{M}$、 g）零度量超曲面数据，并将 ξ 从 Φ（$\mathcal{H}$） 通过 $\nabla_{\xi}\xi = 0$延拓出去。那么，

$$
\Sigma_{cab} = 2\mathring{\nabla}_{(a}\mathrm{Y}_{b)c} - \mathring{\nabla}_c\mathrm{Y}_{ab} + 2\mathrm{r}_c\mathrm{Y}_{ab} + \frac{1}{2}\mathrm{U}_{ab}\mathring{\nabla}_c\ell^{(2)}, \tag{168}
$$

$$
({}^{(3)}\Sigma)_{ca} = \mathrm{Y}^{(2)}_{ac} - \frac{1}{2}(\mathrm{r}-\mathrm{s})_a\mathring{\nabla}_c\ell^{(2)} - 2V^d{}_a\mathrm{Y}_{cd}, \tag{169}
$$

$$
({}^{(2,3)}\Sigma)_c = 0. \tag{170}
$$

因此，

$$
\Sigma_{cab}n^c = -\pounds_n\mathrm{Y}_{ab} - 2\kappa_n\mathrm{Y}_{ab} + 2\mathring{\nabla}_{(a}\mathrm{r}_{b)} + \frac{1}{2}n(\ell^{(2)})\mathrm{U}_{ab}, \tag{171}
$$

$$
({}^{(3)}\Sigma)_{ca}n^c = \mathrm{r}^{(2)}_a - \frac{1}{2}n(\ell^{(2)})\big(\mathrm{r}-\mathrm{s}\big)_a - 2V^c{}_a\mathrm{r}_c, \tag{172}
$$

$$
({}^{(2,3)}\Sigma)_c n^c = 0. \tag{173}
$$

证明。 由（144）可知 $m = 1$ （请回忆，该等式是精确成立的）

$$
\Sigma_{\mu\alpha\beta} = \Sigma_{\mu\alpha\beta} = \nabla_{(\alpha}\mathcal{K}_{\beta)\mu} - \frac{1}{2}\nabla_{\mu}\mathcal{K}_{\alpha\beta}.
$$

将其拉回到 $\mathcal{H}$ 并结合（129）和 $T = \mathcal{K}$,

$$
\Sigma_{cab} = \mathring{\nabla}_{(a}\mathcal{K}_{b)c} + \mathrm{Y}_{ab}\mathcal{K}_{cd}n^d + \mathrm{U}_{ab}({}^{(1)}\mathcal{K})_c - \frac{1}{2}\mathring{\nabla}_c\mathcal{K}_{ab}.
$$

恒等式（168）在代入 $\mathcal{K}_{ab} = 2\mathrm{Y}_{ab}$ 和 $({}^{(1)}\mathcal{K})_c = \frac{1}{2}\mathring{\nabla}_c\ell^{(2)}$ （见（52）） 后即可得到。收缩-

tion，其中 n^c 由 (171) 给出，在使用 $n^c\nabla_c\mathrm{Y}_{ab} = \pounds_n\mathrm{Y}_{ab} - 2\mathrm{Y}_{c(a}\nabla_{b)}n^c$和 (24) 后即可得到。为证明第二和第三个恒等式，我们重复命题 B.1 中的相同策略。首先，我们计算在 (145)-(146) 中出现的 $(i)\nabla\mathcal{K}$ 和 $(i,j)\nabla\mathcal{K}$ 形式的项，其中$m = 1$ （请回想，在此情形下它们是精确的）。为此，我们使用 (130)-(132)、(134)，并回想$\mathcal{K}^{(m)}{}_{ab} = 2\mathrm{Y}^{(m)}{}_{ab}$ 以及 (52)，

$$
\big({}^{(1)}\nabla\mathcal{K}\big)_{ac} = 2\mathrm{Y}^{(2)}_{ac} - (\mathrm{r}-\mathrm{s})_{(a}\mathring{\nabla}_{c)}\ell^{(2)} - 4V^d{}_{(a}\mathrm{Y}_{c)d}, \quad \big({}^{(2)}\nabla\mathcal{K}\big)_{[ac]} = -\frac{1}{2}(\mathrm{r}-\mathrm{s})_{[a}\mathring{\nabla}_{c]}\ell^{(2)} - 2V^b{}_{[a}\mathrm{Y}_{c]b},
$$

$$
\big({}^{(1,2)}\nabla\mathcal{K}\big)_c = -\frac{1}{2}V^b{}_c\mathring{\nabla}_b\ell^{(2)}, \qquad \big({}^{(2,3)}\nabla\mathcal{K}\big)_c = -V^b{}_c\mathring{\nabla}_b\ell^{(2)}.
$$

表达式（169）和（170）分别通过将其代入（145）-（146）并注意到 $\nabla\mathcal{K}^{(0)} = \nabla g = 0$ 得到。最后， （172）和（173）是将（169）-（170）与n^c进行缩并所得。 □

C 零无穷远处的拟爱因斯坦方程

在本附录中，我们明确写出每个 $m \geq 1$ 对应的张量（81）-（82），从而明确给出首阶项。回顾（56）后，根据（32）中以里奇张量表示舒滕张量的定义，可得:

$$L^{(m)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mathfrak{n}-1}\left(R^{(m)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2\mathfrak{n}}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i}R^{(i+1)}\pounds_\xi^{(m-1-i)}g_{\alpha\beta}\right). \tag{174}$$

根据备注 4.4 可得

$$L^{(m)}_{\alpha\beta} \overset{[m-1]}{=} \frac{1}{\mathfrak{n}-1}\left(R^{(m)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2\mathfrak{n}}\big(R^{(m)}g_{\alpha\beta} + (m-1)R^{(m-1)}\mathcal{K}_{\alpha\beta} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}R^{(m-2)}\mathcal{K}^{(2)}_{\alpha\beta}\big)\right), \tag{175}$$

$$L^{(m)}_{\alpha\beta} \overset{[m]}{=} \frac{1}{\mathfrak{n}-1}\left(R^{(m)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2\mathfrak{n}}\big(R^{(m)}g_{\alpha\beta} + (m-1)R^{(m-1)}\mathcal{K}_{\alpha\beta}\big)\right), \tag{176}$$

and

$$L^{(m)}_{\alpha\beta} \overset{[m+1]}{=} \frac{1}{\mathfrak{n}-1}\left(R^{(m)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2\mathfrak{n}}R^{(m)}g_{\alpha\beta}\right), \tag{177}$$

$$L^{(m-1)}_{\alpha\beta} \overset{[m+1]}{=} 0. \tag{178}$$

在下面的命题中，我们计算了 $L^{(m)}_{\alpha\beta}$ 的缩并，这些缩并将在下文中使用。请注意，根据附录其余部分的需要，有些缩并计算到 m 阶，而另一些则只计算到 $m+1$ 阶。

命题 C.1. 设 $\{\mathcal{H}, \gamma, \ell, \ell^{(2)}\}$ 为零度量超曲面数据，且以(Φ, ξ)嵌入于$(\mathcal{M}, g)$，并通过 $\nabla_\xi \xi = 0$ 将 ξ 从 $\Phi(\mathcal{H})$ 向外延拓。设 $L_{\alpha\beta}$ 为舒滕张量，$L^{(m)}_{\alpha\beta} = \pounds_\xi^{(m-1)}L_{\alpha\beta}$ 以及 $m \geq 2$。则，

$$\begin{aligned}
L^{(m)}_{ab} \overset{(m)}{=} \frac{1}{\mathfrak{n}-1}\Big(& -2\pounds_n \mathrm{Y}^{(m)}_{ab} - \big(2m\kappa_n + \mathrm{tr}_P\,\mathbf{U}\big)\mathrm{Y}^{(m)}_{ab} - \big(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}\big)\mathrm{U}_{ab} + 4P^{cd}\mathrm{U}_{c(a}\mathrm{Y}^{(m)}_{b)d} \\
& + 4(\mathrm{s}-\mathrm{r})_{(a}\mathrm{r}^{(m)}_{b)} + 2\mathring{\nabla}_{(a}\mathrm{r}^{(m)}_{b)} + \frac{2(m-\mathfrak{n}-1)}{\mathfrak{n}}\kappa^{(m)}\mathrm{Y}_{ab}\Big) \\
& + \frac{1}{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)}\Big(\kappa^{(m+1)} + 2\pounds_n\big(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}\big) + \big(2m\kappa_n + \mathrm{tr}_P\,\mathbf{U}\big)\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)} + P^{ef}P^{cd}\mathrm{U}_{ec}\mathrm{Y}^{(m)}_{fd} \\
& - 2\,\mathrm{div}_P\,\mathbf{r}^{(m)} + 2P\big((2m+1)\mathbf{r} + 3\mathbf{s}, \mathbf{r}^{(m)}\big) + \big(2\,\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y} - (m+2)n(\ell^{(2)})\big)\kappa^{(m)}\Big)\gamma_{ab}, \qquad (179) \\
\dot{L}^{(m)}_a \overset{(m)}{=} \frac{1}{\mathfrak{n}-1}\Big(& \mathrm{r}^{(m+1)}_a + P^{bc}\mathring{\nabla}_b\mathrm{Y}^{(m)}_{ac} - 2mP^{bc}\mathrm{r}_b\mathrm{Y}^{(m)}_{ac} - \mathring{\nabla}_a\big(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}\big) + \big(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}\big)(\mathrm{r}_a - \mathrm{s}_a) \\
& + (P^{bc}\mathrm{Y}_{ab} - 3V^c{}_a)\mathrm{r}^{(m)}_c + \Big(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y} - \frac{m}{2}n(\ell^{(2)})\Big)\mathrm{r}^{(m)}_a + \frac{m-1}{2\mathfrak{n}}\kappa^{(m)}\mathring{\nabla}_a\ell^{(2)}\Big) \\
& + \frac{1}{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)}\Big(\kappa^{(m+1)} + 2\pounds_n\big(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}\big) + \big(2m\kappa_n + \mathrm{tr}_P\,\mathbf{U}\big)\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)} + P^{ef}P^{cd}\mathrm{U}_{ec}\mathrm{Y}^{(m)}_{fd} \\
& - 2\,\mathrm{div}_P\,\mathbf{r}^{(m)} + 2P\big((2m+1)\mathbf{r} + 3\mathbf{s}, \mathbf{r}^{(m)}\big) + \big(2\,\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y} - (m+2)n(\ell^{(2)})\big)\kappa^{(m)}\Big)\ell_a, \qquad (180) \\
\ddot{L}^{(m)} \overset{(m+1)}{=} \frac{1}{\mathfrak{n}-1}\Big(& -\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m+1)} + \frac{\kappa^{(m+1)}}{\mathfrak{n}}\ell^{(2)}\Big). \qquad (181)
\end{aligned}$$

特别地，

$$L_{ab}^{(m)} n^b \overset{(m)}{=} \frac{1}{\mathfrak{n}-1}\left(-\pounds_n \mathrm{r}_a^{(m)} - (2(m-1)\kappa_n + \mathrm{tr}_P\,\mathbf{U})\mathrm{r}_a^{(m)} - \mathring{\nabla}_a \kappa^{(m)} + \frac{2(m-1)}{\mathfrak{n}}\kappa^{(m)}\mathrm{r}_a\right), \quad (182)$$

$$\begin{aligned}\dot{L}_a^{(m)} n^a \overset{(m)}{=} \frac{1}{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)}\Bigg(&(1-\mathfrak{n})\kappa^{(m+1)} + (2-\mathfrak{n})\pounds_n\big(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}\big) + \big((2m-\mathfrak{n})\kappa_n + \mathrm{tr}_P\,\mathbf{U}\big)\,\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}\\ &+ (1-\mathfrak{n})P^{bc}P^{ad}\mathrm{U}_{bd}\mathrm{Y}_{ac}^{(m)} + 2P\big(((2-\mathfrak{n})m + 1 - \mathfrak{n})\mathbf{r} + (3-2\mathfrak{n})\mathbf{s}, \mathbf{r}^{(m)}\big)\\ &+ (\mathfrak{n}-2)\,\mathrm{div}_P\,\mathbf{r}^{(m)} + \left((2-\mathfrak{n})\,\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y} + \frac{3\mathfrak{n} + m(\mathfrak{n}-1) - 5}{2}n(\ell^{(2)})\right)\kappa^{(m)}\Bigg),\end{aligned} \quad (183)$$

and

$$L_{ab}^{(m)} \overset{(m+1)}{=} \frac{\kappa^{(m+1)}}{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)}\gamma_{ab}, \quad (184) \qquad \dot{L}_a^{(m)} \overset{(m+1)}{=} \frac{1}{\mathfrak{n}-1}\left(\mathrm{r}_a^{(m+1)} + \frac{\kappa^{(m+1)}}{\mathfrak{n}}\ell_a\right), \quad (185)$$

$$\dot{L}_a^{(m)} n^a \overset{(m+1)}{=} -\frac{\kappa^{(m+1)}}{\mathfrak{n}}, \quad (186) \qquad P^{bc}L_{ab}^{(m)} \overset{(m+1)}{=} \frac{\kappa^{(m+1)}}{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)}(\delta_a^c - n^c\ell_a). \quad (187)$$

证明。将 (176) 与 $e_a^\alpha e_b^\beta$ 缩并，并代入 (62)、(74) 和 (75)，再回想 $\mathcal{K}_{ab} = 2\mathrm{Y}_{ab}$，即可得到 (179)。类似地，将 (176) 与 $e_a^\alpha \xi^\beta$ 缩并，并使用 (61)、(74)-(75) 和 $({}^{(1)}\mathcal{K})_a = \frac{1}{2}\mathring{\nabla}_a \ell^{(2)}$ （参见 (52)），即可得到 (180)。为证明 (181)，只需将 (177) 与ξ 缩并两次，并代入 (60) 和 (74)。(182) 和 (183) 分别是将 (179) 和 (180) 与 n缩并得到的关系式。使用 $\gamma_{ab}n^b = \mathrm{U}_{ab}n^b = 0$、$\mathrm{s}_b n^b = 0$ 和$\ell_a n^a = 1$，以及 κ_n、r_a、 $\kappa^{(m)}$ 和 $\mathrm{r}_a^{(m)}$ 的定义后，即可得到这两个关系式。此外，(182) 使用了应用于 $\omega_a = \mathrm{r}_a$ 的恒等式 (28)，而 (183) 则用到了 (24) 和 (11)。最后，(184)-(187) 可直接由前述关系式得到，只需保留 $m+1$ 阶的量。 □

张量 $L_{ab}^{(1)}$ 、 $\dot{L}_a^{(1)}$和 $\ddot{L}^{(1)}$ 需要单独分析。出发点是（174）以及$m = 1$（这是一个精确关系），我们将其与 $e_a^\alpha e_b^\beta$、 $e_a^\alpha \xi^\beta$和 $\xi^\alpha \xi^\beta$进行缩并。考虑到（66）、（67）和（68）（我们不从（ R（73）中替换，因为这将不会用到），并回忆 $g_{\alpha\beta}e_a^\alpha e_b^\beta = \gamma_{ab}$、 $g_{\alpha\beta}e_a^\alpha \xi^\beta = \ell_a$ 和 $g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = \ell^{(2)}$，结果为

$$\begin{aligned}L_{ab}^{(1)} = \frac{1}{\mathfrak{n}-1}\Bigg(&\mathring{R}_{(ab)} - 2\pounds_n \mathrm{Y}_{ab} - (2\kappa_n + \mathrm{tr}_P\,\mathbf{U})\mathrm{Y}_{ab} + \mathring{\nabla}_{(a}\left(\mathrm{s}_{b)} + 2\mathrm{r}_{b)}\right) - 2\mathrm{r}_a\mathrm{r}_b + 4\mathrm{r}_{(a}\mathrm{s}_{b)} - \mathrm{s}_a\mathrm{s}_b\\ &- (\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y})\mathrm{U}_{ab} + 2P^{cd}\mathrm{U}_{d(a}\left(2\mathrm{Y}_{b)c} + \mathrm{F}_{b)c}\right) - \frac{R}{2\mathfrak{n}}\gamma_{ab}\Bigg).\end{aligned} \quad (188)$$

$$\dot{L}_a^{(1)} = \frac{1}{\mathfrak{n}-1}\left(\mathrm{r}_a^{(2)} - P^{bc}A_{bca} - P^{bc}(\mathrm{r}+\mathrm{s})_b(\mathrm{Y}+\mathrm{F})_{ac} + \frac{1}{2}\kappa_n\mathring{\nabla}_a\ell^{(2)} - \frac{1}{2}n(\ell^{(2)})(\mathrm{r}-\mathrm{s})_a - \frac{R}{2\mathfrak{n}}\ell_a\right), \quad (189)$$

$$\ddot{L}^{(1)} = \frac{1}{\mathfrak{n}-1}\left(-P^{ab}\mathrm{Y}_{ab}^{(2)} + P^{ab}P^{cd}(\mathrm{Y}+\mathrm{F})_{ac}(\mathrm{Y}+\mathrm{F})_{bd} + P^{ab}(\mathrm{r}-\mathrm{s})_a\mathring{\nabla}_b\ell^{(2)} - \frac{R}{2\mathfrak{n}}\ell^{(2)}\right). \quad (190)$$

利用这些恒等式，我们现在可以计算 $\mathcal{L}_a^{(m+1)}$和 $\dot{\mathcal{L}}^{(m+1)}$ 直到 $m+1$阶。对 m作 $\mathcal{L}_\alpha$ 的横向导数：$= (\mathfrak{n}-1)L_{\alpha\beta}\nabla^\beta\Omega$，并利用（56），

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha^{(m+1)} &= (\mathfrak{n}-1)\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}L_{\alpha\beta}^{(i+1)}\pounds_\xi^{(m-i)}g^{\beta\mu}\nabla_\mu\Omega\\ &= (\mathfrak{n}-1)\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-i}\binom{m}{i}\binom{m-i}{j}L_{\alpha\beta}^{(i+1)}(\pounds_\xi^{(j)}g^{\beta\mu})\nabla_\mu\pounds_\xi^{(m-i-j)}\Omega,\end{aligned} \quad (191)$$

因此（回想 $L_{\alpha\beta}^{(k)} \overset{[k+2]}{=} 0$，由（178）可知）

$$\mathcal{L}_\alpha^{(m+1)} \overset{[m+1]}{=} (\mathfrak{n}-1)\left(L_{\alpha\beta}^{(m+1)} g^{\beta\mu}\nabla_\mu\Omega + mL_{\alpha\beta}^{(m)}\big(g^{\beta\mu}\nabla_\mu \pounds_\xi\Omega + (\pounds_\xi g^{\beta\mu})\nabla_\mu\Omega\big)\right).$$

现在注意到 $g^{\beta\mu}\nabla_\mu\Omega \overset{\mathscr{I}}{=} \sigma^{(1)}\nu^\beta$ （由（14））以及

$$\begin{aligned} g^{\beta\mu}\nabla_\mu\pounds_\xi\Omega + (\pounds_\xi g^{\beta\mu})\nabla_\mu\Omega &\overset{\mathscr{I}}{=} g^{\beta\mu}\nabla_\mu\pounds_\xi\Omega - \mathcal{K}^{\beta\mu}\nabla_\mu\Omega \\ &\underset{(14)}{\overset{\mathscr{I}}{=}} \big(P^{bc}e_b^\beta e_c^\mu + \xi^\beta\nu^\mu + \xi^\mu\nu^\beta\big)\nabla_\mu\pounds_\xi\Omega - \sigma^{(1)}\nu^\mu\mathcal{K}_\mu{}^\beta \\ &\underset{(55)}{\overset{\mathscr{I}}{=}} \left(P^{bc}\big(\mathring{\nabla}_c\sigma^{(1)} - 2\sigma^{(1)}\mathrm{r}_c\big) + n^b\left(\sigma^{(2)} - \frac{1}{2}\sigma^{(1)}n(\ell^{(2)})\right)\right)e_b^\beta \\ &\quad + \big(\pounds_n\sigma^{(1)} + 2\sigma^{(1)}\kappa_n\big)\xi^\beta. \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha^{(m+1)} \overset{[m+1]}{\underset{\mathscr{I}}{=}} (\mathfrak{n}-1)\Bigg(&\sigma^{(1)}L_{\alpha\beta}^{(m+1)}n^b e_b^\beta + m\big(\pounds_n\sigma^{(1)} + 2\sigma^{(1)}\kappa_n\big)\xi^\beta L_{\alpha\beta}^{(m)} \\ &+ m\left(P^{bc}\big(\mathring{\nabla}_c\sigma^{(1)} - 2\sigma^{(1)}\mathrm{r}_c\big) + n^b\left(\sigma^{(2)} - \frac{1}{2}\sigma^{(1)}n(\ell^{(2)})\right)\right)e_b^\beta L_{\alpha\beta}^{(m)}\Bigg). \end{aligned} \tag{192}$$

命题 C.2. 设 $\mathcal{L}_a^{(m+1)}$和 $\dot{\mathcal{L}}^{(m+1)}$ 按 （82）定义。则，

$$\begin{aligned} \frac{2\mathfrak{n}}{\sigma^{(1)}}\dot{\mathcal{L}}^{(1)} &= -2(\mathfrak{n}-1)\kappa^{(2)} - 2(\mathfrak{n}-2)\pounds_n\big(\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}\big) + 2\big(\operatorname{tr}_P\mathbf{U} - (\mathfrak{n}-2)\kappa_n\big)\operatorname{tr}_P\mathbf{Y} \\ &\quad - 2(\mathfrak{n}-1)P^{ab}P^{cd}\mathrm{U}_{ac}\mathrm{Y}_{bd} + 2(\mathfrak{n}-2)\operatorname{div}\mathbf{r} + (2\mathfrak{n}-3)\operatorname{div}\mathbf{s} \\ &\quad + \big(2(2\mathfrak{n}-3)\kappa_n + (\mathfrak{n}-1)\operatorname{tr}_P\mathbf{U}\big)n(\ell^{(2)}) - 2(2\mathfrak{n}-3)P(\mathbf{r},\mathbf{r}) - (4\mathfrak{n}-5)P(\mathbf{s},\mathbf{s}) \\ &\quad - 4(2\mathfrak{n}-3)P(\mathbf{r},\mathbf{s}) - \operatorname{tr}_P\mathring{R}, \end{aligned} \tag{193}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma^{(1)}}\mathcal{L}_a^{(1)} = \mathcal{R}_{ab}n^b &= -\pounds_n(\mathrm{r}_b - \mathrm{s}_b) - \mathring{\nabla}_b\kappa_n - (\operatorname{tr}_P\mathbf{U})(\mathrm{r}_b - \mathrm{s}_b) - \mathring{\nabla}_b(\operatorname{tr}_P\mathbf{U}) \\ &\quad + P^{cd}\mathring{\nabla}_c\mathrm{U}_{bd} - 2P^{cd}\mathrm{U}_{bd}s_c, \end{aligned} \tag{194}$$

并且对每个 $m \geq 1$,

$$\mathcal{L}_a^{(m+1)} \overset{(m+1)}{=} -\sigma^{(1)}\pounds_n\mathrm{r}_a^{(m+1)} + \Big(m\pounds_n\sigma^{(1)} - \operatorname{tr}_P\mathbf{U}\Big)\mathrm{r}_a^{(m+1)} - \sigma^{(1)}\mathring{\nabla}_a\kappa^{(m+1)} + \frac{m\kappa^{(m+1)}}{\mathfrak{n}}\mathring{\nabla}_a\sigma^{(1)}, \tag{195}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}\dot{\mathcal{L}}^{(m+1)} \overset{(m+1)}{=}& -(\mathfrak{n}-1)\sigma^{(1)}\kappa^{(m+2)} - (\mathfrak{n}-2)\sigma^{(1)}\pounds_n\big(\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(m+1)}\big) - (\mathfrak{n}-1)\sigma^{(1)}P^{ab}P^{cd}\mathrm{U}_{ac}\mathrm{Y}_{bd}^{(m+1)} \\ &+ \Big(\big(2m(1-\mathfrak{n}) + 2 - \mathfrak{n}\big)\sigma^{(1)}\kappa_n - m\mathfrak{n}\pounds_n\sigma^{(1)} + \sigma^{(1)}\operatorname{tr}_P\mathbf{U}\Big)\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(m+1)} + \dot{\mathscr{R}}_{\mathcal{L}}^{(m)}, \end{aligned} \tag{196}$$

其中， $\dot{\mathscr{R}}_{\mathcal{L}}^{(m)}$ 是一个显式张量，它对$\mathbf{r}^{(m+1)}$ 呈线性依赖，也依赖于低阶横向导数。为简洁起见，我们不将其写出（通过在证明中明确写出所有计算即可轻松得出）。

证明。 定义 $\mathcal{L}_\alpha := \big(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2\mathfrak{n}}Rg_{\alpha\beta}\big)\underline{\nabla}^\beta\Omega$ 和 $\nabla_\mu\Omega \overset{\mathscr{I}}{=} \sigma^{(1)}\nu_\mu$给出

$$\mathcal{L}_\alpha^{(1)} = \sigma^{(1)}\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2\mathfrak{n}}Rg_{\alpha\beta}\right)n^b e_b^\beta.$$

与 ξ^α 缩并后，在代入（193）和（69）及（73）后得到（）；与 e_a^α 缩并，并代入（70）后得到（194）。为得到（195），将（192）与 e_a^α 进行缩并，并使用 $L_{ab}^{(m)}n^b\ {}_{(m+1)} = \ 0$（根据（184））,

$$\frac{1}{\mathfrak{n}-1}\mathcal{L}_a^{(m+1)} \overset{(m+1)}{=} \sigma^{(1)}L_{ab}^{(m+1)}n^b + m\big(\pounds_n\sigma^{(1)} + 2\sigma^{(1)}\kappa_n\big)\dot{L}_a^{(m)} + mP^{bc}\big(\mathring{\nabla}_c\sigma^{(1)} - 2\sigma^{(1)}\mathrm{r}_c\big)L_{ab}^{(m)}.$$

将 (195) 代入 (182)、(185) 和 (187) 后即可得到。为证明 (196)，我们将 (192) 与 ξ^α 收缩,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathfrak{n}-1}\dot{\mathcal{L}}^{(m+1)} \overset{(m+1)}{=}\ & \sigma^{(1)}\dot{L}_b^{(m+1)}n^b + m\big(\pounds_n\sigma^{(1)} + 2\sigma^{(1)}\kappa_n\big)\ddot{L}^{(m)} + mP^{bc}\big(\mathring{\nabla}_c\sigma^{(1)} - 2\sigma^{(1)}\mathrm{r}_c\big)\dot{L}_b^{(m)}\\ &+ \left(\sigma^{(2)} - \frac{1}{2}\sigma^{(1)}n(\ell^{(2)})\right)\dot{L}_b^{(m)}n^b.\end{aligned}$$

代入 (183)、(181)、(185) 和 (186)，并利用 $P^{bc}\ell_b = -\ell^{(2)}n^c$，即可证明 (196)。 □

接下来，我们计算张量 $\mathcal{Q}_{ab}^{(m)}$ 、 $\dot{\mathcal{Q}}_a^{(m)}$和 $\ddot{\mathcal{Q}}^{(m)}$ 的首阶项。为此，我们将$\pounds_\xi^{(m)}$ 作用于 (77)，并使用命题4.1,

$$\frac{1}{\mathfrak{n}-1}\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(m+1)} = \nabla_\alpha\nabla_\beta\pounds_\xi^{(m)}\Omega - \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k+1}\nabla_\sigma\big(\pounds_\xi^{(k)}\Omega\big)\Sigma^{(m-k)\sigma}{}_{\beta\alpha} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\big(\pounds_\xi^{(k)}\Omega\big)L_{\alpha\beta}^{(m-k+1)}. \tag{197}$$

为进行计算，引入以下对称张量较为方便（回忆一下， $\Sigma^\sigma{}_{\beta\alpha}$ 在 α、β 中是对称的，因此 $\Sigma^{(k)\sigma}{}_{\beta\alpha}$ 也如此）

$$\mathrm{I}_{\alpha\beta}^{(m+1)} := \nabla_\alpha\nabla_\beta\pounds_\xi^{(m)}\Omega, \qquad \mathrm{II}_{\alpha\beta}^{(m+1)} := -\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k+1}\nabla_\sigma\big(\pounds_\xi^{(k)}\Omega\big)\Sigma^{(m-k)\sigma}{}_{\alpha\beta},$$

$$\mathrm{III}_{\alpha\beta}^{(m+1)} := \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\big(\pounds_\xi^{(k)}\Omega\big)L_{\alpha\beta}^{(m-k+1)}.$$

鉴于 $\Sigma^{(k)}$ 至多包含 g 的 $m+1$ 阶导数，且 $\Omega = 0, \nabla_\mu\Omega \overset{\mathscr{I}}{=} \sigma^{(1)}\nu_\mu$ 在 $\mathscr{I}$ 处，我们可以写成

$$\mathrm{II}_{\alpha\beta}^{(m+1)} \overset{[m]}{=} -\big(\nabla^\sigma\Omega\big)\Sigma_{\sigma\alpha\beta}^{(m)} - m\big(\nabla^\sigma\pounds_\xi\Omega\big)\Sigma_{\sigma\alpha\beta}^{(m-1)} \overset{[m]}{\underset{\mathscr{I}}{=}} -\sigma^{(1)}\nu^\sigma\Sigma_{\sigma\alpha\beta}^{(m)} - m\big(\nabla^\sigma\pounds_\xi\Omega\big)\Sigma_{\sigma\alpha\beta}^{(m-1)}, \tag{198}$$

$$\mathrm{II}_{\alpha\beta}^{(m+1)} \overset{[m+1]}{\underset{\mathscr{I}}{=}} -\sigma^{(1)}\nu^\sigma\Sigma_{\sigma\alpha\beta}^{(m)}. \tag{199}$$

类似地， $L^{(m)}$ 至多包含 g 的 $m+1$ 阶导数，因此

$$\mathrm{III}_{\alpha\beta}^{(m+1)} \overset{[m]}{=} \Omega L_{\alpha\beta}^{(m+1)} + m(\pounds_\xi\Omega)L_{\alpha\beta}^{(m)} + \frac{m(m-1)\pounds_\xi^{(2)}\Omega}{2}L_{\alpha\beta}^{(m-1)}, \tag{200}$$

$$\mathrm{III}_{\alpha\beta}^{(m+1)} \overset{[m+1]}{=} \Omega L_{\alpha\beta}^{(m+1)} + m(\pounds_\xi\Omega)L_{\alpha\beta}^{(m)}. \tag{201}$$

利用这一点以及命题 A.4、B.1 和 C.1中的公式，计算 $\mathcal{Q}_{ab}^{(m)}$ 、 $\dot{\mathcal{Q}}_a^{(m)}$和 $\ddot{\mathcal{Q}}^{(m)}$ 将十分直接。再次注意， $\ddot{\mathcal{Q}}^{(m)}$ 只计算到低一阶，因为所需仅此而已。

命题 C.3。设 $\mathcal{Q}_{ab}^{(m)}$、$\dot{\mathcal{Q}}_{a}^{(m)}$和 $\ddot{\mathcal{Q}}^{(m)}$ 如 (81) 及 $m \geq 2$中所述。则，

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{ab}^{(m+1)} &\overset{(m)}{=} (\mathfrak{n}-1)\sigma^{(m+1)}\mathrm{U}_{ab} + (\mathfrak{n}-1-2m)\sigma^{(1)}\pounds_n \mathrm{Y}_{ab}^{(m)} + 4m\sigma^{(1)}P^{cd}\mathrm{U}_{c(a}\mathrm{Y}_{b)d}^{(m)} \\ &\quad + m\Big((\mathfrak{n}-1)\big(\pounds_n\sigma^{(1)} + \sigma^{(1)}\kappa_n\big) + (\mathfrak{n}-1-2m)\sigma^{(1)}\kappa_n - \sigma^{(1)}\operatorname{tr}_P \mathbf{U}\Big)\mathrm{Y}_{ab}^{(m)} \\ &\quad + \frac{m}{\mathfrak{n}}\Big(\sigma^{(1)}\Big(\kappa^{(m+1)} + 2\pounds_n\big(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m)}\big) + \big(2m\kappa_n + \operatorname{tr}_P \mathbf{U}\big)\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m)} + P^{ab}P^{cd}\mathrm{U}_{ac}\mathrm{Y}_{bd}^{(m)}\Big)\gamma_{ab} \\ &\quad - m\sigma^{(1)}\big(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m)}\big)\mathrm{U}_{ab} + \widetilde{\mathscr{R}}_{ab}^{(m)}, \end{aligned} \tag{202}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{Q}}_{a}^{(m+1)} &\overset{(m)}{=} (\mathfrak{n}-1)\big(\mathring{\nabla}_a\sigma^{(m+1)} - \sigma^{(m+1)}(\mathrm{r}-\mathrm{s})_a - mP^{bc}\mathrm{Y}_{ab}^{(m)}\mathring{\nabla}_c\sigma^{(1)}\big) - (\mathfrak{n}-1-m)\sigma^{(1)}\mathrm{r}_a^{(m+1)} \\ &\quad + m\sigma^{(1)}\Big(P^{bc}\mathring{\nabla}_b\mathrm{Y}_{ac}^{(m)} - \mathring{\nabla}_a\big(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m)}\big) + 2P^{bc}\mathrm{r}_b\mathrm{Y}_{ac}^{(m)} + \big(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m)}\big)(\mathrm{r}-\mathrm{s})_a\Big) \\ &\quad + \frac{m\sigma^{(1)}}{\mathfrak{n}}\Big(\kappa^{(m+1)} + 2\pounds_n\big(\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m)}\big) + \big(2m\kappa_n + \operatorname{tr}_P \mathbf{U}\big)\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m)} + P^{bc}P^{df}\mathrm{U}_{bd}\mathrm{Y}_{cf}^{(m)}\Big)\ell_a \\ &\quad + \widetilde{\mathscr{R}}_{a}^{(m)}, \end{aligned} \tag{203}$$

$$\ddot{\mathcal{Q}}^{(m+1)} \overset{(m+1)}{=} (\mathfrak{n}-1)\sigma^{(m+2)} - m\sigma^{(1)}\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m+1)} + \frac{m\sigma^{(1)}\ell^{(2)}}{\mathfrak{n}}\kappa^{(m+1)}, \tag{204}$$

其中，$\widetilde{\mathcal{O}}_{ab}^{(m)}$ 和 $\widetilde{\mathcal{O}}_{a}^{(m)}$是依赖于$\mathbf{r}^{(m)}$、$\sigma^{(m)}$ 及低阶项的张量。为简洁起见，我们不将其写出（只需在证明中明确进行所有计算即可轻松得出）。

证明。为证明（202）—（204）中的每个恒等式，我们将三部分 $\mathrm{I}_{\alpha\beta}^{(m+1)}$、$\mathrm{II}_{\alpha\beta}^{(m+1)}$ 和 $\mathrm{III}_{\alpha\beta}^{(m+1)}$ 分别与 $e_a^\alpha e_b^\beta$、$e_a^\alpha \xi^\beta$和 $\xi^\alpha\xi^\beta$进行缩并。将 $\mathrm{I}_{\alpha\beta}^{(m+1)}$与 $e_a^\alpha e_b^\beta$缩并，并利用恒等式（135），得到:

$$\mathrm{I}_{ab}^{(m+1)} = \mathring{\nabla}_a\mathring{\nabla}_b\sigma^{(m)} + \pounds_n(\sigma^{(m)})\mathrm{Y}_{ab} + \sigma^{(m+1)}\mathrm{U}_{ab}.$$

将（198）与 $e_a^\alpha e_b^\beta$缩并，代入（14），并回想 $\Sigma_{cab}^{(m-1)}{}_{(m)}= 0$（由（139）可得），得到

$$e_a^\alpha e_b^\beta \mathrm{II}_{\alpha\beta}^{(m+1)} \overset{(m)}{=} -\sigma^{(1)}\Sigma_{cab}^{(m)}n^c - m\big(\pounds_n\sigma^{(1)}\big)\big({}^{(1)}\Sigma^{(m-1)}\big)_{ab}.$$

代入（155）、（140），并考虑到（143），

$$\mathrm{II}_{ab}^{(m+1)} \overset{(m)}{=} \sigma^{(1)}\pounds_n\mathrm{Y}_{ab}^{(m)} + \big(2m\sigma^{(1)}\kappa_n + m\pounds_n\sigma^{(1)}\big)\mathrm{Y}_{ab}^{(m)} - 2\sigma^{(1)}\mathring{\nabla}_{(a}\mathrm{r}_{b)}^{(m)} + 2\sigma^{(1)}\kappa^{(m)}\mathrm{Y}_{ab}.$$

最后，将（200）与 $e_a^\alpha e_b^\beta$ 进行缩并，得到（回想 $\Omega \overset{\mathscr{I}}{=} 0$）

$$\mathrm{III}_{ab}^{(m+1)} \overset{(m)}{=} m\sigma^{(1)}L_{ab}^{(m)} + \frac{m(m-1)\sigma^{(2)}}{2}L_{ab}^{(m-1)},$$

其中第一项由（179）给出，第二项由（184）给出。由于 $\mathcal{Q}_{ab}^{(m)} = (\mathfrak{n}-1)\big(\mathrm{I}_{ab}^{(m)} + \mathrm{II}_{ab}^{(m)} + \mathrm{III}_{ab}^{(m)}\big)$ 我们只需将这三项相加并化简，即可得到（202）。

为证明（203），我们重复相同的步骤。首先，将 $\mathrm{I}_{\alpha\beta}^{(m+1)}$ 与 $e_a^\alpha\xi^\beta$ 缩并，并利用 得到 (136)

$$e_a^\alpha\xi^\beta\mathrm{I}_{\alpha\beta}^{(m+1)} = \mathring{\nabla}_a\sigma^{(m+1)} - \sigma^{(m+1)}(\mathrm{r}-\mathrm{s})_a - V^b{}_a\mathring{\nabla}_b\sigma^{(m)}. \tag{205}$$

其次，将（198）与 $e_a^\alpha\xi^\beta$ 缩并，代入（14）并回想$\big({}^{(1,3)}\Sigma^{(m-1)}\big)_{a\ (m)} = 0$（根据（152）和（143）），得到:

$$\begin{aligned} e_a^\alpha\xi^\beta\mathrm{II}_{\alpha\beta}^{(m+1)} &\overset{(m)}{=} -\sigma^{(1)}\big({}^{(3)}\Sigma^{(m)}\big)_{ca}n^c - mP^{cd}\big({}^{(3)}\Sigma^{(m-1)}\big)_{ca}\mathring{\nabla}_d\sigma^{(1)} - m\sigma^{(2)}\big({}^{(3)}\Sigma^{(m-1)}\big)_{ca}n^c \\ &\overset{(m)}{=} -\sigma^{(1)}\mathrm{r}_a^{(m+1)} + 2m\sigma^{(1)}P^{bc}\mathrm{r}_b\mathrm{Y}_{ac}^{(m)} - mP^{cd}\mathrm{Y}_{ca}^{(m)}\mathring{\nabla}_d\sigma^{(1)} \\ &\quad + \text{terms depending on } \mathbf{r}^{(m)} \text{ and hypersurface data,} \end{aligned}$$

其中，在第二行我们使用了（154）和（157）。为计算 $e^\alpha_a\xi^\beta \mathrm{III}^{(m+1)}_{\alpha\beta}$，我们将（200）与 $e^\alpha_a\xi^\beta$ 缩并。

$$e^\alpha_a\xi^\beta \mathrm{III}^{(m+1)}_{\alpha\beta} \overset{(m)}{=} m\sigma^{(1)}\dot{L}^{(m)}_a + \frac{m(m-1)\sigma^{(2)}}{2}\dot{L}^{(m-1)}_a.$$

.....的显式形式 $\dot{L}^{(m)}_a$和 $\dot{L}^{(m-1)}_a$分别见式（180）和（185）。如前所述，利用 $\dot{\mathcal{Q}}^{(m)}_a = (\mathfrak{n}-1)e^\alpha_a\xi^\beta\big(\mathrm{I}^{(m)}_{\alpha\beta}+\mathrm{II}^{(m)}_{\alpha\beta}+\mathrm{III}^{(m)}_{\alpha\beta}\big)$ 将这三项相加并化简后，得到式（203）。

T式（204）的证明类似。将 $\mathrm{I}^{(m+1)}_{\alpha\beta}$ 与 $\xi^\alpha\xi^\beta$ 缩并，并利用式（137），可得

$$\xi^\alpha\xi^\beta \mathrm{I}^{(m+1)}_{\alpha\beta} = \sigma^{(m+2)}.$$

相应项与 $\mathrm{II}^{(m+1)}_{\alpha\beta}$ 对应的项为零，因为将式（199）与 $\xi^\alpha\xi^\beta$ is

$$\xi^\alpha\xi^\beta \mathrm{II}^{(m+1)}_{\alpha\beta} \overset{(m+1)}{=} -\sigma^{(1)}\big({}^{(2,3)}\Sigma^{(m)}\big)_c n^c \overset{(m+1)}{=} 0,$$

在最后一个等式中，我们使用了式（143）和式（152）。最后，与 $\mathrm{III}^{(m+1)}_{\alpha\beta}$ 对应的项可通过将式（201）与 $\xi^\alpha\xi^\beta$ 缩并，并代入式（181）得到

$$\xi^\alpha\xi^\beta \mathrm{III}^{(m+1)}_{\alpha\beta} \overset{(m+1)}{=} m\sigma^{(1)}\ddot{L}^{(m)} \overset{(m+1)}{=} \frac{m\sigma^{(1)}}{\mathfrak{n}-1}\left(-\operatorname{tr}_P \mathbf{Y}^{(m+1)} + \frac{\kappa^{(m+1)}}{\mathfrak{n}}\ell^{(2)}\right).$$

表达式 $\ddot{\mathcal{Q}}^{(m)} = (\mathfrak{n}-1)\xi^\alpha\xi^\beta\big(\mathrm{I}^{(m)}_{\alpha\beta}+\mathrm{II}^{(m)}_{\alpha\beta}+\mathrm{III}^{(m)}_{\alpha\beta}\big)$ 立即给出式（204）。 □

与其他情形一样，最低阶 $\mathcal{Q}^{(1)}$ 和 $\mathcal{Q}^{(2)}$ 需要进行特殊处理（注意，根据条件 $m \geq 2$，它们不在命题 C.3 的适用范围内 $m \geq 2$）。为求得前者，我们只需将 $\mathcal{Q}_{\alpha\beta} \overset{\mathscr{I}}{=} (\mathfrak{n}-1)\nabla_\alpha\nabla_\beta\Omega$ 与 $e^\alpha_a e^\beta_b$ 收缩，$e^\alpha_a\xi^\beta$ 并 $\xi^\alpha\xi^\beta$，再使用（135）-（137）。

$$\mathcal{Q}^{(1)}_{ab} = \sigma^{(1)}\mathrm{U}_{ab}, \qquad \dot{\mathcal{Q}}^{(1)}_a = \mathring{\nabla}_a\sigma^{(1)} - \sigma^{(1)}(\mathrm{r}-\mathrm{s})_a, \qquad \ddot{\mathcal{Q}}^{(1)} = \sigma^{(2)}. \tag{206}$$

为计算后者，我们用 $m=1$ 代入精确表达式（197），并使用 $\nabla_\sigma\Omega \overset{\mathscr{I}}{=} \sigma^{(1)}\nu_\sigma$，得到

$$\frac{1}{\mathfrak{n}-1}\mathcal{Q}^{(2)}_{\alpha\beta} \overset{\mathscr{I}}{=} \nabla_\alpha\nabla_\beta\pounds_\xi\Omega - \sigma^{(1)}\Sigma_{\sigma\alpha\beta}\nu^\sigma + \sigma^{(1)}L_{\alpha\beta}.$$

该表达式与 $e^\alpha_a e^\beta_b$、 $e^\alpha_a\xi^\beta$和 $\xi^\alpha\xi^\beta$的缩并可由 (135)-(137)、(171)-(173以及 (188)-(190) 得出。结果为

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^{(2)}_{ab} &= (\mathfrak{n}-3)\sigma^{(1)}\pounds_n\mathrm{Y}_{ab} + \big((\mathfrak{n}-1)\big(\pounds_n\sigma^{(1)} + \sigma^{(1)}\kappa_n\big) + \sigma^{(1)}\big((\mathfrak{n}-3)\kappa_n - \operatorname{tr}_P\mathbf{U}\big)\big)\mathrm{Y}_{ab} - (\operatorname{tr}_P\mathbf{Y})\mathrm{U}_{ab} \\
&\quad + 2\sigma^{(1)}P^{cd}\mathrm{U}_{d(a}\big(2\mathrm{Y}_{b)c} + \mathrm{F}_{b)c}\big) - 2\sigma^{(1)}(\mathfrak{n}-2)\mathring{\nabla}_{(a}\mathrm{r}_{b)} + 2\sigma^{(1)}\big(2\mathrm{r}_{(a}\mathrm{s}_{b)} - \mathrm{r}_a\mathrm{r}_b\big) - \frac{\sigma^{(1)}R}{2\mathfrak{n}}\gamma_{ab} \\
&\quad + \sigma^{(1)}\big(\mathring{\nabla}_{(a}\mathrm{s}_{b)} - \mathrm{s}_a\mathrm{s}_b + \mathring{R}_{(ab)}\big) + (\mathfrak{n}-1)\left(\mathring{\nabla}_a\mathring{\nabla}_b\sigma^{(1)} + \left(\sigma^{(2)} - \frac{1}{2}\sigma^{(1)}n(\ell^{(2)})\right)\mathrm{U}_{ab}\right),
\end{aligned} \tag{207}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{Q}}^{(2)}_a &= -(\mathfrak{n}-2)\sigma^{(1)}\mathrm{r}^{(2)}_a + (\mathfrak{n}-1)V^c{}_a\big(2\sigma^{(1)}\mathrm{r}_c - \mathring{\nabla}_c\sigma^{(1)}\big) + \left(\frac{\mathfrak{n}-2}{2}\sigma^{(1)}n(\ell^{(2)}) - (\mathfrak{n}-1)\sigma^{(2)}\right)(\mathrm{r}-\mathrm{s})_a \\
&\quad + (\mathfrak{n}-1)\mathring{\nabla}_a\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}\left(P^{bc}\big(A_{bca} + (\mathrm{r}+\mathrm{s})_b(\mathrm{Y}+\mathrm{F})_{ac}\big) + \frac{R}{2\mathfrak{n}}\ell_a - \frac{1}{2}\kappa_n\mathring{\nabla}_a\ell^{(2)}\right),
\end{aligned} \tag{208}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathcal{Q}}^{(2)} &= (\mathfrak{n}-1)\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(2)} + \sigma^{(1)}P^{ab}P^{cd}(\mathrm{Y}+\mathrm{F})_{ac}(\mathrm{Y}+\mathrm{F})_{bd} + \sigma^{(1)}P(\mathbf{r}-\mathbf{s}, d\ell^{(2)}) \\
&\quad - \frac{R}{2\mathfrak{n}}\sigma^{(1)}\ell^{(2)},
\end{aligned} \tag{209}$$

其中 R 由 (73) 给出，无需明确写出。

我们通过计算这些标量来结束本附录 $f^{(m+1)}$，它们是在将 $\pounds_\xi^{(m)}$ 作用于$f = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\Omega\nabla_\beta\Omega$ 并使用（56）后得到的。

$$\pounds_\xi^{(m)} f = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (\pounds_\xi^{(k)} g^{\alpha\beta}) \sum_{j=0}^{m-k} \binom{m-k}{j} \nabla_\alpha(\pounds_\xi^{(j)}\Omega)\nabla_\beta(\pounds_\xi^{(m-k-j)}\Omega). \tag{210}$$

同样，最低阶 $f_{(1)}$、 $f_{(2)}$和 $f_{(3)}$需要单独处理。显然， $f^{(1)} = 0$因为 $\mathscr{I}$为零。为计算 $f^{(2)}$，我们将（210）特化为 $m = 1$，从而得到

$$\pounds_\xi f = (\pounds_\xi g^{\alpha\beta})\nabla_\alpha\Omega\nabla_\beta\Omega + 2\nabla^\alpha\Omega\nabla_\alpha\pounds_\xi\Omega.$$

第一项为（$\pounds_\xi g^{\alpha\beta}$）$\nabla_\alpha\Omega\nabla_\beta\Omega = 2$（$\sigma^{(1)}$）$^2\kappa_n$（根据（214）和 $\Omega \overset{\mathscr{I}}{=} 0$），第二项为$2\sigma^{(1)}\pounds_n\sigma^{(1)}$，因为 $\nabla^\alpha\Omega \overset{\mathscr{I}}{=} \sigma^{(1)}\nu^\alpha$。因此，

$$f^{(2)} = 2\sigma^{(1)}\big(\sigma^{(1)}\kappa_n + \pounds_n\sigma^{(1)}\big). \tag{211}$$

现在我们计算 $f^{(3)}$。（210）针对 $m = 2$ 的展开形式为

$$f^{(3)} = 2\nabla^\alpha\Omega\nabla_\alpha(\pounds_\xi^{(2)}\Omega)+2g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha(\pounds_\xi\Omega)\nabla_\beta(\pounds_\xi\Omega)+4(\pounds_\xi g^{\alpha\beta})\nabla_\alpha(\pounds_\xi\Omega)\nabla_\beta\Omega+(\pounds_\xi^{(2)}g^{\alpha\beta})\nabla_\alpha\Omega\nabla_\beta\Omega.$$

现在，利用 $\nabla^\alpha\Omega \overset{\mathscr{I}}{=} \sigma^{(1)}\nu^\alpha$，结合（214）以及

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha(\pounds_\xi\Omega)\nabla_\beta(\pounds_\xi\Omega) &\overset{\mathscr{I}}{\underset{(14)}{=}} P^{ab}\mathring{\nabla}_a\sigma^{(1)}\mathring{\nabla}_b\sigma^{(1)} + 2\sigma^{(2)}\pounds_n\sigma^{(1)}, \\ (\pounds_\xi^{(2)}g^{\alpha\beta})\nabla_\alpha\Omega\nabla_\beta\Omega &\overset{\mathscr{I}}{=} (\sigma^{(1)})^2\nu^\alpha\nu^\beta\big(2g^{\mu\nu}\mathcal{K}_{\alpha\mu}\mathcal{K}_{\beta\nu} - \mathcal{K}^{(2)}_{\alpha\beta}\big) \\ &\overset{\mathscr{I}}{\underset{(14),(55)}{=}} (\sigma^{(1)})^2\big(8P(\mathbf{r},\mathbf{r}) - 4\kappa_n n(\ell^{(2)}) + 2\kappa^{(2)}\big), \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} f^{(3)} = {} & 2\sigma^{(1)}\big(\sigma^{(1)}\kappa^{(2)} + \pounds_n\sigma^{(2)}\big) + 2\big(2\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}n(\ell^{(2)})\big)\big(\pounds_n\sigma^{(1)} + 2\sigma^{(1)}\kappa_n\big) \\ & + 8\sigma^{(1)}P\big(\mathbf{r}, \sigma^{(1)}\mathbf{r} - d\sigma^{(1)}\big) + 2P^{ab}\mathring{\nabla}_a\sigma^{(1)}\mathring{\nabla}_b\sigma^{(1)}. \end{aligned} \tag{212}$$

现在我们在以下命题中处理其余情形。

命题 C.4. 令 $f := g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\Omega\nabla_\beta\Omega$。那么，对于任意 $m \geq 2$,

$$f^{(m+1)} \overset{(m)}{=} 2\sigma^{(1)}\big(\pounds_n\sigma^{(m)} + \sigma^{(1)}\kappa^{(m)}\big) + 2m\big(\pounds_n\sigma^{(1)} + 2\sigma^{(1)}\kappa_n\big)\sigma^{(m)}. \tag{213}$$

证明。 情形 $m = 2$ 对应于 (212)，忽略一阶和零阶项后得到 (213)。对于 $m \geq 3$, (210) 中唯一可能依赖于 $\mathbf{Y}^{(m)}$ 或 $\sigma^{(m)}$ 的项是 $k = 0$（以及 $j = 0$、1、$m-1$、m）、 $k = 1$（以及 $j = 0$、$m-1$）和 $k = m$, 即

$$\begin{aligned} f^{(m+1)} \overset{[m]}{=} {} & \nabla^\beta\Omega\nabla_\beta\big(\pounds_\xi^{(m)}\Omega\big) + 2mg^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\big(\pounds_\xi\Omega\big)\nabla_\beta\big(\pounds_\xi^{(m-1)}\Omega\big) + 2m\big(\pounds_\xi g^{\alpha\beta}\big)\nabla_\alpha\big(\pounds_\xi^{(m-1)}\Omega\big)\nabla_\beta\Omega \\ & + \big(\pounds_\xi^{(m)}g^{\alpha\beta}\big)\nabla_\alpha\Omega\nabla_\beta\Omega, \end{aligned}$$

这里我们利用了 $m \geq 3$ 这一事实，因为我们已经使用了带有 $k = 0$ 、$j = 0$、**1**、$m-1$、 m的项彼此各不相同。当 $m = 2$时，我们会重复计数（但事实证明

额外的因子会进行补偿，因此（213）对于 $m=2$）同样成立。现在，在第一项中使用 $\nabla^\beta\Omega \overset{\mathscr{I}}{=} \sigma^{(1)}\nu^\beta$，在第二项中使用 $\nabla^\alpha\big(\pounds_\xi^{(m-1)}\,\Omega\big) \overset{(m)}{=} \sigma^{(m)}\nu^\alpha$，而在第三项和第四项中

$$(\pounds_\xi g^{\alpha\beta})\nabla_\beta\Omega \overset{\mathscr{I}}{=} -\sigma^{(1)}\mathcal{K}^\alpha{}_\beta\nu^\beta \overset{(55)}{=} -\sigma^{(1)}\left(2P^{cd}\mathrm{r}_c+\frac{1}{2}n(\ell^{(2)})n^d\right)e_d^\alpha+2\sigma^{(1)}\kappa_n\xi^\alpha, \tag{214}$$

$$\big(\pounds_\xi^{(m)}g^{\alpha\beta}\big)\nabla_\alpha\Omega\nabla_\beta\Omega \overset{\mathscr{I}}{=} (\sigma^{(1)})^2\big(\pounds_\xi^{(m)}g^{\alpha\beta}\big)\nu_\alpha\nu_\beta \overset{(m)}{=} -(\sigma^{(1)})^2\mathcal{K}^{(m)}_{ab}n^an^b=2(\sigma^{(1)})^2\kappa^{(m)}.$$

将四项相加后得到

$$f^{(m+1)} \overset{(m)}{=} 2\sigma^{(1)}\pounds_n\sigma^{(m)}+2m(\pounds_n\sigma^{(1)})\sigma^{(m)}+4m\sigma^{(1)}\kappa_n\sigma^{(m)}+2(\sigma^{(1)})^2\kappa^{(m)},$$

即对于 213)，有 $m\geq 3$。 □

D 高阶 Raychaudhuri 方程

在本附录中，我们将缩并 $\mathcal{L}_a^{(m+1)}n^a$ 计算到低一阶，即计算至 m 阶。此项计算要求将 $\mathcal{R}_{ab}^{(m+1)}n^an^b$ 计算至 m 阶；采用超曲面数据的一般形式体系进行计算，结果相当繁琐。为使计算篇幅保持合理，我们决定采用特定规范进行计算，并假设该超曲面是全测地的，且存在由截面构成的叶状结构。此处给出的结果足以满足本文的需要。

命题 D.1. 设 $\mathcal{H}$ 是嵌入于 $(\mathcal{M},g)$ 中的一个零超曲面，并假设存在一个由截面构成的叶状结构 $\{\mathcal{S}_u\}_{u\in\mathbb{R}}$，其定义在 $\mathcal{H}$ 上。设 ξ 为满足以下条件的（唯一确定的）支架场：*(i)* $g(\xi,\xi)\overset{\mathcal{H}}{=}0$，且 *(ii)* $\Phi^\star\boldsymbol{\xi}=du$。此外，假设 $\pounds_n\boldsymbol{\gamma}=0$。那么，

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{ab}^{(m+1)}n^an^b \overset{(m)}{=}\ & 2m\kappa_n\kappa^{(m+1)}-\pounds_n^{(2)}\big(\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(m)}\big)+\kappa_n\pounds_n\big(\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(m)}\big)\\ &+\big(2\kappa_n^2-\pounds_n\kappa_n\big)m\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(m)}+\mathcal{O}_{\mathcal{R}},\end{aligned} \tag{215}$$

其中 $\mathcal{O}_{\mathcal{R}}$ 是一个依赖于$\mathbf{r}^{(m)}$ 和低阶项的标量。

证明。 我们构造高斯零坐标 [49] $\{t,u,x^A\}$，从 $\mathcal{H}=\{t=0\}$ 出发，在其中度量取如下形式

$$g=2dtdu+\phi du^2+2\beta_Adx^Adu+\mu_{AB}dx^Adx^B,$$

其中，ϕ、$\boldsymbol{\beta}$ 和 μ 分别是函数、一形式和二阶协变对称张量，并满足 $\phi(t=0)=0$、$\boldsymbol{\beta}(t=0)=0$ 以及 $\mu_{AB}(t=0)=\gamma_{AB}$。在这些坐标下，支架场为$\xi=\partial_t$，且 $\nu=\partial_u$。用点号表示在 $t=0$ 处关于 t 的导数，可以很容易验证，在 $t=0$处，$\kappa_n=-\frac{1}{2}\dot{\phi}$，$\mathrm{r}_A=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\beta}}$且$\mathrm{Y}_{AB}=\frac{1}{2}\dot{\mu}_{AB}$。若以 $\dot{f}^{(m)}$表示在 $t=0$处的第 m阶 t导数，也很容易验证 $\kappa^{(m)}=-\frac{1}{2}\dot{\phi}^{(m)}$，$\mathbf{r}_A^{(m)}=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\beta}}^{(m)}$且$\mathrm{Y}_{AB}^{(m)}=\frac{1}{2}\dot{\mu}_{AB}^{(m)}$。我们还注意到 $P^{ab}=\mu^{AB}\delta_A^a\delta_B^b$且 $n^a=\delta_u^a$。在这些坐标下，里奇张量的(u,u)分量为 [49]

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{uu}=&\frac{1}{2}\Big(\phi\dot{\phi}+\beta^A\big(D_A\phi-2\beta'_A-\dot{\phi}\beta_A\big)\Big)^{\cdot}+\frac{1}{4}\Big(\phi'+\phi\dot{\phi}+\beta^A\big(D_A\phi-2\beta'_A-\dot{\phi}\beta_A\big)\Big)\mu^{AB}\dot{\mu}_{AB}\\ &+\frac{1}{2}D^A\Big(2\beta'_A-D_A\phi+\dot{\phi}\beta_A\Big)-\frac{1}{4}\dot{\phi}\mu^{AB}\mu'_{AB}-\frac{1}{2}\mu^{AB}\mu''_{AB}+\frac{1}{4}\mu^{AC}\mu^{BD}\mu'_{AB}\mu'_{CD}\\ &-\frac{1}{2}\big(\dot{\phi}-\beta^A\dot{\beta}_A\big)^2-\mu^{AC}\mu^{BD}D_{[B}\beta_{A]}D_{[C}\beta_{D]}\\ &-\frac{1}{2}\dot{\beta}^C\big(2D_C\phi+\phi\dot{\beta}_C-\beta^A\big(4D_{[C}\beta_{A]}+\beta_A\dot{\beta}_C\big)-2\beta'_C\big),\end{aligned}$$

其中，撇号表示关于 u 的导数， D 是余维二曲面 $u = const.$、 $t = const.$上诱导度量的列维-奇维塔联络。显然，该联络依赖于 u 和 t （为简化记号，我们不显式标出这种依赖）。不过请注意，在 $t = 0$处，该联络与 u 无关，因为 γ_{AB} 不依赖于 u （这是由于$\pounds_n\gamma = 0$）。因此，当一个表达式在 $t = 0$ 处取值时（例如，等号上方带有(m)的所有表达式）， D 表示与度量 γ_{AB} 对应的协变导数。接下来的策略是沿 t取 m 阶导数，并只保留依赖于 $\dot\phi^{(m+1)}$、$\dot{\boldsymbol\beta}^{(m+1)}$、 $\dot\mu^{(m+1)}$ 和 $\dot\mu^{(m)}$的项。这需要利用与公式（57）类似的公式，将 ∂_t 与 D 交换，

$$[\partial_t^{(m)}, D_A]T^{B_1\cdots B_q}{}_{C_1\cdots C_p} = \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k+1}\left(\sum_{j=1}^{q}\big(\dot T^{(m-k-1)}\big)^{B_1\cdots B_{j-1}DB_{j+1}\cdots B_q}{}_{C_1\cdots C_p}\Xi^{(k+1)B_j}{}_{DA} - \sum_{i=1}^{p}\big(\dot T^{(m-k-1)}\big)^{B_1\cdots B_q}{}_{C_1\cdots C_{i-1}DC_{i+1}\cdots C_p}\Xi^{(k+1)D}{}_{C_iA}\right),$$

其中 $\Xi^A{}_{BC} = D_{(B}\dot\mu_{C)}{}^A - \frac{1}{2}D^A\dot\mu_{BC}$。那么，$\Xi^{(k)A}{}_{BC}$将取决于 $\dot\mu^{(j)}$，其中 $j = 1, \ldots\ldots, k$。因此，对于任何满足 $T|_{t=0} = 0$ 的张量场 T，前述恒等式意味着

$$\partial_t^{(m)}D_AT^{B_1\cdots B_q}{}_{C_1\cdots C_p} \overset{(m)}{=} D_A\big(\dot T^{(m)}\big)^{B_1\cdots B_q}{}_{C_1\cdots C_p}.$$

尤其是， $D_A\phi$、 β_A、 β'_A、 μ'_{AB} 和 μ''_{AB} 都属于这种情形。利用这一规则以及 $\mu'_{AB}(t=0) = \beta_A(t=0) = \phi(t=0) = 0$， $\mathcal{R}_{uu}$ 在 $t = 0$ 处的第 m 阶 t 导数为

$$\mathcal{R}_{uu}^{(m+1)} = \dot{\mathcal{R}}_{uu}^{(m)} \overset{(m)}{=} \frac{1}{2}m\dot\phi\dot\phi^{(m+1)} + \frac{1}{4}m\big(\dot\phi' + \dot\phi^2\big)\mu^{AB}\dot\mu_{AB}^{(m)} - \frac{1}{4}\dot\phi\mu^{AB}\dot\mu_{AB}^{(m)\prime} - \frac{1}{2}\mu^{AB}\dot\mu_{AB}^{(m)\prime\prime} + \text{terms depending on } \dot{\boldsymbol\beta}^{(m)} \text{ and } \dot\phi^{(m)},$$

替换 215 后即为 ($\dot\phi = -2\kappa_n$， $\dot\phi^{(m+1)} = -2\kappa^{(m+1)}$， $\dot\mu_{AB}^{(m)} = 2\mathrm{Y}_{AB}^{(m)}$ ，并考虑到 $\gamma'_{AB} = 0$。

□

现在，我们利用前面的命题，在关于 $\mathscr{I}$ 和支架场的相同假设下，计算 $\mathcal{L}_a^{(m+1)}n^a$ 至 m 阶。

命题 D.2. 假设 $\mathscr{I}$ 具有由截面 $\{\mathcal{S}_u\}_{u\in\mathbb{R}}$ 构成的叶状结构，并令 ξ 为满足 $g(\xi,\xi) \overset{\mathscr{I}}{=} 0$ 和 $\Phi^\star\boldsymbol\xi = du$ 的支架场。此外，假设 $\pounds_n\boldsymbol\gamma = 0$。那么，

$$\mathcal{L}_a^{(m+1)}n^a \overset{(m)}{=} H_1\kappa^{(m+1)} - \sigma^{(1)}\pounds_n^{(2)}\big(\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(m)}\big) + H_2\pounds_n\big(\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(m)}\big) + H_3\operatorname{tr}_P\mathbf{Y}^{(m)} + \mathcal{O}_{\mathcal{L}}, \quad (216)$$

其中， $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$ 是一个标量，依赖于$\mathbf{r}^{(m)}$ 及低阶项，其显式形式与本文无关；并且

$$H_1 := -\frac{m(\mathfrak{n}-1)\pounds_n\sigma^{(1)}}{\mathfrak{n}}, \qquad H_2 := -(2m-1)\sigma^{(1)}\kappa_n - m(\mathfrak{n}-2)\pounds_n\sigma^{(1)},$$
$$H_3 := \frac{(2m-\mathfrak{n})m}{\mathfrak{n}}\pounds_n\sigma^{(1)} - m\sigma^{(1)}\pounds_n\kappa_n.$$

证明。 我们先计算 $\mathcal{L}_\alpha^{(m+1)}$至 $[m]$阶。从（191）和命题 C.1可知，唯一可能依赖于 $\mathbf{Y}^{(m)}$ 的项是 $i = m$、 $i = m-1$ $(j = 0,\ 1)$ 和 $i = m-2$ $(j = 0,\ 1,\ 2)$，即

$$\mathcal{L}_\alpha^{(m+1)} \overset{[m]}{=} (\mathfrak{n}-1)\left(L_{\alpha\beta}^{(m+1)}\nabla^\beta\Omega + mL_{\alpha\beta}^{(m)}\left(g^{\beta\mu}\nabla_\mu\pounds_\xi\Omega + (\pounds_\xi g^{\beta\mu})\nabla_\mu\Omega\right) + \frac{m(m-1)}{2}L_{\alpha\beta}^{(m-1)}\big(g^{\beta\mu}\nabla_\mu\pounds_\xi^{(2)}\Omega + 2(\pounds_\xi g^{\beta\mu})\nabla_\mu\pounds_\xi\Omega + (\pounds_\xi^{(2)}g^{\beta\mu})\nabla_\mu\Omega\big)\right)$$

与 ν^α 缩并，在 $\mathscr{I}$ 处求值，并照常使用 $\nabla^\beta\Omega \overset{\mathscr{I}}{=} \sigma^{(1)}\nu^\beta$，得到

$$\mathcal{L}_a^{(m+1)}n^a \overset{(m)}{=} (\mathfrak{n}-1)\Big(\sigma^{(1)}L_{\alpha\beta}^{(m+1)}\nu^\alpha\nu^\beta + m\nu^\alpha L_{\alpha\beta}^{(m)}\Big(g^{\beta\mu}\nabla_\mu \pounds_\xi\Omega + (\pounds_\xi g^{\beta\mu})\nabla_\mu\Omega\Big) + \frac{m(m-1)}{2}\nu^\alpha L_{\alpha\beta}^{(m-1)}\big(g^{\beta\mu}\nabla_\mu\pounds_\xi^{(2)}\Omega + 2(\pounds_\xi g^{\beta\mu})\nabla_\mu\pounds_\xi\Omega + (\pounds_\xi^{(2)}g^{\beta\mu})\nabla_\mu\Omega\big)\Big).$$

将计算拆分为三部分会更容易，即 $\mathrm{I} = (\mathfrak{n}-1)\sigma^{(1)}L_{\alpha\beta}^{(m+1)}\nu^\alpha\nu^\beta$、$\mathrm{II} = (\mathfrak{n}-1)m\nu^\alpha L_{\alpha\beta}^{(m)}\big(g^{\beta\mu}\nabla_\mu \pounds_\xi\Omega + (\pounds_\xi g^{\beta\mu})\nabla_\mu\Omega\big)$ 以及

$$\mathrm{III} = \frac{m(m-1)(\mathfrak{n}-1)}{2}\nu^\alpha L_{\alpha\beta}^{(m-1)}\Big(g^{\beta\mu}\nabla_\mu\pounds_\xi^{(2)}\Omega + 2(\pounds_\xi g^{\beta\mu})\nabla_\mu\pounds_\xi\Omega + (\pounds_\xi^{(2)}g^{\beta\mu})\nabla_\mu\Omega\Big),$$

并分别计算每一项。仅涉及 $\mathbf{r}^{(m)}$ 或 $\kappa^{(m)}$ 的那些项无需写出显式形式。我们将把它们全部归入命题陈述中的张量 $\mathcal{O}_\mathcal{L}$。为进行计算，我们用 $\cdots$ 表示这类附加项。对于第一项 I，我们将 (175)（用 $m+1$ 代替 m）与 $\nu^\alpha\nu^\beta$ 缩并，并使用 $\mathcal{K}_{\alpha\beta}\nu^\alpha\nu^\beta = -2\kappa_n$ 和 $\mathcal{K}_{\alpha\beta}^{(2)}\nu^\alpha\nu^\beta = -2\kappa^{(2)}$ 得到

$$\mathrm{I} \overset{(m)}{=} \sigma^{(1)}\left(\mathcal{R}_{ab}^{(m+1)}n^a n^b + \frac{1}{\mathfrak{n}}\left(m\kappa_n R^{(m)} + \frac{m(m-1)}{2}\kappa^{(2)}R^{(m-1)}\right)\right).$$

再代入 (215以及

$$R^{(m)} \overset{(m)}{=} -2\kappa^{(m+1)} - 4\pounds_n(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}) - 4m\kappa_n\,\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)} + \cdots, \qquad R^{(m-1)} \overset{(m)}{=} \cdots,$$

我们得到

$$\mathrm{I} \overset{(m)}{=} \frac{2m(\mathfrak{n}-1)\sigma^{(1)}\kappa_n}{\mathfrak{n}}\kappa^{(m+1)} - \sigma^{(1)}\pounds_n^{(2)}\big(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}\big) + \frac{\mathfrak{n}-4m}{\mathfrak{n}}\kappa_n\sigma^{(1)}\pounds_n\big(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}\big) + \left(\frac{2(\mathfrak{n}-2m)\kappa_n^2}{\mathfrak{n}} - \pounds_n\kappa_n\right)m\sigma^{(1)}\,\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)} + \cdots.$$

为计算 II，我们现在利用（参见（182）—（183））

$$L_{ab}^{(m)}n^a \overset{(m)}{=} \cdots \tag{217}$$

$$\dot{L}_a^{(m)}n^a \overset{(m)}{=} \frac{1}{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)}\Big((1-\mathfrak{n})\kappa^{(m+1)} + (2-\mathfrak{n})\pounds_n(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}) + (2m-\mathfrak{n})\kappa_n\,\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}\Big) + \cdots. \tag{218}$$

将这些代入 II 的定义，并利用（14）和（214）可得

$$\begin{aligned}\mathrm{II} &= (\mathfrak{n}-1)m\nu^\alpha L_{\alpha\beta}^{(m)}\Big(g^{\beta\mu}\nabla_\mu\pounds_\xi\Omega + (\pounds_\xi g^{\beta\mu})\nabla_\mu\Omega\Big)\\ &\overset{(m)}{=} (\mathfrak{n}-1)m\big(\pounds_n\sigma^{(1)} + 2\sigma^{(1)}\kappa_n\big)\dot{L}_a^{(m)}n^a\\ &\overset{(m)}{=} \frac{m\big(\pounds_n\sigma^{(1)} + 2\sigma^{(1)}\kappa_n\big)}{\mathfrak{n}}\Big((1-\mathfrak{n})\kappa^{(m+1)} + (2-\mathfrak{n})\pounds_n(\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}) + (2m-\mathfrak{n})\kappa_n\,\mathrm{tr}_P\,\mathbf{Y}^{(m)}\Big) + \cdots.\end{aligned}$$

最后，由（217）—（218）可知 $\mathrm{III} = \cdots$。要证明（216），只需将 $\mathcal{L}_a^{(m+1)}n^a \overset{(m)}{=} \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$ 相加并化简。 □

参考文献

[1] Andersson, L., and Chruściel, P. T. 关于真空爱因斯坦方程的“类双曲型”柯西数据及共形无穷远光滑性的障碍。《数学物理通讯》161（1994年），533–568.[2] Andersson, L., Chruściel, P. T., and Friedrich, H. 关于亚马贝方程解的正则性及爱因斯坦场方程光滑双曲型初始数据的存在性。《数学物理通讯》149（1992年），587–612.[3] Ashtekar, A. 零无穷远的几何与物理。《微分几何综述》20（2015年），99–122.[4] Ashtekar, A., and Speziale, S. 作为弱孤立视界的零无穷远。《物理评论D辑》110（2024年），044048.[5] Bott, R. 莫尔斯理论讲义：新旧篇章。《美国数学会通报》7（1982年），331–358.[6] Capone, F., Mitra, P., Poole, A., and Tomova, B. 六维中的相空间重整化与有限BMS荷。《高能物理学杂志》2023（2023年），1–75.[7] Chruściel, P. T., MacCallum, M. A., and Singleton, D. B. 广义相对论中的引力波 XIV。Bondi展开与 $\mathscr{I}$的“多重齐次性”。《伦敦皇家学会哲学汇刊》A辑：物理与工程科学350（1995年），113–141.[8] Ciambelli, L. 零超曲面的渐近极限。arXiv:2501.17357（2025年）.[9] Ciambelli, L., Leigh, R. G., Marteau, C., and Petropoulos, P. M. Carroll结构、零几何与共形等距变换。《物理评论D辑》100（2019年），046010.[10] Compère, G., Fiorucci, A., and Ruzziconi, R. dS λ-BMS$_4$ 群及AdS$_4$ 的新边界条件。《经典与量子引力》36（2019年），195017.
[11] Curry, S. N., and Gover, A. R. 共形几何与拖拉机演算导论：兼论其在广义相对论中的应用。《广义相对论中的渐近分析》443（2018年），86.[12] Fefferman, C., and Graham, C. R. 共形不变量。“今日的埃利·嘉当与数学”，Astérisque，特刊 S131（1985年），95–116.[13] Fefferman, C., and Graham, C. R. 环境度规。普林斯顿大学出版社，2012年.[14] Fernández-Álvarez, F. 零超曲面上的新闻张量。《经典与量子引力》42（2025年），155017.[15] Fernandez-Alvarez, F., and Senovilla, J. M. M. 宇宙学常数趋零时的渐近结构。《经典与量子引力》39（2022年），165011.[16] Frauendiener, J. 共形无穷远。《相对论生活评论》7（2004年）.[17] Friedrich, H. 爱因斯坦真空场方程的渐近特征初值问题，作为一阶拟线性对称双曲型系统的初值问题。《伦敦皇家学会会刊：数学与物理科学》378（1981年），401–421。

[18] Friedrich, H. 关于爱因斯坦真空场方程的正则特征初值问题与渐近特征初值问题。《伦敦皇家学会会刊：数学与物理科学》375（1981），169–184。[19] Friedrich, H. 广义相对论中共形真空场方程的柯西问题。《数学物理通讯》91（1983），445–472。[20] Friedrich, H. 关于具有光滑渐近结构的爱因斯坦场方程 n测地线完备解或未来完备解的存在性。《数学物理通讯》107（1986），587–609。[21] Friedrich, H. 共形爱因斯坦演化。载于《时空的共形结构：几何、分析与数值》。施普林格，2002年，第1–50页。[22] Friedrich, H. 几何渐近分析及其拓展。载于《广义相对论百年》（《微分几何综述》，第20卷）。国际出版社，2015年，第37–74页。[23] Geroch, R. 时空渐近结构。载于《时空渐近结构》。施普林格，1977年，第1–105页。[24] Geroch, R., and Horowtiz, G. T. 渐近简单并不意味着渐近闵可夫斯基。《物理评论快报》40（1978），203。[25] Godazgar, M., and Reall, H. S. 高维中的韦尔张量剥落与引力辐射。《物理评论D辑》85（2012），084021。[26] Golubitsky, M., and Guillemin, V. 稳定映射及其奇点，第14卷。施普林格科学与商业媒体，2012年。[27] Herfray, Y. 渐近平坦时空的拖拉几何。《亨利·庞加莱年刊》23（2022），3265–3310。[28] Hilditch, D., Valiente Kroon, J. A., and Zhao, P. 利用共形爱因斯坦场方程改进特征初值问题的存在性结果。《广义相对论与引力》52（2020），85。[29] Hollands, S., and Ishibashi, A. 高维引力中的渐近平坦性与邦迪能量。《数学物理学杂志》46（2005）。[30] Hollands, S., and Thorne, A. 高维中的邦迪质量不可能为负。《数学物理通讯》333（2015），1037–1059。[31] Hollands, S., and Wald, R. M. 奇数时空维数中的辐射解不存在共形零无穷远。《经典与量子引力》21（2004），5139。[32] Ishibashi, A. 具有全局指定背景结构的高维邦迪能量。《经典与量子引力》25（2008），165004。[33] Kannar, J. 关于广义相对论中渐近特征初值问题的光滑解的存在性。《伦敦皇家学会会刊：数学、物理与工程科学》452（1996），945–952。[34] Kehrberger, L. M. 反对光滑零无穷远（一）：启发式论证与反例。《亨利·庞加莱年刊》23（2022），829–921。[35] Krtouš, P., and Podolskỳ, J. 具有宇宙学常数的时空中辐射场的渐近方向结构。《经典与量子引力》21（2004），R233。[36] Manzano, M. 抽象零超曲面的几何与时空匹配。博士论文，萨拉曼卡大学，2023年。

[37] Manzano, M., and Mars, M. 零超曲面的约束张量。《几何与物理杂志》208（2025），105375。[38] Mars, M. 一般超曲面的约束方程及其在薄壳中的应用。《广义相对论与引力》45（2013），2175–2221。[39] Mars, M. 超曲面数据：一般性质及球对称中的伯克霍夫定理。《地中海数学杂志》17（2020），1–45。[40] Mars, M. 抽象零几何、能量-动量映射及其在约束张量中的应用。《北京纯粹与应用数学杂志》1（2024），797–852。[41] Mars, M., and Peón-Nieto, C. 利用韦尔张量展开对 $\lambda \neq 0$真空代数特殊时空进行分类：共形平坦情形I。《几何与物理杂志》220（2025），105713。[42] Mars, M., and Sánchez-Pérez, G. 双零数据的协变定义与特征初值问题的几何唯一性。《物理学杂志A：数学与理论》56（2023），255203。[43] Mars, M., and Sánchez-Pérez, G. 双零数据与广义相对论中的特征问题。《物理学杂志A：数学与理论》56（2023），035203。[44] Mars, M., and Sánchez-Pérez, G. Fefferman-Graham环境度规的共形刻画。arXiv：2510.21646（2025）。[45] Mars, M., and Sánchez-Pérez, G. 一般超曲面的Killing初始数据与相似初始数据。《经典与量子引力》42（2025），125001。[46] Mars, M., and Sánchez-Pérez, G. 零超曲面上度量的横向展开 I：唯一性及其在Killing视界中的应用。《几何与物理杂志》209（2025），105416。[47] Mars, M., and Sánchez-Pérez, G. 零超曲面上度量的横向展开 II：存在性结果及其在Killing视界中的应用。《几何与物理杂志》217（2025），105605。[48] Mars, M., and Senovilla, J. M. M. 时空中一般超曲面的几何：连接条件。《经典与量子引力》10（1993），1865。[49] Moncrief, V., and Isenberg, J. 宇宙学柯西视界的对称性。《数学物理通讯》89（1983），387–413。[50] Newman, R. P. 简单时空的整体结构。《数学物理通讯》123（1989），17–52。[51] Ortaggio, M. 高维韦尔张量分类的Bel–Debever判据。《经典与量子引力》26（2009），195015。[52] Paetz, T.-T. Killing初始数据偏好特殊锥。《经典与量子引力》31（2014），085007。[53] Penrose, R. 无穷远处的光锥。载于《相对论引力理论》，L. Infeld编。Pergamon出版社，英国牛津，1964年，第369–373页。[54] Penrose, R. 包含引力在内的零静质量场：渐近行为。《伦敦皇家学会会刊：数学与物理科学》284（1965），159–203。

[55] Penrose, R. 时空结构。载于《巴特尔会议》，C. M. DeWitt 和 J. A. Wheeler 编。W. A. Benjamin, Inc.，美国纽约州纽约市，1968年，第 121–235 页。[56] Rendall, A. D. 将特征初值问题约化为柯西问题及其在爱因斯坦方程中的应用。《伦敦皇家学会会刊：数学与物理科学》427 (1990), 221–239。[57] Riello, A., and Freidel, L. 将共形无穷远重整化为拉伸视界。《经典与量子引力》41 (2024), 175013。[58] Sachs, R. K. 引力理论中的特征初值问题。《数学物理学杂志》3 (1962), 908–914。[59] Schmidt, B. G. 具有环面型零无穷远的真空时空。《经典与量子引力》13 (1996), 2811–2816。[60] Tanabe, K., Kinoshita, S., and Shiromizu, T. 任意维数下零无穷远处的渐近平坦性。《物理评论D辑》84 (2011), 044055。[61] Valiente Kroon, J. A. 零无穷远和空间无穷远附近的多齐次展开。载于《时空的共形结构：几何、分析与数值》。施普林格，2002年，第 135–159 页。
[62] Valiente Kroon, J. A. 一类新的零无穷远光滑性障碍。《数学物理通讯》244 (2004), 133–156。[63] Valiente Kroon, J. A. 广义相对论中的共形方法。剑桥大学出版社，2017年。[64] Wald, R. M. 广义相对论。芝加哥大学出版社，2010年。[65] Winicour, J. 对数渐近平坦性。《物理学基础》15 (1985), 605–616。[66] xAct Development Group. xAct：用于 Wolfram语言的高效张量计算机代数。https://www.xact.es/, 2026年。1.3.0版。