arXiv:2602.05076v1 [math.AC] 4 Feb 2026

通过极值理想研究符号幂与整闭包

TRUNG CHAU、ART DUVAL、SARA FARIDI、THIAGO HOLLEBEN、SUSAN MOREY 和 LIANA ŞEGA

摘要。本文证明，极端理想可以非常有效地用于计算无平方因子单项式理想的幂和符号幂的整闭包。我们证明，这些幂的生成元是相应极端理想的幂的生成元在某个特定环同态下的像。极端理想为文献中广泛研究的多种不变量提供了尖锐界，包括复发率、渐近复发率和符号缺陷，以及无平方因子单项式理想的符号幂和幂的整闭包的贝蒂数。当限定在极端理想这一类中时，代数计算可归结为离散几何和线性规划问题，从而能够运用各种各样的技术。因此，在极端理想的计算可行的情况下，我们为其中许多不变量提供具体的尖锐界。我们的方法将对无穷多个理想寻找同调不变量和代数构造的问题，归结为仅基于生成元数量、针对单个高度对称理想的计算。

1. 引言

一个世纪以来，理想的幂的性质一直受到广泛研究，也催生了许多猜想。对于某些类型的理想，人们往往能从渐近角度描述其性质，但总体而言，我们仍有许多未知之处。这类问题的一个常见主题是， 多项式环中无平方因子单项式理想的幂R 可能具有出人意料的性质。本文提出一种方法，通过单个理想来研究符号幂 $I^{(r)}$以及理想的幂的整闭包I^r ，即所有无平方因子单项式理想 I 中具有 q 生成元的理想，也就是极值理想 $\mathcal{E}_q$ （定义2.1），该概念由 [5]引入。其基本原理是，处理无平方因子单项式理想的幂时遇到的所有复杂性都集中在极值理想中 $\mathcal{E}_q$。环同态 ψ_I （定义2.5），已知其满足 $\psi_I(\mathcal{E}_q{}^r) = I^r R$，由此提供了一种通过极值理想研究任意 I 的途径。

定理 1 (定理 3.3 和 4.4)。 设 I 是由以下元素极小生成的理想： $q \geq 1$ 在多项式环 R中，无平方单项式；并且 r 是一个正整数，那么

$$\overline{I^r} = \psi_I(\overline{\mathcal{E}_q{}^r})R \quad \textit{and} \quad I^{(r)} = \psi_I(\mathcal{E}_q{}^{(r)})R.$$

换言之， ψ_I 保留幂 I^r 和符号幂 $I^{(r)}$ 的整闭包，也就是说， ψ_I 将生成元映射到相应的 I幂的生成集上。尽管已有算法可以计算单项式理想 $\underline{I^r}$ 和 $I^{(r)}$，但随着 r 增大，计算复杂度会急剧上升。例如， [13] 介绍了相关历史， [28] 进行了更偏理论的分析，而 [7] 综述了凸显计算难度的问题。

2020数学学科分类。 13F55; 05E40; 13D02; 13C05; 52B20.关键词和短语。 理想的幂；单项式理想；自由分解；贝蒂数；复发率；渐近复发率；SymbolicPowers；整闭包；正规理想；符号缺陷；整缺陷。

鉴于定理 1，要计算 I^r 和 $I^{(r)}$对于任意具有 q个生成元的无平方因子单项式理想 I，只需考虑 $I = \mathcal{E}_q$ 的情形，然后应用映射 ψ_I。本文研究 ${\mathcal{E}_q}^r$ 和 ${\mathcal{E}_q}^{(r)}$，并进一步考察我们的结果对任意由 q 个元素生成的无平方因子单项式理想 I 的意义。

整闭包：给定环 R 中的理想 I，若元素 $r \in R$ 满足以下条件，则称其为**关于 整**：存在多项式 $f(x) = x^t + a_1x^{t-1} + \cdots + a_t = 0$，使得 $a_i \in I^i$，且 $f(r) = 0$。I 中所有整元素的集合称为 I（在 R 中）的**整闭包**，记作 $\overline{I}$。自 20 世纪 30 年代 Krull 的研究以来，整闭包在数论和代数几何中一直发挥着重要作用 [19, 20]。具体而言，理想的整闭包用于研究奇点、Rees 代数、爆破和赋值。

r 次幂 I^r 的整闭包引起了交换代数学家的极大兴趣。与普通幂 I^r 一样，幂的整闭包也表现出渐近行为。当 I 是域 R 上多项式环中的单项式理想时，已知整闭包 $\overline{I}$ 也是单项式理想，并且它包含满足 $m^t \in I^t$ 的单项式 m，其中 t 是某个整数。在这种情况下，求整闭包的问题可以转化为整数规划或凸多面体的语言。事实上，在许多编程语言中，例如 Normaliz [2] 或 Macaulay 2 [12]，，整闭包是通过凸几何而非交换代数计算的。

本文利用以下事实：$\overline{I^r}$ 可通过将 ψ_I 应用于$\overline{{\mathcal{E}_q}^r}$，根据定理 1计算得出。这一视角使我们能够描述一个“测试元素” $g(r,\ q)$（见方程（3.14）），它可用于检验等式 $I^r = \overline{I^r}$。当 r 和 q较小时，使用 $g(r,\ q)$ 尤其有效（见定理3.16(3)）。采用这种方法，我们证明如下结果。

定理 2（推论 3.4 和定理3.6 及 3.16）。设 I 是一个由$q \geq 1$ 无平方单项式 $m_1, \ldots, m_q$ 在多项式环 R中极小生成的理想，且 r 是一个正整数，则

(1) $\overline{I^r} = I^r + \psi_I(\overline{\mathcal{E}_q^r} \setminus {\mathcal{E}_q}^r)R$; *(2)* $I^r \neq \overline{I^r}$ 若 $\psi_I(g(r, q)) \notin \overline{I^r}$ 对于 $r \geq 2$ 和 $q \geq 4$ 成立；*(3)* $I^r = \overline{I^r}$ 若 $q \leq 3$；*(4)* 若 $q = 4$，则以下各项等价：*(a)* 对所有 $s \geq 1$，$I^s = \overline{I^s}$；*(b)* $I^2 = \overline{I^2}$；*(c)* $\gcd(m_a, m_b) + \mathrm{lcm}(m_c, m_d)$ 对某个 $\{a, b, c, d\} = \{1, 2, 3, 4\}$成立。*(5)* 若 $q = 5$，则以下各项等价：*(a)* 对所有 $s \geq 1$，$I^s = \overline{I^s}$；*(b)* $I^2 = \overline{I^2}$ 且 $I^3 = \overline{I^3}$.

符号幂：理想 I（多项式环 R的）的第 r**次符号幂**定义为

$$I^{(r)} = \bigcap_{P \in \mathrm{Min}(I)} (I^r R_P \cap R).$$

对于素理想 P（在域上的多项式环中）和整数 r，P 的第 r 符号幂由在 P 所定义的簇上至少以 r 阶消失的多项式构成。一般而言，$I^r \subseteq I^{(r)}$，但等号并不总是成立。符号幂常在几何中研究，其定义中用 Ass(I) 代替 Min(I)；然而，对于无平方因子单项式理想，Ass(I) = Min(I)

因此，对于无平方因子单项式理想，这两种符号幂定义在我们的情形下是一致的。符号幂直接联系了交换代数与代数几何。它们已成为双有理几何、奇点理论和交理论中的基础工具。

在交换代数中，符号幂本身就是一个既有趣又有用的研究主题。它们曾作为辅助工具出现在交换代数中的若干重要结果中，包括 Krull 主理想定理和 Chevalley 引理 [16, 21]。单项式理想的符号幂可以转换为整数规划的语言，正如其整闭包对应物一样。

我们为符号幂的无平方因子单项式理想得到了定理2 的一个类似结论。我们证明，对于每个 q，存在一个测试元素 $h(r,q)$，其定义见命题5.9，可以识别符号幂的关键性质。与幂的整闭包类似，“测试元素” $h(r,q)$ 对于较小的 q 和 r 尤其有效（见例4.8）。对于任意 ${\mathcal{E}_q}^{(2)}$，我们完整且明确地描述了 q的所有极小生成元，从而为任意无平方因子单项式理想 $I^{(2)}$ 的 I生成元

定理 3（推论4.5 和4.6 以及定理5.10）。若 I 是由 $q \geq 1$ 个无平方单项式极小生成的多项式环 R中的理想，且 r 是正整数，则

(1) $I^{(r)} = I^r + \psi_I\left({\mathcal{E}_q}^{(r)} \setminus {\mathcal{E}_q}^r\right) R$; (2) $I^{(r)} \neq I^r$ 若 $\psi_I(h(r,\ q)) \notin I^r$ 对于 $r \geq 2$ 和 $q \geq 3$; (3) $I^{(r)} = I^r$ 对于 $q \leq 2$;
(4) $I^{(2)} = \left(\psi_I(f_X) :\ \emptyset \neq X \subseteq [q]\right)$，其中 f_X如方程（5.1）。

由于 ψ_I 保留幂和符号幂的整闭包，因此为其大量同调不变量和代数不变量提供了上界。 [5] 中的一项主要结果是关于贝蒂数的不等式

$$\beta_i(I^r) \leq \beta_i({\mathcal{E}_q}^r) \quad \text{for all} \quad i, r \geq 1,$$

其中， I 是一个具有 q 个生成元的任意无平方因子单项式理想。特别地，一旦固定了 q 和 r，对于具有 q 个生成元的无平方因子单项式理想中的任意 i，${\mathcal{E}_q}^r$ 都给出了最大的 i 阶贝蒂数，这也说明了“极值”一词的使用是恰当的。在本文中，我们证明了 $\mathcal{E}_q$ 相对于其他众所周知的代数和数值不变量表现出极值行为，这些不变量列于定理 4 中。除了贝蒂数之外，定理 4 还包括一些众所周知的数值不变量，用于衡量普通幂与符号幂之间的差异，例如符号缺陷 sdefect(r, I)、复发率 $\rho(I)$ 和渐近复发率 $\rho_a(I)$，以及整缺陷 idefect(r, I)；本文将整缺陷定义为符号缺陷在整闭包方面的对应概念。

定理 4（定理3.6、4.7、5.10 和6.1、推论4.9和命题4.11）。 若 I 是由 $q \geq 1$ 个无平方单项式极小生成的多项式环 R中的理想，且 r 是一个正整数，则

(1) $\beta_i(\overline{I^r}) \leq \beta_i(\overline{{\mathcal{E}_q}^r})$ *and* $\beta_i(I^{(r)}) \leq \beta_i({\mathcal{E}_q}^{(r)})$ *for any integer* i;
(2) $\operatorname{idefect}(r, I) \leq \operatorname{idefect}(r, \mathcal{E}_q)$ *and* $\operatorname{sdefect}(r, I) \leq \operatorname{sdefect}(r, \mathcal{E}_q)$;
(3) $\operatorname{sdefect}(2, \mathcal{E}_q) = 2^q - 1 - q - \binom{q}{2}$;
(4) $\rho(I) \leq \rho(\mathcal{E}_q)$ *and* $\rho_a(I) \leq \rho_a(\mathcal{E}_q)$;
(5) $\rho(\mathcal{E}_3) = \rho_a(\mathcal{E}_3) = \frac{4}{3}$, $\rho_a(\mathcal{E}_4) = \frac{3}{2}$ *and* $\rho_a(\mathcal{E}_5) = \frac{8}{5}$.

所有这些结果都表明，对于任意单项式理想的幂，计算其不变量及这些不变量的界，可以归结为或大大受益于仅对极值理想的幂计算一次这些不变量。通常这些不变量很难计算。我们将在第3 节和第 5 节看到，对于极值理想，这些计算可以用线性规划完全描述。然而，虽然极值理想的生成元个数为 q，但极值理想中的变量个数非常庞大，并且会随着生成元个数呈指数增长。因此，即使线性规划问题的规模也会迅速随着 q 和 r增长。尽管如此，极值理想计算具有普适性，因此仍值得进行。

本文的结构如下。在第 2 节中，我们回顾极值理想和环映射 ψ_I 的定义，并证明关于这些理想和映射的基本结果。第 3 节重点研究极值理想的幂的整闭包。我们证明本文的第一个主要结果，即定理 3.3，指出 ψ_I 保持幂的整闭包。我们引入整缺陷这一不变量，用以衡量 I^r 与 I^r之间的差距；它是符号缺陷在整闭包方面的对应概念。第 4 节平行研究符号幂，第 5 节则专门讨论第二符号幂。特别是，在推论5.8 中，我们给出了一个仅依赖于 q 的显式上界，适用于任何具有 q 个生成元的无平方因子单项式理想的第二符号缺陷。最后，第 6 节给出若干结果，说明 I^r 或$I^{(r)}$ 的自由分解如何与映射 ψ_I相互作用，以及极值理想如何限制其贝蒂数。

2. 映射 ψ_I 与极端理想

众所周知，每个无平方因子单项式理想 I 都可以表示为某个极端理想在环同态 ψ_I ([5]) 下的像。本文及其续篇 [3]的前提是， I 的所有幂的代数性质都可以通过 ψ_I追溯到极端理想的幂。我们首先回顾与极端理想及环同态 ψ_I相关的定义和基本性质。

定义 2.1 (极端理想)。设 q 为正整数，并考虑多项式环

$$S_{[q]} = \mathsf{k}\big[y_A : \emptyset \neq A \subseteq [q]\big]$$

它定义在域 k 上。对于每个 $i \in [q]$，定义一个无平方因子单项式 ϵ_i，使其属于 $S_{[q]}$，如下：

$$\epsilon_i = \prod_{\substack{\emptyset \neq A \subseteq [q] \\ i \in A}} y_A.$$

无平方因子单项式理想 $\mathcal{E}_q = (\epsilon_1, \ldots\ldots, \epsilon_q)$ 称为 ***q*-极端理想**。

通常我们会简化记号，将 $y_{\{1\}}$记作 y_1，将 $y_{\{1,2\}}$记作 y_{12}，依此类推，并将 q-极端理想简称为极端理想。尽管我们通常不考虑 $y_\emptyset$，但当 $y_\emptyset$ 因集合运算而出现时，我们约定 $y_\emptyset = 1$。

例 2.2。 当 $q = 4$ 时，理想 $\mathcal{E}_4$ 由以下单项式生成

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= y_1 y_{12} y_{13} y_{14} y_{123} y_{124} y_{134} y_{1234};\\
\epsilon_2 &= y_2 y_{12} y_{23} y_{24} y_{123} y_{124} y_{234} y_{1234};\\
\epsilon_3 &= y_3 y_{13} y_{23} y_{34} y_{123} y_{134} y_{234} y_{1234};\\
\epsilon_4 &= y_4 y_{14} y_{24} y_{34} y_{124} y_{134} y_{234} y_{1234}
\end{aligned}$$

in 多项式环 $\mathsf{k}[y_1, y_2, y_3, y_4, y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{23}, y_{24}, y_{34}, y_{123}, y_{124}, y_{134}, y_{234}, y_{1234}]$.

除非另有说明，本文中 R 表示多项式环 $\mathrm{k}[x_1,\dots,x_n]$，其中 k 是一个域，而 I 是 R 中的无平方因子单项式理想，由单项式 $m_1,\dots,m_q$极小生成，其中 $q \geq 1$。单项式 m 的**支撑**是集合

$$\operatorname{Supp}(m) = \{x_k \colon k \in [n] \quad \text{and} \quad x_k \mid m\}.$$

我们引入一个函数 θ_I，用以记录总是一同出现在 I的生成元中的变量簇。对每个 $\emptyset \neq A \subseteq [q]$，令

$$\theta_I(A) = \bigcap_{j\in A} \operatorname{Supp}(m_j) \setminus \bigcup_{j\in[q]\setminus A} \operatorname{Supp}(m_j). \tag{2.1}$$

注意，根据定义，对非空的 $\emptyset \neq A \subseteq [q]$，集合 $\theta_I(A)$构成出现在 m_i中的变量集合的一个划分，即 $\cup_{i=1}^{q}\operatorname{Supp}(m_i)$。

例 2.3. 设 I 为域$[x_1,\dots,x_7]$ 中由 $q = 3$ 无平方单项式生成的理想

$$m_1 = x_1x_2x_5x_7, \quad m_2 = x_2x_3x_7, \quad m_3 = x_3x_4x_6.$$

将总是一同出现的变量聚成簇后，我们改写为

$$m_1 = (x_2x_7)(x_1x_5), \quad m_2 = (x_2x_7)(x_3), \quad m_3 = (x_3)(x_4x_6).$$

Then

$$\theta_I(\{1,2\}) = \{x_2,x_7\}, \quad \theta_I(\{1\}) = \{x_1,x_5\}, \quad \theta_I(\{2,3\}) = \{x_3\}, \quad \theta_I(\{3\}) = \{x_4,x_6\}$$

并且对所有其他 A，$\theta_I(A) = \emptyset$。

为方便起见，我们给出 θ_I的一个等价描述，这可以直接从方程（2.1）看出。

引理 2.4. 若 I 是由无平方单项式 $m_1,\dots,m_q$ 极小生成的多项式环 $R = \mathrm{k}[x_1,\dots,x_n]$ 中的一个理想，且 $\emptyset \neq A \subseteq [q]$，则 $\theta_I(A)$ 是由所有满足 $k \in [n]$ 的 x_k 组成的集合

$$x_k \mid m_j \iff j \in A.$$

定义 2.5 (环同态 ψ_I)。 设 I 是多项式环 $R = \mathrm{k}[x_1,\dots,x_n]$ 中由无平方单项式 $m_1,\dots,m_q$ 极小生成的理想。定义 ψ_I 为环同态

$$\psi_I \colon S_{[q]} \to R \quad \text{where} \quad \psi_I(y_A) = \prod_{x_k\in\theta_I(A)} x_k$$

这里采用的约定是，当 $\theta_I(A) = \emptyset$ 时，$\psi_I(y_A) = 1$。或者，也可以将 $\psi_I(y_A)$ 视为支撑等于 $\theta_I(A)$ 的无平方单项式。

例 2.6. 若 I 如例 2.3中所述 ψ_I：域$\left[y_A\colon \quad \emptyset \neq A \subseteq \{1,2,3\}\right] \to$域$[x_1,\dots,x_7]$由下式给出

$$\psi_I(y_{12}) = x_2x_7, \quad \psi_I(y_1) = x_1x_5, \quad \psi_I(y_{23}) = x_3, \quad \psi_I(y_3) = x_4x_6,$$

以及 $\psi_I(y_A) = 1$ 否则。

环同态 ψ_I 将 ${\mathcal{E}_q}^r$ 的生成元映射为 I^r的生成元，保持最小公倍数不变，因此可以利用 ${\mathcal{E}_q}^r$ 的自由分解来研究 I^r （[5, 10]）。下面列出 ψ_I 的一些相关性质。从这里开始，我们使用记号

$$\mathcal{N}_q^r = \{\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_q) \in \mathbb{N}^q \colon a_1 + \cdots + a_q = r\} \quad \text{for} \quad q, r \geq 1,$$

使得 I^r 由以下元素生成

$$\mathbf{m}^{\mathbf{a}} = m_1^{a_1} \cdots m_q^{a_q} \quad \text{for} \quad \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_q) \in \mathcal{N}_q^r.$$

特别地， ${\mathcal{E}_q}^r$ 由 $\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{a}} = \epsilon_1^{a_1} \cdots \epsilon_q^{a_q}$生成，其中$\mathbf{a} = (a_1、\ldots\ldots、\ a_q) \in \mathcal{N}_q^r$。

命题 2.7。 设 q、 $r \geq 1$ ，并设 I 是多项式环 R中的一个理想，由无平方单项式 m_1、 ... ...、 m_q极小生成。则以下结论成立。

(1) 对于$\mathbf{a} \in \mathcal{N}_q^r$ [5, 命题 7.3(ii)]， ${\mathcal{E}_q}^r$ 由 $\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{a}}$ 极小生成；*(2)* 对每个$\mathbf{a} \in \mathcal{N}_q^r$ [5, 引理 7.7(i)]， $\psi_I(\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{a}}) = \mathbf{m}^{\mathbf{a}}$ ；*(3)* $\psi_I({\mathcal{E}_q}^r)R = I^r$ [5, 引理 7.7(ii)]；*(4)* 若 $A \neq B$ 是 $[q]$的子集，则 $\psi_I(y_A)$ 与 $\psi_I(y_B)$ 具有互不相交的支撑，也就是说，

$$\gcd(\psi_I(y_A), \psi_I(y_B)) = 1 \quad \textit{for all} \quad A \neq B \subseteq [q];$$

(5) 对于 $S_{[q]}$ 中任意单项式 μ、 ν，有

$$\psi_I(\operatorname{lcm}(\mu, \nu)) = \operatorname{lcm}(\psi_I(\mu), \psi_I(\nu)).$$

特别地， ψ_I 给出了 ${\mathcal{E}_q}^r$ 和 I^r 的最小公倍数格之间的映射（[5, 引理 7.7(iii)]），其定义为

$$\psi_I(\operatorname{lcm}(\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{a}_1}, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{a}_t})) = \operatorname{lcm}(\mathbf{m}^{\mathbf{a}_1}, \ldots, \mathbf{m}^{\mathbf{a}_t}) \quad \textit{for all} \quad \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t \in \mathcal{N}_q^r, \quad t \geq 1;$$

(6) 若 $\mathcal{J}$ 和 $\mathcal{K}$ 是 $S_{[q]}$ 中的单项式理想，则

$$\psi_I(\mathcal{J} \cap \mathcal{K})R = \psi_I(\mathcal{J})R \cap \psi_I(\mathcal{K})R.$$

证明。 陈述 (1)、(2)、(3) 见 [5]。对于陈述 (4)，设 A、 B是 $[q]$的子集，并假设 $k \in \theta_I(A) \cap \theta_I(B)$。由引理 2.4 可得

$$j \in A \iff x_k \mid m_j \iff j \in B$$

因此 $A = B$。于是，若 $A \neq B$，则可得 $\theta_I(A) \cap \theta_I(B) = \emptyset$，这意味着 $\psi_I(A)$ 和 $\psi_I(B)$ 的支撑互不相交。

对于陈述（5），令 $\mu = \prod_{A \subseteq [q]} y_A^{a_A}$ 和 $\nu = \prod_{A \subseteq [q]} y_A^{b_A}$，并约定 $y_\emptyset = 1$。于是有

$$\psi_I(\operatorname{lcm}(\mu, \nu)) = \psi_I\Big(\prod_{A \subseteq [q]} y_A^{\max\{a_A, b_A\}}\Big) = \prod_{A \subseteq [q]} \psi_I(y_A)^{\max\{a_A, b_A\}} = \prod_{A \subseteq [q]} \prod_{x_k \in \theta_I(A)} x_k^{\max\{a_A, b_A\}}$$

$$= \operatorname{lcm}\Big(\prod_{A \subseteq [q]} \psi_I(y_A)^{a_A}, \prod_{A \subseteq [q]} \psi_I(y_A)^{b_A}\Big) = \operatorname{lcm}(\psi_I(\mu), \psi_I(\nu)).$$

其中，第一个等号由 μ 和 ν 的表达式得出；第二个等号由 ψ_I 是环同态这一事实得出；第三个等号由 ψ_I 的定义得出；第四个等号由 ψ_I 的定义，以及 R 中的每个变量在乘积 $\prod_{A \subseteq [q]} \psi_I(y_A)^{a_A}$ 和

$\prod_{A\subseteq[q]}\psi_I(y_A)^{b_A}$ 根据陈述（4）成立；最后一个等号由 μ 和 ν 的表达式，以及 ψ_I 是环同态这一事实得出。

对于陈述（6），注意到要证明两个理想之间的包含关系，只需证明一个理想的生成元都属于另一个理想。因此，包含关系

$$\psi_I(\mathcal{J}\cap\mathcal{K})R\subseteq\psi_I(\mathcal{J})R\cap\psi_I(\mathcal{K})R$$

由包含关系 $\psi_I(\mathcal{J}\cap\mathcal{K})\subseteq\psi_I(\mathcal{J})\cap\psi_I(\mathcal{K})$ 得出。

对于反向包含关系，注意到 $\psi_I(\mathcal{J})R$ 和 $\psi_I(\mathcal{K})R$ 的单项式生成元分别具有 $\psi_I(\nu)$ 和 $\psi_I(\mu)$ 的形式，其中 ν,μ 分别是 $\mathcal{J},\mathcal{K}$ 的单项式生成元。于是，理想 $\psi_I(\mathcal{J})R\cap\psi_I(\mathcal{K})R$ 的单项式生成元具有 $\operatorname{lcm}(\psi_I(\nu)\ \psi_I(\mu))$ 的形式，应用陈述（5）即可得出结论，如下所示：

$$\operatorname{lcm}(\psi_I(\nu),\psi_I(\mu))=\psi_I(\operatorname{lcm}(\nu,\mu))\in\psi_I(\mathcal{J}\cap\mathcal{K}).\qquad\square$$

3. 经由 ψ_I 求整闭包

本节将证明，要判定 r 次幂的无平方因子单项式理想 I（由 q 个元素生成）是否整闭，只需考察 $\mathcal{E}_q{}^r$ 的整闭包的生成元像（定理3.3 和3.6）。定理3.6还表明，I^r 的整缺陷不超过 $\mathcal{E}_q{}^r$ 的整缺陷。由于我们的结果适用于每个幂，极端理想因而成为研究 Rees 代数和无平方因子单项式理想正规性的有力工具。作为本节结果的一个应用，我们证明了每个至多由3 个元素生成的无平方因子单项式理想都是正规的（定理3.16(2)）。我们给出了这一结果的理论证明，但请注意，我们的工作能够将涉及无穷多个单项式理想的问题化简为一种情形：可以使用 Macaulay 中的 Normaliz [18] 软件包2 [12]，通过对某个特定理想的单个幂进行实际计算来证明一般性结果。

我们首先介绍有关单项式理想的整闭包所需的背景知识。更多详情请参阅 [17]。给定理想 $I\subset R=\mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]$，若对某个整数 s，存在 $a_i\in I^i$，使得对于 $1\le i\le s$ 有**整依赖于** I，则称元素 f 在 I 上整。

$$f^s+f^{s-1}a_1+\cdots+fa_{s-1}+a_s=0.$$

所有在 $\overline{I}$ 上整的元素 I 构成的集合称为 I的整闭包。众所周知，I 总是一个理想。若 $I=\overline{I}$，则称 I 是**整闭的**；若对所有 $r\ge1$，I^r 都是整闭的，则称 I 是**正规的**。

对于单项式理想，可以将计算整闭包的问题转化为一个关于凸几何的问题。集合 $\Delta\subseteq\mathbb{R}^n$ 的**凸包**是集合

$$\operatorname{conv}(\Delta)=\{c_1\mathbf{a}_1+\cdots+c_s\mathbf{a}_s\colon\ \sum c_i=1,\quad \mathbf{a}_i\in\Delta\quad\text{and}\quad c_i\ge0\}.\tag{3.1}$$

采用记号

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}}=x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}\quad\text{where}\quad\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{N}^n,$$

我们得到单项式理想整闭包的如下刻画。

定理 3.1 ([17, 第 1 节。4])。设 J 是多项式环 $R=$域$[x_1,\dots,x_n]$ 中由单项式 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_1}$、…、$\mathbf{x}^{\mathbf{a}_s}$ 极小生成的理想，其中 $s\ge1$ 且对每个 $j=1$、…、s，都有 $\mathbf{a}^j=(a_{j1}$、…、$a_{jn})\in\mathbb{N}^n$。令 $\mathbf{b}=(b_1$、…、$b_n)\in\mathbb{N}^n$。则以下条件等价：

(1) $\mathbf{x}^{\mathbf{b}}\in\overline{J}$;

(2) $\mathbf{b} \in \operatorname{conv}(\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n : \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in J)$*; (3)* 存在一个整数 i 使得 $(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})^i \in J^i$*;* 即，存在单项式 $u_1, \ldots, u_i$属于 J 使得

$$(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})^i = u_1 u_2 \cdots u_i;$$

(4) 存在非负有理数 $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$，使得 $\sum_{j=1}^{s} \gamma_j = 1$ 且

$$(b_1, \ldots, b_n) \succcurlyeq \sum_{j=1}^{s} \gamma_j (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$$

其中 $(v_1, \ldots, v_n) \succcurlyeq (w_1, \ldots, w_n)$ 当且仅当对所有 i，$v_i \geq w_i$。

我们在定理 3.3 中证明，对于任意无平方因子单项式理想 I 以及任意 $r \geq 1$，映射 ψ_I 将 $\mathcal{E}_q{}^r$ 的生成元映射为 $\overline{I^r}$的生成元。我们首先利用上述关于整闭包的刻画，说明删除一个变量时单项式理想的整闭包如何变化。

引理 3.2. 对于每个正整数 n，考虑环同态

$$\varphi_n \colon R = \mathsf{k}[z_1, \ldots, z_n] \to R' = \mathsf{k}[z_1, \ldots, z_{n-1}] \quad \textit{where} \quad \varphi_n(z_i) = \begin{cases} 1 & \textit{if } i = n \\ z_i & \textit{if } 1 \leq i < n. \end{cases}$$

若 J 是 R 中的单项式理想，则 $\varphi_n(\overline{J})R' = \overline{\varphi_n(J)R'}$。

证明。 如果 z_n^t 是某个 J 的极小生成元，其中 $t \geq 1$，那么

$$\varphi_n(\overline{J})R' = R' = \phi_n(J)R' = \overline{\varphi_n(J)R'}$$

且结论成立。因此，我们不妨假设 $\mathbf{z}^{\mathbf{a}_1}, \ldots, \mathbf{z}^{\mathbf{a}_s}$ 是 J 的极小单项式生成元，其中 $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{N}^n$ 对所有 $i \in [n]$ 和 $s \geq 1$ 均成立，且对所有 $i \in [s]$，$\operatorname{Supp}(\mathbf{z}^{\mathbf{a}_i}) \neq \{z_n\}$。注意，理想 $\varphi_n(J)$ 由单项式 $\varphi_n(\mathbf{z}^{\mathbf{a}_i}) = \mathbf{z}^{\mathbf{c}_i}$ 生成，其中

$$\mathbf{c}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{i\,(n-1)}) \in \mathbb{N}^{n-1}$$

对所有 $i \in [n]$ 均成立。特别地，$\varphi_n(J)$ 由 $\{\mathbf{z}^{\mathbf{c}_1}, \ldots, \mathbf{z}^{\mathbf{c}_s}\}$ 的一个子集极小生成。

为证明包含关系 $\subseteq$，令 $f = z_1^{b_1} \cdots z_n^{b_n} \in J$。我们将证明 $\varphi_n(f) \in \varphi_n(J)$。由定理 3.1，存在一个整数 i，使得 $f^i = u_1 \cdots u_i$对于单项式 $u_1, \ldots, u_i$属于 J。由于 φ_n是一个环同态，且 $f^i \in J^i$，因此可得

$$(\varphi_n(f))^i = \varphi_n(f^i) = \varphi_n(u_1 \cdots u_i) = \varphi_n(u_1) \cdots \varphi_n(u_i) \in \varphi_n(J)^i.$$

由定理3.1 可得 $\varphi_n(f) \in \varphi_n(J)$。

对于反向包含，令 $g = z_1^{b_1} \cdots z_{n-1}^{b_{n-1}} \in \varphi_n(J)$。根据定理 3.1(4)，按照如下约定：若 $\gamma_j = 0$ $\mathbf{z}^{\mathbf{c}_j} = z_1^{a_{j1}} \cdots z_{n-1}^{a_{j(n-1)}}$ 不是 $\varphi_n(J)$ 的极小生成元，则存在非负有理数 $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ 使得

$$\sum_{j=1}^{s} \gamma_j = 1 \quad \text{and} \quad (b_1, \ldots, b_{n-1}) \succcurlyeq \sum_{j=1}^{s} \gamma_j (a_{j1}, \ldots, a_{j\,(n-1)}).$$

Set

$$b_n = \sum_{j=1}^{s} a_{jn} \quad \text{and} \quad f = z_1^{b_1} \cdots z_n^{b_n}.$$

于是我们有 $\varphi_n(f) = g$ 且

$$(b_1, \dots, b_n) \succcurlyeq \sum_{j=1}^{s} \gamma_j(a_{j1}, \dots, a_{jn}).$$

利用定理 3.1，我们看到 $f \in J$ 并得出结论 $g \in \varphi_n(J)$。证明至此完成。□

利用引理 3.2，现在我们说明如何利用环同态 ψ_I 来计算 I的幂的整闭包。

定理 3.3。设 I 是多项式环 $R = \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]$ 中的一个理想，由 $q \geq 1$个无平方单项式极小生成。那么对于所有 $r \geq 1$,

$$\psi_I(\overline{\mathcal{E}_q{}^r})R = \overline{I^r}.$$

证明。设 $S_{[q],\ I} = \mathsf{k}[y_A \colon \psi_I(y_A) \neq 1]$ 是 $S_{[q]}$的一个子环。记 $\psi_I = \psi_1 \circ \psi_2$，其中

$$\psi_2 \colon S_{[q]} \to S_{[q],I} \quad \text{is given by} \quad \psi_2(y_A) = \begin{cases} 1 & \text{if } \psi_I(y_A) = 1 \\ y_A & \text{otherwise;} \end{cases}$$

$$\psi_1 \colon S_{[q],I} \to R \quad \text{is given by} \quad \psi_1(y_A) = \psi_I(y_A).$$

设 $\mathcal{J} = \psi_2(\mathcal{E}_q{}^r)$，并注意到 $\mathcal{J}$ 是 $S_{[q]\text{中的一个理想},\ I}$ 因为 ψ_2 是满射。反复应用引理 3.2 可得

$$\psi_2(\overline{\mathcal{E}_q{}^r}) = \overline{\mathcal{J}}. \tag{3.2}$$

根据命题 2.7(4)，ψ_1 将 $S_{[q],I}$ 中的每个变量映射为 R中互不相同变量的乘积，并且 $S_{[q]}$ 中的不同变量被映射为支撑互不相交的乘积。因此，[27,命题 2] 给出

$$\psi_1(\overline{\mathcal{J}})R = \overline{\psi_1(\mathcal{J})R}. \tag{3.3}$$

最后，命题2.7(3) 给出

$$\psi_1(\mathcal{J})R = \psi(\mathcal{E}_q{}^r)R = I^r\,. \tag{3.4}$$

结合等式（3.2）至（3.4），即可得到所需结论。□

下面的推论说明如何利用 ψ_I 来检验给定单项式理想的常规幂与其整闭包是否相等。由于利用命题 2.7中的基本事实，该陈述可由定理 3.3直接推出，因此我们不提供证明。

推论 3.4。设 I 是环 R 中的一个理想，由 $q \geq 1$ 无平方单项式极小生成，且 $r \geq 1$。那么 $I^r = \overline{I^r}$ 当且仅当 $\psi_I(m) \in \overline{I^r}$对所有 $m \in \operatorname{Mingens}(\mathcal{E}_q{}^r) \setminus \operatorname{Mingens}(\mathcal{E}_q{}^r)$成立。特别地，

$$\overline{I^r} = I^r + \psi_I(\overline{\mathcal{E}_q{}^r} \smallsetminus \mathcal{E}_q{}^r)R.$$

一般而言，众所周知 $I^r \subseteq \overline{I^r}$。为了衡量某个幂的整闭包与常规幂之间的差异，我们定义了一个不变量，作为在 [11] 中引入、较为人熟知的符号缺陷的整闭包对应概念。Oltsik 在 [23] 中引入了类似的整符号缺陷概念。

定义 3.5。 设 I 是多项式环 R 中的一个齐次理想，且 r 是一个正整数。 I 的 **-阶整缺陷** 定义为

$$\operatorname{idefect}(r, I) = \mu\left(\overline{I^r}/I^r\right),$$

其中， μ 表示作为 R-模的最小生成元个数。

在本文中，我们只考虑 I 为单项式理想的情形。现在说明如何利用极值理想和映射 ψ_I 来确定 I^r的附加生成元，并为整缺陷提供一个统一界。

定理 3.6。 设 I 是环 R 中的一个理想，它由 q 个无平方单项式极小生成，并且 $r \geq 1$。则

$$\operatorname{idefect}(r, I) \leq \operatorname{idefect}(r, \mathcal{E}_q).$$

证明。 令 $d = \mathsf{idefect}(r, I)$。则存在一些单项式

$$M_1, \ldots, M_d \in \overline{I^r} \setminus I^r$$

使得它们的同态像 M_1，……， M_d 极小生成 $\overline{I^r}/I^r$。等价地，

$$M_1, \ldots, M_d \in \operatorname{Mingens}(\overline{I^r}) \setminus I^r.$$

回顾定理 3.3， $\psi_I(\mathcal{E}_q{}^r)R = I^r$。特别地，这意味着 $\{\psi_I(E) : E \in \mathsf{Mingens}(\mathcal{E}_q{}^r)\}$ 生成 I^r。由于 $\psi_I(\overline{\mathcal{E}_q{}^r})$ 是一组单项式，我们可以选取其中一个子集，作为 I^r 的极小单项式生成集。换言之，存在单项式$E_1, \ldots, E_d \in \mathsf{Mingens}(\mathcal{E}_q{}^r)$，使得对于任意 $i \in [d]$， $\psi_I(E_i) = M_i$。此外，回顾命题 2.7(3)， $\psi_I(\mathcal{E}_q{}^r)R = I^r$。由于对于任意 $i \in [d]$， $M_i \notin I^r$，因此对于任意 $i \in [d]$，必有 $E_i \notin \mathcal{E}_q{}^r$。所以，根据定义，我们有 $d \leq \mathsf{idefect}(r, \mathcal{E}_q)$，证毕。□

定理3.3和3.6 表明，研究 $\mathcal{E}_q$ 的幂的整闭包，对于理解任意无平方因子单项式理想的幂的整闭包，可以成为极其有用的工具。因此，我们将探讨在简单情形下确定 $\mathcal{E}_q{}^r$ 的整闭包中元素的方法。首先，对于 $q = 3$，我们致力于证明 $\mathcal{E}_3$ 是正规（命题 3.12）。

我们首先将定理 $\Longleftrightarrow$ 3.1 中的判据 (1) (4) 翻译为。我们定义 $\mathbb{N}^{2^q-1}$ 的基向量如下: $\mathbf{e}_A$ 对于 $\emptyset \neq A \subseteq [q]$，其中

$$\mathbf{e}_A : 2^{[q]} \setminus \{\emptyset\} \to \{0, 1\} \quad \text{where} \quad \mathbf{e}_A(B) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad B = A \\ 0 & \text{if} \quad B \neq A. \end{cases} \tag{3.5}$$

这样我们就可以将任意单项式$\mathbf{m} \in S_{[q]}$ 写成

$$\mathbf{m} = \prod_{\emptyset \neq A \subseteq [q]} y_A^{b_A} = \mathbf{y}^{\mathbf{b}}, \quad \text{where} \quad \mathbf{b} = \sum_{\emptyset \neq A \subseteq [q]} b_A \mathbf{e}_A. \tag{3.6}$$

此外，对于一个 $= (a_1, \ldots, a_q) \in \mathcal{N}_q^r$，我们为每个 $\emptyset \neq A \subseteq [q]$定义

$$|\mathbf{a}|_A = \sum_{i \in A} a_i. \tag{3.7}$$

Then

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{a}} = \epsilon_1^{a_1} \cdots \epsilon_q^{a_q} = \prod_{\emptyset \neq A \subseteq [q]} y_A^{|\mathbf{a}|_A} = \mathbf{y}^{\widetilde{\mathbf{a}}} \quad \text{where} \quad \widetilde{\mathbf{a}} = \sum_{\emptyset \neq A \subseteq [q]} |\mathbf{a}|_A \mathbf{e}_A \,. \tag{3.8}$$

例 3.7。 设 $q = 3$。考虑一个 $\mathbf{a} = (2,\ 1,\ 3)$。那么

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{a}} = \epsilon_1^2\epsilon_2\epsilon_3^3 = (y_1^2y_{12}^2y_{13}^2y_{123}^2)(y_2y_{12}y_{23}y_{123})(y_3^3y_{13}^3y_{23}^3y_{123}^3) = y_1^2y_2y_3^3y_{12}^3y_{13}^5y_{23}^4y_{123}^6.$$

注意， $\tilde{\mathbf{a}}$ 对应于最终表达式的指数向量。一般而言， y_A并没有固定的顺序，因此使用求和记号来表示 $\tilde{\mathbf{a}}$ 会很有帮助:

$$\tilde{\mathbf{a}} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 + 3\mathbf{e}_{12} + 5\mathbf{e}_{13} + 4\mathbf{e}_{23} + 6\mathbf{e}_{123}.$$

使用上述记号，我们现在证明前述转换，从而具体说明如何用一个线性方程与不等式系统来刻画属于 ${\mathcal{E}_q}^r$ 的情形。

引理 3.8。 设$\mathbf{b} = \sum_{\emptyset\neq A\subseteq[q]} b_A\mathbf{e}_A \in \mathbb{N}^{2^q-1}$ 且 $r \geq 1$。那么$\mathbf{y}^{\mathbf{b}} \in {\mathcal{E}_q}^r$当且仅当存在非负有理数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$使得

(1) $\alpha_1 + \cdots + \alpha_q = r$ *and*
(2) $b_A \geq \sum_{i\in A}\alpha_i \quad$ *for all* $\quad \emptyset \neq A \subseteq [q]$.

证明。 ${\mathcal{E}_q}^r$ 的极小生成元具有如下形式

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{a}} = \epsilon_1^{a_1}\cdots\epsilon_q^{a_q} \quad \text{where} \quad \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_q) \in \mathcal{N}_q^r.$$

根据定理3.1 并利用公式（3.8），我们有$\mathbf{y}^{\mathbf{b}} \in {\mathcal{E}_q}^r$ 当且仅当$\mathbf{b} = \sum_{\emptyset\neq A\subseteq[q]} b_A\mathbf{e}_A$ 存在非负有理数 $\gamma_{\mathbf{a}}$ 满足$\mathbf{a} \in \mathcal{N}_q^r$使得

$$\sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{N}_q^r}\gamma_{\mathbf{a}} = 1 \quad \text{and} \quad b_A \geq \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{N}_q^r}\gamma_{\mathbf{a}}|\mathbf{a}|_A \quad \text{for all} \quad \emptyset \neq A \subseteq [q]. \tag{3.9}$$

在明确讨论命题中的两个蕴含关系之前，我们先记录一些计算，以便将方程（3.9）与（2）中的不等式联系起来。假设存在非负有理数 $\gamma_{\mathbf{a}}$ 使得 $\mathbf{a} \in \mathcal{N}_q^r$，并且存在 α_i 使得 $i \in [q]$，满足

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) = \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{N}_q^r}\gamma_{\mathbf{a}}\mathbf{a}.$$

按分量观察这个向量方程，可得一个包含 q 个等式的方程组

$$\alpha_i = \sum_{\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_q)\in\mathcal{N}_q^r}\gamma_{\mathbf{a}}a_i \quad \text{for all} \quad i \in [q]. \tag{3.10}$$

利用方程（3.10），我们计算方程（3.9）中不等式的右端，其中集合 $\emptyset \neq A \subseteq [q]$如下:

$$\sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{N}_q^r}\gamma_{\mathbf{a}}|\mathbf{a}|_A = \sum_{\substack{\mathbf{a}\in\mathcal{N}_q^r\\ \mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_q)}}\sum_{i\in A}\gamma_{\mathbf{a}}a_i = \sum_{i\in A}\sum_{\substack{\mathbf{a}\in\mathcal{N}_q^r\\ \mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_q)}}\gamma_{\mathbf{a}}a_i = \sum_{i\in A}\alpha_i. \tag{3.11}$$

特别地，当 $A = [q]$时，则 $|\mathbf{a}|_{[q]} = r$ 对所有 $\mathbf{a} = (a_1,\ \ldots\ldots,\ a_q) \in \mathcal{N}_q^r$，因此方程（3.11）（按相反顺序）可简化为

$$\sum_{i\in[q]}\alpha_i = r\sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{N}_q^r}\gamma_{\mathbf{a}}.$$

因此，给定 $(\gamma_{\mathbf{a}})^{\mathbf{a}\in\mathcal{N}_q^r}$ 和 $(\alpha_i)^{i\in[q]}$ 满足方程（3.10），我们有：

$$\sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{N}_q^r}\gamma_{\mathbf{a}}=1 \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{i\in[q]}\alpha_i=r \tag{3.12}$$

$$b_A\geq\sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{N}_q^r}\gamma_{\mathbf{a}}|\mathbf{a}|_A \quad\Longleftrightarrow\quad b_A\geq\sum_{i\in A}\alpha_i. \tag{3.13}$$

现在假设$\mathbf{y}^{\mathbf{b}}\in{\mathcal{E}_q}^r$,因此存在非负有理数 $\gamma_{\mathbf{a}}$ 满足方程（3.9）。根据方程（ α_i ，定义非负有理数3.10）。由方程（1）和（2），这些整数便满足条件（3.12）和（3.13），如所需。

反之，若存在 α_i满足条件（1）和（2），则定义

$$\gamma_{\mathbf{a}}=\begin{cases}\frac{1}{r}\alpha_j & \text{if } \mathbf{a}=r\mathbf{e}_j\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

对于$\mathbf{a}\in\mathcal{N}_q^r$，其中$\mathbf{e}_i$ 是 $\mathbb{R}^q$ 中第 i 个标准基向量。于是对每个 $i\in[q]$:

$$\sum_{\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_q)\in\mathcal{N}_q^r}\gamma_{\mathbf{a}}a_i=\sum_{j\in[q]}\gamma_{r\mathbf{e}_j}(r\mathbf{e}_j)_i=r\gamma_{r\mathbf{e}_i}=\alpha_i,$$

因此方程（3.10）成立。方程（3.12）和（3.13）表明方程（3.9）成立。因此$\mathbf{y}^{\mathbf{b}}\in{\mathcal{E}_q}^r$。□

考虑 ${\mathcal{E}_q}^r$ 的一个生成元$\mathbf{y}^{\mathbf{b}}$，其中$\mathbf{b}=\sum_{\emptyset\neq A\subseteq[q]}b_A\mathbf{e}_A$。接下来我们证明，当变量的指标集满足包含关系时，变量 y_A的指数（即整数 b_A）之间存在关系。

引理 3.9. 若$\mathbf{y}^{\mathbf{b}}$ 是${\mathcal{E}_q}^r$的极小生成元，则 $\emptyset\neq S\subseteq T\subset[q]$ 推出 $b_S\leq b_T$。

证明. 假设$\mathbf{y}^{\mathbf{b}}$ 是 ${\mathcal{E}_q}^r$的极小生成元，且 $S\subseteq T$。反设 $b_S>b_T$。由于 b_T和 b_S是整数，$b_S-1\geq b_T$。由于$\mathbf{y}^{\mathbf{b}}\in{\mathcal{E}_q}^r$，由引理3.8，存在非负有理数 $\alpha_1,\ldots,\alpha_q$满足引理3.8的两个条件。于是

$$b_S-1\geq b_T\geq\sum_{i\in T}\alpha_i\geq\sum_{i\in S}\alpha_i,$$

其中第三个不等式由 $S\subseteq T$ 以及每个 α_i 均为非负数得出。

因此，向量$\mathbf{b}'=\mathbf{b}-\mathbf{e}_S$ 也满足引理3.8 的条件，其中$\alpha_1,\ldots,\alpha_q$，因此$\mathbf{y}^{\mathbf{b}'}\in{\mathcal{E}_q}^r$。但是$\mathbf{y}^{\mathbf{b}'}$整除$\mathbf{y}^{\mathbf{b}}$，这与$\mathbf{y}^{\mathbf{b}}$是 ${\mathcal{E}_q}^r$的极小生成元矛盾。证毕。□

为了证明 ${\mathcal{E}_3}^r={\mathcal{E}_3}^r$ 下面的命题3.12 ，我们将使用单项式理想**的解析扩张度**，$\ell(I)$。I。解析扩张度的一般定义见 [17, 定义 5.1。5]对于生成元次数相同的单项式理想，其解析扩张度可以按下文证明中所述，通过由单项式生成元构造的矩阵的秩来计算。

引理 3.10。 $\mathcal{E}_q$ 的解析扩张度为 $\ell(\mathcal{E}_q)=q$。

证明。众所周知（参见 [29, 命题 7.1.7，习题 7.4。10]），当 I 是由同次元素生成的单项式理想时，解析扩张度 $\ell(I)$ 可以通过一个矩阵的秩计算，其中列由 R的变量索引，行由 I的生成元索引；该矩阵的 ij 项在生成元 i可被变量 j整除时为 1，否则为 0。对于极值理想 $\mathcal{E}_q$，由于选取由 y_i 索引的列所形成的子式构成 $q \times q$ 单位矩阵，该矩阵的秩为 q。由于每个 ϵ_i 具有相同的次数，我们得出，对于每个 q，$\ell(\mathcal{E}_q) = q$。□

注 3.11. 设 I 是一个解析扩张度为 ℓ的单项式理想。Singla [26, 推论 5.3]证明，若理想 I、I^2、.....、$I^{\ell-1}$ 都是整闭的，则 I是正规理想，也就是说，对所有 $r \geq 1$，I^r 都是整闭的。特别地，任何由至多两个无平方因子单项式生成的理想 I 都是正规理想。事实上，我们有 $\ell(I) \leq 2$，因此根据 Singla 的结果，只需证明 I 是整闭的。这是成立的，因为任何无平方因子单项式理想都是根式理想，因而根据 [17,注 1.1.3(4)]是整闭的。

根据注 3.11，为了证明 $\mathcal{E}_3$ 是正规理想，我们只需验证 $\mathcal{E}_3{}^2$ 是整闭的。这可以通过 Macaulay2 [12] 计算来证明，但为了展示如何运用聚焦指数的技巧，我们将在命题 3.12中给出证明。这为后续证明中如何使用不等式组提供了一个相对简短的范例。

P命题 3.12. 对于每个 $r \geq 1$，我们都有 $\mathcal{E}_3{}^r = \overline{\mathcal{E}_3{}^r}$。换言之，$\mathcal{E}_3$ 是正规的。

证明。 根据备注 3.11，我们只需验证 $\mathcal{E}_3{}^2$ 是整闭的。设 $\mathbf{y^b}$ 是 $\mathcal{E}_3{}^2$ 的一个极小生成元，其中

$$\mathbf{y^b} = y_1^{b_1} y_2^{b_2} y_3^{b_3} y_{12}^{b_{12}} y_{13}^{b_{13}} y_{23}^{b_{23}} y_{123}^{b_{123}}.$$

我们证明 $\mathbf{y^b} \in \mathcal{E}_3{}^2$。由引理 3.8 可知，存在非负有理数 α_1、α_2、α_3，使得对于所有互不相同的 i、j，当 $1 \leq i$时，以下不等式成立：$j \leq 3$

$$\begin{aligned} b_{123} &\geq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \\ b_{ij} &\geq \alpha_i + \alpha_j \\ b_i &\geq \alpha_i. \end{aligned}$$

首先，假设对于某个 i，$b_i = 0$。不失一般性，设 $b_1 = 0$。这意味着 $\alpha_1 = 0$和 $\alpha_2 + \alpha_3 = 2$，也就是说 $b_{23} \geq 2$。若 $b_2 \geq 1$ 和 $b_3 \geq 1$，则由引理 3.9 可得 $b_{12} \geq 1$ 和 $b_{13} \geq 1$。因此 $\epsilon_2\epsilon_3 \mid \mathbf{y^b}$，从而 $\mathbf{y^b} \in \mathcal{E}_3{}^2$。于是我们可以假设 $b_2 = 0$或 $b_3 = 0$。不失一般性，设 $b_2 = 0$。那么 $\alpha_2 = 0$ 和 $\alpha_3 = 2$。这意味着b_3、b_{13}、b_{23}、$b_{123} \geq 2$。此时 $\epsilon_3^2 \mid \mathbf{y^b}$，因此 $\mathbf{y^b} \in \mathcal{E}_3{}^2$。

现在假设 $b_i \geq 1$ 对所有 i。根据引理3.9，我们于是得到 $b_{ij} \geq 1$ 对所有 $i \neq j$。若 $b_{12} = b_{13} = b_{23} = 1$，那么我们有

$$3 = b_{12} + b_{13} + b_{23} \geq (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_3) + (\alpha_2 + \alpha_3) = 4,$$

矛盾。我们得出结论：$b_{ij} \geq 2$ 对于某个 $i \neq j$。不失一般性，假设$b_{12} \geq 2$。那么 b_1，b_2，b_{13}，$b_{23} \geq 1$ 以及 b_{12}，$b_{123} \geq 2$ 共同推出$\mathbf{y^b}$ 是$\epsilon_1\epsilon_2 \in \mathcal{E}_3{}^2$的倍数，因此$\mathbf{y^b} \in \mathcal{E}_3{}^2$。由此 $\mathcal{E}_3{}^2$ 是整闭的，正如所需，这意味着 $\mathcal{E}_3$ 根据备注3.11是正规的。□

我们将证明，当 $\mathcal{E}_q$ 时， $q \geq 4$不是正规的。这将在命题3.14中完成，首先我们先指出一些有用的事实。

注记 3.13。 为了判断 $\mathbf{y}^{\mathbf{b}} \in {\mathcal{E}_q}^r$，我们需要找到（或证明不存在）一个 $\in \mathcal{N}_q^r$使得 $\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{y}^{\mathbf{b}}$。使用方程（3.7）中的记号，我们有

(1) $\mathbf{y}^{\mathbf{b}} \in {\mathcal{E}_q}^r$ 当且仅当存在 一个 $\in \mathcal{N}_q^r$ 使得

$$b_A \geq |\mathbf{a}|_A \quad \text{for all} \quad \emptyset \neq A \subseteq [q].$$

(2) $\mathbf{y}^{\mathbf{b}} \notin {\mathcal{E}_q}^r$ 当且仅当对每个 一个 $\in \mathcal{N}_q^r$，都存在 $\emptyset \neq A \subseteq [q]$ 使得

$$b_A < |\mathbf{a}|_A.$$

对于 r， $q \in \mathbb{N}$ 其中 $r \geq 2$ 且 $q \geq 4$，定义

$$g(r,q) \coloneqq \Big(\prod_{\substack{A \subseteq [q] \\ |A| \geq 1}} y_A\Big)\Big(\prod_{\substack{A \subseteq [q] \\ |A| \geq 3}} y_A\Big)\epsilon_1^{r-2}. \tag{3.14}$$

命题 3.14。 若 $q \geq 4$ 且 $r \geq 2$，则 g（r, q）满足整依赖方程

$$z^q - (g(r,q))^q = 0$$

在 ${\mathcal{E}_q}^r$ 上。特别地， $g(r,q) \in \overline{{\mathcal{E}_q}^r \smallsetminus {\mathcal{E}_q}^r}$。

证明。我们首先考虑 $r = 2$ 的情形。要证明 $g(2,q) \in {\mathcal{E}_q}^2$，只需证明 $(g(2,q))^q \in {\mathcal{E}_q}^{2q}$，由定理 3.1(3) 可知。我们使用备注 3.13(1)，并选取一个 $= (2, 2, \ldots, 2) \in \mathcal{N}_q^{2q}$。令 $\mathbf{y}^{\mathbf{b}} = g(2,q)$，于是对于集合 $\emptyset \neq A \subseteq [q]$,

$$b_A = \begin{cases} 1 & \text{if } |A| \leq 2, \\ 2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

若 $|A| \leq 2$，则有

$$(q\mathbf{b})_A = qb_A = q \geq 4 \geq 2|A| = |\mathbf{a}|_A.$$

另一方面，当 $|A \geq 3$ 时,| 有

$$(q\mathbf{b})_A = qb_A = 2q \geq 2|A| = |\mathbf{a}|_A.$$

因此 $(g(2,q))^q \in {\mathcal{E}_q}^{2q}$，这意味着 $g(2,q) \in {\mathcal{E}_q}^2$，如所声称。

现在我们有 $g(r,q) = g(2,q)\epsilon_1^{r-2} \in \overline{{\mathcal{E}_q}^r}$ 由定理 3.1(3)。接下来我们证明 $g(r,q) \notin {\mathcal{E}_q}^r$ 利用备注 3.13 (2)。滥用记号，令 $\mathbf{y}^{\mathbf{b}} = g(r,q)$。注意，对于 $\emptyset \neq A \subseteq [q]$，我们有

$$b_A = \begin{cases} 1 & \text{if } |A| \leq 2 \text{ and } 1 \notin A, \\ 2 & \text{if } |A| \geq 3 \text{ and } 1 \notin A, \\ r-1 & \text{if } |A| \leq 2 \text{ and } 1 \in A, \\ r & \text{if } |A| \geq 3 \text{ and } 1 \in A. \end{cases}$$

L且$\mathbf{a} \in \mathcal{N}_q^r$。如果存在 $2 \leq i < j \leq q$ 使得 a_i， $a_j > 0$，则取 $A = \{i, j\}$。然后

$$b_A = 1 < 2 \leq a_i + a_j = |\mathbf{a}|_A.$$

如果存在唯一的 $i \in [q]$ 使得 $a_i > 0$，则取 $A = \{i\}$。如果 $i \neq 1$，那么

$$b_A = 1 < r = a_i = |\mathbf{a}|_A.$$

另一方面，如果 $i=1$，那么

$$b_A = r-1 < r = a_i = |\mathbf{a}|_A.$$

现在可以假设存在一个整数 $i \geq 2$，使得 $a_k > 0$ 当且仅当 $k \in \{1,i\}$。取 $A=\{1,i\}$。于是

$$b_A = r-1 < r = |\mathbf{a}|_A.$$

因此 $g(r,\ q) \in \overline{\mathcal{E}_q{}^r} \setminus \mathcal{E}_q{}^r$。 □

在下面的例 3.15 中，我们将提及使用 Macaulay 计算 $\mathcal{E}_q{}^r$ 的整闭包所得的结果 2 [12]。注意，单项式理想的整闭包不依赖于基域，因此可以在任意域上运行这些计算。当 q 和 r 较小时，这些计算很快；但随着这些参数增大，计算会变得难以进行。

例 3.15。利用方程（$g(r,\ q)$ 中 3.14）对

$$g(2,4) = y_1y_2y_3y_4y_{12}y_{13}y_{14}y_{23}y_{24}y_{34}y_{123}^2y_{124}^2y_{134}^2y_{234}^2y_{1234}^2. \tag{3.15}$$

利用 Macaulay2 [12] 计算，我们观察到：

(1) $\overline{\mathcal{E}_4{}^2} = \mathcal{E}_4{}^2 + (g(2,4))$;
(2) if $q \in \{4,5\}$, then $\overline{\mathcal{E}_q{}^{q-1}} = \overline{\mathcal{E}_q{}^{q-2}}\mathcal{E}_q$.

此例的第 (1) 部分特别表明，$g(2,4)$ 是 $\mathrm{Mingens}(\overline{\mathcal{E}_4{}^2}) \backslash \mathrm{Mingens}(\mathcal{E}_4{}^2)$中的唯一单项式，因此当3.14 命题在 $q=4$ 且 $r=2$时是最优的。另一方面，实验表明，即使 $q=5$，$\mathrm{Mingens}(\overline{\mathcal{E}_5{}^2}) \backslash \mathrm{Mingens}(\mathcal{E}_5{}^2)$ 也不止含有一个单项式。

下面的定理 3.16将我们关于 $\mathcal{E}_q$ 的结果转化为适用于任意由 I 生成的理想的论述。映射 q 平方自由单项式。映射 ψ_I 在这一转化中起着关键作用。我们的结论给出了计算 I^r的具体判据，可用于检验 I^r 是否整闭，以及 I 是否正规。

定理 3.16. 设 I 是多项式环 R 中的一个理想，且 $q \geq 1$其极小平方自由单项式生成元为 $m_1,\ldots,m_q$，并设 $g(r,q)$ 如方程 (3.14)所定义。以下结论成立：

(1) 若 $q \geq 4$、$r \geq 2$ 且 $\psi_I(g(r,q)) \notin I^r$，则 $\overline{I^r} \neq I^r$；*(2)* 若 $q \leq 3$，则 I 是正规理想；*(3)* 若 $q=4$，则 $I^2 = I^2 + (\psi_I(g(2,4)))$；*(4)* 若 $q \in \{4,5\}$，则 I 正规当且仅当对所有 $2 \leq r \leq q-2$ 有 $\overline{I^r} = I^r$；*(5)* 若 $q=4$，则下列各项等价：*(a)* I 是正规理想；*(b)* $\psi_I(g(2,4)) \in I^2$；*(c)* 对某个 $1 \leq i < j \leq 4$ 有 $\psi_I(y_{ij}) = 1$；*(d)* 对某个 $\{a,b,c,d\} = \{1,2,3,4\}$ 有 $\gcd(m_a, m_b) \mid \mathrm{lcm}(m_c, m_d)$。

证明。由于 $g(r,\ q) \in \overline{\mathcal{E}_q{}^r}$ 根据命题 3.14，则 $\psi_I(g(r,\ q)) \in I^r$ 根据定理 3.3。因此，陈述（1）成立。

根据备注 3.11，要证明陈述（2），只需假设 $q=3$。命题 3.12 表明 $\mathcal{E}_3$ 是正规的，也就是说，$\overline{\mathcal{E}_3{}^r} = \mathcal{E}_3{}^r$ 对所有 $r \geq 2$均成立。于是定理 3.3 和命题 2.7(3) 蕴含 $\overline{I^r} = I^r$ 对所有 $r \geq 2$均成立，从而证明了陈述（2）。

假设 $q = 4$，例 3.15(1) 表明 $\mathcal{E}_4{}^2 = \mathcal{E}_4{}^2 + \overline{(g}(2,\ 4))$。陈述（3）可通过将环同态 ψ_I 作用于此等式，并利用定理 3.3 和命题 2.7(3) 得出。

为证明命题（4），注意到若 I 是正规理想，则对所有 $I^r = I^r\ r$，因此给定的 r取值范围内等式尤其成立。反过来，假设 $q \in \{4, 5\}$ 且$I^r = I^r$ 对所有 $2 \le r \le q - 2$都成立。如注释 3.11所述，具有 I 个q 生成元的无平方因子单项式理想 $I^r = I^r$ 是正规理想，当且仅当对所有 $r \le \ell\ (I)\ - 1$都成立。由于 $\ell\ (I)\ \le q$ 且 I 是整闭的，因此有：

$$I \text{ is normal } \iff \overline{I^r} = I^r \quad \text{for all} \quad 2 \le r \le q - 1. \tag{3.16}$$

因此，要证明 I 是正规理想，只需证明 $I^{q-1} = I^{\overline{q-1}}$。我们通过下面一系列等式来证明这一点，这些等式依次依据：定理 3.3；例 3.15(2)，因为 $q \in \{4, 5\}$；ψ_I 是环映射这一事实；命题 2.7(3) 和定理 3.3；当 $r = q - 2$时的假设；以及最后的基本定义

$$\overline{I^{q-1}} = \psi_I(\overline{\mathcal{E}_q{}^{q-1}})R = \psi_I(\overline{\mathcal{E}_q{}^{q-2}}\mathcal{E}_q)R = \Big(\psi_I(\overline{\mathcal{E}_q{}^{q-2}})R\Big)(\psi_I(\mathcal{E}_q)R) = \overline{I^{q-2}}I = (I^{q-2})I = I^{q-1}.$$

为证明命题（5），设 $q = 4$。首先注意到，(c) $\iff$ (d) 是由映射 ψ_I 的定义直接推出的。(a) 与 (b) 等价，这是命题（3）和（4）的推论。因此，只需证明 (b) $\iff$ (c)。

设 (b) 成立，即 $\psi_I(g(2,\ 4)) \in I^2$，因此 $\psi_I(g(2,\ 4))$ 可被 I^2 的某个极小单项式生成元整除。设 $m_i m_k \mid \psi_I(g(2,\ 4))$，其中 $i,\ k \in [4]$。选取 $j \in [4] \setminus \{i\}$，使得若 $k \ne i$，则 $j = k$。注意到 $y_{ij}^2 \mid \epsilon_i\epsilon_k$，因此 $\psi_I(y_{ij})^2 \mid \psi_I(\epsilon_i\epsilon_j)$。由于$m_i m_j = \psi_I(\epsilon_i\epsilon_j)$，我们得出 $\psi(y_{ij}^2)$ $\mid \psi_I(g(2,\ 4))$，因此 $\psi_I(y_{ij})\ \mid \psi_I(h)$，其中

$$h = \frac{g(2,4)}{y_{ij}}.$$

假设 $\psi_I(y_{ij})\ \ne 1$，并令 x为 $\psi_I(y_{ij})$ 支撑中的一个变量。那么，对于某个 y_A，必有 $x \mid \psi_I(y_A)$，其中 y_A 是 h的支撑。注意到 h 不能被 y_{ij}整除，因此必有 $A \ne \{i, j\}$。然而，$\psi_I(y_{ij})$ 和 $\psi_I(y_A)$ 的支撑互不相交，见命题 2.7(4)。因此必有 $\psi_I(y_{ij})\ = 1$，故 (c) 成立。

反过来，假设 $\psi_I(y_{ij})\ = 1$，并且 $i \ne j$。利用方程（$g(2,\ 4)$ 中的公式（3.15），注意到 $\psi_I(\epsilon_i\epsilon_j) \mid \psi_I(g(2,\ 4))$。因此 $\psi_I(g(2,\ 4)) \in \psi_I(\mathcal{E}_q{}^2)R = I^2$。□

鉴于上述定理 3.16(4)，我们提出如下问题：

问题 3.17. 设 I 如定理 3.16中所述，是否对所有 $q \ge 4$，等式 (3.16) 均可改进为

$$I \text{ is normal } \iff \overline{I^r} = I^r \quad \text{for all} \quad 2 \le r \le q - 2\ ?$$

若 I 是由 q 个元素极小生成、解析扩张度为$\ell < q$的无平方因子单项式理想，那么根据 Singla 的结果 [25]，可以直接对问题3.17 给出肯定答案。值得关注的情形是 I 的解析扩张度恰为 q；在这种情况下，Singla 的结果表明，只需验证等式在 $q-1$ 次幂时是否成立，而若问题3.17得到肯定答案，则只需验证至 $q - 2$次幂即可。注意，定理 3.16（4）在 $q = 4$时对该问题给出了肯定答案，5。

4. 符号幂与 ψ_I

本节将说明，要理解无平方因子单项式理想的初等分解，只需研究极端理想 $\mathcal{E}_q$的初等分解。我们首先研究 ψ_I 下初等分解的行为（定理4.2），随后将该结果应用于无平方因子单项式理想的符号幂（定理4.4）、符号缺陷（定理4.7）以及包含问题，包括复发率和渐近复发率（推论4.9）。

如上所述，$R = \mathrm{k}[x_1, \ldots, x_n]$ 是域 k 上的多项式环。我们回顾一些关于初等分解的基本事实和定义，并请读者参阅 [29] 以了解更多细节。若理想 Q属于 R，且满足 $ab \in Q$，则当 $a \notin Q$时，若存在某个幂 r使得 $b^r \in Q$，则称其为**初等理想**。若不存在理想 I 和 J 使得 $Q = I \cap J$，除非 I 或 J 等于 Q，则称理想 Q 为**不可约理想**。当 Q 是单项式理想，因而具有唯一的极小单项式生成集时，Q 是初等理想，当且仅当任意极小生成元支撑中的每个变量都以纯幂的形式出现在生成集中。此外（例如，参见 [29,命题 5.1.16]），Q 不可约，当且仅当

$$Q = (x_{i_1}^{a_{i_1}}, \ldots, x_{i_s}^{a_{i_s}})$$

对于某个整数 $s > 0$。特别地，不可约单项式理想是初等理想。每个 R 中的理想 I 都可以写成若干初等理想 Q_i 的交（不一定唯一）

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t \tag{4.1}$$

这称为 I 的 **初等分解**。若对于每个 $j \in [t]$，该初等分解都是 **不可约冗余** 的，

$$\bigcap_{i \in [t] \setminus \{j\}} Q_i \not\subseteq Q_j.$$

当等式（4.1）是单项式理想的不可约初等分解时，很容易验证，该分解不可约冗余当且仅当

$$Q_i \not\subseteq Q_j \quad \text{for} \quad i \neq j,$$

另见 [22, 定义 3.3.4]。

虽然理想的初等分解不一定唯一，但每个单项式理想都有一个**唯一的不可约冗余不可约**初等分解，也就是说，它可以不可约冗余地分解，如等式（4.1）所示，其中每个 Q_i 都是不可约单项式理想（[29, 定理 5.1。17]）。

如果等式（4.1）是 I 的初等分解，那么对于每个 $i \in [t]$，素理想 $\sqrt{Q_i}$ 称为 I 的关联素理想。I 的关联素理想集合记作 Ass(R/I) 或 Ass(I)。众所周知，Ass(I) 不依赖于 I 所选取的初等分解（例如参见 [15, 第 10] 页）。I 的极小素理想是其中关于包含关系极小的关联素理想。我们将此集合记作 Min(I)。

现在我们考察 ψ_I 在不可约准素单项式理想上的表现。下文及全文中，对于 $S_{[q]}$ 的理想 J，我们常用记号 $\psi_I(J)$ 表示多项式环 R 中由以下元素生成的理想 $\psi_I(J)$，更精确地说，即 $\psi_I(J)R$。当 ψ_I 为满射时，我们自然有 $\psi_I(J)$ 与 $\psi_I(J)R$作为集合相等。

引理4.1。 设 I 是多项式环 R 中的一个理想，其由 $q \geq 1$ 个平方自由单项式极小生成。设

$$Q = (y_{A_1}^{r_1}, \ldots, y_{A_h}^{r_h})$$

是 $S_{[q]}$ 中的一个不可约准素单项式理想，其中 A_1、.....、 $A_h \subseteq [q]$ 和 $r_i > 0$ 是一些互不相同的非空集合。若对于某个 $i \in [h]$，有 $\theta_I(A_i) = \emptyset$，则 $\psi_I(Q) = R$。否则，

$$\psi_I(Q) = \bigcap_{\substack{(k_1,\ldots,k_h) \\ x_{k_i} \in \theta_I(A_i),\, i \in [h]}} (x_{k_1}^{r_1}, \ldots, x_{k_h}^{r_h}) \tag{4.2}$$

是 $\psi_I(Q)$ 的一个不可约冗余不可约初等分解。

证明。 若对于某个 $i \in [h]$， $\theta_I(A_i)$ 为空，则 $\psi_I(y_{A_i}) = 1$，因此 $\psi_I(Q) = (1) = R$，结论即得。故假设对所有 $i \in [h]$， $\theta_I(A_i)$ 均非空。注意到 $\psi_I(Q)$ 等于

$$(\psi_I(y_{A_1})^{r_1}, \ldots, \psi_I(y_{A_h})^{r_h}) = \Big(\prod_{x_k \in \theta_I(A_1)} x_k^{r_1}, \ldots, \prod_{x_k \in \theta_I(A_h)} x_k^{r_h} \Big) = \bigcap_{\substack{(k_1,\ldots,k_h) \\ x_{k_i} \in \theta_I(A_i),\, i \in [h]}} (x_{k_1}^{r_1}, \ldots, x_{k_h}^{r_h}).$$

最后一个表达式是 $\psi_I(Q)$ 的一个不可约分解。为证明该分解是不可约冗余的，假设 $Q_1 = (x_{k_1}^{r_1}, \ldots, x_{k_h}^{r_h})$ 和 $Q_2 = (x_{s_1}^{r_1}, \ldots, x_{s_h}^{r_h})$ 是该分解中的分量，且 $Q_1 \subseteq Q_2$。只需证明 $Q_1 = Q_2$。由于 $\theta_I(A_i)$ 两两不交，它们分别是 Q_1 和 Q_2的极小单项式生成集。考虑 $j \in [h]$。由于$x_{k_j}^{r_j} \in Q_1$，它是某个 $t \in [h]$ 的倍数，其中 $x_{s_t}^{r_t}$，特别地 $x_{k_j} = x_{s_t}$。由于 $\theta_I(A_i)$ 两两不交， $t = j$ 且 $s_t = k_j$。因此，

$$Q_1 = (x_{k_1}^{r_1}, \ldots, x_{k_h}^{r_h}) = (x_{s_1}^{r_1}, \ldots, x_{s_h}^{r_h}) = Q_2,$$

如预期。 □

我们应用引理 4.1 来说明如何从 I^r得到$\mathcal{E}_q{}^r$的不可冗余不可约初等分解。

定理 4.2 (通过 I^r 得到的初等分解 ψ_I)。设 I 是多项式环 R 中由 $q \geq 1$ 个无平方单项式极小生成的理想，且 $r \geq 1$。若 $\mathcal{E}_q{}^r$ 有一个不可冗余的不可约初等分解

$$\mathcal{E}_q{}^r = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t \quad \textit{with} \quad Q_i = (y_{A_{1,i}}^{r_{1,i}}, \ldots, y_{A_{s_i,i}}^{r_{s_i,i}}) \quad \textit{where} \quad \emptyset \neq A_{j,i} \subseteq [q]$$

那么 I^r 的不可冗余不可约初等分解为

$$I^r = \bigcap_{i \in L} \bigcap_{\substack{(k_{1,i},\ldots,k_{s_i,i}) \\ x_{k_{j,i}} \in \theta_I(A_{j,i}),\, j \in [s_i]}} \left(x_{k_{1,i}}^{r_{1,i}}, \ldots, x_{k_{s_i,i}}^{r_{s_i,i}} \right) \quad \textit{where} \quad L = \{ i \in [t] \colon \psi_I(Q_i) \neq R \}.$$

证明。 利用命题 2.7和公式（4.2），我们有

$$I^r = \psi_I(\mathcal{E}_q{}^r) = \bigcap_{i \in L} \psi_I(Q_i) = \bigcap_{i \in L} \bigcap_{\substack{(k_{1,i},\ldots,k_{s_i,i}) \\ x_{k_{j,i}} \in \theta_I(A_{j,i})\, \forall j \in [s_i]}} \left(x_{k_{1,i}}^{r_{1,i}}, \ldots, x_{k_{s_i,i}}^{r_{s_i,i}} \right)$$

且右侧的表达式是一个不可约初等分解。现在我们证明，该分解中的理想之间不存在包含关系。假设

$$(x_{k_{1,u},u}^{r_{1,u}},\dots,x_{k_{s_u,u},u}^{r_{s_u,u}}) \subsetneq (x_{k_{1,v},v}^{r_{1,v}},\dots,x_{k_{s_v,v},v}^{r_{s_v,v}})$$

对于某些 u、$v \in L$。通过重新标记，不妨假设 $s_u \le s_v$、$k_{j,u} = k_{j,v}$，以及对于任意 $j \in [s_u]$，$r_{j,u} \le r_{j,v}$。由引理 4.1，我们必有 $u \neq v$。由于对于 $j \in [u]$，$k_{j,u} = k_{j,v}$，且集合 $\theta_I(A_{j,i})$ 两两不交，因此对于 $j \in [u]$，可推出 $A_{j,u} = A_{j,v}$。于是 $Q_u \subseteq Q_v$，这与 ${\mathcal{E}_q}^r$ 的分解被假设为不可约冗余相矛盾。□

关于 ψ_I 如何与初等分解、关联素理想、持久性性质及相关代数问题相互作用的更多信息，以及关于 ${\mathcal{E}_q}^r$ 的关联素理想的计算，请参见 [3]。已知 ψ_I 将 ${\mathcal{E}_q}^r$ 的一个初等分解映射为 I^r 中的一个，这强烈表明 ψ_I 将对符号幂的研究有所帮助。

定义 4.3 ([29, 定义 4.3.22 和命题 4.3.25])。设 I 是多项式环 $R = \mathsf{k}[x_1,\dots,x_n]$ 中的一个理想，其中 k 是一个域，并设 r 是一个正整数。假设

$$I^r = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t$$

I^r的一个初等分解。将初等分量排序，使得 $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ 是 I 的极小素理想，当且仅当对于某个 $t' \le t$，$i \in [t']$ 成立。那么，I的 r**次符号幂** 记作 $I^{(r)}$，定义为

$$I^{(r)} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{t'}.$$

当 I是一个无平方因子单项式理想，且 $\mathfrak{p}_1$、.....、$\mathfrak{p}_t$ 是 I的极小素理想（或等价地，关联素理想）时，我们还有

$$I^{(r)} = \mathfrak{p}_1^r \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_t^r.$$

利用这个定义，我们可以证明映射 ψ_I 对于符号幂具有良好的性质。

定理 4.4 (ψ_I **保持符号幂**)。设 I 是多项式环$R = \mathsf{k}[x_1,\dots,x_n]$ 中的一个理想，由 $q \ge 1$ 个无平方单项式极小生成。那么对所有 $r \ge 1$,

$$\psi_I({\mathcal{E}_q}^{(r)}) = I^{(r)}.$$

证明。设 ${\mathcal{E}_q}^r = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$ 是一个不可约冗余的不可约初等分解。根据定义，我们有

$${\mathcal{E}_q}^{(r)} = \bigcap_{\sqrt{Q_i} \in \mathrm{Min}({\mathcal{E}_q}^r)} Q_i.$$

将映射 ψ_I 应用于该等式两边，我们得到

$$\psi_I({\mathcal{E}_q}^{(r)}) = \bigcap_{\sqrt{Q_i} \in \mathrm{Min}({\mathcal{E}_q}^r)} \psi_I(Q_i) = \bigcap_{i \in L, \sqrt{Q_i} \in \mathrm{Min}({\mathcal{E}_q}^r)} \psi_I(Q_i) \tag{4.3}$$

其中 L 是满足 $\psi_I(Q_i) \neq R$的指标集合。回忆一下，在定理 4.2 中，我们有

$$I^r = \bigcap_{i \in L} \psi_I(Q_i).$$

将定理4.2 应用于 $r = 1$ 可知， I^r 的极小素理想 ${\mathcal{E}_q}^r$源自 I^r 的极小素理想，因此我们有

$$I^{(r)} = \bigcap_{i\in L, \sqrt{Q_i}\in \mathrm{Min}({\mathcal{E}_q}^r)} \psi_I(Q_i). \tag{4.4}$$

结果现在由方程（4.3）和（4.4）得出。 □

定理 4.4 的一个直接推论是，极端理想在无平方因子单项式理想的符号幂理论中发挥着关键作用。下面的推论说明，如何使用 ψ_I 来检验给定理想的符号幂与常规幂是否相等。由于利用命题 2.7 中的基本事实即可从定理4.4立即推出该结论，因此我们不提供证明。

推论 4.5. 设 I 是环 R 中由 $q \geq 1$ 个无平方因子单项式极小生成的理想，并设 $r \geq 1$。那么 $I^{(r)} = I^r$ 当且仅当 $\psi_I(m) \in I^r$ 对所有 $m \in \mathrm{Mingens}({\mathcal{E}_q}^{(r)}) \setminus \mathrm{Mingens}({\mathcal{E}_q}^r)$ 均成立。特别地，

$$I^{(r)} = I^r + \psi_I({\mathcal{E}_q}^{(r)} \setminus {\mathcal{E}_q}^r)R.$$

当 I 由 2 个单项式生成时，情况尤其理想。

推论4.6. 设 I 是由 2 个无平方因子单项式生成的理想，且 r 是一个整数。那么，对于任意 $r \geq 1$，都有 $I^{(r)} = I^r$ 。

证明。 只需证明 $I = \mathcal{E}_2$的情形，因为一般结论随后可由定理4.4推出。我们有

$${\mathcal{E}_2}^r = (y_1y_{12}, y_2y_{12})^r = y_{12}^r(y_1, y_2)^r = (y_{12})^r \cap (y_1, y_2)^r = \mathcal{E}_2^{(r)},$$

如所需。 □

符号幂理论的一个关键目标是理解哪些元素属于符号幂，却不属于常规幂。2018年，Galetto、Geramita、Shun 和 Van Tuyl [11]引入了理想 I的 r**阶符号缺陷**

$$\mathrm{sdefect}(r, I) = \mu(I^{(r)}/I^r),$$

其中 μ 表示极小生成元的数量，用来衡量 I的 r阶符号幂与 r阶常规幂之间的差距。极端理想为界定所有无平方因子单项式理想的符号缺陷提供了一种方法。

定理 4.7. 令 I 为一个由 q 个元素极小生成的无平方因子单项式理想。那么对于任意 $r \geq 1$

$$\mathrm{sdefect}(r, I) \leq \mathrm{sdefect}(r, \mathcal{E}_q).$$

证明. 该证明与定理 3.6的证明完全相同，只需将幂的整闭包替换为符号幂，并使用 $\psi_I({\mathcal{E}_q}^{(r)}) = I^{(r)}$ 定理 4.4中的结论。 □

例 4.8. 对于 $q = 3$， $r = 2$ 通过 Macaulay2 [12] 直接计算可得

$${\mathcal{E}_3}^{(2)} = {\mathcal{E}_3}^2 + (y_1y_2y_3y_{12}y_{13}y_{23}y_{123}^2).$$

因此，根据定理 4.7，$\mathrm{sdefect}(2, I) \leq 1$ 对于任意由三个无平方单项式生成的理想 I。根据推论 4.5， $I^{(2)} = I^2$ 当且仅当 $\psi_I(y_1y_2y_3y_{12}y_{13}y_{23}y_{123}^2) \in \psi_I({\mathcal{E}_3}^2) = I^2$。

由定理 3.3 和 4.4 可知，极值理想在研究（无平方单项式）理想不同幂概念之间的包含关系时发挥着关键作用。符号幂研究的一个活跃领域是**包含问题**，其旨在确定满足 a, b 的整数对 $I^{(b)} \subseteq I^a$。为研究理想 I 而定义的不变量示例有**复发率**

$$\rho(I) = \sup\left\{\frac{s}{r} : s, r \in \mathbb{N} \quad \text{and} \quad I^{(s)} \not\subset I^r\right\}$$

由 Bocci 和 Harbourne 定义的 [1],以及**渐近复发率**

$$\rho_a(I) = \sup\left\{\frac{s}{r} : s, r \in \mathbb{N} \quad \text{and} \quad I^{(st)} \not\subset I^{rt} \quad \text{for all} \quad t \gg 0\right\}$$

由 Guardo、Harbourne 和 Van Tuyl 定义 [14]。随后在 [8, 第 4] 节中证明了

$$\rho_a(I) = \sup\left\{\frac{s}{r} : s, r \in \mathbb{N} \quad \text{and} \quad I^{(s)} \not\subset \overline{I^r}\right\}.$$

极端理想为这两个不变量都提供了界，如下一个结果所示。

推论 4.9. 设 I 是一个由 q 个元素极小生成的无平方因子单项式理想。那么

$$\rho(I) \leq \rho(\mathcal{E}_q) \quad \textit{and} \quad \rho_a(I) \leq \rho_a(\mathcal{E}_q).$$

证明. 我们先证明 ρ_a 的情形。根据定理 3.3 和 4.4 我们知道

$$I^{(s)} \not\subset \overline{I^r} \implies {\mathcal{E}_q}^{(s)} \not\subset \overline{{\mathcal{E}_q}^r}.$$

特别地，我们得出

$$\left\{\frac{s}{r} : s, r \in \mathbb{N} \quad \text{and} \quad I^{(s)} \not\subset \overline{I^r}\right\} \subset \left\{\frac{s}{r} : s, r \in \mathbb{N} \quad \text{and} \quad {\mathcal{E}_q}^{(s)} \not\subset \overline{{\mathcal{E}_q}^r}\right\}.$$

该命 关于复发率的命题与此类似，但我们用命题2.7 代替定理2.7(3)。

□

例 4.10。 使用来自 Macaulay2 [12] 的 Normaliz [18]和 SymbolicPowers [9]软件包进行的计算表明

$${\mathcal{E}_4}^{(7)} \subset \overline{{\mathcal{E}_4}^5}.$$

这项计算表明，对于任意由 I 个4 元素生成的无平方因子单项式理想，我们有 $I^{(7)} \subseteq I^5$。更多计算结果见图 1 。

2023 年，Villarreal [30] 从几何视角研究了无平方因子单项式理想的渐近复发率，并由此提出了一种具体方法，可将无平方因子单项式理想的渐近复发率计算为某些向量点积的最小值（见 [30, 定理 3。7]）。按照 [30, 过程 A。1], ，然后应用 [30,定理 3。7] ，我们可以在 $\rho_a(\mathcal{E}_q)$ 取较小值时计算 q ，此时可以直接计算。当 $q = 3$时，由定理3.16(2)，利用 $\mathcal{E}_3$ 正规，我们也能够计算$\rho(\mathcal{E}_3)$。结合推论 4.9，我们得出以下结论。

命题 4.11. 设 I 是一个由 q 个元素极小生成的无平方因子单项式理想。那么

$$\begin{aligned} \rho(I) = \rho_a(I) \leq \rho(\mathcal{E}_3) = \rho_a(\mathcal{E}_3) = 4/3 \qquad & \textit{when} \quad q = 3; \\ \rho_a(I) \leq \rho_a(\mathcal{E}_4) = 3/2 \qquad & \textit{when} \quad q = 4; \\ \rho_a(I) \leq \rho_a(\mathcal{E}_5) = 8/5 \qquad & \textit{when} \quad q = 5. \end{aligned}$$

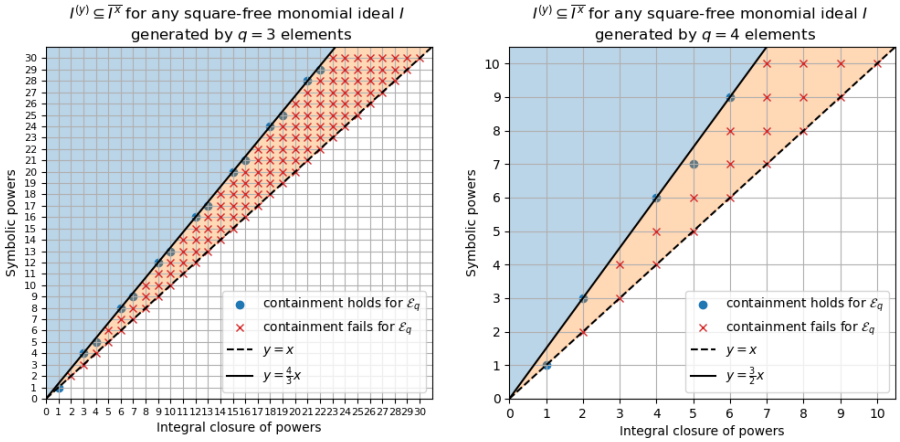

图 1. 实线上的点和线上方的点表示满足 $I^{(x)} \subseteq I^y$ 的有序对 $(x,\ y)$，其中理想由 q 个元素生成，且虚线下方的 $\times$ 或点表示 $\mathcal{E}_q{}^{(x)} \not\subseteq \mathcal{E}_q{}^y$。

极端理想是研究由任意 q 个元素生成的无平方因子单项式理想的一致包含关系的可行理论工具。根据定理3.3和4.4，若 $\mathcal{E}_q{}^{(r)} \subseteq \mathcal{E}_q{}^r$对于某个 r，q 则对于 $I^{(r)} \subseteq I^r$ 所有具有 q 个生成元的无平方因子单项式理想，均有$\mathcal{E}_q{}^{(r)} \not\subseteq \mathcal{E}_q{}^r$。然而，若 q，则由个无平方单项式生成的理想可能满足也可能不满足包含关系。

问题 4.12 (无平方因子单项式理想的各类幂的包含关系)。给定一个固定的 $q \geq 1$，对于哪些 r，s，对每个由 q 个元素生成的无平方因子单项式理想，都有 $I^{(s)} \subseteq I^r$？换言之，$\mathcal{E}_q$的渐近复发率是多少?

5. 第二符号缺陷

本节通过映射 $I\ \psi_I$，研究任意无平方因子单项式理想的第二符号幂。在定理 5.6中，我们给出了计算$I^{(2)}$的生成元的具体公式。在推论 5.8 中，我们明确计算了 $\mathcal{E}_q$的第二符号缺陷，由此得到任意无平方因子单项式理想的第二符号缺陷的紧上界。回顾一下，在我们讨论无平方因子单项式理想的情形中，$\mathrm{Ass}(I) = \mathrm{Min}(I)$，因此我们可以运用代数和几何工具研究符号幂。

我们首先介绍主要工具，即 [6]中定义的符号多面体。给定一个凸集 A 和一个整数 $r \geq 1$，A 的**膨胀**（系数为 r）是一个凸集

$$rA = \{\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_r : \mathbf{a}_i \in A \quad \text{for all} \quad i\}.$$

注意，如果 A 可以写成凸集 A_1、…、A_s的交集，那么 $rA = \bigcap_{i=1}^{s} rA_i$。对于无平方因子单项式理想 I，令

$$\mathcal{L}(I) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n : \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in I\}.$$

I 的**符号多面体**是凸集

$$\mathcal{S}(I) = \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(I)} \mathrm{conv}(\mathcal{L}(P)).$$

注意，由于单项式的乘法对应于指数的加法，取理想的幂就对应于由单项式定义的凸集的膨胀，如方程（3.1）所示。特别地，$r\mathrm{conv}(\mathcal{L}(I)) = \mathrm{conv}(\mathcal{L}(I^r))$ 对任意单项式理想 I均成立。因此，I 的符号多面体使我们能够将关于元素是否属于 I 的符号幂的问题，转化为关于 $\mathcal{S}(I)$的膨胀的格点的问题。精确表述见引理 5.1。引理5.1的一个方向在 [6] 中对任意单项式理想给出了更一般的证明。由于对于无平方因子单项式理想，我们还需要逆向结论，而该结论在 [6],中是隐含的，故我们在下文给出证明。

引理 5.1 ([6, 定理 5.4])。 设 $I \subset$ 域$[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个无平方因子单项式理想，$r \geq 1$ 是一个整数，且 $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$。那么 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in I^{(r)}$ 当且仅当$\mathbf{a} \in r\mathcal{S}(I)$。

证明。 我们只需证明，如果$\mathbf{a} \in r\mathcal{S}(I)$，那么 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in I^{(r)}$，因为反方向是 [6, 定理 5.4] 的一个特例。如果$\mathbf{a} \in r\mathcal{S}(I)$，那么对于每个 $P \in \mathrm{Ass}(I) = \mathrm{Min}(I)$，都有$\mathbf{a} \in r\,\mathrm{conv}(\mathcal{L}(P)) = \mathrm{conv}(\mathcal{L}(P^r))$。特别地，对于每个极小素理想 $P$of I，我们有$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in P^r$，因此$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in I^{(r)}$。□

引理 5.1 的一个直接推论是下面这个结果，它使我们能够将计算 $\mathcal{E}_q$ 的符号幂这一问题转化为线性代数问题。在极值理想的背景下，$\mathcal{E}_q$ 的符号多面体是 $\mathbb{R}^{2^q-1}$中的一个凸集。讨论这个多面体时，我们将采用方程（3.6）中的记号。

回顾一下，$\mathcal{C}$ 中非空子集的一个集合族 $[q]$是 $[q]$ 的**极小集合覆盖**，如果

$$[q] = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A, \quad \text{and} \quad A \not\subseteq \bigcup_{A' \neq A} A' \quad \text{for all} \quad A \in \mathcal{C}.$$

我们用 $\mathscr{C}_q$ 表示 $[q]$的所有极小集合覆盖组成的集合。我们还用记号 A^{c}表示集合 $A \subseteq [q]$的**补集** $[q] \smallsetminus A$。

引理 5.2. 设 $q \geq 1$且$\mathbf{b} = \sum_{\emptyset \neq A \subseteq [q]} b_A \mathbf{e}_A \in \mathbb{N}^{2^q-1}$。

(1) 以下命题等价：*(a)* $\mathbf{y}^{\mathbf{b}} \in \mathcal{E}_q{}^{(2)}$；*(b)* $\mathbf{b} \in 2\mathcal{S}(\mathcal{E}_q)$；*(c)* 对每个 $\mathcal{C} \in \mathscr{C}_q$，$\sum_{A \in \mathcal{C}} b_A \geq 2$。*(2)* 若 $\mathbf{y}^{\mathbf{b}}$ 是 $\mathcal{E}_q{}^{(2)}$的一个极小生成元，则 *(a)* 对所有 A，$b_A \leq 2$；*(b)* $b_{[q]} = 2$.*(3)* 若 $\mathbf{y}^{\mathbf{b}} \in \mathcal{E}_q{}^{(2)}$ 且对于某个 A有 $b_A = 0$，则只要 $A^{\mathrm{c}} \subseteq T \subseteq [q]$，就有 $b_T \geq 2$。

证明。为说明(1)中的等价性，注意到引理 5.1给出$(a) \iff (b)$。注意，对于给定的 $\mathcal{C} \in \mathscr{C}_q$，$(c)$中的不等式等价于存在一个 $A \in \mathcal{C}$ 使得$b_A \geq 2$，或者存在互不相同的 A、$A' \in \mathcal{C}$使得 b_A、$b_{A'} \geq 1$。换言之，(c)等价于对每个 $\mathcal{C} \in \mathscr{C}_q$都有 $\mathbf{y}^{\mathbf{b}} \in (y_A\colon\ A \in \mathcal{C})^2$。另一方面，显然可以

看出 P 是 $\mathcal{E}_q$ 的极小素理想，当且仅当 $P=(y_A\colon\ \ A\in\mathcal{C})$ 对于某个 $\mathcal{C}$ 属于 $\mathscr{C}_q$（另见[3]）。因此，根据符号幂的定义，我们得到 $(a)\iff(c)$。

要证明（2）(a)，假设 $b_A>2$对于某个 A。由于$\mathbf{y^b}\in{\mathcal{E}_q}^{(2)}$，由（1），可得$\frac{\mathbf{y^b}}{y_A}\in{\mathcal{E}_q}^{(2)}$，特别地 $\mathbf{y^b}$ 不是${\mathcal{E}_q}^{(2)}$的极小生成元。要证明（2）(b)，注意到 $\{[q]\}\in\mathscr{C}_q$，因此由于$\mathbf{y^b}\in{\mathcal{E}_q}^{(2)}$，由（1），$b_{[q]}\geq 2$，结论由（2）(a) 得出。

对于（3），假设 $\mathbf{y^b}\in{\mathcal{E}_q}^{(2)}$ 且 $b_A=0$。由于 $\{[q]\}\in\mathscr{C}_q$，由（1）可得 $b_{[q]}\geq 2$。因此$b_A=0$ 推出 $A\neq[q]$且 $T\neq\emptyset$。同样，若 $T=[q]$，则 $b_T\geq 2$，且不等式成立。对于其余情形，$\{A,T\}$ 构成 $[q]$的极小集合覆盖，而（1）推出 $b_A+b_T\geq 2$，由此即可得出结论。□

本节的主要结果是对任意 $q\geq 1$，给出${\mathcal{E}_q}^{(2)}$的极小生成元的显式描述。由此，我们得到对任意 $q\geq 1$，$\mathcal{E}_q$的第二符号亏格的公式。现在我们引入一个公式，并将证明它能唯一描述${\mathcal{E}_q}^{(2)}$的每个极小生成元。

定义 5.3. 令 $y_\emptyset=1$，并令 $\mathbf{1}=\sum_{\emptyset\neq A\subseteq[q]}\mathbf{e}_A$ 为所有分量均等于 1 的向量。对于任意 $q\geq 1$ 以及每个 $\emptyset\neq X\subseteq[q]$，我们定义

$$f_X=\mathbf{y^1}\prod_{X\subseteq A}\frac{y_A}{y_{A^c}}=\mathbf{y^1}\frac{\prod_{X\subseteq A}y_A}{\prod_{A\subseteq X^c}y_A}=\prod_{X\subseteq A}{y_A}^2\prod_{\substack{X\cap A\neq\emptyset\\ X\cap A^c\neq\emptyset}}y_A \tag{5.1}$$

w这里假设上文出现的所有集合 A 都是 $[q]$的非空子集。定义

$$\Omega_q^2:=\{f_X\colon\emptyset\neq X\subseteq[q]\}. \tag{5.2}$$

下面指出 f_X 的一些重要特征。

引理 5.4. 令 $q\geq 1$、i、$j\in[q]$ 以及 $\emptyset\neq X$、$Y\subseteq[q]$。那么

(1) ${f_{\{i\}}}={\epsilon_i}^2$；*(2)* $f_{\{i,j\}}=\epsilon_i\epsilon_j$；
(3) $f_{[q]}=\mathbf{y^{1+e_{[q]}}}$；*(4)* $\deg(f_X)=2^q$；*(5)* $f_X\neq f_Y$ 当 $X\neq Y$ 时；*(6)* $|X|\leq 2$当且仅当 ${f_X}\in{\mathcal{E}_q}^2$。

证明。其中，下面的指标 A 和 A_i 表示 $[q]$ 的非空子集，我们先证明陈述 (1)–(4)。对于 (1)，注意到

$$f_{\{i\}}=\mathbf{y^1}\prod_{i\in A}\frac{y_A}{y_{A^c}}=\frac{\prod_A y_A\prod_{i\in A}y_A}{\prod_{i\notin A}y_A}=\Big(\prod_{i\in A}y_A\Big)^2=\epsilon_i^2.$$

对于 (2)，我们可以假设 $i \neq j$，否则该陈述已在 (1) 中证明。我们有

$$f_{\{i,j\}} = \mathbf{y^1} \prod_{\{i,j\}\subseteq A} \frac{y_A}{y_{A^c}} = \frac{\prod_A y_A \prod_{\{i,j\}\subseteq A} y_A}{\prod_{\{i,j\}\cap A=\emptyset} y_A}$$

$$= \prod_{\substack{\{i,j\}\cap A_1=\{i\}\\ \{i,j\}\cap A_2=\{j\}\\ \{i,j\}\cap A_3=\{i,j\}}} y_{A_1} y_{A_2} {y_{A_3}}^2 = \Big(\prod_{i\in A} y_A\Big)\Big(\prod_{j\in A} y_A\Big) = \epsilon_i\epsilon_j.$$

陈述（3）可由下式看出

$$f_{[q]} = \mathbf{y^1} \prod_{[q]\subseteq A} \frac{y_A}{y_{A^c}} = \mathbf{y^1} \frac{y_{[q]}}{y_\emptyset} = \mathbf{y^{1+e_{[q]}}}.$$

对于陈述（4），令 X 为 $[q]$ 的一个非空子集。注意，$\deg(y_{[q]}) = 1$，$\deg(y_\emptyset) = 0$，并且若 $A \notin \{[q], \emptyset\}$，则 $\deg(y_A) = \deg(y_{A^c}) = 1$。因此

$$\begin{aligned}\deg(f_X) = &\ \deg(\mathbf{y^1}) + \Big(\sum_{X\subseteq A\subsetneq[q]} \big(\deg(y_A) - \deg(y_{A^c})\big)\Big) + (\deg(y_{[q]}) - \deg(y_\emptyset))\\ = &\ (2^q - 1) + \Big(\sum_{X\subseteq A\subsetneq[q]} (1-1)\Big) + (1-0) = 2^q,\end{aligned}$$

如所需。

对于陈述（5），假设 $X \neq Y$ 对于非空的 $X, Y \subseteq [q]$。不失一般性，假设 $X \not\subseteq Y$。那么 $y_Y^2 \mid f_Y$，但 $y_Y^2 \nmid f_X$。因此 $f_X \neq f_Y$。

对于陈述（6），首先注意到 ${\mathcal{E}_q}^2$ 由以下元素极小生成：$\epsilon_i\epsilon_j$，其中 $1 \leq i \leq j \leq q$（见命题2.7）。若 $|X| \leq 2$，则由陈述（1）和（2）立即可得 $f_X \in {\mathcal{E}_q}^2$。若 $|X| > 2$，则由（4）通过次数论证可知 f_X 不是 $f_{\{i\}}$ 或 $f_{\{i,j\}}$ 的倍数，对任意 $i,\ j \in [q]$。由（5），f_X 也不等于这些元素，$f_X \notin {\mathcal{E}_q}^2$ 结论即得。□

在证明本节的主要结果之前，我们先证明一个技术性引理。

引理 5.5. 假设

$$\mathbf{y^b} \in \mathrm{Mingens}({\mathcal{E}_q}^{(2)}) \quad \textit{with} \quad \mathbf{b} = \sum_{\emptyset\neq A\subseteq[q]} b_A \mathbf{e}_A \in \mathbb{N}^{2^q-1}.$$

令 $\mathcal{D} := \{A \subseteq [q]\colon\ b_A = 0\}$. 那么，$\mathcal{D} = \emptyset$ 或 $\mathcal{D}$ 关于集合包含具有一个最大元。

证明。只需证明，若 $A_1, A_2 \in \mathcal{D}$，则 $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{D}$。反设存在 $A_1, A_2 \in \mathcal{D}$ 使得 $A_1 \cup A_2 \notin \mathcal{D}$。那么，根据 $\mathcal{D}$ 的定义，$b_{A_1\cup A_2} > 0$。定义

$$\mathbf{y^{b'}} = \frac{\mathbf{y^b}}{y_{A_1\cup A_2}} \quad \text{with} \quad \mathbf{b'} = \mathbf{b} - \mathbf{e}_{A_1\cup A_2}.$$

我们将证明$\mathbf{y^{b'}} \in {\mathcal{E}_q}^{(2)}$，这与如下假设相矛盾：$\mathbf{y^b}$ 是 ${\mathcal{E}_q}^{(2)}$的极小生成元；为此，我们将证明引理5.2（1）中的不等式对每一个 $\mathcal{C} \in \mathscr{C}_q$都成立。设$\mathcal{C} \in \mathscr{C}_q$。

若 $A_1 \cup A_2 \notin \mathcal{C}$，则

$$\sum_{A\in\mathcal{C}} b'_A = \sum_{A\in\mathcal{C}} b_A \geq 2$$

由引理 5.2(1) 因为 $\mathbf{y}^{\mathbf{b}} \in {\mathcal{E}_q}^{(2)}$。

如果 $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{C}$，则 $\mathcal{C} = \{A_1 \cup A_2\} \cup \mathcal{K}$，对某个 $\mathcal{K} \subseteq 2^{[q]}$。由于 $\mathcal{C}$ 是 $[q]$ 的集合覆盖，

$$(A_1 \cup A_2) \cup \bigcup_{K\in\mathcal{K}} K = [q]$$

因此 $\{A_1, A_2\} \cup \mathcal{K}$ 也是 $[q]$ 的集合覆盖，从而包含一个极小集合覆盖 $\mathcal{C}'$。现在 $\mathcal{K}$ 不是 $[q]$ 的集合覆盖，所以 $\mathcal{C}'$ 必须包含 A_1 或 A_2 或两者。另一方面，由于 $\mathcal{C}$ 是极小的，

$$K' \not\subseteq A_1 \cup A_2 \cup \bigcup_{\substack{K\in\mathcal{K}\\ K\neq K'}} K \quad \text{for all} \quad K' \in \mathcal{K}$$

这意味着 $\mathcal{K}$ 的所有元素都必须保留在 $\mathcal{C}'$ 中。由此可得

$$\mathcal{C}' = \quad \{A_1, A_2\} \cup \mathcal{K} \quad \text{or} \quad \{A_2\} \cup \mathcal{K} \quad \text{or} \quad \{A_1\} \cup \mathcal{K}.$$

回顾一下，$\mathbf{y}^{\mathbf{b}} \in {\mathcal{E}_q}^{(2)}$。结合引理 5.2(1) 以及 $b_{A_1} = b_{A_2} = 0$这一事实，

$$\sum_{A\in\mathcal{K}} b_A = \sum_{A\in\mathcal{C}'} b_A \geq 2.$$

于是我们有

$$\sum_{A\in\mathcal{C}} b'_A = b'_{A_1\cup A_2} + \sum_{A\in\mathcal{K}} b'_A \geq \sum_{A\in\mathcal{K}} b'_A = \sum_{A\in\mathcal{K}} b_A \geq 2.$$

因此，根据引理 5.2(1)，我们有

$$\frac{\mathbf{y}^{\mathbf{b}}}{y_{A_1\cup A_2}} = \mathbf{y}^{\mathbf{b}'} \in {\mathcal{E}_q}^{(2)},$$

这与$\mathbf{y}^{\mathbf{b}}$的极小性矛盾。因此 $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{D}$。 □

接下来我们证明，f_X 上述描述的单项式构成 ${\mathcal{E}_q}^{(2)}$的极小生成集。结合定理 5.6 和引理5.4 可得

$$\mathrm{Mingens}({\mathcal{E}_q}^2) \subseteq \mathrm{Mingens}({\mathcal{E}_q}^{(2)}) = \Omega_q^2.$$

值得强调的是，${\mathcal{E}_q}^2$ 的极小生成元仍然是${\mathcal{E}_q}^{(2)}$的极小生成元，这在处理符号幂时并不常见。通常，符号幂 $I^{(2)}$具有次数较低的生成元，这些生成元会整除常规幂 I^2的某些生成元。然而，根据引理 ${\mathcal{E}_q}^{(2)}$ 5.4，的所有生成元都具有相同的次数，而一般 I 的次数差异则通过 ψ_I 映射加以处理。

定理 5.6。对于任意 $q \geq 1$，我们有

$$\mathrm{Mingens}({\mathcal{E}_q}^{(2)}) = \Omega_q^2.$$

证明。我们分别证明每个包含关系。

$\Omega_q^2 \subseteq \mathrm{Mingens}(\mathcal{E}_q{}^{(2)})$的证明。 首先证明 f_X 属于 $\mathcal{E}_q{}^{(2)}$ 对任意非空子集 X的 $[q]$。若 $|X|=1$ 则由引理 5.4， $f_X \in \mathcal{E}_q{}^2 \subseteq \mathcal{E}_q{}^{(2)}$ 如所需。现在假设 $|X| \geq 2$，此时， $q \geq 2$也成立。令

$$f_X = \mathbf{y}^{\mathbf{b}} \quad \text{with} \quad \mathbf{b} = \sum_{\emptyset \neq A \subseteq [q]} b_A \mathbf{e}_A \in \mathbb{N}^{2^q-1}.$$

由等式（5.1），可得

$$b_A = \begin{cases} 2 & \text{if } X \subseteq A, \\ 0 & \text{if } A \cap X = \emptyset, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.3}$$

根据引理 5.2(1)，只需证明：若 $\mathcal{C} \in \mathscr{C}_q$ 是 $[q]$的极小覆盖集，则

$$\sum_{A \in \mathcal{C}} \mathbf{b}_A \geq 2. \tag{5.4}$$

固定 $\mathcal{C} \in \mathscr{C}_q$。若 $X \subseteq A$对某个 $A \in \mathcal{C}$成立，则由等式（5.3）可知等式（5.3）成立，因此不妨设 $X \not\subseteq A$ 对所有 $A \in \mathcal{C}$均成立。因此，由于 $|X| \geq 2$ 且 $\mathcal{C}$ 覆盖了 $[q]$，至少有两个不同的集合（记作 A_1、 $A_2 \in \mathcal{C}$）与 X有非空交集，即 $A_1 \cap X \neq \emptyset$ 且 $A_2 \cap X \neq \emptyset$。于是 b_{A_1}、$b_{A_2} \geq 1$，等式（5.4）中的不等式得证，从而完成了 $f_X \in \mathcal{E}_q{}^{(2)}$ 的论证。

接下来我们证明 f_X 是 $\mathcal{E}_q{}^{(2)}$ 的极小生成元。为此，我们证明

$$\frac{f_X}{y_A} \notin \mathcal{E}_q{}^{(2)} \quad \text{for all} \quad y_A \in \mathrm{Supp}(f_X).$$

固定 $y_A \in \mathrm{Supp}(f_X)$ 并令 $\mathbf{y}^{\mathbf{b}'} = \frac{f_X}{y_A}$，于是 $\mathbf{b}' = \mathbf{b} - \mathbf{e}_A$。根据公式（5.3），需要考虑两种情况。

- 若 $A = [q]$，则 $X \subseteq A$ 且 $b'_A = b_A - 1 = 2 - 1 = 1$。由于 $\{A\} = \{[q]\} \in \mathscr{C}_q$，由引理 5.2(1) 可得 $\mathbf{y}^{\mathbf{b}'} \notin \mathcal{E}_q{}^{(2)}$。
- 若 $A \neq [q]$，由于 $y_A \in \mathrm{Supp}(f_X)$，我们有 $A \cap X \neq \emptyset$。根据公式（5.3），若 $X \subseteq A$，则 $b_A = 2$ 且 $b_{A^c} = 0$；若 $X \not\subseteq A$，则由于 $A \cap X$ 和 $A^c \cap X$ 均非空，因此$b_A = b_{A^c} = 1$。因此

$$b'_A + b'_{A^c} = b_A - 1 + b_{A^c} = 2 - 1 < 2.$$

由于 $\{A, A^c\} \in \mathscr{C}_q$，由引理 5.2(1) 可知 $\mathbf{y}^{\mathbf{b}'} \notin \mathcal{E}_q{}^{(2)}$。

因此， f_X 是 $\mathcal{E}_q{}^{(2)}$的极小生成元。

证明$\mathrm{Mingens}(\mathcal{E}_q{}^{(2)}) \subseteq \Omega_q^2$ 设

$$\mathbf{y}^{\tilde{\mathbf{b}}} \in \mathrm{Mingens}(\mathcal{E}_q{}^{(2)}) \quad \text{with} \quad \tilde{\mathbf{b}} = \sum_{\emptyset \neq A \subseteq [q]} \tilde{b}_A \mathbf{e}_A \in \mathbb{N}^{2^q-1}.$$

假设 $f_{[q]} \mid \mathbf{y}^{\tilde{\mathbf{b}}}$。由于 $f_{[q]} \in \Omega_q^2$ 是 $\mathcal{E}_q{}^{(2)}$ 的一个极小生成元，根据上述包含关系，那么 $\mathbf{y}^{\mathbf{b}} = f_{[q]} \in \Omega_q^2$ 如所需。从现在起，假设（见引理 5.4）

$$f_{[q]} = \mathbf{y}^{\mathbf{1}+\mathbf{e}_{[q]}} \nmid \mathbf{y}^{\tilde{\mathbf{b}}}.$$

˜ ˜由此可知，要么 $b_{X'}=0$ 对于某个非空真子集 X' 属于 $[q]$，要么 $b_{[q]}<2$。然而，˜ ˜$b_{[q]}=2$ 根据引理 5.2(2)，因此存在一个 $X'\notin\{\emptyset,[q]\}$ 满足 $b_{X'}=0$。根据引理 5.2(2)˜每个 $b_A\leq 2$，因此我们设

$$\mathcal{D}:=\{A\subseteq[q]\colon \tilde{b}_A=0\}\quad\text{and}\quad \mathcal{D}':=\{A\subsetneq[q]\colon \tilde{b}_A=2\},$$

并写作

$$\tilde{\mathbf{b}}=\mathbf{1}+\mathbf{e}_{[q]}+\sum_{A\in\mathcal{D}'}\mathbf{e}_A-\sum_{A\in\mathcal{D}}\mathbf{e}_A.$$

注意到 $X'\in\mathcal{D}$，因此 $\mathcal{D}\neq\emptyset$。由于 $\mathbf{y}^{\tilde{\mathbf{b}}}\in\mathrm{Mingens}(\mathcal{E}_q{}^{(2)})$ 根据引理5.5， $\mathcal{D}$ 存在一个最大元 X （关于包含关系）。令 $f_{X^c}=\mathbf{y}^{\mathbf{b}'}$。于是有（见公式（5.1））

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{b}}-\tilde{\mathbf{b}}'&=\Big(\mathbf{1}+\mathbf{e}_{[q]}+\sum_{A\in\mathcal{D}'}\mathbf{e}_A-\sum_{A\in\mathcal{D}}\mathbf{e}_A\Big)-\Big(\mathbf{1}+\mathbf{e}_{[q]}+\sum_{X^c\subseteq A}\mathbf{e}_A-\sum_{A\subseteq X}\mathbf{e}_A\Big)\\&=\Big(\sum_{A\in\mathcal{D}'}\mathbf{e}_A-\sum_{X^c\subseteq A}\mathbf{e}_A\Big)+\Big(\sum_{A\subseteq X}\mathbf{e}_A-\sum_{A\in\mathcal{D}}\mathbf{e}_A\Big).\end{aligned}$$

注意到

$$\Big(\sum_{A\subseteq X}\mathbf{e}_A-\sum_{A\in\mathcal{D}}\mathbf{e}_A\Big)\geq\mathbf{0}$$

因为若 $A\in\mathcal{D}$，则 $A\subseteq X$ 因为 X 是 $\mathcal{D}$的最大元。对于和的另一差，˜ ˜若 $X^c\subseteq A$，则由引理 5.2(3)，由于 $b_X=0$ 我们必有 $b_A\geq 2$，这意味着 $A\in\mathcal{D}'$。因此

$$\Big(\sum_{A\in\mathcal{D}'}\mathbf{e}_A-\sum_{X^c\subseteq A}\mathbf{e}_A\Big)\geq\mathbf{0}.$$

因此， ˜$\mathbf{b}-\tilde{\mathbf{b}}'\geq\mathbf{0}$，所以 $f_{X^c}=\mathbf{y}^{\tilde{\mathbf{b}}'}\mid\mathbf{y}^{\tilde{\mathbf{b}}}$。根据假设，$\mathbf{y}^{\tilde{\mathbf{b}}}$ 是$\mathcal{E}_q{}^{(2)}$的极小生成元，并且 $f_{X^c}\in\mathcal{E}_q{}^{(2)}$ 由第一个包含关系可知，因此$\mathbf{y}^{\mathbf{b}}=f_{X^c}\in\Omega_q^2$，如所求。□

现在我们说明如何利用定理 5.6 求出无平方因子单项式理想的第二符号幂的生成元 I，并以三角形的边理想为例。此例还表明，尽管 $\mathcal{E}_q{}^{(2)}$ 的生成元次数相同，但在映射ψ_I 下可能会改变，而且极小生成元的像不一定是极小生成元。

Exa例 5.7。 设 $q=3$， $X=\{1,2,3\}$，以及 $Y=\{1,2\}$。根据定义（见等式（5.1）），

$$f_X=f_{\{1,2,3\}}=y_1y_2y_3y_{12}y_{13}y_{23}y_{123}^2,$$
$$f_Y=f_{\{1,2\}}=y_1y_2y_{12}^2y_{13}y_{23}y_{123}^2=\epsilon_1\epsilon_2.$$

由定理5.6可知， $f_{\{1,2,3\}}\in\mathcal{E}_3{}^{(2)}$ 但 $f_{\{1,2,3\}}\notin\mathcal{E}_3{}^2$。

考虑单项式理想 $I=(x_1x_2,\ x_1x_3,\ x_2x_3)$。那么映射 ψ_I 由下式给出 y

$$\psi_I(y_A)=\begin{cases}x_1 & \text{if } A=\{1,2\}\\ x_2 & \text{if } A=\{1,3\}\\ x_3 & \text{if } A=\{2,3\}\\ 1 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

因此 $\psi_I(f_{\{1,2,3\}})=x_1x_2x_3\in I^{(2)}$， 但是 $\psi_I(f_{\{1,2,3\}})\notin I^2$因为 $\psi_I(f_{\{1,2,3\}})$是一个次数为 3 的单项式。根据定理 5.6， $f_{\{1,2\}}$ 和 $f_{\{1,2,3\}}$ 都是 $\mathcal{E}_3{}^{(2)}$ 的极小生成元，不过

$\psi_I(f_{\{1,2\}}) = x_1^2x_2x_3$，它是 $\psi_I(f_{\{1,2,3\}})$ 的倍数。因此，虽然 $\psi_I(f_{\{1,2\}}) \in I^{(2)}$，但它不再是极小生成元。

请注意，判断 $I^{(2)}$ 是否没有额外生成元的另一种方法见 [24]，其中使用了广义三角形。

根据定理 4.7，我们知道 $\mathcal{E}_q$ 的第二符号缺陷为任意含有 q 个生成元的无平方因子单项式理想的符号缺陷提供了一个上界。作为定理 5.6的推论，我们可以明确给出第二符号缺陷的这个上界。

推论 5.8。 对于任意 $q \geq 1$，我们有

$$\operatorname{sdefect}(2, \mathcal{E}_q) = 2^q - 1 - q - \binom{q}{2}.$$

证明。 根据定理5.6，我们知道 $\operatorname{Mingens}(\mathcal{E}_q{}^{(2)}) = \Omega_q^2$。由引理 5.4，$f_X \in \mathcal{E}_q{}^2$ 当且仅当 $|X| \leq 2$。特别地，$\mathcal{E}_q{}^{(2)}/\mathcal{E}_q{}^2$ 由 $\{f_X$极小生成：$|X| > 2\}$，因此

$$\operatorname{sdefect}(2, \mathcal{E}_q) = 2^q - 1 - q - \binom{q}{2},$$

正如所需。 □

类似于命题 3.14中所描述的关于整闭包的情形，我们确定极值理想中属于符号幂但不属于常规幂的元素。这些元素稍后将用于通过映射 ψ_I检验无平方因子单项式理想的常规幂与符号幂是否相等。

命题 5.9。 设 $q \geq 3$ 和 $r \geq 2$ 为整数。则

$$h(r, q) = \mathbf{y}^{\mathbf{1}+\mathbf{e}_{[q]}}\epsilon_1^{r-2} \in \mathcal{E}_q{}^{(r)} \setminus \mathcal{E}_q{}^r. \tag{5.5}$$

证明。 由定理 5.6，$\mathbf{y}^{\mathbf{1}+\mathbf{e}_{[q]}} = f_{[q]} \in \mathcal{E}_q{}^{(2)}$，因此对于任意 $r \geq 2$，都有

$$h(r, q) = \mathbf{y}^{\mathbf{1}+\mathbf{e}_{[q]}}\epsilon_1^{r-2} \in \mathcal{E}_q{}^{(2)}\mathcal{E}_q{}^{r-2} \subseteq \mathcal{E}_q{}^{(2)}\mathcal{E}_q{}^{(r-2)} \subseteq \mathcal{E}_q{}^{(r)},$$

其中包含关系 $\mathcal{E}_q{}^{(a)}\mathcal{E}_q{}^{(b)} \subseteq \mathcal{E}_q{}^{(a+b)}$ 直接由无平方因子单项式理想的符号幂定义（定义 4.3）得到。剩下的工作是证明 $h(r, q) \notin \mathcal{E}_q{}^r$。事实上，若 $q \geq 4$，则由命题 3.14 可知，$g(r, q)$ 是 $h(r, q)$ 的倍数，不属于 $\mathcal{E}_q{}^r$。因此，如所要求，$h(r, q) \notin \mathcal{E}_q{}^r$。现在假设 $q = 3$。假设 $h(r, 3) \in \mathcal{E}_3{}^r$。由于

$$\deg h(r, 3) = \deg \mathbf{y}^{\mathbf{1}+\mathbf{e}_{[3]}} + (r-2)\deg \epsilon_1 = 8 + 4(r-2) = 4r$$

且 $\mathcal{E}_3{}^r$ 的所有极小单项式生成元的次数均为 $4r$，假设 $h(r,3) \in \mathcal{E}_3{}^r$ 实际上意味着 $h(r,3) \in \operatorname{Mingens}(\mathcal{E}_3{}^r)$。换言之，对于某些非负整数 n_1, n_2, n_3，我们可以令 $h(r, 3) = \epsilon_1^{n_1}\epsilon_2^{n_2}\epsilon_3^{n_3}$，其中 $n_1 + n_2 + n_3 = r$。注意，对于某个不被 y_1、y_2 和 y_3 整除的单项式 h'，有 $h(r, 3) = y_1^{n_1}y_2^{n_2}y_3^{n_3}h'$。于是我们有

$$y_1^{n_1}y_2^{n_2}y_3^{n_3}h' = h(r, 3) = \mathbf{y}^{\mathbf{1}+\mathbf{e}_{[3]}}\epsilon_1^{r-2} = y_1^{r-1}y_2y_3h''$$

对于某个单项式 h''。由于 h' 不能被 y_1、y_2 和 y_3 整除，这就迫使 $n_1 \geq r-1$ 和 $n_2, n_3 \geq 1$。这意味着 $r = n_1 + n_2 + n_3 \geq r + 1$，矛盾。因此 $h(r, 3) \notin \mathcal{E}_3{}^r$。□

我们通过将上述关于 $\mathcal{E}_q$ 的性质的结果转化为适用于任意由 I 生成的 q 无平方单项式理想的论述，来结束本节。注意，这一结果可以看作是定理3.16的符号幂类比。

定理 5.10。设 I 是多项式环 R 中的一个理想，且 $q \geq 1$ 是其极小平方自由单项式生成元，令 $h(r,q)$ 如公式 (5.5)所述。以下结论成立：

(1) 若 $q \geq 3$、$r \geq 2$ 和 $\psi_I(h(r,q)) \notin I^r$，则 $I^{(r)} \neq I^r$；*(2)* 若 $q \leq 2$，则对所有 $r \geq 1$ 都有 $I^{(r)} = I^r$；*(3)* 若 $q = 3$，则 $I^{(2)} = I^2 + (\psi_I(h(2,3)))$；*(4)* $I^{(2)} = (\psi_I(f_X) : \emptyset \neq X \subseteq [q])$，其中 f_X 如公式（5.1）所述；

(5) $\mathrm{sdefect}(2, I) \leq 2^q - 1 - q - \binom{q}{2}$。

证明。由于 $h(r,q) \in \mathcal{E}_q{}^{(r)}$ 根据命题 5.9，定理 4.4 推出 $\psi_I(h(r,q)) \in I^{(r)}$。因此，陈述（1）得证。

若 $q = 2$，陈述（2）恰好是推论 4.6。另一方面，若 $q = 1$，$\mathcal{E}_1$ 是一个主理想，因此陈述（2）成立。

由等式（5.2），我们有 $\mathcal{E}_3{}^{(2)} = \mathcal{E}_3{}^2 + (f_{[3]}) = \mathcal{E}_3{}^2 + (h(2,3))$。陈述（3）随即由定理 4.4 和命题 2.7(3) 得出。

由定理 5.6，我们有 $\mathcal{E}_q{}^{(2)} = (f_X : \emptyset \neq X \subseteq [q])$。陈述（4）随即通过将环同态 ψ_I 应用于此等式并运用定理 4.4得出。

最后，陈述（5）由定理4.7 和推论 5.8得出。 □

6. 通过 ψ_I 求自由分解和贝蒂数

本节重新探讨 [5] 中的一个结果，该结果指出，对于任意由 q 个无平方单项式生成的理想 I，$\mathcal{E}_q{}^r$ 的贝蒂数界定了幂 I^r 的贝蒂数。[10]，进一步推广了这一结果，并给出了一个多重分次版本。其主要应用是计算 $\mathcal{E}_q{}^r$ 的贝蒂数，从而为 I^r 的贝蒂数给出显式界，其中 q 或 r（[4, 10]）取较小值。此处呈现的结果源于这样一个观察：鉴于本文的结果，可以采用与证明 [10, 定理 3.8] 相同的方法，证明 I^r 的贝蒂数以及 $I^{(r)}$ 的贝蒂数，分别也受 $\mathcal{E}_q{}^r$ 的贝蒂数以及 $\mathcal{E}_q{}^{(r)}$ 的贝蒂数界定。

设 $S = \mathbf{k}[z_1, \ldots, z_s]$（其中 $\mathbf{k}$ 是一个域）为一个赋有（不一定是标准）分次的多项式环。若正合序列 $F_\bullet$ 的形式如下，则称它为单项式理想 J 的**分次自由消解**：

$$0 \to F_d \xrightarrow{\partial_d} \cdots \to F_i \xrightarrow{\partial_i} F_{i-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \tag{6.1}$$

其中 $J \cong F_0/\mathrm{im}(\partial_1)$，且每个映射 ∂_i 都是分次的，也就是说，它保持齐次元素的次数。若满足 $\partial_i(F_i) \subseteq (z_1, \ldots, z_s)F_{i-1}$ 对每个 $i > 0$均成立，则称方程 (6.1) 中的自由消解为极小消解。对每个 $i \geq 0$，贝蒂数 $\beta_i^S(J)$定义为自由 S-模 F_i 的秩，其中 $F_\bullet$ 是 J的一个极小消解。

贝蒂数的定义还可以进一步细化，以考虑S的分次。下面介绍 S 赋予标准$\mathbb{Z}^s$-多重分次时所用的记号。在这种情况下，由于 $\mathbb{N}^s$ 与 S中的所有单项式一一对应，因此单项式$\mathbf{m}$ 的多重次数就视为该单项式本身。于是，每个 F_i 都可以写成一维分次自由 S-模的直和，

其中每个模记作 $S(\mathbf{m})$，其中$\mathbf{m}$是某个单项式，表示基的多重次数为$\mathbf{m}$。令$\mathrm{LCM}(J)$表示 J 的最小公倍数格。因此，当方程（6.1）是极小的，

$$F_i \cong \bigoplus_{\mathbf{m}\in \mathrm{LCM}(J)} S(\mathbf{m})^{\beta_{i,\mathbf{m}}^S(J)}$$

其中 $\beta_{i,\mathbf{m}}^S(J)$ 是 J 的**多重分次贝蒂数**，它们是不变量 J.

为陈述我们的结果，我们给出一个一般性表述，它复现了 [10, 定理 3.8] 的思想，并可具体化为幂的整闭包和符号幂。在这一更一般的设定中，我们考虑上述环 $R = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ 和多项式环 S，以及环同态 $\psi\colon S \to R$。在我们的应用中，环 S 将是环 $S_{[q]}$，环映射 ψ 将是环同态 ψ_I，其中 I 是由 q 个无平方单项式生成的固定理想。

在本节余下部分，假设 R 具有标准的 $\mathbb{Z}^n$-多重分次。为了使映射 ψ 齐次，我们需要在 S 上赋予非标准多重分次。我们在 S 上定义一种非标准分次，使得 S 中单项式$\mathbf{m}$ 的多重次数与 $\psi(\mathbf{m})$ 的标准多重次数相同。一个赋有标准分次的 S-模 M 将按照 [10] 中所述重新分次，从而成为关于非标准多重分次的分次模。随后，这种分次可诱导到分次自由分解上。$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$为区分这两种分次，对于分别赋予上述非标准分次的环 S、模 M 和自由分解 $F_\bullet$，我们分别记作 S、 M、 $F_\bullet$。

定理 6.1（**（极值理想给出贝蒂数的上界）**。设 k 是一个域，且 $\psi\colon S \to R$是一个环同态，其中 S 和 R 是 k 上的多项式环。令 $\mathcal{J}$ 表示 S 中由单项式 $u_1, \ldots, u_q$ 生成的理想，并令 $J = \psi(\mathcal{J})$。若

$$\psi\left(\mathrm{lcm}(u_{i_1}, \ldots, u_{i_t})\right) = \mathrm{lcm}(\psi(u_{i_1}), \ldots, \psi(u_{i_t}))$$

对所有 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_t \le q$，则以下结论成立：

(1) 若 $F_\bullet$ 是 S上 $\mathcal{J}$ 的多分次自由分解，则 $F_\bullet \otimes_{\widetilde{S}} R$ 是 R上 J 的多分次自由分解，其中在张量积中， R 通过同态 ψ视为一个分次$\widetilde{\ }S$-模。

(2) 若 $\mathbf{m} \in \mathrm{LCM}(J)$，则

$$\beta_{i,\mathbf{m}}^R(J) \le \sum_{\substack{\mathbf{u}\in \mathrm{LCM}(\mathcal{J}) \\ \psi(\mathbf{u}) = \mathbf{m}}} \beta_{i,\mathbf{u}}^S(\mathcal{J}).$$

(3) 若 $i \ge 0$，则

$$\beta_i^R(J) \le \beta_i^S(\mathcal{J}).$$

特别地，若 q 和 r 是正整数， I 是 R中的一个理想，且 $S = S_{[q]}$，则在以下每种情形中，结论 *(1)-(3)* 均成立

$$(\mathcal{J}, J) = (\mathcal{E}_q{}^r, I^r); \quad (\mathcal{J}, J) = (\overline{\mathcal{E}_q{}^r}, \overline{I^r}); \quad (\mathcal{J}, J) = (\mathcal{E}_q{}^{(r)}, I^{(r)}).$$

证明。 (1)-(3) 的证明与 [10, 定理 3.8], 的证明完全相同，因此我们不再重复。证明的关键在于说明

$$\mathrm{Tor}_i^S(S/\mathcal{J}, R) = 0 \quad \text{for all} \quad i > 0.$$

这是利用单项式理想的 Taylor 分解以及映射 ψ保持最小公倍数这一事实完成的。

最后，我们将 (1)-(3) 应用于 $S = S_{[q]}$ 与 $\psi = \psi_I$： $S_{[q]} \to R$，它们根据命题 2.7(5) 满足假设。若 $\mathcal{J} = \mathcal{E}_q{}^r$ 则 $J = I^r$ 根据命题 2.7(3)。若 $\mathcal{J} = \mathcal{E}_q{}^r$ 则 $\overline{J} = I^r$根据定理 3.3 。若 $\mathcal{J} = \mathcal{E}_q{}^{(r)}$ 则 $J = I^{(r)}$ 根据定理4.4。 □

致谢。 本文的研究工作部分得到了 SLMath 2024年数学暑期研究项目的支持。Chau 得到了印孚瑟斯基金会的支持。Faridi 的研究得到了 NSERC 探索研究基金 2023-05929 的支持。Duval 的研究得到了西蒙斯合作基金 516801 的支持。作者感谢 Karen Smith 提出的宝贵问题和意见。

参考文献

[1] Cristiano Bocci 和 Brian Harbourne。理想的幂与符号幂的比较。《代数几何杂志》，19(3):399–417，2010。[2] Winfried Bruns、Bogdan Ichim、Richard Sieg、Tim Römer 和 Christof Söger。Normaliz：有理锥和仿射幺半群的算法。网址：https://normaliz.uni-osnabrueck.de。[3] Trung Chau、ART DUVAL、SARA FARIDI、THIAGO HOLLEBEN、SUSAN MOREY 和 Liana ‚Sega。通过极值理想研究无平方因子单项式理想的幂的关联素理想。预印本，2025。[4] Trung Chau、ART DUVAL、SARA FARIDI、THIAGO HOLLEBEN、SUSAN MOREY 和 Liana ‚Sega。实现极值理想幂的分解。arXiv:2502.*09585 [*math.AC*]*, 2025。[5] Susan M. Cooper、Sabine El Khoury、Sara Faridi、Sarah Mayes-Tang、Susan Morey、Liana M. ‚Sega 和 Sandra Spiroff。无平方因子单项式理想幂的单纯形分解。《代数组合》，7 107，2024 1 77( ): – 。[6] Susan M. Cooper、Robert J. D. Embree、Huy Tài Hà 和 Andrew H. Hoefel。单项式理想的符号幂。《爱丁堡数学会会刊》(2)，60(1):39–55，2017。[7] Hailong Dao、Alessandro De Stefani、Eloísa Grifo、Craig Huneke 和 Luis Núñez Betancourt。理想的符号幂。载于《奇点与叶状结构：几何、拓扑与应用》，Springer 数学与统计学进展第222卷，第387–432页。施普林格，查姆，2018。[8] Michael DiPasquale、Christopher A. Francisco、Jeffrey Mermin 和 Jay Schweig。通过整闭包研究渐近复发率。《美国数学会汇刊》，372(9):6655–6676，2019。[9] Ben Drabkin、Eloísa Grifo、Alexandra Seceleanu 和 Branden Stone。涉及符号幂的计算。《代数几何软件杂志》，9(1):71–80，2019。[10] Sabine El Khoury、Sara Faridi、Liana M. ‚Sega 和 Sandra Spiroff。极值理想幂的围巾复形与贝蒂数。《纯粹与应用代数杂志》，228(6):论文编号107577，32，2024。[11] Federico Galetto、Anthony V. Geramita、Yong-Su Shin 和 Adam Van Tuyl。理想的符号缺陷。《纯粹与应用代数杂志》，223(6):2709–2731，2019。[12] Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman。Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。网址：https://math.uiuc.edu/Macaulay2/。[13] Gert-Martin Greuel、Santiago Laplagne 和 Frank Seelisch。环的正规化。《符号计算杂志》，45(9):887–901，2010。[14] Elena Guardo、Brian Harbourne 和 Adam Van Tuyl。射影空间中正维子概形理想的渐近复发率。《数学进展》，246:114–127，2013。[15] Jürgen Herzog 和 Takayuki Hibi。《单项式理想》，数学研究生教材第260卷。施普林格出版社伦敦有限公司，伦敦，2011。[16] Craig Huneke、Daniel Katz 和 Javid Validashti。符号拓扑与阿代尔拓扑的等价性。《伊利诺伊数学杂志》，39(3):327–346，1995。[17] Craig Huneke 和 Irena Swanson。《理想、环与模的整闭包》，伦敦数学会讲义系列第336卷。剑桥大学出版社，剑桥，2006。[18] Gesa Kaempf 和 Christof Soeger。Normaliz：Macaulay2 中的 Normaliz 接口。版本 2.6。Macaulay2 软件包，网址：https://github.com/Macaulay2/M2/tree/master/M2/Macaulay2/ packages。[19] Wolfgang Krull。《无限代数数域中的理想理论 II》。《数学杂志》，31:527–557，1930。

[20] Wolfgang Krull。《一般赋值理论》。《纯粹与应用数学杂志》，167:160– 196，1932。[21] James S. Milne。《交换代数入门》。2020。版本 4.03——在线出版；网址：jmilne.org/math/xnotes/CA.pdf。[22] W. Frank Moore、Mark Rogers 和 Sean Sather–Wagstaff。《单项式理想及其分解》。Universitext。施普林格国际出版公司，查姆，瑞士，2018。[23] Benjamin Oltsik。单项式理想的符号缺陷。《代数通讯》，52(9):3996–4012，2024。[24] Giancarlo Rinaldo、Naoki Terai 和 Ken-Ichi Yoshida。关于 Stanley-Reisner 理想的二次幂。《交换代数杂志》，3(3):405–430，2011。[25] Achilleas Sinefakopoulos。关于由同一次数元素生成的 Borel 不变理想。《代数杂志》，319(7):2739–2760，2008。[26] Pooja Singla。极值理想的极小单项式约化与约化纤维环。《伊利诺伊数学杂志》，51(4):1085–1102，2007。[27] Irena Swanson 和 Siamak Yassemi。理想的幂、其整闭包与符号幂的正则度之差。《代数通讯》，51(11):4862–4865，2023。[28] Wolmer Vasconcelos。代数结构的复杂度次数。*arXiv:1402.1906 [math.AC]*, 2014。[29] Rafael H. Villarreal。《单项式代数》，《纯粹与应用数学专著与教科书》第238卷。Marcel Dekker, Inc.，纽约，2001。[30] Rafael H. Villarreal。边理想 ic-回归度的对偶定理。《欧洲组合学杂志》，109:论文编号103656，18，2023。