arXiv:2602.05101v1 [math.AP] 4 Feb 2026

带随机性的聚焦非线性薛定谔方程最大振幅解的Painlevé普适性类别

Aikaterini Gkogkou[1],Guido Mazzuca[1],和 Kenneth D. T-R McLaughlin[1]

[1]杜兰大学数学系，新奥尔良，路易斯安那州

2026年2月6日

摘要

我们证明了聚焦非线性薛定谔方程极值解的普适性。极值解是达到理论最大振幅并在 $N \to \infty$时发散的 N-孤子解。我们考虑离散特征值从次指数分布中随机抽取的极值解，并确定了两种不同的普适性类别，它们由谱的宏观结构决定：一种是*Painlevé–III* 怪波解，其中特征值取 $\lambda_j = v_j + i\mu_j$的形式；另一种是*Painlevé–V* 怪波解，其中 $\lambda_j = -\zeta\, j + v_j + i\mu_j$，且 $0 < \zeta < 1$。（两种情形下， μ_j 和 v_j 均为次指数随机变量。）因此，普适性可概括如下：无论特征值的具体分布如何，重标度解都局部收敛到一个确定性剖面；在第一种情形下，该剖面由 Painlevé-III 方程控制，在第二种情形下，则由 Painlevé-V 方程控制。这些结果表明，Painlevé 型怪波的形成是一种具有普适性的现象，且不受随机性的影响。

1 引言

怪波，常被称为异常波或巨浪，是异常巨大且自发产生的海洋波浪，其平均高度至少为周围波浪高度的三倍。它们极难预测，出人意料且神秘莫测。正如 Akhmediev 所描述 [2, 4], ，它们是“不知从何而来、消失得无影无踪”的波浪。从实际角度看，其不可预测性和极端振幅对船舶和海上平台构成严重危害，因此研究其形成与动力学至关重要。

历史上，怪波曾被斥为水手夸大其词的报告。如今，它们被公认为具有统计显著性的现象，代表着极端低概率事件。其罕见性使得统计方法和概率模型成为理解其形成机制的基础。例如，Dematteis 等人在 [16], 中运用大偏差理论，识别最可能的前驱波构型，并估计随机深海条件下极端怪波出现的概率。在海洋之外，怪波也见于光纤 [18, 22, 23, 31], 和等离子体 [6, 26], ，凸显了它们在各类非线性系统中的广泛存在。关于怪波现象及其物理应用的全面综述，我们建议读者参阅 Onorato 等人的综述 [28]。近来，已出现一些怪波存在的实验证据。例如，Chabchoub 等人 [13] 在受控水槽装置中实验生成并报告观测到了*Peregrine* 呼吸子，即怪波的原型模型。此外，Dematteis 等人 [15], 在长水槽中生成随机波，并证明怪波对应于随机统计模型所预测的罕见流体动力学瞬子构型。

水波可以用各种非线性波动方程有效描述。特别是，聚焦非线性薛定谔方程（NLS方程）

$$i\partial_t \psi = -\frac{1}{2}\partial_x^2 \psi - |\psi|^2 \psi\,, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{1.1}$$

是一个典型的用于弱非线性准单色波包慢调制的模型 in

深水，参见 [33]。佩雷格林呼吸子如下所示

$$\psi(x,t)=\left[1-\frac{4(1+2it)}{1+4x^2+4t^2}\right]e^{it}$$

由于其在空间和时间上都是局域的（尽管衰减缓慢），因此有人提出可将其作为怪波现象的可能模型。Peregrine 呼吸子一个特别显著的特征是，其峰值振幅达到背景波的三倍，$\psi_{\mathrm{bg}}(x,\ t)=e^{it}$。Peregrine 最初推导出该解 [29] ，用于描述恒定振幅背景上的极端水波事件；后来，它于 [13]首次在实验中生成并被观测到。除 Peregrine 呼吸子外，阿赫梅季耶夫呼吸子 [3, 5], 和库兹涅佐夫–马呼吸子 [24, 25] 也是聚焦型非线性薛定谔方程的相对简单的精确解，通常被视为怪波的模型。

从数学角度来看，某些类型的怪波已通过黎曼–希尔伯特方法得到广泛研究。例如，在 [8, 10], , Bilman、Ling 和 Miller 研究了一个具有 k 简单极点的黎曼-希尔伯特问题（RHP），并对极点位置进行缩放，使所有极点合并到同一点，形成一个 k阶极点。当 $k\to\infty$时，在极限情况下，他们证明了一个大k极限剖面的存在性，该剖面被称为无穷阶怪波，并用 Painlevé–III层级 [8]中的一个成员加以描述。其他研究则利用黎曼–希尔伯特分析，从高阶呼吸子解 [11], 或高阶孤子解 [7], , 或属于包含前述两类解的单参数族的高阶解 [9]中生成怪波。

聚焦型非线性薛定谔方程（1.1）是一个可积系统，正如扎哈罗夫和沙巴特在 [34]中所示。其拉克斯对表示为：

$$\partial_x\Phi=\begin{pmatrix}-iz & \psi\\ -\overline{\psi} & iz\end{pmatrix}\Phi,\quad \partial_t\Phi=\begin{pmatrix}-iz^2+\frac{i}{2}|\psi|^2 & z\psi+\frac{i}{2}\psi_x\\ -z\overline{\psi}+\frac{i}{2}\overline{\psi}_x & iz^2-\frac{i}{2}|\psi|^2\end{pmatrix}\Phi,\tag{1.2}$$

其中，$z\in\mathbb{C}$ 是谱参数，而 $\Phi=\Phi(z;\ x、\ t)$ 是（1.2）的同时解。非线性薛定谔方程有许多基本解，其中最著名的是单孤子解

$$\psi_s(x,t)=2\eta\ \mathrm{sech}\left(2\eta(x+2\xi t-x_0)\right)e^{-2i\left[\xi x+\left(\xi^2-\eta^2\right)t\right]}e^{-i\phi_0}$$

由四个参数表征：ξ、η、ϕ_0和 x_0。除孤子外，非线性薛定谔方程还具有丰富多样的其他解，包括周期波、准周期波、色散激波、呼吸子解、怪波解和多孤子解。在本文中，我们聚焦于多孤子解，并将其称为 N-孤子解，其中 N 表示孤子的数量。我们关注这些解达到最大振幅的情形，这对应于怪波剖面的形成。

由于非线性薛定谔方程具有可积性，因此可以通过逆散射变换（IST）求解。逆散射变换包含三个部分：直接散射问题、时间演化和反问题。关于聚焦型非线性薛定谔方程以及其他非线性偏微分方程的散射理论与逆散射理论的详细概述，请参阅 [1, 12] 。在直接问题中，可以提取散射数据，其中包括反射系数 $r(z)$、离散特征值 $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ （每个特征值对应一个孤子）以及归一化常数 $\{c_n\}_{n=1}^N$。在本文余下部分，我们将散射数据记为：

$$\mathcal{D}_N=\{r(z),\{\lambda_n,c_n\}_{n=1}^N\}.$$

散射数据的时间演化很简单：特征值不随时间变化，而反射系数和归一化常数则按如下形式显式演化：

$$\mathcal{D}_N(t)=\left\{r(z,t),\{\lambda_n,c_n(t)\}_{n=1}^N\right\}=\left\{r(z)e^{2itz^2},\{\lambda_n,c_ne^{2it\lambda_n^2}\}_{n=1}^N\right\}.\tag{1.4}$$

反问题可以表述为如下黎曼–希尔伯特问题（更多详情见 [12] ）：黎曼–希尔伯特问题 1.1。给定谱数据 $\mathcal{D}_N(t)$，求一个 2×2矩阵值函数 $M(z)$，使得：

- $M(z)$ 在 $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$中解析，但在位于 $\{\lambda_n,\ \lambda_n\}_{n=1}^N$的点处有简单极点。

- 对于 $z \in \mathbb{R}$， M 具有边界值 $M_+(z)$ 和 $M_-(z)$，它们满足跳跃关系

$$M_+(z) = M_-(z)\, J_M(z), \quad J_M = \begin{pmatrix} 1+|r(z)|^2 & \overline{r(z)}e^{-2i\theta(z;x,t)} \\ r(z)e^{2i\theta(z;x,t)} & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\theta(z;\ x,\ t) = zx + z^2 t$。

- 在 $\mathbb{C}^+$ 中的每个极点 λ_n 处， $M(z)$ 满足留数条件

$$\operatorname*{Res}_{\lambda_n} M(z) = \lim_{z\to\lambda_n} \left[M(z) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_n e^{2i\theta(\lambda_n;x,t)} & 0 \end{pmatrix} \right], \tag{1.5}$$

并且在 $\mathbb{C}^-$ 中的每个极点 λ_n 处:

$$\operatorname*{Res}_{\overline{\lambda_n}} M(z) = \lim_{z\to\overline{\lambda_n}} \left[M(z) \begin{pmatrix} 0 & -\overline{c_n}e^{-2i\theta(\overline{\lambda_n};x,t)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

- $M(z) = I + \mathcal{O}(z^{-1})$ 当 $z \to \infty$ 时。

由于我们关注纯孤子（即 无反射）解，因此令 $r(z) \equiv 0$ 对所有 $z \in \mathbb{C}$成立，此时 $\mathbb{R}$ 上的跳跃条件消失。因此，黎曼–希尔伯特问题1.1归结为寻找一个亚纯函数，其在上半平面内有 N 个简单极点，并在下半平面内有它们的复共轭；当 z 趋于无穷大时，该函数具有由黎曼–希尔伯特问题 1.1中的最后一个条件给出的渐近行为。

虽然逆散射变换和黎曼–希尔伯特问题分析为构造孤子解提供了强大的解析框架，但获得非线性薛定谔方程纯孤子解还有另一种等价方法：达布方法，也称为规范变换法。该方法通过对较简单的种子解（通常是平凡的零解）进行“规范变换”，迭代生成多孤子解。下文第3 节将介绍这种方法。

该方法的一个 重要应用是刻画极值多孤子解 $s.$
首先，众所周 知（例如，参见 [21]），一个 N孤子解满足以下不等式

$$|\psi_N(x,t)| \leqslant 2\sum_{n=1}^{N} \Im(\lambda_n), \quad \text{for all } x,t.$$

文献 [21] 还证明了这个上界是尖锐的。事实上，正如我们将看到的，对于任意一组 N特征值，都存在一族由一个参数确定的归一化常数 $\{c_n\}_{n=1}^N$，使得 $\psi_N(0,\ 0)$ 达到这个上界。我们将考察这些 N孤子极值解构成的序列，并证明当$N \to \infty$时，会出现新的普适行为。

作为 $N \to \infty$，我们建立了两个不同的普适性结果：(经过适当重标度的)解收敛到一个新的基本解，该基本解满足一个 Painlevé方程，且与（随机）离散特征值的分布无关。我们确定了两个不同的普适性类别，它们由离散特征值的结构区分：Painlevé–III 和 Painlevé–V 怪波解。在 Painlevé–III 情形下，离散特征值为

$$\lambda_j = v_j + i\mu_j,$$

而在 Painlevé–V 情形下，它们为

$$\lambda_j = -\zeta\, j + v_j + i\mu_j, \qquad 0 < \zeta < 1.$$

在这两种情形下， v_j 和 μ_j 均为次指数随机变量。因此，普适性可概括如下：无论振幅和速度的具体实现如何，只要它们是次指数随机变量，并且所选归一化常数能够使 N-孤子解达到最大值，所得最大峰值总是对应于 Painlevé–III 或 Painlevé–V 怪波轮廓，见图 1。

本文结构安排如下。第2 节介绍主要结果。第4 节和5节将给出确立这些结果的分析。更具技术性的证明留待附录。

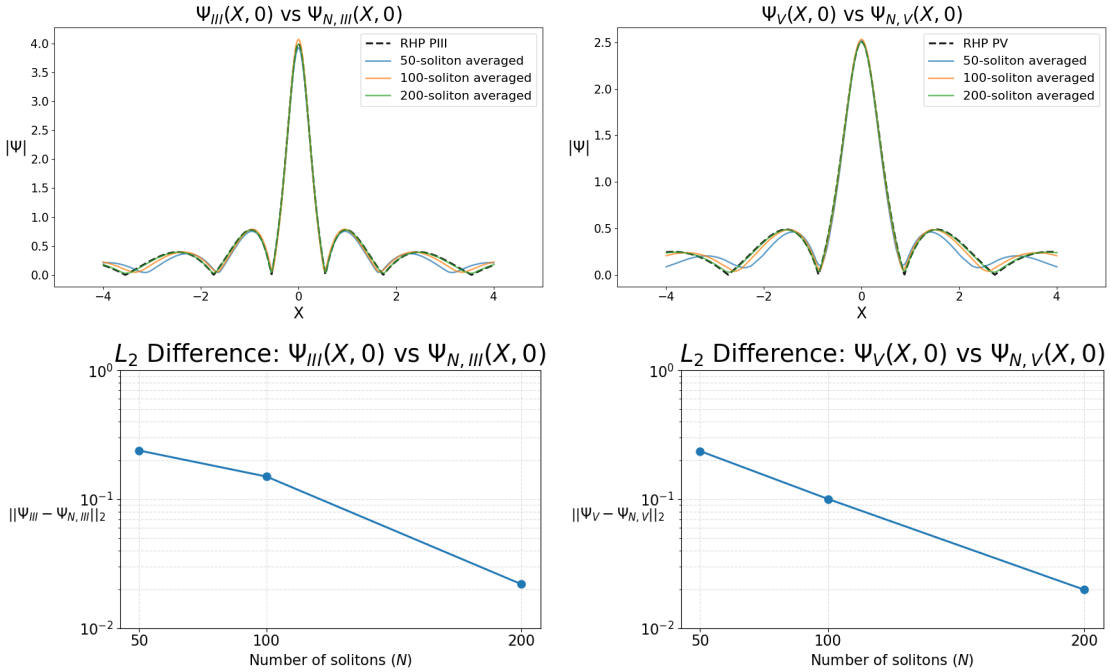

图1：**上图。**Painlevé III 和 V 怪波与随机最大孤子解（50−100−200孤子）的比较。极点选为 $\lambda_j = v_j + i\mu_j$ 和 $\lambda_j = -0.3j + v_j + i\mu_j$，其中 v_j 是独立同分布高斯随机变量 $\mathcal{N}(0,\ 15)$ 和 μ_j 是参数为 4（$\chi^2(4)$）的独立同分布卡方分布随机变量（左图），以及参数为 2 的独立同分布卡方分布随机变量（右图）。我们对 10 次实现取了平均。**下图。** $\|\Psi_{III}(X,\ 0) - \Psi_{N,\ III}(X,\ 0)\|_2$以及 $\|\Psi_V(X,\ 0) - \Psi_{N,\ V}(X,\ 0)\|_2$在 $N = 50$、100、200 时的半对数图，初始数据与前文相同。

2 结果陈述

本节将精确陈述我们的结果。首先，我们回顾次指数型随机变量的定义。

定义 2.1（参见 [32] 命题 2.6）。设 $\mathfrak{X}$ 为一个随机变量，称 $\mathfrak{X}$ 为次指数随机变量，若存在一个 $K > 0$ 使得

$$\mathbb{P}(|\mathfrak{X}| > t) \leqslant 2\exp\left(-\frac{t}{K}\right), \qquad \forall\, t \geqslant 0\,.$$

次指数随机变量的一个经典例子是 $\chi^2(\alpha)$-分布，$\alpha \in \mathbb{R}$，它是概率密度函数为

$$f(x;\alpha) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha/2-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\alpha/2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} & x \geqslant 0 \\ \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 $\Gamma(x)$ 是伽马函数 [27,第 5]章。现在我们引入散射数据，并陈述本文中始终采用的第一组假设。

假设 1（Painlevé-III 怪波）。对于每个固定的 $N > 0$，我们按以下方式生成散射数据

$$\mathcal{D}_{N,III} = \left\{r \equiv 0, \{\lambda_n, c_n\}_{n=1}^{N}\right\}$$

如下。令极点为 $\lambda_n = v_n + i\mu_n$，在我们的概率计算中，假设如下：

1. 振幅 μ_n 是独立同分布（i.i.d.）随机变量

$$\mu_n \ \sim\ \mathcal{D}_1,$$

其中 $\mathcal{D}_1$ 是一个次指数随机变量，具有正支撑，均值为 $\mu_{\mathcal{D}_1}$；

2. 速度 v_n 是独立同分布（i.i.d.）随机变量

$$v_n \sim \mathcal{D}_2,$$

其中 $\mathcal{D}_2$ 是均值为 $v_{\mathcal{D}_2}$的次指数分布；

3. 归一化常数 c_n 是满足以下条件的随机变量

$$c_n = \prod_{\ell=1}^{N}(\lambda_n - \overline{\lambda_\ell}) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell\neq n}}^{N} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_\ell}. \tag{2.1}$$

我们将这组假设称为“Painlevé-III 怪波假设”。选择归一化常数（2.1）的重要性将在下述引理中说明。

引理2.1。 设 $\{\lambda_n,\}_{n=1}^N$ 是 $\mathbb{C}_+$中的任意一组特征值，并且归一化常数由 (2.1)给出。那么，相应的 N-孤子解是极值解，并满足

$$|\psi_N(0,0)| = 2\Im\left(\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\right).$$

该结果直接由定理 3.1得出，其证明见第3节。因此，对于每个正整数 N，在 Painlevé-III 怪波假设下，散射数据的任意一种实现都对应于非线性薛定谔方程的一个极值 N-孤子解，我们将其记为

$$\psi_{N,III}(x,t) = \psi(x,t;\mathcal{D}_{N,III}).$$

以下定理是我们的第一个普适性结果。

定理 2.2。 在满足 *Painlevé-III* 怪波假设的条件下，对于紧集 $\mathfrak{K}$ 中的所有 (X,T)，存在一个 $N_0 > 0$、一个常数 $C \equiv C(N_0, X, T) > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，使得对于所有 $N > N_0$，以下结论成立

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{2}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}\psi_{N,III}\left(\frac{2X}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}, \frac{4T}{N^2\mu_{\mathcal{D}_1}^2}\right) - \Psi_{III}(X,T)\right|\right] \leqslant CN^{-\varepsilon},$$

其中，均值是相对于由 $\{\mu_n、v_n\}_{n=1}^N$ 的分布所诱导的乘积测度取的。量 $\Psi_{III}(X、T)$ 是一个相对较新的非线性薛定谔方程基本解，由 *Bilman*、*Ling* 和 *Miller* *[8]*, 在下文中描述。此外，对于所有 $N > 0$, 该解满足$|\psi_{N、III}(0,0)| = 2\sum_{j=1}^{N}\mu_j$，因此 $\psi_{N、III}(x,t)$ 是一个极值解。

在 [8], 中，作者考虑了一列非线性薛定谔方程的解，这些解由一个亚纯黎曼-希尔伯特问题刻画，该问题具有一个高阶单极点（及其复共轭点）。随着极点阶数趋于∞，在适当的缩放和变换下，他们的工作得到了一个新的极限Riemann-Hilbert问题；对该问题的分析使他们发现了 $\Psi_{III}(X, T)$。他们建立了这一解的许多基本性质，并在定理4.7中加以汇总。特别是，他们证明了 $\Psi_{III}(X, T)$ 满足聚焦型非线性薛定谔方程（1.1），并通过以下关系明确建立了它与 Painlevé-III 方程在 $T = 0$ 处的联系

$$\Psi_{III}\left(-\frac{x^2}{8}, 0\right) = \frac{\kappa}{x^2}\exp\left(\int_1^x \frac{2}{u(s)}\,ds\right) \tag{2.3}$$

其中， $u(x)$ 是 Painlevé-III 方程的一个解

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{u}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \frac{1}{x}\frac{du}{dx} + \frac{4}{x} + 4u^3 - \frac{4}{u}$$

并且，方程（2.3）中的常数 κ 被固定为满足 $|\Psi_{III}(0, 0)| = 4$。注意， u 也由一个黎曼-希尔伯特问题刻画（而非由特定的初值或边值条件刻画）。

注记 2.1。 在（2.3）中，端点 1 的选取是任意的，可以考虑实轴上除零以外的任意点。

我们在第 2.2节的 4中证明。

注 2.2。 前述结果具有如下普适性：无论振幅和速度的具体分布如何，$\psi_{N,\ III}(x,\ t)$ 都是一个极值解，其峰值可用 Painlevé-III 方程的一个解来描述。

注 2.3. 我们注意到，点 $(0,\ 0)$ 的选择完全是任意的。事实上，可以利用非线性薛定谔方程的平移不变性，将函数 $|\psi_{N,\ III}(x,\ t)|$ 达到最大值的位置从 $(0,\ 0)$ 移至任意点 $(x_0,\ t_0)$。

注 2.4. 这一结果与 [8],一致，在那里得到了相同的函数 $u(x)$ 。

我们考虑的第二组假设如下。

假设 2 （Painlevé-V怪波）. 对每个固定的 $N>0$，我们生成散射数据

$$\mathcal{D}_{N,V}=\left\{r\equiv 0,\{\lambda_n,c_n\}_{n=1}^{N}\right\}$$

如下。固定 $0<\zeta<1$，令极点为 $\lambda_n=-\zeta\, n+v_n+i\mu_n$，在概率计算中我们作如下假设：

1. 振幅 μ_n 是独立同分布（i.i.d.）随机变量

$$\mu_n\ \sim\ \mathcal{D}_1,$$

其中，$\mathcal{D}_1$ 是取值为正、均值为 $\mu_{\mathcal{D}_1}$ 的次指数随机变量；

2. 速度 v_n 是独立同分布（i.i.d.）随机变量

$$v_n\ \sim\ \mathcal{D}_2,$$

其中，$\mathcal{D}_2$ 服从均值为 $v_{\mathcal{D}_2}$ 的次指数分布；

3. 归一化常数 c_n 是满足以下条件的随机变量

$$c_n=\prod_{\ell=1}^{N}(\lambda_n-\overline{\lambda_\ell})\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq n}}^{N}\frac{1}{\lambda_n-\lambda_\ell}. \tag{2.4}$$

因此，对于每个正整数 N，这些散射数据对应于非线性薛定谔方程的一个极值 N-孤子解（同样在 $(x,\ t)=(0,\ 0)$ 处达到理论最大值），我们将其记为

$$\psi_{N,V}(x,t)=\psi(x,t;\mathcal{D}_{N,V}).$$

我们将这组假设称为“Painlevé-V 怪波假设”。在此假设下，我们证明第二个普适性结果。

定理 2.3。 在 *Painlevé-V* 怪波假设下，对于紧集 $\mathfrak{K}$ 中的所有 $(X、\ T)$，存在一个 $N_0>0$、常数 $C\equiv C(N_0、\ X、\ T)>0$ 和 $\varepsilon>0$，使得对所有 $N>N_0$，以下结论成立

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{N}\psi_{N,V}\left(\frac{X}{N},\frac{T}{N^2}\right)-\Psi_V(X,T)\right|\right]\leqslant CN^{-\varepsilon},$$

其中，均值是关于由 $\{\mu_n、\ v_n\}_{n=1}^{N}$ 的分布诱导的乘积测度取得的。此外，对于所有 $N>0、\ |\psi_{N,\ V}(0、\ 0)|=2\sum_{j=1}^{N}\mu_j$，从而 $\psi_{N,\ V}(x、\ t)$ 是一个极值解。

量 $\Psi_V(X,\ T)$ 是聚焦型非线性薛定谔方程 *1.1* 的一个解，该方程由下述黎曼–希尔伯特问题 *5.5* 刻画。对于 $T=0$，$\Psi_V(X,\ T)$ 具有以下积分表示

$$\Psi_V(X,0)=\frac{\kappa}{X}\exp\left(-\frac{1}{2i\zeta}\int_1^{2i\zeta X}\frac{u(s)}{1-u(s)}ds\right) \tag{2.6}$$

其中 $u(x)$满足 *Painlevé-V* 方程

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\left(\frac{1}{2u}\pm\frac{1}{u-1}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)^2-\frac{1}{x}\frac{du}{dx}-2\frac{\mu_{\mathcal{D}_1}^2}{\zeta^2}\frac{(u-1)^2}{x^2}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{u}{x}-\frac{u(u+1)}{2(u-1)} \tag{2.7}$$

且 κ 满足 $|\Psi_V(0、\ 0)|=2\mu_{\mathcal{D}_1}$。

我们在第5节证明该定理。

备注 2.5。 端点 1在（2.6）中的选取是任意的，也可以考虑实轴上除零点以外的任意点。

备注 2.6。 黎曼-希尔伯特问题 5.5 以 $N \to \infty$的形式出现，因此解的存在性事先并不明确。定理5.6 和 5.7 证明了该问题解的存在性，以及新解 $\Psi_V(X,\ T)$。

备注 2.7。 我们指出，可以以更为特殊的方式选择极点的位置，例如考虑 $2N$ 按如下方式分布的极点：

$$\lambda_j = -j\zeta_1 + v_j + i\mu_j\,, \quad \lambda_{j+N} = j\zeta_2 + v_{j+N} + i\mu_{j+N} \quad j = 1, \dots, N\,,$$

其中 $\mu_j,\ v_j$ 是次指数随机变量，而范数化常数 c_j 按照（2.4）选取。利用这些初始数据，可以得到与 Painlevé VI 方程相关的不同通用剖面。进一步推广这一过程，可以得到与具有任意数量极点的富克斯系统的解相关的通用剖面。

3 达布方法与极值孤子解

本节简要介绍如何利用达布方法构造聚焦非线性薛定谔方程的纯孤子解，并说明该方法与极值多孤子解刻画之间的关联。关于这一方法的详细概述，请参阅 [19, 20]。

在达布框架下，用于刻画非线性薛定谔方程纯孤子解的参数与 IST 散射数据（1.4）有所不同（但二者等价）。我们将采用以下略有不同的记号来表示达布框架中的散射数据：

$$\mathfrak{D}_N(t) = \left\{r(z,t) \equiv 0, \{\lambda_n, p_n(t)\}_{n=1}^N\right\} = \left\{r(z,t) \equiv 0, \{\lambda_n, p_n e^{-2it\lambda_n^2}\}_{n=1}^N\right\}\,. \tag{3.1}$$

这里，p_n 是与每个孤子相关联的达布参数，其作用类似于 RHP 表述中的归一化常数 c_n 。具体步骤概述如下。令$\mathfrak{D}_n(0)$ 表示与前 n 个特征值 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ 及相应归一化常数 $\{p_1, \dots, p_n\}$对应的谱数据。迭代过程从平凡解开始

$$\psi_0(x,0) = 0,$$

与相应的扎哈罗夫–沙巴特（ZS）系统解（1.2）

$$\Phi_0(x,z) = \begin{pmatrix} e^{-izx} & 0 \\ 0 & e^{izx} \end{pmatrix}.$$

假设经过 $n-1$ 步后，我们构造出了 $(n-1)$孤子解 $\psi_{n-1}(x,\ 0)$ 其谱数据为 $\mathfrak{D}_{n-1}(0)$，由前 $n-1$ 个特征值及其对应的归一化常数组成。相应的 ZS 系统解记为 $\Phi_{n-1}(x,\ z)$。n孤子解的谱数据 $\mathfrak{D}_n(0)$ ，是通过向 $\mathfrak{D}_{n-1}(0)$中添加一个额外的特征值 λ_n 及其归一化常数 p_n而得到的。从这个意义上说，$\mathfrak{D}_{n-1}(0)$ 是直接从 $\mathfrak{D}_n(0)$ 中移除第 n个特征值及其归一化常数后得到的。于是，时刻 $t=0$ 的 n孤子解可由 $\psi_{n-1}(x,\ 0)$ 通过以下方式构造：

$$\psi_n(x,0) = \psi_{n-1}(x,0) + 2i(\lambda_n - \overline{\lambda_n})\frac{\overline{q_{n1}}q_{n2}}{|\mathbf{q}_n|^2},$$

其中，向量$\mathbf{q}_n = (q_{n1}, q_{n2})^\intercal$由 $\Phi_{n-1}(x,z)$ 以及谱数据 $\mathfrak{D}_n(0)$ 通过以下关系确定：

$$\mathbf{q}_n(x) = \overline{\Phi_{n-1}(x,\overline{\lambda_n})}\begin{pmatrix}1\\ p_n\end{pmatrix},$$

其中 $\Phi_{n-1}(x,\ z)$ 是与 $\psi_{n-1}(x,\ 0)$相对应的 ZS系统的解。第 n 个孤子的相应 ZS解 $\Phi_n(x,\ z)$可通过以下关系用 $\Phi_{n-1}(x,\ z)$ 表示

$$\Phi_n(x,z) = \chi_n(x,z)\cdot\Phi_{n-1}(x,z), \quad (\chi_n)_{m\ell} = \delta_{m\ell} + \frac{\lambda_n - \overline{\lambda_n}}{z-\lambda_n}\frac{\overline{q_{nm}}q_{n\ell}}{|\mathbf{q}_n|^2}, \quad m,\ell = 1,2,$$

其中 $\delta_{m\ell}$ 是克罗内克δ。通过迭代这一过程，从 ψ_0 和 Φ_0出发，每次添加一个孤子，即可构造非线性薛定谔方程的多孤子解 $\psi_N(x,\ 0)$。文献 [21], 分析了这一迭代 dressing 过程及其性质，并证明了以下结果。

设 $\psi_N(x,t)$ 表示借助达布方法、以谱数据 $\mathfrak{D}_N(t)$ 构造的多孤子解。则该解满足

$$\max_{x,t\in\mathbb{R}} |\psi_N(x,t)| \leqslant 2\sum_{n=1}^{N} \Im(\lambda_n), \tag{3.2}$$

并且对所有 $n=1,\dots,N$ 选取 $p_n=1$，则

$$\max_{x,t\in\mathbb{R}} |\psi_N(x,t)| = |\psi_N(0,0)| = 2\sum_{n=1}^{N} \Im(\lambda_n).$$

本质上，当 $\psi_N(x,t)$ 借助达布方法构造时，存在 p_n 的一个单参数族，即 $p_n=e^{i\eta}$，使该解达到其最大振幅。特殊选取 $\eta=0$可恢复上述等式，另见 [21] 中的命题1.1。

由于达布归一化参数为极值多孤子解提供了自然刻画，因此必须建立达布参数与逆散射变换归一化常数之间的精确对应，以便进行黎曼–希尔伯特分析。下述定理给出了这一对应。

定理 3.1. 考虑谱数据 $D_N(t)$，其与黎曼–希尔伯特问题 *1.1* 相关联，以及 $\mathfrak{D}_N(t)$，其与达布方法相关联，二者分别定义于式 (1.4)–(3.1)。设它们通过如下关系相联系：

$$c_n = \frac{1}{p_n}\prod_{\ell=1}^{N}(\lambda_n-\overline{\lambda_\ell})\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq n}}^{N}\frac{1}{\lambda_n-\lambda_\ell},$$

因此，由这两种方法得到的非线性薛定谔方程解相同。

该定理的证明见附录B。

注3.1。在本文中，我们选择 $p_n=e^{i\eta}$，其中 $\eta\in\mathbb{R}$，使得所得解在 $(x$处达到最大峰值，$t)=(0,\ 0)$。这一观察完成了引理2.1的证明。

4 Painlevé–III 怪波

本节证明定理2.2。首先，我们回顾次指数随机变量的一些性质；然后，我们证明定理2.2 在确定性意义下于子集 $\mathfrak{Q}_N\subseteq\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+^N$上成立；最后，借助前面提到的次指数随机变量的性质，我们完成证明。

4.1 概率背景

这里我们回顾一些次指数随机变量的性质，并用它们证明主定理。概率论专家可以跳过本节，因为其中只包含标准结果。

次指数随机变量自然地配备了以下范数 [32]；令 $\mathfrak{X}$为一个次指数随机变量，则可以定义以下范数

$$\|\mathfrak{X}\|_{\text{sub}} = \inf\{K>0 \mid \mathbb{E}\left[\exp(\mathfrak{X}/K)\right]\leqslant 2\}.$$

利用这个定义，我们可以陈述下面的引理，稍后将在证明中用到 [32, 推论 2.9。2]。

引理 4.1 （次指数伯恩斯坦不等式）。设 $\mathfrak{X}_1,\dots,\mathfrak{X}_N$ 是相互独立、均值为零的次指数随机变量，且 $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_N)\in\mathbb{R}^N$。那么，存在一个 $c>0$，使得对于每个$t>0$，都有

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{N} a_j\mathfrak{X}_j\right|\geqslant t\right)\leqslant 2\exp\left(-c\min\left(\frac{t}{\max_j||\mathfrak{X}_j||_{sub}\max_j|a_j|};\frac{t^2}{\max_j||\mathfrak{X}_j||_{sub}^2||\mathbf{a}||_2^2}\right)\right),$$

下面的引理是直接应用次指数随机变量定义的结果。

引理 4.2。 在假设 *1* 或 *2*下，存在一个 $\alpha > 0$ 与 N无关的常数，使得对所有 $t > 0$

$$\mathbb{P}\left(\max_{j=1,\dots,N} \mu_j \geqslant \alpha\left(\ln(N) + t\right) + \mu_{\mathcal{D}_1}\right) \leqslant 2e^{-t}.$$

v_j也有类似的结论。

证明。 令 $s > 0$，则通过应用标准的并集界以及次指数随机变量的定义，存在一个与 N 无关的常数 $\alpha > 0$，使得下式成立

$$\mathbb{P}\left(\max_{j=1,\dots,N} \mu_j > s\right) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(\mu_j - \mu_{\mathcal{D}_1} > s - \mu_{\mathcal{D}_1}) \leqslant 2N \exp\left(-\frac{s - \mu_{\mathcal{D}_1}}{\alpha}\right),$$

令 $s = \alpha(\ln(N) + t) + \mu_{\mathcal{D}_1}$，即可得出结论。 □

注 4。 1. 注意到，在前两个引理中， t 可以依赖于 N。这尤其意味着 t
以概率 lity

$$\mu_j \ll N^{\varepsilon}, \quad v_j \ll N^{\varepsilon}, \quad j = 1, \dots, N$$

对任意 $\varepsilon > 0$。

4.2 化归为 Painlevé-III 的模型问题

现在利用上述结果定义集合 $\mathfrak{Q}_N \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^N$，并证明定理2.2 的确定性版本成立。固定 $\frac{1}{4} < \delta < \frac{1}{2}$ 并定义以下集合

$$\Omega_{\delta,\mu} = \left\{\{\mu_j\}_{j=1}^N \mid \max_j |\mu_j| < N^{\delta}\right\}, \quad \Omega_{\delta,v} = \left\{\{v_j\}_{j=1}^N \mid \max_j |v_j| < N^{\delta}\right\}, \quad \Omega_{\delta} = \Omega_{\delta,v} \times \Omega_{\delta,\mu}, \tag{4.1}$$

$$V_{2\delta} = \left\{(\mu_1, \dots, \mu_N) \in \mathbb{R}_+^N \middle| \left|\sum_{j=1}^{N} \mu_j - N\mu_{\mathcal{D}_1}\right| \leqslant N^{2\,\delta}\right\}. \tag{4.2}$$

备注4. 2. 由引理 4.2 可知，存在一个常数 $C_1 > 0$ suc h
that

$$\mathbb{P}(\Omega_{\delta,\mu}^c) < \exp(-C_1 N^{\delta} + \ln(N)), \quad \mathbb{P}(\Omega_{\delta,v}^c) < \exp(-C_1 N^{\delta} + \ln(N))$$

显然，项 $\ln(N)$ 可以通过调整常数 C_1吸收。由引理 4.1，存在 $\varepsilon > 0$ 和 C_2，使得

$$\mathbb{P}(V_{2\delta}^c) < C_2 e^{-N^{\varepsilon}}. \tag{4.3}$$

本小节旨在证明以下定理

定理 *4.3*。固定 $\frac{1}{4} < \delta < \frac{1}{2}$，并定义 $\mathfrak{Q}_N := \Omega_\delta \cap (\mathbb{R}^N \times V_{2\delta})$，其中 Ω_δ 和 $V_{2\delta}$ 分别由方程 ***(4.1)-(4.2)*** 给出。在 ***Painlevé-III*** 怪波假设下，并假设$(\nu\ \mu) \in \mathfrak{Q}_N$；对于紧集 $\mathfrak{K}$ 中的所有 $(X、T)$，存在一个 $N_0 > 0$、一个常数 $C \equiv C(N_0、X、T) > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，使得对于所有 $N > N_0$，以下结论成立

$$\left|\frac{2}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}\psi_{N,III}\left(\frac{2X}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}, \frac{4T}{N^2\mu_{\mathcal{D}_1}^2}\right) - \Psi_{III}(X,T)\right| \leqslant CN^{-\varepsilon},$$

其中 $\Psi_{III}(X,\ T)$ 如定理 *2.2*所述。

4.2.1 确定性结果的证明

为证明前述定理，我们采用非线性薛定谔方程的逆散射的 RHP 表述。因此，考虑 RHP1.1，在我们的假设下其形式如下：

RHP 4.4。 在定理 4.3的假设下，求一个 2×2 矩阵值函数 $M(z)$ 使得 t:

- $M(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中是亚纯的，在点 $\{\lambda_j,\ \lambda_j\}_{j=1}^N$ 处有简单极点。

- 在上半平面的每个极点 λ_j 处， $M(z)$ 满足留数条件

$$\operatorname*{Res}_{\lambda_j} M(z) = \lim_{z\to\lambda_j}\left[M(z)\begin{pmatrix}0 & 0\\ c_j e^{2i\theta(\lambda_j;x,t)} & 0\end{pmatrix}\right],$$

其中 $\theta(z;\ x,\ t) = zx + z^2 t$，且在下半平面的每个极点 λ_j 处：

$$\operatorname*{Res}_{\overline{\lambda_j}} M(z) = \lim_{z\to\overline{\lambda}_j}\left[M(z)\begin{pmatrix}0 & -\overline{c}_j e^{-2i\theta(\overline{\lambda}_j;x,t)}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right].$$

- 当 $z\to\infty$ 时， $M(z)$ 具有如下展开式

$$M(z;x,t) = I + \frac{1}{2iz}\begin{pmatrix}-m_{N,III}(x,t) & \psi_{N,III}(x,t)\\ \overline{\psi}_{N,III}(x,t) & m_{N,III}(x,t)\end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

其中 $m_{N,\ III}(x,\ t) = \int_x^\infty |\psi_{N,\ III}(s,\ t)|^2 \mathrm{d}s$。

由于 $(\boldsymbol{\mu},\ \mathbf{v}) \in \mathfrak{Q}_N := \Omega_\delta \cap (\mathbb{R}^N \times V_{2\delta})$，当 N 足够大时，我们可以考虑一个以原点为中心、半径为 $N\mu_{\mathcal{D}_1}/2$ 的圆 Γ，它包含所有极点 λ_j。我们定义如下变换

$$B(z) = \begin{cases} M(z)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & a(z)e^{-2i\theta(z)}\\ -a^{-1}(z)e^{2i\theta(z)} & 1\end{pmatrix}, & z \text{ inside } \Gamma\\ \\ M(z), & z \text{ outside } \Gamma\end{cases}$$

这里我们引入以下记号表示布拉施克因子 $a(z)$

$$a(z) = \prod_{j=1}^{N}\frac{z-\lambda_j}{z-\overline{\lambda}_j}\,. \tag{4.4}$$

通过直接计算，可以证明矩阵 $B(z)$满足以下黎曼–希尔伯特问题 .

黎曼–希尔伯特问题 4.5. 求一个 2×2 矩阵值函数 $B(z)$，使得：

- $B(z)$ 在 $\mathbb{C}\backslash\Gamma$中解析，跳跃条件为：

$$B_+(z) = B_-(z)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & a(z)e^{-2i\theta(z)}\\ -a^{-1}(z)e^{2i\theta(z)} & 1\end{pmatrix},\quad z\in\Gamma$$

当 $z\to\infty$时，• $B(z)$ 具有以下展开式

$$B(z) = \ I + \frac{1}{2iz}\begin{pmatrix}-m_{N,III}(x,t) & \psi_{N,III}(x,t)\\ \overline{\psi}_{N,III}(x,t) & m_{N,III}(x,t)\end{pmatrix} + \mathcal{O}(z^{-2}).$$

现在考虑以下缩放

$$z = \frac{N\mu_{\mathcal{D}_1}Z}{2}\,,\quad x = \frac{2X}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}\,,\quad t = \frac{4T}{\mu_{\mathcal{D}_1}^2 N^2}\,. \tag{4.5}$$

在此区域中，可立即得到 $z\in\Gamma$：

$$\begin{aligned}\ln(a(z)) &= \ln(a\,(NZ\mu_{\mathcal{D}_1}/2))\\ &= \sum_{j=1}^{N}\ln\left(\frac{NZ\mu_{\mathcal{D}_1}}{2} - v_j - i\mu_j\right) - \ln\left(\frac{NZ\mu_{\mathcal{D}_1}}{2} - v_j + i\mu_j\right)\\ &= -\frac{4i}{NZ\mu_{\mathcal{D}_1}}\sum_{j=1}^{N}\mu_j + \mathcal{O}\left(N^{2\delta-1}\right)\\ &= -\frac{4i}{Z} + \mathcal{O}\left(N^{2\delta-1}\right).\end{aligned}$$

在（新的）复 Z 平面中，积分路径 Γ是单位圆。因此，在标度区间（4.5）中，对于 $|Z|=1$， B 的跳跃矩阵具有以下渐近行为：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & a(z)e^{-2i\theta(z)} \\ -a^{-1}(z)e^{2i\theta(z)} & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= e^{-i\left(XZ+TZ^2+2Z^{-1}\right)\sigma_3}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\mathcal{O}(N^{-1+2\delta})\right) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\mathcal{O}(N^{-1+2\delta})\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{i\left(XZ+TZ^2+2Z^{-1}\right)\sigma_3},$$

其中，误差项 $\mathcal{O}(N^{-1+2\delta})$ 对所有 $(\mathbf{v}\ \boldsymbol{\mu})\in\mathfrak{Q}_N$、所有 X， $T\in\mathfrak{K}$以及所有 $|Z|$ =均一致 1.

注 4.3。 事实上，误差项 $\mathcal{O}(N^{-1+2\delta})$ 对所有 $\frac{7}{8}<|Z|<\frac{9}{8}$均一致。这使得我们可以出于黎曼–希尔伯特分析中的技术需要，对单位圆进行轻微变形。

这促使我们引入关于函数 $R(Z、\ X、\ T)$ 的模型 RHP，方法是去掉上述跳跃矩阵中的 $\mathcal{O}(N^{-1+2\delta})$项。该 RHP 在 [8, 黎曼 – 希尔伯特问题 4] 中被引入。我们将证明 R 是 $B(z(Z)、\ x(X)、\ t(T))$ 的良好近似。

*RHP*4.6。 设 $(X、\ T)\in\mathbb{R}^2$ 是两个任意参数。求一个 2×2 矩阵 $R(Z;\ X、\ T)\equiv R(Z)$，使得：

1. $R(Z;\ X,\ T)$ 在 $|Z|\neq 1$ 上解析，并且在圆的内部和外部具有连续的边界值。

2. 两个边界值之间的关系为

$$R_+(Z)=R_-(Z)e^{-i(XZ+TZ^2+2Z^{-1})\sigma_3}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{i(XZ+TZ^2+2Z^{-1})\sigma_3}, \qquad |Z|=1.$$

3. $R(Z;\ X,\ T)$ 当 $Z\to\infty$ 时具有如下展开式

$$R(Z;X,T)=I+\mathcal{O}(Z^{-1}).$$

在 [8], 中，作者证明了上述黎曼–希尔伯特问题的以下结果。在 [9], 中，他们进一步证明了所有 X, T 下解的存在性，以及当 X 足够大且 $T=0$ 时的渐近行为。

定理 4.7。黎曼–希尔伯特问题*4.6*对于 $(X,\ T)\subseteq\mathfrak{K}$ 有唯一解，其中 $\mathfrak{K}\subseteq\mathbb{R}^2$ 是一个紧集。特别地，以下展开式成立

$$R(Z)=I+\frac{1}{2iZ}\begin{pmatrix} -\mathfrak{m}_{III}(X,T) & \Psi_{III}(X,T) \\ \overline{\Psi}_{III}(X,T) & \mathfrak{m}_{III}(X,T) \end{pmatrix}+\mathcal{O}(Z^{-2}), \quad Z\to\infty$$

其中 $\mathfrak{m}_{III}(X,\ T)=\int_X^{+\infty}|\Psi_{III}(s,\ T)|^2\mathrm{d}s$。 $\Psi_{III}(X,\ T)$ 满足聚焦型非线性薛定谔方程 (1.1)，并且可通过以下关系用函数 $u(x)$显式表示

$$\Psi_{III}\left(-\frac{x^2}{8},0\right)=\frac{\kappa}{x^2}\exp\left(\int_1^x\frac{2}{u(s)}\,ds\right) \tag{4.6}$$

其中 $u(x)$ 满足 *Painlevé-III* 方程

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{u}\left(\frac{du}{dx}\right)^2-\frac{1}{x}\frac{du}{dx}+\frac{4}{x}+4u^3-\frac{4}{u}$$

且方程 κ 中的常数 (4.6) 固定为满足 $|\Psi_{III}(0,\ 0)|=4$。

注释 4.4。 我们注意到，我们在一条陈述中汇总了 [8] 中给出的多个结果。

为完成定理 4.3 的证明，我们对 小范数论证 $E(Z)=B(Z)R(Z)^{-1}$。具体而言，我们考虑矩阵 $E(Z;\ X,\ T)\equiv E(Z;\ X,\ T)=B(Z)R(Z;\ X,\ T)^{-1}$，通过直接计算可知，它满足以下黎曼–希尔伯特问题。

黎曼–希尔伯特问题 4.8. 设 $(X,\ T)\in\mathbb{R}^2$ 为两个任意参数。求一个 2×2 矩阵 $E(Z;\ X,\ T)\equiv E(Z)$ 使得：

1. $E(Z)$ 在 $|Z| \neq 1$上解析，并从圆的内部和外部在 $|Z| = 1$ 上取连续边界值。

2. 两个边界值之间的关系为

$$\begin{aligned} &E_+(Z) = E_-(Z)(I + W_N(Z;X,T)), \qquad |Z| = 1 \\ &W_N(Z;X,T) = \widetilde{R}_-(Z) \begin{pmatrix} \mathcal{O}(N^{2\delta-1}) & \mathcal{O}(N^{2\delta-1}) \\ \mathcal{O}(N^{2\delta-1}) & \mathcal{O}(N^{2\delta-1}) \end{pmatrix} \widetilde{R}_-(Z)^{-1}, \\ &\widetilde{R}(Z) = R(Z) \exp\left(2i(XZ + TZ^2 - 2Z^{-1})\sigma_3\right) \end{aligned}$$

3. $E(Z;\ X,\ T)$ 在 $Z \to \infty$ 时有如下展开式

$$E(Z;X,T) = I + \frac{1}{2iZ} \begin{pmatrix} \mathfrak{m}_{III}(X,T) - \mathfrak{m}_{N,III}(X,T) & \Psi_{III}(X,T) - \Psi_{N,III}(X,T) \\ \overline{\Psi}_{III}(X,T) - \overline{\Psi}_{N,III}(X,T) & \mathfrak{m}_{N,III}(X,T) - \mathfrak{m}_{III}(X,T) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(Z^{-2}).$$

where $\Psi_{N,III}(X,T) := \frac{2}{N\mu_{\mathcal{D}_1}} \psi_{N,III}\left(\frac{2X}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}, \frac{4T}{\mu_{\mathcal{D}_1}^2 N^2}\right)$ and analogously for $\mathfrak{m}_{N,III}(X,T)$.

注 4.5. 我们断言 $W_N(Z)$ 在黎曼–希尔伯特问题 4.8 中为 $\mathcal{O}(N^{2\delta-1})$。为证明这一点，我们将证明函数~$R(Z)$ 满足黎曼–希尔伯特问题 4.6，因此函数 $R(Z)$ 在黎曼–希尔伯特问题 4.8中定义的一致有界于单位圆的一个开环形邻域内，且 $(X,\ T) \in \mathfrak{K}$。尽管 R 在单位圆上有跳跃条件，但它以连续函数的意义达到其边界值，因此即使在圆上也有界。在 [8], 中，作者引入函数 $R^{\pm}(Z)$ 定义如下

$$R^{\pm}(Z;X,T) = \begin{cases} P^{\pm}(Z;X,T)\, e^{-i(ZX+Z^2T)\,\sigma_3} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{i(ZX+Z^2T)\,\sigma_3}, & |Z| < 1, \\ P^{\pm}(Z;X,T)\, e^{\pm 2i/Z\,\sigma_3}, & |Z| > 1, \end{cases} \tag{4.7}$$

它与我们在此考虑的函数 $R(Z)$ 相同，只是积分路径的取向不同（参见 [8] 中的黎曼–希尔伯特问题 4 与黎曼–希尔伯特问题 4.6的比较）。此外，作者证明 $P^{\pm}(Z)$满足

$$\sup_{|Z|\neq 1,\,(X,T)\in\mathfrak{K}} \|P^{\pm}(Z;X,T)\| = C_{\mathfrak{K}} < \infty. \tag{4.8}$$

~于是由定义（4.7）和方程（4.8）可知， $R(Z)$ 在单位圆的一个开环形邻域上有界，且关于 $(X$、$T) \in \mathfrak{K}$一致成立，从而证明了该断言。

接下来，如下引理成立，其证明见附录。

引理 4.9. 考虑黎曼–希尔伯特问题 *4.8*。它具有唯一解，并且

$$E(Z) = I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{ZN^{1-2\delta}}\right), \quad Z \to \infty\,.$$

应用前述引理，我们推得存在常数 C ，使得

$$|\Psi_{III}(X,T) - \Psi_{N,III}(X,T)| \leqslant CN^{2\delta-1}\,,$$

这就完成了定理 4.3的证明。 □

4.3 定理2.2的证明

我们现在准备证明定理 2.2。由定理 4.3，我们知道存在 $N_0 \in \mathbb{N}$，$\delta \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$，$C>0$，使得对所有 $N \geqslant N_0$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|\frac{2}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}\psi_{N,III}\left(\frac{2X}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}, \frac{4T}{\mu_{\mathcal{D}_1}^2 N^2}\right) - \Psi_{III}(X,T)\right|\right] \\
&\quad = \int_{\Omega_\delta \cap (V_{2\delta}\times\mathbb{R}^N)} \left|\frac{2}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}\psi_{N,III}\left(\frac{2X}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}, \frac{4T}{\mu_{\mathcal{D}_1}^2 N^2}\right) - \Psi_{III}(X,T)\right| \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} \\
&\qquad + \int_{(\Omega_\delta \cap (V_{2\delta}\times\mathbb{R}^N))^c} \left|\frac{2}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}\psi_{N,III}\left(\frac{2X}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}, \frac{4T}{\mu_{\mathcal{D}_1}^2 N^2}\right) - \Psi_{III}(X,T)\right| \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} \\
&\quad \leqslant CN^{2\delta-1} + \int_{\Omega_\delta^c} \left|\frac{2}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}\psi_{N,III}\left(\frac{2X}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}, \frac{4T}{\mu_{\mathcal{D}_1}^2 N^2}\right) - \Psi_{III}(X,T)\right| \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} \\
&\qquad + \int_{V_{2\delta}^c\times\mathbb{R}^N} \left|\frac{2}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}\psi_{N,III}\left(\frac{2X}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}, \frac{4T}{\mu_{\mathcal{D}_1}^2 N^2}\right) - \Psi_{III}(X,T)\right| \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} \\
&\quad \leqslant CN^{2\delta-1} + \int_{\Omega_\delta^c} \left|\frac{2}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}\psi_{N,III}\left(\frac{2X}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}, \frac{4T}{\mu_{\mathcal{D}_1}^2 N^2}\right)\right| \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} \\
&\qquad + \int_{\Omega_\delta^c} |\Psi_{III}(X,T)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} + \int_{V_{2\delta}^c\times\mathbb{R}^N} \left|\frac{2}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}\psi_{N,III}\left(\frac{2X}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}, \frac{4T}{\mu_{\mathcal{D}_1}^2 N^2}\right)\right| \mathrm{d}\boldsymbol{\mu}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} \qquad (4.9) \\
&\qquad + \int_{V_{2\delta}^c\times\mathbb{R}^N} |\Psi_{III}(X,T)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}.
\end{aligned}
$$

由于 $\Psi_{III}(X,\ T)$ 是连续函数，且我们考虑的是紧集 $(X,\ T)$，由海涅–博雷尔定理可知，存在常数 C_1 使得 $|\Psi_{III}(X,\ T)| \leqslant C_1$，并且存在常数 $C_2, \varepsilon > 0$

$$
\mathbb{P}(\Omega_\delta^c) + \mathbb{P}(V_{2\delta}^c \times \mathbb{R}^N) \leqslant \exp(-C_2 N^\varepsilon)\,,
$$

因此我们推得存在两个常数 $c,\ \epsilon > 0$ 使得

$$
\int_{V_{2\delta}^c\times\mathbb{R}^N} |\Psi_{III}(X,T)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} + \int_{\Omega_\delta^c} |\Psi_{III}(X,T)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} \leqslant cN^{-\epsilon}\,.
$$

由（3.2），我们推得

$$
\int_{\Omega_\delta^c} \left|\frac{2}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}\psi_{N,III}\left(\frac{2X}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}, \frac{4T}{\mu_{\mathcal{D}_1}^2 N^2}\right)\right| \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} \leqslant \frac{4}{N\mu_{\mathcal{D}_1}} \int_{\Omega_{\delta,\mu}^c\times\mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^N \mu_j \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} \leqslant \frac{4}{\mu_{\mathcal{D}_1}} \int_{\Omega_{\delta,\mu}^c} \max_j \mu_j \mathrm{d}\boldsymbol{\mu}.
$$

我们引入记号 $Y \sim \max_j \mu_j$ 和 $\sigma(Y) = \mathbb{P}(Y > y)$，则有：

$$
\int_{\Omega_\delta^c} \left|\frac{2}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}\psi_{N,III}\left(\frac{2X}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}, \frac{4T}{\mu_{\mathcal{D}_1}^2 N^2}\right)\right| \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} \leqslant \frac{4}{\mu_{\mathcal{D}_1}} \int_{N^\delta}^\infty Y\,\mathrm{d}\sigma(Y).
$$

分部积分并利用反常积分的定义，可得

$$
\int_{N^\delta}^\infty Y\,\mathrm{d}\sigma(Y) = -\lim_{t\to\infty} t\,\mathbb{P}(Y>t) + N^\delta \mathbb{P}(Y > N^\delta) + \int_{N^\delta}^\infty \sigma(Y)\mathrm{d}Y\,.
$$

由引理4.2，我们得出存在两个常数 $c,\ \epsilon > 0$，使得

$$
\int_{\Omega_\delta^c} \left|\frac{2}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}\psi_{N,III}\left(\frac{2X}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}, \frac{4T}{\mu_{\mathcal{D}_1}^2 N^2}\right)\right| \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} \leqslant cN^{-\epsilon}\,.
$$

关于式（4.9）中的最后一项，我们注意到它可以估计为

$$\int_{V_{2\delta}^c\times\mathbb{R}^N}\left|\frac{2}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}\psi_{N,III}\left(\frac{2X}{N\mu_{\mathcal{D}_1}},\frac{4T}{\mu_{\mathcal{D}_1}^2N^2}\right)\right|\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$$
$$=\int_{V_{2\delta}^c}\left|\frac{2}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}\psi_{N,III}\left(\frac{2X}{N\mu_{\mathcal{D}_1}},\frac{4T}{\mu_{\mathcal{D}_1}^2N^2}\right)\right|\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}\leqslant\frac{4}{N\mu_{\mathcal{D}_1}}\left(\int_{V_{2\delta}^c}\sum_{j=1}^N\mu_j-N\mu_{\mathcal{D}_1}\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}+N\mu_{\mathcal{D}_1}\int_{V_{2\delta}^c}\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}\right).$$

令 $Y=\sum_{j=1}^N\mu_j-N\mu_{\mathcal{D}_1}$（注意，我们重复使用了 Y，希望不会造成混淆），并令 $\sigma(Y)$ 为其累积分布（因此 $\mathrm{d}\sigma(Y)$ 为其概率密度函数）。和之前一样，分部积分可得

$$\int_{V_{2\delta}^c}\sum_{j=1}^N\mu_j-N\mu_{\mathcal{D}_1}\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}=\int_{N^{2\delta}}^\infty Y\mathrm{d}\sigma(Y)$$
$$=-\lim_{t\to\infty}t\,\mathbb{P}(Y>t)+N^{2\delta}\mathbb{P}\left(Y>N^{2\delta}\right)+\int_{N^{2\delta}}^\infty\sigma(Y)\mathrm{d}Y.$$

根据引理 4.1，我们推得前一个方程右端趋于 0，当 N 增大时；由 (4.3) $\mathbb{P}(V_{2\delta}^c)\xrightarrow{N\to\infty}0$。定理 2.2的证明至此完成。 □

5 Painlevé–V 怪波

本节证明定理 2.3。证明思路与前一个证明相同。我们首先确定 $\mathfrak{P}_N\subseteq\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+^N$ 使结论确定性成立的区域 确定性地，然后利用一些概率估计完成证明。与前一种情形的主要区别在于，我们引入了一个不同的模型 RHP，通过证明其解的存在唯一性，并将其与 Painlevé–V 方程 (2.7) 的解联系起来，对其进行分析；详见下文定理 5.6和5.7。此外，我们需要采用更精细的论证来说明补集 $\mathfrak{P}_N^c$ 的测度很小。具体而言，我们使用以下引理，其证明见附录 C。

引理 5.1. 固定 $\zeta\in(0,\ 1)$ 和 $\frac{1}{4}<\delta$。令 $X_1,\ldots,X_N$ 为均值为 μ 的正的独立同分布次指数随机变量。那么，存在一个 $N_0>0$ 以及两个正的常数 c、$\gamma>0$，它们与 N 独立，使得

$$\mathbb{P}(\mathcal{U}^c)\leqslant e^{-cN^\gamma},$$

其中

$$\mathcal{U}=\left\{(X_1,\ldots,X_N)\in\mathbb{R}_+^N\middle|\ \forall Z:|Z|=1,\left|\sum_{j=1}^N\frac{X_j-\mu}{Z+\zeta\frac{j}{N}}\right|\leqslant N^{2\,\delta}\right\}.$$

5.1 化简为 Painlevé–V 的模型问题

我们定义集合 $\mathfrak{P}_N\subseteq\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+^N$，并在该集合上证明定理 2.3 的确定性版本成立。固定$\frac{1}{4}<\delta<\frac{1}{2}$ 并定义以下集合

$$\mathcal{U}_{2\delta}=\left\{(\mu_1,\ldots,\mu_N)\in\mathbb{R}_+^N\middle|\ \forall Z:|Z|=1,\left|\sum_{j=1}^N\frac{\mu_j-\mu_{\mathcal{D}_1}}{Z+\zeta\frac{j}{N}}\right|\leqslant N^{2\,\delta}\right\}.\tag{5.1}$$

注 5.1. 注意到，应用引理 5.1，可推出存在 $c>0$、$\epsilon>0$，使得

$$\mathbb{P}(\mathcal{U}_{2\delta}^c)\leqslant e^{-cN^\epsilon}$$

其中 $\mathbb{P}$ 是随机变量 $(\mathbf{v}\ \boldsymbol{\mu})$ 的乘积测度。

本小节旨在证明以下定理。

定理 5.2. 固定 $\frac{1}{4}<\delta<\frac{1}{2}$，并定义 $\mathfrak{P}_N:=\Omega_\delta\cap(\mathbb{R}^N\times\mathcal{U}_{2\delta})$ (4.1)-(5.1)。在满足 *Painlevé-V* 怪波假设，且假设 $(\mathbf{v}\ \boldsymbol{\mu})\in\mathfrak{P}_N$；对所有 $(X,\ T)$ 属于紧集 $\mathfrak{K}$，存在一个 $N_0>0$、一个常数 $C\equiv C(N_0,\ X,\ T)>0$ 以及 $\varepsilon>0$，使得对所有 $N>N_0$ 以下结论成立

$$\left|\frac{1}{N}\psi_{N,V}\left(\frac{X}{N},\frac{T}{N^2}\right)-\Psi_V(X,T)\right|\leqslant CN^{-\varepsilon},$$

其中 $\Psi_V(X,\ T)$ 与定理 2.3中的情形相同。

5.1.1 确定性结果的证明

为证明前面的定理，我们采用非线性薛定谔方程逆散射的黎曼–希尔伯特问题表述。因此，在 Painlevé–V怪波假设下考虑黎曼–希尔伯特问题 1.1 。

黎曼–希尔伯特问题 5.3。 在定理 5.2 的假设下，求一个 2×2 矩阵值函数 $M(z)$，使得:

- $M(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中亚纯，在点 $\{\lambda_j,\ \lambda_j\}_{j=1}^{N}$ 处有简单极点。
- 在上半平面中的每个极点 λ_j 处， $M(z)$ 满足留数条件

$$\operatorname*{Res}_{\lambda_j} M(z) = \lim_{z\to\lambda_j}\left[M(z)\begin{pmatrix}0 & 0\\ c_j e^{2i\theta(\lambda_j;x,t)} & 0\end{pmatrix}\right],$$

其中 $\theta(z;\ x,\ t)=zx+z^2t$，且在下半平面中的每个极点 λ_j 处:

$$\operatorname*{Res}_{\overline{\lambda}_j} M(z) = \lim_{z\to\overline{\lambda}_j}\left[M(z)\begin{pmatrix}0 & -\overline{c}_j e^{-2i\theta(\overline{\lambda}_j;x,t)}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right].$$

- 当 $z\to\infty$ 时， $M(z)$ 有如下展开式

$$M(z;x,t) = I+\frac{1}{2iz}\begin{pmatrix}-m_{N,V}(x,t) & \psi_{N,V}(x,t)\\ \overline{\psi}_{N,V}(x,t) & m_{N,V}(x,t)\end{pmatrix}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

其中 $m_{N,\ V}(x,\ t)=\int_x^\infty|\psi_{N,\ V}(s,\ t)|^2\mathrm{d}s$。

由于 $(\mathbf{v}\ \boldsymbol{\mu})\in\mathfrak{P}_N$，并且在 Painlevé-V 怪波假设的框架下，当 N 足够大时，我们可以用半径为 N 的圆 Γ 包围所有极点 λ_j。我们定义如下变换

$$B(z)=\begin{cases}M(z)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & a(z)e^{-2i\theta(z)}\\ -a^{-1}(z)e^{2i\theta(z)} & 1\end{pmatrix}, & z \text{ inside } \Gamma\\ \\ M(z), & z \text{ outside } \Gamma\end{cases}$$

其中 $a(z)$ 定义于 (4.4) 中。通过直接计算，可以证明矩阵 $B(z)$ 满足以下黎曼–希尔伯特问题。

黎曼–希尔伯特问题 5.4. 求一个 2×2 矩阵值函数 $B(z)$，使得:

- $B(z)$ 在 $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ 中解析，其跳跃条件为:

$$B_+(z)=B_-(z)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & a(z)e^{-2i\theta(z)}\\ -a^{-1}(z)e^{2i\theta(z)} & 1\end{pmatrix},\quad |z|=N.$$

- $B(z)$ 在 $z\to\infty$下有如下展开式

$$B(z)=\ I+\frac{1}{2iz}\begin{pmatrix}-m_{N,V}(x,t) & \psi_{N,V}(x,t)\\ \overline{\psi}_{N,V}(x,t) & m_{N,V}(x,t)\end{pmatrix}+\mathcal{O}(z^{-2}).$$

与前一种情况类似，我们考虑如下缩放

$$z=NZ,\quad x=\frac{X}{N},\quad t=\frac{T}{N^2}.$$

在此缩放下，由于 $(\mathbf{v}\ \boldsymbol{\mu})\in\mathfrak{P}_N$，我们注意到，量 $\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j}{NZ+\zeta j}$ 确定性地收敛于 $\mu_{\mathcal{D}_1}\frac{1}{\zeta}\ln\left(\frac{Z+\zeta}{Z}\right)$。具体而言，

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j}{NZ+\zeta j}-\mu_{\mathcal{D}_1}\frac{1}{\zeta}\ln\left(\frac{Z+\zeta}{Z}\right)=\mathcal{O}(N^{2\delta-1}),\quad 2\delta<1.$$

因此，按照上一节中的相同步骤，我们有：

$$\begin{aligned}\ln(a(z)) = \ln(a(NZ)) &= \sum_{j=1}^{N} \ln\left(NZ+\zeta j - v_j - i\mu_j\right) - \ln\left(NZ+\zeta j - v_j + i\mu_j\right) \\ &= -2i\sum_{j=1}^{N} \frac{\mu_j}{NZ+\zeta j} + \mathcal{O}(N^{2\delta-1}) \\ &= -2i\frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}\ln\left(\frac{Z+\zeta}{Z}\right) + \mathcal{O}(N^{2\delta-1}).\end{aligned}$$

在此渐近区域内，对于 $B(Z)$，当 Z 使得 $|Z|=1$ 时，跳跃矩阵变为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & a(z)e^{-2i\theta(z)} \\ -a^{-1}(z)e^{2i\theta(z)} & 1 \end{pmatrix} =$$
$$e^{-i\left(XZ+TZ^2+2\frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}\ln\left(\frac{Z+\zeta}{Z}\right)\right)\sigma_3}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{i\left(XZ+TZ^2+2\frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}\ln\left(\frac{Z+\zeta}{Z}\right)\right)\sigma_3} + \mathcal{O}(N^{2\delta-1}),$$

其中，对于所有 $|Z|=1$ 以及所有 $(X,\ T)\in\mathfrak{K}$，误差项都是一致的。（同样地，实际上，对于单位圆的小环形邻域内的所有 Z，误差项也是一致的。）因此，我们自然地考虑以下模型问题。

黎曼–希尔伯特问题 5.5。 设 $(X,\ T)\in\mathbb{R}^2$ 为两个任意参数。求一个 2×2 矩阵 $R(Z;\ X,\ T)$ 使得：

1. $R(Z;\ X,\ T)$ 在 $|Z|\neq 1$内解析，并且在圆的内部和 e
   外部取得连续的边界值。2. 两个边界
   值满足

$$R_+(Z) = R_-(Z)e^{-i\left(XZ+TZ^2+\frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}\ln\left(\frac{Z+\zeta}{Z}\right)\right)\sigma_3}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{i\left(XZ+TZ^2+\frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}\ln\left(\frac{Z+\zeta}{Z}\right)\right)\sigma_3}, \quad |Z|=1.$$

3. $R(Z;\ X,\ T) = I + \mathcal{O}(Z^{-1}), \quad Z\to\infty$。

注记 5.2. 我们注意到，当 $\zeta\to 0$ 时，前述黎曼–希尔伯特问题经缩放后收敛于黎曼–希尔伯特问题 4.6。

与上一节一样，我们的策略是利用前述黎曼–希尔伯特问题的解来近似黎曼–希尔伯特问题5.4。我们现在陈述两个结果。第一个结果在附录A中证明，保证黎曼–希尔伯特问题5.5存在唯一解。第二个结果将在下一小节证明，说明黎曼–希尔伯特问题 5.5 与非线性薛定谔方程（1.1）以及 Painlevé–V 方程（2.7）之间的联系。

定理 5.6。 固定 $(X,\ T)$ 属于某个紧集，$\zeta>0$，$\mu_{\mathcal{D}_1}>0$。则黎曼–希尔伯特问题 *5.5* 存在唯一解，且对所有 $(X,\ T)\in\mathfrak{K}$，该解均一致有界。

定理 5.7。 固定 $(X,\ T)$ 取自一个紧集，$\zeta>0$，$\mu_{\mathcal{D}_1}>0$。那么，$R(Z)$ 黎曼–希尔伯特问题*5.5* 的唯一解在 $Z\to\infty$时具有如下渐近行为

$$R(Z) = I + \frac{1}{2iZ}\begin{pmatrix} -\mathfrak{m}_V(X,T) & \Psi_V(X,T) \\ \overline{\Psi}_V(X,T) & \mathfrak{m}_V(X,T) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(Z^{-2}),$$

$\Psi_V(X,\ T)$ 满足聚焦型非线性薛定谔方程(1.1)，且当 $T=0$ 时，它有如下积分表示

$$\Psi_V(X,0) = \frac{\kappa}{X}\exp\left(-\frac{1}{2i\zeta}\int_1^{2i\zeta X}\frac{u(s)}{1-u(s)}ds\right),$$

其中 $u(x)$ 满足 *Painlevé-V* 方程(2.7)，且 κ 独立于 X。

注 5.3。 我们猜想

$$\mathfrak{m}_V(X,T) = \int_X^{+\infty}|\Psi_V(s,T)|^2\,\mathrm{d}s,$$

在未来的工作中，我们将分析 Ψ_V 对于 $X\to+\infty$的渐近行为，并将对上述积分的收敛性给出完整论证。

如前所述，我们通过对矩阵$E(Z;\ X、\ T)=B(Z;\ X、\ T)R^{-1}(Z;\ X、\ T)$应用小范数论证来完成定理 5.2 的证明。具体而言，直接计算可得 $E(Z;\ X,\ T)$满足以下黎曼–希尔伯特问题。

黎曼–希尔伯特问题 5.8. 设 $(X,T)\in\mathbb{R}^2$ 为两个任意参数。求一个 2×2 矩阵 $E(Z;\ X,T)\equiv E(Z)$，使得：

1. $E(Z)$ 在 $|Z|\neq 1$ 上解析，并在 $|Z|=1$ 上从圆的内部和外部取连续边界值 $E_{\pm}$。

2. 这两个边界值由下式联系

$$\begin{aligned}
&E_+(Z)=E_-(Z)(I+W_N(Z;X,T)),\qquad |Z|=1\\
&W_N(Z;X,T)=\widetilde{R}_-(Z)\begin{pmatrix}\mathcal{O}(N^{2\delta-1}) & \mathcal{O}(N^{2\delta-1})\\ \mathcal{O}(N^{2\delta-1}) & \mathcal{O}(N^{2\delta-1})\end{pmatrix}\widetilde{R}_-(Z)^{-1}\\
&\widetilde{R}(Z)=R(Z)\exp\left(2i\left(XZ+TZ^2+\frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}\ln\left(\frac{Z+\zeta}{Z}\right)\right)\sigma_3\right).
\end{aligned}$$

3. $E(Z;\ X,T)$ 当 $Z\to\infty$ 时具有如下展开式

$$E(Z;X,T)=I+\frac{1}{2iZ}\begin{pmatrix}\mathfrak{m}_V(X,T)-\mathfrak{m}_{N,V}(X,T) & \Psi_V(X,T)-\Psi_{N,V}(X,T)\\ \overline{\Psi}_V(X,T)-\overline{\Psi}_{N,V}(X,T) & \mathfrak{m}_{N,V}(X,T)-\mathfrak{m}_V(X,T)\end{pmatrix}+\mathcal{O}(Z^{-2}),$$

其中我们定义 $\Psi_{N,V}(X,T):=\frac{1}{N}\underline{\psi_{N,V}}\left(\frac{X}{N},\frac{T}{N^2}\right)$，并对 $\mathfrak{m}_{N,V}(X,T)$ 作类似定义。

因此，以下引理成立，其证明可见附录A。

引理 5.9。考虑黎曼–希尔伯特问题5.8。它有唯一解，并且

$$E(Z)=I+\mathcal{O}\left(\frac{1}{ZN^{1-2\delta}}\right),\quad Z\to\infty.$$

应用前一个引理，我们推得存在一个常数 C，使得

$$|\Psi_V(X,T)-\Psi_{N,V}(X,T)|\leqslant CN^{2\delta-1}.$$

最后，由于$|\Psi_{N,\ V}(0,\ \ 0)|=2\frac{\sum_{j=1}^{N}\mu_j}{N}$，我们推得 $|\Psi_V(0,\ \ 0)|=2\mu_{\mathcal{D}_1}$。 □

5.1.2 定理2.3的证明

现在我们可以证明定理 2.3。根据定理 5.2，我们知道存在 $(N_0,\ \delta)\in\mathbb{N}\times\left(\frac{1}{4},\ \ \frac{1}{2}\right)$，使得对所有 $N>N_0$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{N}\psi_{N,V}\left(\frac{X}{N},\frac{T}{N^2}\right)-\Psi_V(X,T)\right|\right]\\
&\quad=\int_{\Omega_\delta\cap(\mathbb{R}^N\times\mathcal{U}_{2\delta})}\left|\frac{1}{N}\psi_{N,V}\left(\frac{X}{N},\frac{T}{N^2}\right)-\Psi_V(X,T)\right|\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}\\
&\qquad+\int_{(\Omega_\delta\cap(\mathbb{R}^N\times\mathcal{U}_{2\delta}))^c}\left|\frac{1}{N}\psi_{N,V}\left(\frac{X}{N},\frac{T}{N^2}\right)-\Psi_V(X,T)\right|\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}\\
&\quad\leqslant CN^{2\delta-1}+\int_{\Omega_\delta^c}\left|\frac{1}{N}\psi_{N,V}\left(\frac{X}{N},\frac{T}{N^2}\right)-\Psi_V(X,T)\right|\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}\\
&\qquad+\int_{\mathcal{U}_{2\delta}^c\times\mathbb{R}^N}\left|\frac{1}{N}\psi_{N,V}\left(\frac{X}{N},\frac{T}{N^2}\right)-\Psi_V(X,T)\right|\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}\\
&\quad\leqslant CN^{2\delta-1}+\int_{\Omega_\delta^c}\left|\frac{1}{N}\psi_{N,V}\left(\frac{X}{N},\frac{T}{N^2}\right)\right|\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}+\int_{\Omega_\delta^c}|\Psi_V(X,T)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}\\
&\qquad+\int_{\mathcal{U}_{2\delta}^c\times\mathbb{R}^N}\left|\frac{1}{N}\psi_{N,V}\left(\frac{X}{N},\frac{T}{N^2}\right)\right|\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}\\
&\qquad+\int_{\mathcal{U}_{2\delta}^c\times\mathbb{R}^N}|\Psi_V(X,T)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}.
\end{aligned}$$

由于 $\Psi_V(X,\ T)$ 是连续函数，且我们考虑的是紧集中的 $(X,\ T)$，根据海涅-博雷尔定理，存在常数 C_1 使得 $|\Psi_V(X,\ T)| \leqslant C_1$，并且存在常数 $C_2, \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(\Omega_\delta^c) + \mathbb{P}(\mathbb{R}^N \times \mathcal{U}_{2\delta}^c) \leqslant \exp(-C_2 N^\varepsilon)\,,$$

~因此我们推知，存在一个常数 C_2 ，使得

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathcal{U}_{2\delta}^c} |\Psi_V(X,T)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} + \int_{\Omega_\delta^c} |\Psi_V(X,T)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} \leqslant \widetilde{C}_2 N^{-\varepsilon}\,.$$

根据 与第4节相同的步骤，可以得出存在两个常数 $c,\ \epsilon > 0$ 使得 t

$$\int_{\Omega_\delta^c} \left| \frac{1}{N}\psi_{N,V}\left(\frac{X}{N}, \frac{T}{N^2}\right)\right| \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} \leqslant cN^{-\epsilon}\,.$$

关于最后一项，我们注意到它可以估计为

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathcal{U}_{2\delta}^c} \left| \frac{1}{N}\psi_{N,V}\left(\frac{X}{N}, \frac{T}{N^2}\right)\right| \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} = \int_{\mathcal{U}_{2\delta}^c} \left| \frac{1}{N}\psi_{N,V}\left(\frac{X}{N}, \frac{T}{N^2}\right)\right| \mathrm{d}\boldsymbol{\mu} \leqslant \frac{2}{N}\int_{\mathcal{U}_{2\delta}^c} \sum_{j=1}^N \mu_j \mathrm{d}\boldsymbol{\mu}.$$

我们希望化归为与定理2.2证明中相同的情形，因此我们表示为：

$$\mathcal{U}_{2\delta}^c = (\mathcal{U}_{2\delta}^c \cap V_{2\delta}) \cup (\mathcal{U}_{2\delta}^c \cap V_{2\delta}^c)$$

其中 $V_{2\delta}$ 与方程（4.2）中的定义相同。我们将最后一个积分拆分如下：

$$\int_{\mathcal{U}_{2\delta}^c} \sum_{j=1}^N \mu_j \mathrm{d}\boldsymbol{\mu} = \int_{\mathcal{U}_{2\delta}^c \cap V_{2\delta}} \sum_{j=1}^N \mu_j \mathrm{d}\boldsymbol{\mu} + \int_{\mathcal{U}_{2\delta}^c \cap V_{2\delta}^c} \sum_{j=1}^N \mu_j \mathrm{d}\boldsymbol{\mu}.$$

我们对第一个积分作如下估计：

$$\left|\int_{\mathcal{U}_{2\delta}^c \cap V_{2\delta}} \sum_{j=1}^N \mu_j \mathrm{d}\boldsymbol{\mu}\right| \leqslant \int_{\mathcal{U}_{2\delta}^c \cap V_{2\delta}} \left|\sum_{j=1}^N \mu_j - N\mu_{\mathcal{D}_1}\right| + N\mu_{\mathcal{D}_1}\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} \leqslant \left(N\mu_{\mathcal{D}_1} + N^{2\delta}\right)\mathbb{P}\left(\mathcal{U}_{2\delta}^c\right) \leqslant \left(N\mu_{\mathcal{D}_1} + N^{2\delta}\right) e^{-cN^\epsilon}\,,$$

在第二个不等式中，我们使用了集合 $V_{2\delta}$ 的定义。关于第二个积分，我们作如下估计，

$$\int_{\mathcal{U}_{2\delta}^c \cap V_{2\delta}^c} \sum_{j=1}^N \mu_j \mathrm{d}\boldsymbol{\mu} \leqslant \int_{V_{2\delta}^c} \sum_{j=1}^N \mu_j \mathrm{d}\boldsymbol{\mu}$$

在上一节中，我们证明了最后一个积分在 $N \to \infty$ 时趋于 0，且满足正确的上界。定理得证。

□

5.1.3 Painlevé–V Riemann–Hilbert问题

在本小节中，我们证明定理 5.7。首先，按照 [8]，中完全相同的论证，可以证明 $\Psi_V(X,\ T)$ 满足非线性薛定谔方程。具体而言，我们引入

$$W(Z;X,T) := R(Z;X,T)\, e^{-i\sigma_3\left(XZ + TZ^2 + \frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}\ln\left(\frac{Z+\zeta}{Z}\right)\right)}. \tag{5.2}$$

并且可以验证，$W(Z;\ X,\ T)$ 满足

$$W_X = AW = \begin{pmatrix} -iZ & \Psi_V(X,T) \\ -\overline{\Psi_V}(X,T) & iZ \end{pmatrix} W, \quad W_T = BW = \begin{pmatrix} -iZ^2 + \frac{i}{2}|\Psi_V|^2 & Z\Psi_V + \frac{i}{2}\Psi_{V,X} \\ -Z\overline{\Psi_V} + \frac{i}{2}\overline{\Psi_{V,X}} & iZ^2 - \frac{i}{2}|\Psi_V|^2 \end{pmatrix} W\,. \tag{5.3}$$

由于 $W(Z;\ X,\ T)$ 的跳跃条件也与 Z无关，因此可以找到一个矩阵微分方程，W 必须作为 Z的函数满足该方程。由于我们关注的是与Painlevé V方程的联系，因此将重点放在 $T = 0$这一情形。在这种情况下，我们希望明确确定以下量

$$\Lambda(Z,X) := W_Z(Z,X,0)W^{-1}(Z,X,0)\,,$$

其关于 $Z \in \mathbb{C}$ 是亚纯的。我们证明如下：

命题 5.10. 定义 $W(Z;\ X,\ T)$ 如 (5.2)所示。那么对于 $T=0,\ W(Z;\ X,\ 0)$ 满足以下 *Lax* 对

$$W_Z = \Lambda W \qquad W_X = AW\,, \tag{5.4}$$

其中 A为 （5.3），而 Λ 具有以下形式

$$\Lambda(Z,X) = -iX\sigma_3 + \frac{1}{Z}\left(iX\left[\sigma_3, R_1(X,0)\right] - \partial_X(XR_1(X,0)) + i\frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}\sigma_3\right) + \frac{1}{Z+\zeta}\left(\partial_X(XR_1(X,0)) - i\frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}\sigma_3\right).$$

这里，$R_1(X,\ 0)$ 是

$$R_1(X,0) = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -\mathfrak{m}_V(X,0) & \Psi_V(X,0) \\ \overline{\Psi}_V(X,0) & \mathfrak{m}_V(X,0)\end{pmatrix}.$$

证明。 在 $T=0$处， W 简单地变为

$$W(X,Z) = R(X,Z)\, e^{-i\sigma_3\left(XZ + \frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}\ln\left(\frac{Z+\zeta}{Z}\right)\right)}. \tag{5.5}$$

我们注意到， W 在单位圆上具有一个常数跳跃条件，并且在区间$(-\zeta,\ 0)$上具有一个常数跳跃条件。这里， $\mu_{\mathcal{D}_1}$ 是离散特征值虚部的均值。假设对 $R(X,\ Z)$具有 Z-渐近展开式

$$R(X,Z) = I_2 + \frac{R_1(X)}{Z} + \frac{R_2(X)}{Z^2} + \mathcal{O}(Z^{-3})$$

其中 w e抑制了 T依赖性，因为我们设定了 $T=0$。对 Z求导，作用于（5.5），我们得 et:

$$W_Z(X,Z) = \left(-\frac{R_1(X)}{Z^2} - i\sigma_3\left(X - \frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta Z^2}\right) - iX\frac{R_1(X)\sigma_3}{Z} - iX\frac{R_2(X)\sigma_3}{Z^2} + \mathcal{O}(Z^{-3})\right) e^{-i\sigma_3\left(XZ + \frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}\ln\left(\frac{Z+\zeta}{Z}\right)\right)}.$$

此外，由方程（5.5）我们有：

$$W^{-1}(X,Z) = e^{i\sigma_3\left(XZ + \frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}\ln\left(\frac{Z+\zeta}{Z}\right)\right)}\left(I_2 - \frac{R_1(X)}{Z} - \frac{R_2(X)}{Z^2} + \frac{R_1^2(X)}{Z^2} + \mathcal{O}(Z^{-3})\right).$$

我们现在定义矩阵值函数

$$\Lambda(X,Z) = W_Z(X,Z)\, W^{-1}(X,Z).$$

其大Z 渐近行为通过结合 W_Z 与 W^{-1}的大Z 渐近行为导出。特别地，我们得到：

$$\begin{aligned}\Lambda(X,Z) =& -i\sigma_3 X + iX[\sigma_3, R_1(X)]\frac{1}{Z} \\ &+ \left(i\sigma_3\frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta} - R_1(X) + iX[\sigma_3, R_2(X)] + iX[R_1(X), \sigma_3 R_1(X)]\right)\frac{1}{Z^2} + \mathcal{O}(Z^{-3})\end{aligned} \tag{5.6}$$

其中 $[A,\ B] = AB - BA$。由 [8, 方程（41）], 我们知道可以将矩阵 $R_2(X)$ 用 $R_1(X)$ 通过如下关系表示

$$[\sigma_3, R_2(X)] = [R_1(X), \sigma_3 R_1(X)] - iR_{1X}(X). \tag{5.7}$$

替换 (5.7) 代入（5.6），我们将 Λ的渐近行为化简为仅涉及 $R_1(X$):

$$\Lambda(X,Z) = -i\sigma_3 X + iX[\sigma_3, R_1(X)]\frac{1}{Z} + \left(i\sigma_3\frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta} - \partial_X\left(XR_1(X)\right)\right)\frac{1}{Z^2} + \mathcal{O}(Z^{-3}). \tag{5.8}$$

由于 W 在单位圆上具有常数跳跃条件， W_Z 与 W具有相同的跳跃条件，因此 Λ 在单位圆上没有跳跃。通过直接计算可以证明， Λ 可能出现奇异性的点只有 $Z=0,\ -\zeta$，且这些点上可能存在简单极点。因此，我们可以为$\Lambda(X,\ Z)$ 写出精确表示式：

$$\Lambda(X,Z) = \Lambda_{an.}(X,Z) + \frac{\alpha(X)}{Z} + \frac{\beta(X)}{Z+\zeta} \tag{5.9}$$

其中 $\Lambda_{an.}(X,\ Z)$ 是一个 2×2 在整个 $\mathbb{C}$ 上解析的矩阵 $\alpha(X)$，而 $\beta(X)$ 是两个 2×2 矩阵，它们可以依赖于 X，待定。大 Z 渐近行为（5.9）给出

$$\Lambda(X,Z)=\Lambda_{an.}(X,Z)+\frac{\alpha(X)+\beta(X)}{Z}-\frac{\beta(X)}{Z^2}+\mathcal{O}(Z^{-3}). \tag{5.10}$$

将方程（5.8）与（5.10）相等，我们推导出关于 α 和 β的方程:

$$\alpha+\beta=iX[\sigma_3,R_1(X)],\quad \beta=\partial_X\left(XR_1(X)\right)-i\sigma_3\frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}.$$

此外，我们得到了 $\Lambda(X,\ Z)$ 的解析部分的显式表达式:

$$\Lambda_{an.}(X)=-i\sigma_3X$$

由此完成证明。 □

为完成定理 5.7 的证明，我们需要说明 $\Psi_V(X,\ 0)$ 与第五 Painlevé 超越解之间的关系。为此，我们考虑第 5 章中的 PV [17, 黎曼–希尔伯特问题表述。4]。

定理 5.11。 考虑以下 *Lax* 对

$$\begin{aligned}&\Psi_\lambda(\lambda,x)=A(\lambda,x)\,\Psi(\lambda,x),\quad \Psi_x(\lambda,x)=U(\lambda,x)\,\Psi(\lambda,x)\\&A(\lambda,x)=\frac{x}{2}\sigma_3+\frac{A_1(x)}{\lambda}+\frac{A_2(x)}{\lambda-1},\quad U(\lambda,x)=\frac{\lambda}{2}\sigma_3+B_0(x)\end{aligned} \tag{5.11}$$

其中

$$A_1(x)=\begin{pmatrix}v+\frac{\theta_0}{2} & -y(v+\theta_0)\\ \frac{v}{y} & -(v+\frac{\theta_0}{2})\end{pmatrix}$$

$$A_2(x)=\begin{pmatrix}-v-\frac{1}{2}(\theta_0+\theta_\infty) & yu(v+\frac{1}{2}(\theta_0+\theta_\infty-\theta_1))\\ -\frac{1}{yu}(v+\frac{1}{2}(\theta_0+\theta_\infty+\theta_1)) & v+\frac{1}{2}(\theta_0+\theta_\infty)\end{pmatrix}$$

$$B_0(x)=\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0 & -y[v+\theta_0-u(v+\frac{1}{2}(\theta_0+\theta_\infty-\theta_1))]\\ \frac{1}{y}[v-\frac{1}{u}(v+\frac{1}{2}(\theta_0+\theta_\infty+\theta_1))] & 0\end{pmatrix}.$$

则函数 $u=u(x)$ 满足 *PV* 方程

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\left(\frac{1}{2u}\pm\frac{1}{u-1}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)^2-\frac{1}{x}\frac{du}{dx}+\frac{(u-1)^2}{x^2}\left(\alpha u+\frac{\beta}{u}\right)+\frac{\gamma u}{x}+\frac{\delta u(u+1)}{u-1}. \tag{5.12}$$

常数 α、 β、 γ 和 δ 由下式给出

$$\alpha=\frac{1}{8}\left(\theta_0-\theta_1+\theta_\infty\right)^2,\quad \beta=-\frac{1}{8}\left(\theta_0-\theta_1-\theta_\infty\right)^2,\quad \gamma=1-\theta_0-\theta_1,\quad \delta=-\frac{1}{2}.$$

The 以下定理完成了定理 5.7 的证明，并结束了定理2 .3.

定理 5.12。 考虑函数 *5.5* 的黎曼–希尔伯特问题 $R(Z,\ X)$; 则存在唯一的常数 κ使得函数 $\Psi_V(X,\ 0)$ 具有如下积分表示

$$\Psi_V(X,0)=\frac{\kappa}{X}\exp\left(-\frac{1}{\zeta}\int_1^{2i\zeta X}\frac{u(s)}{1-u(s)}\mathrm{d}s\right),$$

其中 $u(s)$ 满足 (5.12) 且 $\theta_\infty=0,\ \theta_0=-\theta_1=2i\frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}$。

注5.4。 我们注意到

$$\lim_{\zeta\to 0}\Lambda(X,Z)=-iX\sigma_3+\frac{1}{Z}iX[\sigma_3,R_1]+i\frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{Z^2}=:\Lambda_0(X,Z)\,.$$

因此，在此区域内，Lax 对为

$$W_X=AW\,,\qquad W_Z=\Lambda_0W\,,$$

这在 经过缩放后，恰好是 Sakka 的 Painlevé-III 层级的 Lax 对 [30], 另见 [8].

证明。 注意，在变量变换

$$x = 2i\zeta X, \quad \lambda = -\frac{1}{\zeta}Z$$

Lax 对 (5.4) 和 (5.11) 变为等价，即 $W(X,Z) \equiv \Psi\left(2i\zeta X, -\frac{1}{\zeta}Z\right)$，其中 W分别满足黎曼–希尔伯特问题 5.3， Ψ满足黎曼–希尔伯特问题 5.11。在此证明中，我们显式计算常数 θ_∞、 θ_0和 θ_1，并将 Lax 对 (5.11) 中出现的函数 u、 v 和 y 表示为势 $\psi(X$、 $Z)$的形式。具体而言，利用 W 的大 -Z 渐近行为及其在 $Z = 0$ 和 $Z = -\zeta$ 附近的行为，我们推导出常数 θ_∞、 θ_0 和 θ_1。首先，回顾 W 的定义 (5.5)，它给出了 W 的大-Z渐近行为

$$W(X,Z) = \left(I_2 + \mathcal{O}(Z^{-1})\right) e^{-iXZ\sigma_3} \left(\frac{Z+\zeta}{Z}\right)^{\frac{-i\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}\sigma_3}. \tag{5.13}$$

利用大-Z 渐近行为 Ψ，由 [17], 将其改写为 (X后可得 Z) 变量，得到

$$\Psi\left(2i\zeta X, -\frac{1}{\zeta}Z\right) = \left(I_2 + \mathcal{O}(\zeta Z^{-1})\right) e^{-iXZ\sigma_3} \left(-\frac{\zeta}{Z}\right)^{\frac{\theta_\infty}{2}\sigma_3}. \tag{5.14}$$

比较方程（5.13）和（5.14），我们推得 $\theta_\infty = 0$。此外，在 $Z = 0$附近，我们可以将W 表示如下

$$W(X,Z) = W^0(X,Z)Z^{\frac{i\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}\sigma_3} \equiv R(X,Z)e^{-iXZ\sigma_3}\,(Z+\zeta)^{\frac{-i\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}\sigma_3} \tag{5.15}$$

其中 $W^0(X,\ Z)$ 是 $Z = 0$附近的一个解析函数。利用 Ψ 在 $Z = 0$附近的行为；该行为是将 [17], 改写为 (X变量后，从中得到的 Z) 变量

$$\Psi\left(2i\zeta X, -\frac{1}{\zeta}Z\right) = \Psi^0\left(2i\zeta X, -\frac{1}{\zeta}Z\right) Z^{\frac{\theta_0}{2}\sigma_3} \tag{5.16}$$

其中 $\Psi^0\left(2i\zeta X,\ -\frac{1}{\zeta}Z\right)$ 是 $Z = 0$附近的一个解析函数。比较方程（5.15）和（5.16），我们推得 $\theta_0 = \frac{2i\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}$。对 $Z = -\zeta$ 附近进行类似分析可得 $\theta_1 = -\frac{2i\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}$。

此外，通过令 Lax 对的两种等价形式相等，我们推得

$$u(2i\zeta X) = (1 - 2i(\partial_X \ln(X\Psi_V(X,0))^{-1})^{-1},$$

对该关系求逆，我们推得存在一个常数 κ，使得

$$\Psi_V(X,0) = \frac{\kappa}{X}\exp\left(-\frac{1}{2i\zeta}\int_1^{2i\zeta X}\frac{u(s)}{1-u(s)}ds\right)$$

这等价于（2.6）。

□

致谢

本研究得到了路易斯安那州董事会杰出学者讲席计划的支持。

A 存在性理论

A.1 小范数论证的证明

在本节中，我们证明引理 4.9 和引理 5.9。具体而言，我们证明一个更一般的结果，两个引理均可由此推出。为此，我们需要先给出一些定义。首先，我们为矩阵值函数定义如下内积。

定义 A.1。 固定 $n \in \mathbb{N}$，令 $\Sigma \subseteq \mathbb{C}$ 为一条可求长曲线，且令 M， $Q: \Sigma \to \mathbb{C}^{n\times n}$；则我们为此类矩阵值函数定义内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 如下

$$\langle M, Q\rangle = \int_{\Sigma} \operatorname{Tr}\left(M^{\star} Q\right) |\mathrm{d}z| ,$$

其中， $|\mathrm{d}z|$ 是弧长参数， $M^{\star}$ 是矩阵 M 的共轭转置。

前述内积自然诱导出如下范数

$$\|M\|_2^2 = \langle M, M\rangle .$$

矩阵值函数 $M: \Sigma \to \mathbb{C}^{n\times n}$ 的另一种范数是 8-范数，其定义如下

$$\|M\|_{\infty} = n \operatorname*{essesup}_{z\in\Sigma} \max_{i,j} |M_{i,j}(z)| .$$

我们注意到，对于两个矩阵值函数 M， $Q: \Sigma \to \mathbb{C}^{n\times n}$ ，以下关系成立。

$$\|MQ\|_2 \leqslant \|M\|_{\infty} \|Q\|_2 .$$

自然地， $\|\cdot\|_2$ 范数诱导出如下算子范数。

定义 A.2。 固定 $n \in \mathbb{N}$， 令 $\Sigma \subseteq \mathbb{C}$ 为一条可求长曲线。令 $C\colon \mathsf{Mat}(n,\Sigma) \to \mathsf{Mat}(n,\Sigma)$，其中

$$\mathrm{Mat}(n,\Sigma) := \{M : \Sigma \to \mathbb{C}^{n\times n} | \|M\|_2 < \infty\} .$$

我们将算子范数 $|||C|||_2$ 定义为

$$|||C|||_2 := \sup_{\substack{M\in \mathrm{Mat}(n,\Sigma)\\ ||M||_2=1}} \|C(M)\|_2 .$$

最后，我们将两个柯西积分算子 $C_+, C_-\colon \mathsf{Mat}(2,\Sigma) \to \mathsf{Mat}(2,\Sigma)$ 定义为

$$C_+(h)(z) := \lim_{\substack{\zeta\to z\\ \text{from inside of } \Sigma}} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma} \frac{h(s)}{s-\zeta}\mathrm{d}s , \qquad C_-(h)(z) := \lim_{\substack{\zeta\to z\\ \text{from outside of } \Sigma}} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma} \frac{h(s)}{s-\zeta}\mathrm{d}s , \tag{A.1}$$

并且，对于任意矩阵值函数 $M(z)$，将算子 $C_M\colon \mathsf{Mat}(2,\Sigma) \to \mathsf{Mat}(2,\Sigma)$ 定义为

$$C_M(h(z))(z) := C_-(h(z)M(z)) . \tag{A.2}$$

我们注意到 $\mathbb{1} = C_+ - C_-$。

根据这些定义，考虑以下矩阵值函数 $E(z)$的黎曼–希尔伯特问题*RHP* **A.1**。 求一个 2×2 矩阵值函数 $E(z)$ ，使得

- $E(z)$在 $\mathbb{C}\backslash\Sigma$中解析。
- 对于 $z \in \Sigma$， E 具有边界值 $E_+(z)$ 和 $E_-(z)$，它们满足跳跃关系

$$E_+(z) = E_-(z)\ (I + W_N(z)), \quad z \in \Sigma$$

其中， Σ 是一个闭合轮廓。此外， W_N 的 L_{∞} 范数很小，即存在常数$\kappa_1 > 0$ 和 $\delta < \frac{1}{2}$ ，使得:

$$\|W_N\|_{\infty} \leqslant \kappa_1 N^{2\delta-1}, \quad 2\delta < 1. \tag{A.3}$$

- $E(z) = I + O(z^{-1})$ 当 $z \to \infty$时。

注记 A.1。 我们注意到，引理4.9和引理5.9中讨论的两个RHP具有与RHP A.1相同的性质。

于是，以下命题成立

命题 A.2. 黎曼–希尔伯特问题 *A.1* 有唯一解，其形式为

$$E(z) = I + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\ell=0}^{\infty}\int_{\Sigma} \frac{C_{W_N}^{\ell}(I)(s)\ W_N(s)}{s-z}\, ds. \tag{A.4}$$

证明。 我们将证明分为几个步骤。首先，我们证明如果解存在，则它是唯一的。接着，我们证明 $E_-(z)$ 定义良好，且可表示为纽曼级数；这意味着 $E(z)$ 存在，并具有所需的无穷远处的渐近行为。

唯一性。 假设黎曼–希尔伯特问题 $E_1(z)$、$E_2(z)$ （A.1）存在两个解。那么矩阵$N(z) = E_1(z)E_2(z)^{-1}$ 在整个复平面上解析，并具有以下渐近行为

$$N(z) = I + \mathcal{O}(z^{-1}) \quad \text{as } z \to \infty\,.$$

因此，由刘维尔定理， $N(z) \equiv I$，这意味着 $E_1(z) = E_2(z)$。

存在性。 将 $E(z)$ 的跳跃条件改写如下：

$$\begin{aligned} E_+(z) &= E_-(z)\,(I + W_N(z)) \\ &= E_-(z)\,(I + W_N(z)) + E_-(z) - E_-(z) \end{aligned}$$

这等价于

$$E_+(z) - E_-(z) = E_-(z)\,W_N(z).$$

利用索霍茨基–普莱梅利公式，我们推导得：

$$E(z) = I + \frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma \frac{E_-(s)\,W_N(s)}{s - z}\,ds \tag{A.5}$$

取方程（A.5）的负边界值，我们推导得：

$$E_-(z) = I + C_-(W_N E_-) = I + C_{W_N}(E_-)(z)$$

这等价于

$$(\mathbb{1} - C_{W_N})E_-(z) = I. \tag{A.6}$$

接下来，我们证明算子 $\mathbb{1} - C_{W_N}$可逆，只需证明其范数 $|||C_{W_N}|||_2 < 1$。考r:

$$\|C_{W_N}E\|_2 = \|C_-(W_N E)\|_2 \leqslant \kappa\|W_N E\|_2 \leqslant \kappa\|W_N\|_\infty\|E\|_2$$

这里用到了以下事实： C_{W_N} 是 $L_2(\Sigma)$ [14]上的有界算子。根据算子范数的定义，可得：

$$|||C_{W_N}|||_2 \leqslant \kappa\|W_N\|_\infty.$$

此外，方程（A.3）对 W_N成立，这表明 $|||C_{W_N}|||_2 < 1$；因此算子 $\mathbb{1} - C_{W_N}$可逆。方程（A.6）进而推出 $E_-(z)$ 存在，且可表示为收敛的纽曼级数：

$$E_-(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_{W_N}^{\ell}(I)(z).$$

此外，方程（A.5）表明 $E(z)$ 存在，且可按方程（A.4）所示写出。最后，利用（A.5）， z 的 $E(z)$大

$$E(z) = I - \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{z^{j+1}}\int_\Sigma W_N(s)E_-(s)s^j\,ds$$

其中

$$\begin{aligned} \left|\int_\Sigma W_N(s)E_-(s)s^j\,ds\right| &\leqslant \int_\Sigma |W_N(s)E_-(s)|\,ds \\ &\leqslant \int_\Sigma \left|W_N(s)s^j\right|\,|E_-(s)|\,ds \\ &\leqslant \int_\Sigma \|W_N(s)s^j\|_\infty |E_-(s)|\,ds \\ &= \|W_N(s)s^j\|_\infty \int_\Sigma |E_-(s)|\,ds \\ &\leqslant \ell^{1/2}(\Sigma)\|W_N(s)s^j\|_\infty\|E_-(s)\|_2 \end{aligned}$$

（这里我们用到了 Σ 是有限长度轮廓），并且存在两个常数 C_1, C_2 ，使得$\|W_N(s)s^j\|_\infty \leqslant C_1\,N^{2\delta-1}$ 且 $\|E_-(s)\|_2 \leqslant C_2$。这意味着 $E(z)$ 在无穷远处具有定义良好的渐近行为。

最后，我们需要证明，当 z （从˜任一侧）趋近于圆时， E 具有连续的边界值。为此，我们利用跳跃矩阵 $I + W_N(z)$ 的解析性来定义 $E(z)$。选取一个稍大一些的圆 $\{z : |z| = 1 + \tilde{\epsilon}\}$，并令 $\mathcal{A}$ 为单位圆与这个新圆之间的环域。然后定义

$$\tilde{E} = E(z) \begin{cases} I + W_N(z), & z \in \tilde{\mathcal{A}} \\ I, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

˜读者可以验证， E 满足一个黎曼–希尔伯特问题，其形式与 E相同，区别在于积分路径是 $\{|z| = 1 + \tilde{\epsilon}\}$，而跳跃矩阵是 $I + W_N(z)$ 在新积分路径上的解析延拓，并且仍满足相同的一致有界性。现在，先前的 L^2 存在性理论适用于 $\tilde{E}$、˜ ˜，特别是我们可以得知， E 在单位圆上解析。根据 E的定义，我们进而看到，对于 $|z| = 1$， $E_{\pm}(z)$ 是某个在单位圆邻域内解析的函数的边界值（分别从内侧或外侧取值），这意味着 $E(z)$ 以连续函数意义下的方式取到其边界值。

□

A.2 定理5.6的证明

本节证明定理5.6，为方便读者，我们重述其内容。

定理 A.3。 令 $0 < \zeta < 1$、 $\mu_{\mathcal{D}_1} \in \mathbb{R}_+$，并固定 $(X、 T) \in \mathbb{R}^2$。考虑以下关于矩阵值函数 $R(Z;\ X、 T) \equiv R(Z)$ 的黎曼–希尔伯特问题。

黎曼–希尔伯特问题 A.4。 求一个 2×2 矩阵 $R(Z;\ X,\ T)$，使得

1. $R(Z;\ X,\ T)$ 在 $|Z| \neq 1$ 上解析，并且在圆的内部和外部均具有连续边界值

2. 两个边界值满足关系

$$R_+(Z) = R_-(Z)W(Z), \quad W(Z) = e^{-i\left(XZ+TZ^2+\frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}\ln\left(\frac{Z+\zeta}{Z}\right)\right)\sigma_3} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{i\left(XZ+TZ^2+\frac{\mu_{\mathcal{D}_1}}{\zeta}\ln\left(\frac{Z+\zeta}{Z}\right)\right)\sigma_3}$$

for Z such that $|Z| = 1$.

3. $R(Z;\ X,\ T) = I + \mathcal{O}(Z^{-1})$，当 $Z \to \infty$ 时。

该黎曼–希尔伯特问题存在唯一解。

为证明这一结果，我们回顾一些有用的定义。证明将沿用 [14] 中定理 5.3 的证明。

定义 A.5。 设 $\Sigma \subseteq \mathbb{C}$ 是一条可求长曲线，并考虑算子 $K\colon L^2(\Sigma) \to L^2(\Sigma)$。那么，如果对于任意弱收敛的函数序列 $f_n \rightharpoonup f$，都有 $\|K(f_n - f)\|_{L^2} \to 0$，则 K 在 L^2 意义下是紧的。

定义 A.6。 有界算子 $T\colon X \to Y$ 在巴拿赫空间 X 和 Y 之间是弗雷德霍姆算子，当且仅当它模紧算子可逆；也就是说，存在有界线性算子 $S\colon Y \to X$，使得 $I - ST$ 和 $I - TS$ 分别是 Y 和 X 上的紧算子。

定理 *A.3* 的证明。 唯一性的证明与命题 A.2 的证明思路相同。为证明存在性，我们将 $R(Z)$ 的跳跃条件改写如下：

$$\begin{aligned} R_+(Z) &= R_-(Z)\ W(Z) \\ &= R_-(Z)\ W(Z) + R_-(Z) - R_-(Z) \end{aligned}$$

这等价于

$$R_+(Z) - R_-(Z) = R_-(z)\ (W(Z) - I)\,.$$

利用索霍茨基–普莱梅利公式，我们推导得：

$$R(Z) = I + \frac{1}{2\pi i}\int_{|s|=1} \frac{R_-(s)\ (W(s) - I)}{s - Z}\, ds$$

取前一个方程的负边界值，我们推得：

$$R_-(Z) = I + C_-((W - I)E) = I + C_W(R_-)(Z)$$

这等价于

$$(\mathbb{1} - C_W)R_-(Z) = I.$$

因此，证明黎曼–希尔伯特问题 A.4 有解，等价于证明 $\mathbb{1} - C_W$ 是$L^2(\Sigma)$中的双射。为此，我们使用 Fredholm 理论；具体而言，我们证明以下各项

1. $\mathbb{1} - C_W$ 是弗雷德霍姆算子；
2. $\mathbb{1} - C_W$ 的指标为 0；3. Ker $(\mathbb{1} - C_W) = \{0\}$。

$\mathbb{1} - C_W$ **是弗雷德霍姆算子**。我们证明算子 $\mathbb{1} - C_W$，方法是直接应用定义 A.6。这等价于证明存在算子 S 使得

$$\mathbb{1} - S(\mathbb{1} - C_W), \quad \mathbb{1} - (\mathbb{1} - C_W)S$$

是紧的。算子 S 是 $\mathbb{1} - C_W$ 的广义逆算子。将 $C_{W^{-1}}$ 定义如下：

$$C_{W^{-1}}(h)(Z) := C_-((W - I)^{-1}h)\,.$$

我们断言 $\mathbb{1} - C_{W^{-1}}$ 是 $\mathbb{1} - C_W$ 的广义逆。考虑

$$\begin{aligned}(\mathbb{1} - C_W)(\mathbb{1} - C_{W^{-1}})f &= f - C_{W^{-1}}f - C_W f + C_W[C_{W^{-1}}f] \\ &= f - C_{W^{-1}}f - C_W f + C_+\left[C_{W^{-1}}f(I - W^{-1})\right] \\ &= f - C_{W^{-1}}f - C_W f + C_+\left[C_+\left[f(I - W)\right](I - W^{-1})\right]\end{aligned} \tag{A.7}$$

并利用这一性质

$$C_+\left[f(I - W)\right] = C_-\left[f(I - W)\right] + f(I - W)$$

(A.7中的最后一个等式变为：

$$\begin{aligned}(\mathbb{1} - C_W)(\mathbb{1} - C_{W^{-1}})f &= f - C_W f - C_{W^{-1}}f + C_+\left[\{C_-\left[f(I - W)\right] + f(I - W)\}(I - W^{-1})\right] \\ &= f + C_+\left[-f(I - W) - f(I - W^{-1}) + \{C_-[f(I - W)] + f(I - W)\}(I - W^{-1})\right] \\ &= f + C_+\left[C_-(f\hat{v})v\right]\end{aligned}$$

其中我们定义：$v = I - W^{-1}$ 以及$\hat{v} = I - W$。接下来，我们证明算子 K：$f \mapsto C_+\left[C_-(f\hat{v})v\right]$是紧的，即 K 满足定义A.6，这等价于证明对于任意函数序列 $f_n \rightharpoonup 0$ 都有 $Kf_n \to 0$。直接计算可得：

$$\begin{aligned}Kf_n &= \lim_{\substack{\xi \to z \\ \text{from the + side}}} \frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma \frac{C_-(f_n\hat{v})(s)v(s)}{s - \xi}\,ds \\ &= \lim_{\substack{\xi \to z \\ \text{from the + side}}} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma^-} \frac{C_-(f_n\hat{v})(s)v(s)}{s - \xi}\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma^-} \frac{C(f_n\hat{v})(s)v(s)}{s - z}\,ds \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma^-}\left|\frac{C(f_n\hat{v})(s)v(s)}{s - z}\right|ds \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\|C(f_n\hat{v})\|_2\left\|\frac{v}{s - z}\right\|_2\end{aligned}$$

其中 $s \in \Sigma^- := \{Z \in \mathbb{C} \,||Z| = 1 + \delta\}$ 对于某个 $\delta > 0$ 足够小且 $z \in \Sigma$。因此，我们推得：

$$Kf_n \leqslant \frac{1}{2\pi\delta^{1/2}}\|C(f_n\hat{v})\|_2\|v\|_2\,,$$

由于 $f_n \rightharpoonup 0$ 且柯西算子在 $L^2(\Sigma)$ [14]上有界，因此 $\|C(f_n\hat{v})\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$，所以我们得出 $\mathbb{1} - C_W$ 是一个弗雷德霍姆算子。

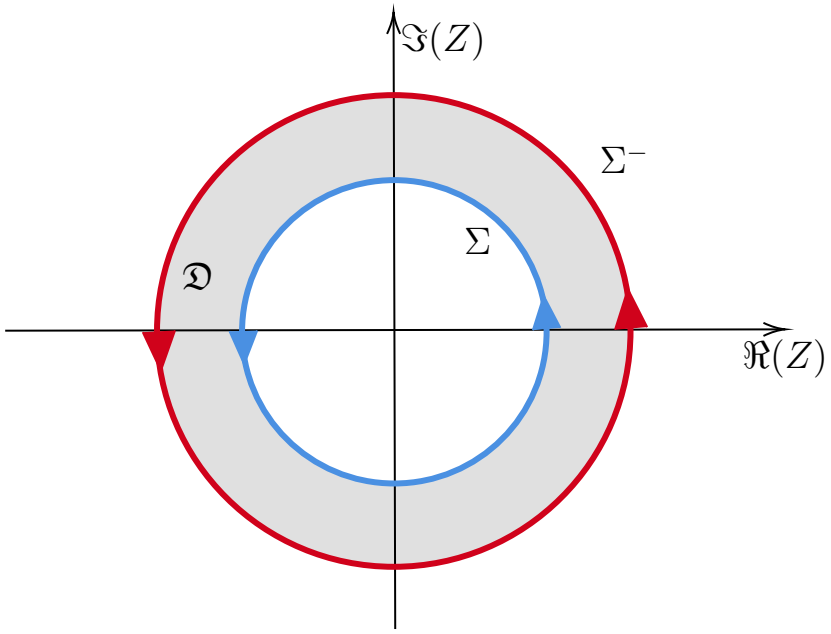

图 2：轮廓 Σ、 Σ^- 以及区域 $\mathfrak{D}$

算子 $\mathbb{1} - C_W$ 的指标为 0。 考虑算子族 $T_t := \mathbb{1} - C_W^{(t)}$，其中 $t \in [0,\ 1]$和 $C_W^{(t)}$ 定义如下：

$$C_W^{(t)} f := C_+ \left[f(tv) \right], \quad f \in L^2(\Sigma).$$

映射 $O(t)$: $t \mapsto \mathbb{1} - C_W^{(t)}$ 是从 $[0,\ 1]$到 $L^2(\Sigma)$中有界算子空间的连续映射。此外， $\mathbb{1} - C_W^{(t)}$ 是一个弗雷德霍姆算子；将 C_W 替换为 $C_W^{(t)}$ 后重复上述论证即可验证这一点。由于算子的指标在连续扰动下保持不变，且$T_0 = I$ 的指标为 0，因此对于所有 $t \in [0,\ 1]$，我们得到 $\mathrm{ind}(T_t) = 0$ 。

Pro关于 Ker $(\mathbb{1} - C_W) = \{0\}$。 反设，对于某个 $\mu_o \in L_2(\Sigma)$，有 :

$$(\mathbb{1} - C_W)\, \mu_o = 0\,. \tag{A.8}$$

考虑函数

$$R_o(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Sigma \frac{\mu_o(s)(W(s) - I)}{s - Z}\, ds, \quad Z \in \mathbb{C} \backslash \Sigma. \tag{A.9}$$

函数 $R_o(Z)$ 满足以下黎曼–希尔伯特问题：

黎曼–希尔伯特问题 A.7. 求一个矩阵值函数 $R_o(Z)$，使得

1. $R_o(Z)$ 在 $\mathbb{C}\backslash\Sigma$中解析 2.
$R_o(Z) = \mathcal{O}(Z^{-1}), \quad Z \to \infty$3. $R_{o,}$
$_+(Z) = R_{o,\ -}(Z) W(Z), \quad Z \in \Sigma.$

前两个条件由 $R_o(Z)$的定义立即得到。第三个条件则由 $s \in \Sigma$的以下一连串等式得出

$$\begin{aligned} R_{o,+}(s) &= C_+ \left(\mu_o(s)(W(s) - I) \right) \\ &= (I - C_-) \left(\mu_o(s)(W(s) - I) \right) \\ &= \mu_o(s) W(s) - \mu_o(s) + C_W(\mu_o)(s) \end{aligned}$$

其中我们使用了 $C_+ = I - C_-$ 柯西算子（A.1）的性质。现在，利用关系式（A.8），我们可以改写为

将最后一个等式写为

$$R_{o,+}(s) = \mu_o(s) W(s).$$

此外，利用 $R_o(Z)$的定义：

$$R_{o,-}(Z) = C_-\left(\mu_o(s)(W(s)-I)\right) \overset{(A.2)}{=} C_W(\mu_o).$$

然后，通过比较两个边界值，我们得到跳跃关系

$$R_{o,+}(Z) = R_{o,-}(Z)W(Z), \quad Z \in \Sigma.$$

根据假设，我们仅知道 $\mu_o \in L_2(\Sigma)$，因此，这个跳跃关系必须按 L^2意义解释如下：

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_\Sigma \left|R_o(s \pm i\epsilon) - R_o(s)\right|^2 |ds| = 0\,. \tag{A.10}$$

接下来，我们证明 $R_o(Z)$ 的边界值作为连续函数存在。为此，我们首先定义函数 $R_1(Z)$ 如下：

$$R_1(Z) = \begin{cases} R_o(Z)\,W(Z), & Z \in \mathfrak{D} \\ R_o(Z), & Z \in \mathbb{C}\backslash\mathfrak{D} \end{cases}$$

其中 $\mathfrak{D}$ 是图 2所示两个圆之间的区域，且两个圆均按逆时针方向定向。注意，对于 $Z \in \Sigma$， $R_1(Z)$ 没有跳跃条件：

$$R_{1,+}(Z) = R_{o,+}(Z) = R_{o,-}(Z)W(Z) = R_{1,-}(Z)$$

并且 $R_1(Z)$ 在 Σ^-上有一个跳跃条件，因为对于 $Z \in \Sigma^-$:

$$R_{1,+}(Z) = R_{o,+}(Z)W(Z) = R_o(Z)W(Z) = R_{1,-}(Z)W(Z).$$

接下来，我们证明 $R_1(Z)$在 Σ周围的一个小邻域内是解析的。证明依赖于莫雷拉定理，为此我们需要证明，对于包含在 Σ周围这个小邻域内的任意闭合光滑曲线， R_1 的积分为0。因此，考虑任意这样一条曲线，通过变形可以将其化为图3所示形式的积分路径。如果所有这类闭合积分路径上的积分都为0，那么根据标准结果，任何与 Σ相交的闭合光滑曲线，其积分也为0。因此，我们将注意力限制在这些积分路径上。令 ϵ表示这些积分路径到单位圆的距离。那么我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_2} R_1(s)ds + \int_{\gamma_4} R_1(s)ds = -\int_\alpha^\beta \left[R_o\left((1-\epsilon)e^{i\theta}\right) - R_o\left((1+\epsilon)e^{i\theta}\right)W\left((1+\epsilon)e^{i\theta}\right)\right] d\theta \\
&= -\int_\alpha^\beta \left[R_o\left((1-\epsilon)e^{i\theta}\right) - R_{o,+}(e^{i\theta})\right] d\theta - \int_\alpha^\beta \left[R_{o,+}(e^{i\theta}) - R_o\left((1+\epsilon)e^{i\theta}\right)W\left((1+\epsilon)e^{i\theta}\right)\right] d\theta \\
&= -\int_\alpha^\beta \left[R_o\left((1-\epsilon)e^{i\theta}\right) - R_{o,+}(e^{i\theta})\right] d\theta - \int_\alpha^\beta \left[R_{o,-}(e^{i\theta}) - R_o\left((1+\epsilon)e^{i\theta}\right)\right]W\left((1+\epsilon)e^{i\theta}\right) d\theta.
\end{aligned}$$

取绝对值，得到

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2} R_1(s)ds + \int_{\gamma_4} R_1(s)ds\right| &\leqslant \int_\alpha^\beta \left|R_o\left((1-\epsilon)e^{i\theta}\right) - R_{o,+}(e^{i\theta})\right| d\theta \\
&\quad + \int_\alpha^\beta \left|\left[R_{o,-}(e^{i\theta}) - R_o\left((1+\epsilon)e^{i\theta}\right)\right]W\left((1+\epsilon)e^{i\theta}\right)\right| d\theta \\
&\leqslant \sqrt{\beta-\alpha}\|R_o - R_{o+}\|_{2,(\alpha,\beta)} + \|R_{o,-} - R_o\|_{2,(\alpha,\beta)}\|W\|_{2,(\alpha,\beta)}
\end{aligned}$$

其中$\|W\|_{2,(\alpha,\beta)}$是有界的，因为跳跃矩阵 W与 $(-\zeta$保持正距离， $0)$。此外， $\|R_o - R_{o+}\|_{2,(\alpha,\beta)}$ 以及$\|R_{o,-} - R_o\|_{2,(\alpha,\beta)}$都趋于零，当 $\epsilon \to 0$时，这是由于（A.10）。接下来，我们估计连接两条红色圆弧的两条蓝色线段上的积分。令 γ_v：$= \gamma_1 \cup \gamma_3$ 表示这两条蓝色线段，它们的长度为 2ϵ，连接着最靠近单位圆的两条红色圆弧。我们有

$$\int_{\gamma_v} R_1(s)ds = \int_{1-\epsilon}^1 R_o(te^{i\alpha})W(te^{i\alpha})\,dt + \int_1^{1+\epsilon} R_o(te^{i\alpha})\,dt + \int_{1+\epsilon}^1 R_o(te^{i\beta})\,dt + \int_1^{1-\epsilon} R_o(te^{i\beta})W(te^{i\beta})\,dt.$$

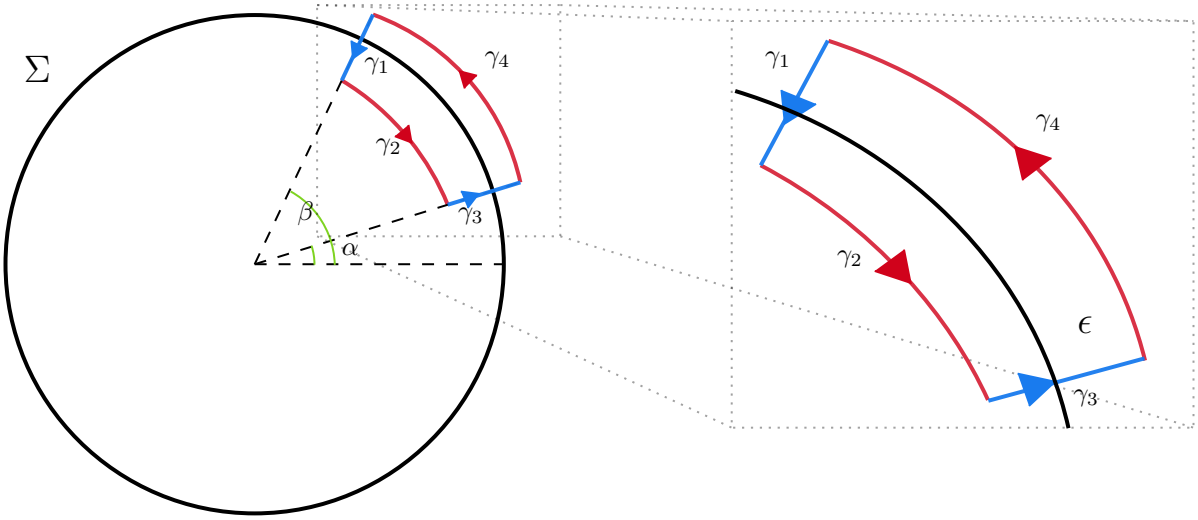

图 3：闭曲线 γ、 γ_h 和 γ_v

我们断言，当 $\epsilon \to 0$ 时，所有积分都趋于零；这里仅对第二个积分进行说明，因为其余积分的处理类似。考虑

$$\begin{aligned}\int_1^{1+\epsilon} R_o(te^{i\alpha})\,dt &= \int_0^{\epsilon} R_o\left((u+1)e^{i\alpha}\right)\,du \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\epsilon}\int_{\Sigma} \frac{\mu_o(s)(W(s)-I)}{s-(u+1)e^{i\alpha}}\,ds\,du \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma} \mu_o(s)(W(s)-I)\left(\int_0^{\epsilon}\frac{1}{s-(u+1)e^{i\alpha}}\,du\right)ds \\ &= -\frac{1}{2\pi i e^{i\alpha}}\int_{\Sigma}\mu_o(s)(W(s)-I)\ln\left(\frac{s-(1+\epsilon)e^{i\alpha}}{s-e^{i\alpha}}\right),ds\end{aligned}$$

我们取绝对值：

$$\begin{aligned}\left|\int_1^{1+\epsilon} R_o(te^{i\alpha})\,dt\right| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\left|\mu_o(s)(W(s)-I)\ln\left(\frac{s-(1+\epsilon)e^{i\alpha}}{s-e^{i\alpha}}\right)\right|ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\|\mu_o(W-I)\|_{2,\Sigma}\left\|\ln\left(\frac{s-(1+\epsilon)e^{i\alpha}}{s-e^{i\alpha}}\right)\right\|_{2,\Sigma}\end{aligned}$$

其中$\|\mu_o(W-I)\|_{2,\Sigma}$有界，并且当 $\epsilon \to 0$, $\left\|\ln\left(\frac{s-(1+\epsilon)e^{i\alpha}}{s-e^{i\alpha}}\right)\right\|_{2,\Sigma}$趋于零。因此，我们证明了原积分必定为零；这意味着，对于 Σ, $\oint_\gamma R_1(s)ds = 0$的一个小邻域内的任意闭合光滑曲线 γ ，根据莫雷拉定理，$R_1(Z)$ 在 Σ的一个邻域内关于Z 是解析的。

最后，为了完成证明，我们证明 $R_o(z)$ 恒等于零。首先，(A.9)表明：

$$R_o(Z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma}\mu_o(s)\,(W(s)-I)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{s^j}{Z^{j+1}}\,ds = \mathcal{O}(Z^{-1}), \quad z\to\infty. \tag{A.11}$$

考虑：

$$A(Z) := R_o(Z)\,R_o^{\dagger}(\overline{Z}),$$

其中 $R_o^{\dagger}(\ Z)$ 是 $R(Z)$的共轭转置。我们声称 $A(Z)$ 是一个整函数。事实上，对于 r

$Z \in \Sigma$，我们有：

$$\begin{aligned} A_+(Z) &= \left(R_o(Z)\, R_o^\dagger(\overline{Z})\right)_+ = \left(R_o\right)_+(Z)\, \left(\left(R_o\right)_+(\overline{Z})\right)^\dagger \\ &= \left(R_o\right)_- W(Z)\, \left(\left(R_o\right)_-(\overline{Z}) W(\overline{Z})\right)^\dagger \\ &= \left(R_o\right)_- W(Z) W(\overline{Z})^\dagger\, \left(R_o\right)_-(\overline{Z})^\dagger \\ &= \left(R_o\right)_-\, \left(R_o\right)_-(\overline{Z})^\dagger \\ &= A_-(Z), \end{aligned} \tag{A.12}$$

其中可以很容易地验证 $W(Z)\, W^\dagger(Z) = I_2$。因此 A 在 $\mathbb{C}$上处处连续，故由莫雷拉定理可知，它是整函数，并且在 ∞ 处为零，因此 $A \equiv 0$。结合（A.11）-（A.12），我们得出 $R_o(Z)$ 恒等于零。因此，$\mu_o \equiv 0$，这意味着

$$\operatorname{Ker}\left(\mathbb{1} - C_W\right) = \{0\}\,.$$

前面的分析使我们能够应用标准的 Fredholm 理论来证明 $\mathbb{1} - C_W$ 是一个双射。事实上，由于算子 $\mathbb{1} - C_W$ 是弗雷德霍姆算子，因此：

$$\operatorname{Index}(\mathbb{1} - C_W) = \dim(\operatorname{Ker}\left(\mathbb{1} - C_W\right)) - \dim(\operatorname{Coker}\left(\mathbb{1} - C_W\right)).$$

我们证明了指标$(\mathbb{1} - C_W) = 0 =$维数(核 $(\mathbb{1} - C_W)$)，因此：

$$\dim(\operatorname{Coker}\left(\mathbb{1} - C_W\right)) = 0$$

这意味着 $\mathbb{1} - C_W$ 是一个双射。 □

B 定理的证明3.1

在本节中，我们证明定理3.1。我们的首要目标是找出归一化常数 c_j 在黎曼–希尔伯特问题 1.1 中的取值与达布方法中的常数 p_j 之间的显式关系。为建立这一关系，我们先给出以下引理。

引理 B.1。 考虑 *Lax* 对 x变量下的散射问题 (1.2)，其归一化为

$$\lim_{x \to +\infty} \Phi(x,z) N^{-1}(x,z) = I, \quad N^{-1}(x,z) = N^\dagger(x,\overline{z})\,,$$

其中，$N^\dagger$ 是 N的共轭转置。于是：

$$\Phi^{-1}(x,z) = \overline{\Phi^{\intercal}(x,\overline{z})} = \Phi^\dagger(x,\overline{z}).$$

注 B.1。 通常（对于 Jost 解）使用 $N(x,\ z) = e^{-izx\sigma_3}$。然而，对于 Darboux 构造，需要一个更一般（但仍为对角）的矩阵 $N(x,\ z)$，见下文式（B.1）。

证明。 首先，我们写出 $\Phi^\dagger(x,\ z)$ 满足的初值问题

$$\partial_x \Phi^\dagger(x,z) = \Phi^\dagger(x,z) \begin{pmatrix} i\overline{z} & -\psi \\ \overline{\psi} & -i\overline{z} \end{pmatrix}, \quad \lim_{x \to +\infty} \Phi^\dagger(x,z) \left(N^\dagger(x,z)\right)^{-1} = I\,.$$

我们也可以对 $\Phi^{-1}(x,\ z)$ 作同样处理，得到

$$\partial_x \Phi^{-1}(x,z) = \Phi^{-1}(x,z) \begin{pmatrix} iz & -\psi \\ \overline{\psi} & -iz \end{pmatrix}, \quad \lim_{x \to +\infty} \Phi^{-1}(x,z) N(x,z) = I\,.$$

所需结果显然成立。 □

联系这两种方法的另一项相关信息是解 $\Phi_n(z$ 在 $x \to \infty$ 时的渐近行为；$x,\ t)$；这由下面的引理给出。

引理 B.2。 考虑特征函数 $\Phi_n(x,\ z)$，它们由达布方法构造而成（更多细节请参见 *[20]*）。它们满足以下渐近行为：

$$\lim_{x\to-\infty}\Phi_n(x,z)\Phi_0^{-1}(x,z)\begin{pmatrix}\prod_{j=1}^n\frac{z-\lambda_j}{z-\overline{\lambda_j}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\Phi_n(x,z)\Phi_0^{-1}(x,z)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \prod_{j=1}^n\frac{z-\lambda_j}{z-\overline{\lambda_j}}\end{pmatrix}=I, \tag{B.1}$$

其中 $\Phi_0(x,z)=\begin{pmatrix}e^{-izx} & 0\\ 0 & e^{izx}\end{pmatrix}$.

证明。 根据达布方法，我们有：

$$\Phi_n(x,z)=\chi_n(x,z)\Phi_{n-1}(x,z)$$

其中

$$\chi_n(x,z)=I_2+\frac{\lambda_n-\overline{\lambda_n}}{z-\lambda_n}\frac{1}{||q_n(x)||^2}\overline{q_n}(x)\cdot q_n^T(x),\quad q_n(x)=\overline{\Phi_{n-1}(x,\overline{\lambda_n})}\cdot\begin{pmatrix}1\\ p_n\end{pmatrix}$$

且 $\cdot$ 表示向量之间的内积。首先，我们通过归纳法计算 $q_n(x)$ 当$x\to\pm\infty$ 时的渐近行为。为此，我们假设存在常数 $c>0$，使得以下关系成立

$$\frac{q_j(x)\cdot q_j^\dagger(x)}{||q_j(x)||^2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\mathcal{O}(e^{-c|x|}),\quad x\to-\infty$$

$$\frac{q_j(x)\cdot q_j^\dagger(x)}{||q_j(x)||^2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\mathcal{O}(e^{-c|x|}),\quad x\to+\infty$$

对 $j=1,2,\cdots,n-1$成立，并证明其对 $j=n$也成立。证明针对 $x\to+\infty$进行，另一个极限的证明类似。对于 $j=n$，我们有：

$$\begin{aligned}q_n(x)&=\overline{\Phi_{n-1}(x,\overline{\lambda_n})}\cdot\begin{pmatrix}1\\ p_n\end{pmatrix}\\&=\overline{\chi_{n-1}(x,\overline{\lambda_n})\,\Phi_{n-2}(x,\lambda_n)}\cdot\begin{pmatrix}1\\ p_n\end{pmatrix}\\&=\overrightarrow{\prod_{j=1}^{n-1}}\overline{\chi_j(x,\overline{\lambda_n})}\Phi_0(x,\overline{\lambda_n})\cdot\begin{pmatrix}1\\ p_n\end{pmatrix}\\&=\overrightarrow{\prod_{j=1}^{n-1}}\left(I_2+\frac{\overline{\lambda_j}-\lambda_j}{\lambda_n-\overline{\lambda_j}}\frac{1}{||q_j(x)||^2}q_j(x)\cdot q_j^\dagger(x)\right)\Phi_0(x,\overline{\lambda_n})\cdot\begin{pmatrix}1\\ p_n\end{pmatrix}\\&=\overrightarrow{\prod_{j=1}^{n-1}}\left(I_2+\frac{\overline{\lambda_j}-\lambda_j}{\lambda_n-\overline{\lambda_j}}\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\mathcal{O}(e^{-c|x|})\right)\right)\Phi_0(x,\overline{\lambda_n})\cdot\begin{pmatrix}1\\ p_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

逐项可得

$$q_{n1}(x)=e^{i\lambda_n x}\left(1+\mathcal{O}(e^{-c|x|})\right),\quad q_{n2}(x)=e^{-i\lambda_n x}p_n\left(\prod_{j=1}^{n-1}\frac{\overline{\lambda_j}-\lambda_j}{\lambda_n-\overline{\lambda_j}}+\mathcal{O}(e^{-c|x|})\right),\qquad x\to+\infty.$$

最后一个等式意味着

$$||q_n(x)||^2:=|q_{n1}(x)|^2+|q_{n2}(x)|^2=e^{i(\lambda_n-\overline{\lambda_n})x}\left(1+\mathcal{O}(e^{-c|x|})\right)+e^{-i(\lambda_n-\overline{\lambda_n})x}|p_n|^2\left(\left|\prod_{j=1}^{n-1}\frac{\overline{\lambda_j}-\lambda_j}{\lambda_n-\overline{\lambda_j}}\right|^2+\mathcal{O}(e^{-c|x|})\right)$$

或者

$$||q_n(x)||^2 \sim |q_{n2}(x)|^2, \quad x \to +\infty$$

这意味着，对于 $j = n$ ，我们得到所需的渐近行为：

$$\frac{q_n(x) \cdot q_n^\dagger(x)}{||q_n(x)||^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(e^{-c|x|}), \quad x \to +\infty$$

由此完成归纳，证明也随之完成。 □

最后，为了证明定理 3.1，我们为方便读者重述其内容

定理 B.3。 考虑谱数据 $D_N(t)$ ，它与黎曼–希尔伯特问题 *1.1* 相关；以及 $\mathfrak{D}_N(t)$ ，它与达布方法相关，定义见 (1.4)-(3.1)。假设二者满足以下关系：

$$c_n = \frac{1}{p_n} \prod_{\ell=1}^{N} (\lambda_n - \overline{\lambda_\ell}) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq n}}^{N} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_\ell}, \tag{B.2}$$

那么，由这两种方法得到的非线性薛定谔方程解相同。

注 B.2。 该结果意味着 $\gamma_n = \frac{1}{p_n}$，其中 γ_n 是经典逆散射理论中的比例常数（例如参见 [1]）。

证明。 定义 $a_N(z) = \prod_{n=1}^{N} \frac{z-\lambda_n}{z-\overline{\lambda_n}}$ 首先，我们希望证明对于所有 $\ell = 1, \ldots\ldots, N$

$$\lim_{z \to \lambda_\ell} a_N(z)\Phi_N^{(1)}(z) = \frac{1}{p_\ell} \lim_{z \to \lambda_\ell} a_N(z)\Phi_N^{(2)}(z) \tag{B.3}$$

其中， $\Phi_N^{(1)}(z)$、 $\Phi_N^{(2)}(z)$ 分别是达布方法中 $\Phi_N(z)$ 的第一列和第二列。我们仅考虑 $\ell = N$ 的情形，其他情形完全类似。根据它们的定义，可以得到如下等式链：

$$\begin{aligned} \Phi_N(z) = \chi_N(z)\Phi_{N-1}(z) &= \left(I_2 + \frac{\lambda_N - \overline{\lambda_N}}{(z-\lambda_N)||q_N||^2} \overline{q}_N q_N^\intercal \right) \Phi_{N-1}(z) \\ &= \left(I_2 + \frac{\lambda_N - \overline{\lambda_N}}{(z-\lambda_N)||q_N||^2} \Phi_{N-1}(\overline{\lambda_N}) \begin{pmatrix} 1 \\ \overline{p}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p_N \end{pmatrix} \Phi_{N-1}^\dagger(\overline{\lambda_N}) \right) \Phi_{N-1}(z) . \end{aligned}$$

因此，在计算

$$\begin{aligned} \lim_{z \to \lambda_N} a_N(z)\Phi_N(z) &= a'(\lambda_N)(\lambda_N - \overline{\lambda_N})\Phi_{N-1}(\overline{\lambda_N}) \begin{pmatrix} 1 & p_N \\ \overline{p_N} & |p_N|^2 \end{pmatrix} \Phi_{N-1}^\dagger(\overline{\lambda_N})\Phi_{N-1}(\overline{\lambda_N}) \\ &= a'(\lambda_N)(\lambda_N - \overline{\lambda_N})\Phi_{N-1}(\overline{\lambda_N}) \begin{pmatrix} 1 & p_N \\ \overline{p_N} & |p_N|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中 i 在最后一个等式中，我们使用了引理 B.1。此外，定义 $U = a'(\lambda_N)(\lambda_N - \lambda_N)\overline{\Phi_{N-1}}(\lambda_N \quad)$

$$U \begin{pmatrix} 1 & p_N \\ \overline{p_N} & |p_N|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p_N \\ \overline{p_N} & |p_N|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} + \overline{p_N}u_{21} & p_N(u_{11} + \overline{p_N}u_{21}) \\ u_{21} + \overline{p_N}u_{22} & p_N(u_{21} + \overline{p_N}u_{22}) \end{pmatrix},$$

也就是说，第一列等于第二列乘以 $1/p_N$, ，由此证明了（B.3）。现在，我们声称矩阵 $m(z)$ 定义如下：

$$m(z) = \begin{pmatrix} \Phi_N^{(1)}(z)e^{izx} & a_N(z)\Phi_N^{(2)}(z)e^{-izx} \end{pmatrix} \tag{B.4}$$

求解黎曼–希尔伯特问题 1.1 的 $r(z) \equiv 0$。事实上，根据引理 B.2， $m(z)$ 的第一列是归一化为 e^{-izx} 在 $x \to$ 处的 $+\infty$Jost 解，并乘以 $\frac{e^{izx}}{a_N(z)}$；第二列则是归一化为 e^{izx} 在 $x \to$ 处的 $+\infty$Jost 解，并乘以 e^{-izx}。根据 [1, 第一章 2], 中的构造，可以立即推出这一结论。

现在我们可以证明（B.2）。思路是考察（B.4），计算该矩阵在 λ_N处的留数，并得到一个用黎曼–希尔伯特问题和达布方法的谱数据表示的表达式。根据 m的定义：

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{\lambda_N} m(z) &= \lim_{z\to\lambda_N}(z-\lambda_N)\begin{pmatrix}\Phi_N^{(1)}(z)e^{izx} & a_N(z)\Phi_N^{(2)}(z)e^{-izx}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lim_{z\to\lambda_N}(z-\lambda_N)\frac{a_N'(z_N)}{a_N'(z_N)}\Phi_N^{(1)}(z)e^{izx} & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\lim_{z\to\lambda_N}\frac{a_N(z)}{a_N'(\lambda_N)}\Phi_N^{(1)}(z)e^{izx} & 0\end{pmatrix} \overset{(B.3)}{=} \begin{pmatrix}\lim_{z\to\lambda_N}\frac{a_N(z)}{p_N a'(\lambda_N)}\Phi_N^{(2)}(z)e^{izx} & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{e^{i\lambda_N x}}{p_N a'(\lambda_N)}\lim_{z\to\lambda_N} a_N(z)\Phi_N^{(2)}(z) & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

我们注意到 $\lim_{z\to\lambda_N} a_N(z)\Phi_N^{(2)}(z)$ 是有限且非零的。从黎曼–希尔伯特问题的角度来看，在$t=0$处，根据（1.5）

$$\operatorname*{Res}_{\lambda_N} m(z) = \lim_{z\to\lambda_N} m(z)\begin{pmatrix}0 & 0\\ c_N e^{2i\theta(\lambda_N;x,0)} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_N e^{i\lambda_N x}\lim_{z\to\lambda_N} a_N(z)\Phi_N^{(2)}(z) & 0\end{pmatrix}.$$

前面的方程可推出所需的方程（B.2）。 □

复数域 引理5.1的证明

本节使用所谓的 5.1-网论证来证明引理 ϵ。为方便读者，我们重述该引理

引理 C.1. 固定 $\zeta\in(0,1)$和$\frac{1}{4}<\delta$。设 $X_1,\dots,X_N$为均值为 μ 的正的独立同分布次指数随机变量。那么，存在一个 $N_0>0$ 以及两个正的常数 c、$\gamma>0$，它们均独立于N，使得

$$\mathbb{P}(\mathcal{U}^c)\leqslant e^{-cN^\gamma},$$

其中

$$\mathcal{U}=\left\{(X_1,\dots,X_N)\in\mathbb{R}_+^N\,\middle|\,\forall Z:|Z|=1,\left|\sum_{j=1}^N\frac{X_j-\mu}{Z+\zeta\frac{j}{N}}\right|\leqslant N^{2\delta}\right\}.$$

证明。 我们注意到

$$\mathcal{U}^c=\left\{(X_1,\dots,X_N)\in\mathbb{R}_+^N\,\middle|\,\exists\, Z:|Z|=1,\left|\sum_{j=1}^N\frac{X_j-\mu}{Z+\zeta\frac{j}{N}}\right|>N^{2\delta}\right\}.$$

定义以下点和集合

$$Z_k=e^{2\pi i\frac{k}{N}},\qquad \mathcal{B}_k=\left\{Z\in\mathbb{C}\,\middle|\,|Z|=1,\,2\pi\frac{2k-1}{2N}\leqslant\arg(Z)<2\pi\frac{2k+1}{2N}\right\},$$

则有以下结论

$$\mathbb{P}(\mathcal{U}^c)\leqslant\sum_{k=1}^N\mathbb{P}\left(\left\{(X_1,\dots,X_N)\in\mathbb{R}_+^N\,\middle|\,\exists\, Z:Z\in\mathcal{B}_k,\left|\sum_{j=1}^N\frac{X_j-\mu}{Z+\zeta\frac{j}{N}}\right|>N^{2\delta}\right\}\right).\tag{C.1}$$

由于 $0<\zeta<1$，存在一个常数 $\nu>0$，使得

$$\left|Z+\zeta\frac{j}{N}\right|>\nu\quad\forall\, Z:\,|Z|=1,$$

定义 $S(Z)=\sum_{j=1}^N\frac{X_j-\mu}{Z+\zeta\frac{j}{N}}$，利用 Lipschitz 不等式，可以证明对所有 $Z\in\mathcal{B}_k$

$$|S(Z)-S(Z_k)|\leqslant|Z-Z_k|\sup_{Z\in\mathcal{B}_k}|S'(Z)|\leqslant 2\frac{\sum_{j=1}^N|X_j-\mu|}{N\nu^2}\leqslant 2\frac{\max_{j=1,\dots,N}(|X_j-\mu|)}{\nu^2}.$$

最后，利用前面的证明以及复系数情形下的伯恩斯坦不等式，对于$|S(Z_k)|$，我们得出

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left\{(X_1,\dots,X_N)\in\mathbb{R}_+^N\middle|\ \exists\, Z :\in \mathcal{B}_k, \left|\sum_{j=1}^{N}\frac{X_j-\mu}{Z+\zeta\frac{j}{N}}\right|>N^{2\,\delta}\right\}\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\left\{(X_1,\dots,X_N)\in\mathbb{R}_+^N\middle|\ |S(Z_k)|>\frac{N^{2\,\delta}}{2}\right\}\right)\\ &\quad+\mathbb{P}\left(\left\{(X_1,\dots,X_N)\in\mathbb{R}_+^N\middle|\ \exists\, Z:|Z|\in\mathcal{B}_k\,,\left|S(Z_k)-S(Z)\right|>\frac{N^{2\,\delta}}{2}\right\}\right)\\ &\leqslant \frac{e^{-cN^{2\varepsilon}}}{2}+\mathbb{P}\left(\left\{(X_1,\dots,X_N)\in\mathbb{R}_+^N\middle|\ \max(|X_j-\mu|)>\frac{\nu N^{2\,\delta}}{4}\right\}\right)\\ &\leqslant e^{-cN^{2\varepsilon}}\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式可通过仿照引理 4.2中的论证得出。因此，将前面的估计代入（C.1），我们便得到结论。 □

参考文献

[1]*M. J. Ablowitz*、*B. Prinari* 和 *A. D. Trubatch*，《离散与连续非线性薛定谔系统》，剑桥大学出版社，*2003*年*12*月。[2] *N. Akhmediev*、*A. Ankiewicz* 和 *M. Taki*，凭空出现又无影无踪的波，《物理快报 *A*》，*373*（*2009*），第*675–678*页。[3] *N. Akhmediev*、*V. Eleonskii* 和 *N. Kulagin*，光纤中周期性皮秒脉冲序列的产生：精确解，《苏联物理学—实验与理论物理学》，*62*（*1985*），第*894–899*页。[4] *N. Akhmediev*、*J. M. Soto-Crespo* 和 *A. Ankiewicz*，凭空出现的极端波：论怪波的本质，《物理快报 *A*》，*373*（*2009*），第*675–678*页。[5] *N. N. Akhmediev* 和 *V. Korneev*，调制不稳定性与非线性薛定谔方程的周期解，《理论与数学物理》，*69*（*1986*），第*1089–1093*页。[6] *H. Bailung*、*S. K. Sharma* 和 *Y. Nakamura*，在含负离子的多组分等离子体中观测到佩里格林孤子，《等离子体物理》，*18*（*2011*），第*112301*页。[7] *D. Bilman* 和 *R. Buckingham*，聚焦非线性薛定谔方程多极点孤子的大阶渐近分析，《非线性科学杂志》，*29*（*2019*），第*2185–2229*页。[8] *D. Bilman*、*L. Ling* 和 *P. D. Miller*，极端叠加：无穷阶怪波与*Painlevé-III*层级，《杜克数学杂志》，*169*（*2020*）。[9] *D. Bilman* 和 *P. Miller*，极端叠加：远场区域中的高阶基本怪波，《美国数学会回忆录》，*300*（*2024*）。[10] *D. Bilman* 和 *P. D. Miller*，聚焦非线性薛定谔方程的一种稳健逆散射变换，《纯粹与应用数学通讯》，*72*（*2019*），第*1722–1805*页。[11] ，无穷阶怪波更广泛的普适性，《*D*辑物理学：非线性现象》，*435*（*2022*），第*133289*页。[12]*M. Borghese*、*R. Jenkins* 和 *K. D.-R. McLaughlin*，聚焦非线性薛定谔方程的长时间渐近行为，《亨利·庞加莱研究所年刊 *C*辑：非线性分析》，*35*（*2018*），第*887–920*页。[13] *A. Chabchoub*、*N. P. Hoffmann* 和 *N. Akhmediev*，在水波水槽中观测怪波，《物理评论快报》，*106*（*2011*），第*204502*页。[14] *P. Deift*、*T. Kriecherbauer*、*K. T.-R. McLaughlin*、*S. Venakides* 和 *X. Zhou*，关于变化的指数权的正交多项式的一致渐近分析及其在随机矩阵理论普适性问题中的应用，《纯粹与应用数学通讯》，*52*（*1999*），第*1335–1425*页。

[15] *G. Dematteis*、*T. Grafke*、*M. Onorato* 和 *E. Vanden-Eijnden*，流体动力学瞬子的实验证据：通往怪波的普适路径，*Physical Review X*，*9*（*2019*），第*041057*页。[16] *G. Dematteis*、*T. Grafke* 和 *E. Vanden-Eijnden*，深海中的怪波与大偏差，美国国家科学院院刊，*115*（*2018*），第*855–860*页。[17] *A. S. Fokas*、*A. R. Its*、*A. A. Kapaev* 和 *V. Y. Novokshenov*，《*Painlevé*超越函数：*Riemann–Hilbert*方法》，数学调查与专著第*128*卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，*2006*年。[18] *B. Frisquet*、*B. Kibler* 和 *G. Millot*，非线性光纤光学中的阿赫梅季耶夫呼吸子碰撞，*Physical Review X*，*3*（*2013*），第*041032*页。[19] *A. Gelash* 和 *R. Mullyadzhanov*，直接散射变换的异常误差，*Phys. Rev. E*，*101*（*2020*），第*052206*页。[20] *A. A. Gelash* 和 *D. S. Agafontsev*，强相互作用孤子气体与怪波的形成，*Phys. Rev. E*，*98*（*2018*），第*042210*页。*arXiv:1804.*00652 [*nlin*].[21] *M. Girotti*、*T. Grava*、*R. Jenkins*、*G. Mazzuca*、*K. McLaughlin* 和 *M. Yattselev*，随机性下的孤子同步：怪波与普适性，*Nonlinearity*，*38*（*2025*），第*115003*页。[22] *B. Kibler*、*J. Fatome*、*C. Finot*、*G. Millot*、*F. Dias*、*G. Genty*、*N. Akhmediev* 和 *J. M. Dudley*，非线性光纤光学中的*Peregrine*孤子，*Nature Physics*，*6*（*2010*），第*790–795*页。[23]*B. Kibler*、*J. Fatome*、*C. Finot*、*G. Millot*、*G. Genty*、*B. Wetzel*、*N. Akhmediev*、*F. Dias* 和 *J. M. Dudley*，光纤中*Kuznetsov–Ma*孤子动力学的观测，*Scientific Reports*，*2*（*2012*），第*463*页。[24] *E. A. Kuznetsov*，参数不稳定等离子体中的孤子，载于《苏联科学院通报》，第*236*卷，*1977*年，第*575–577*页。[25] *Y.-C. Ma*，三次薛定谔方程的受扰平面波解，*Studies in Applied Mathematics*，*60*（*1979*），第*43–58*页。[26] *W. M. Moslem*、*R. Sabry*、*S. K. El-Labany* 和 *P. K. Shukla*，非广延等离子体中的尘埃声怪波，《等离子体物理》，*18*（*2011*），第*102301*页。[27] *F. W. J. Olver*、*A. B. Olde Daalhuis*、*D. W. Lozier*、*B. I. Schneider*、*R. F. Boisvert*、*C. W. Clark*、*B. R. Miller*、*B. V. Saunders*、*H. S. Cohl* 和 *M. A. McClain*，*NIST*数学函数数字图书馆。*https://dlmf.nist.gov/*，*2024-03-15*发布，版本*1.2.0*。[28] *M. Onorato*、*S. Residori*、*U. Bortolozzo*、*A. Montina* 和 *F. T. Arecchi*，不同物理背景下怪波及其产生机制，*Physics Reports*，*528*（*2013*），第*47–89*页。[29] *D. H. Peregrine*，水波、非线性薛定谔方程及其解，*J. Austral. Math. Soc. B*，*25*（*1983*），第*16–43*页。[30] *A. H. Sakka*，线性问题与*Painlevé*方程层级，*J. Phys. A Math. Theor.*，*42*（*2009*），第*025210*页。[31] *D. R. Solli*、*C. Ropers*、*P. Koonath* 和 *B. Jalali*，光学怪波，*Nature*，*450*（*2007*），第*1054–1057*页。[32] *R. Vershynin*，《高维概率：数据科学导论与应用》，剑桥大学出版社，*2018*年*9*月。[33] *V. E. Zakharov*，深层流体表面有限振幅周期波的稳定性，*Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*，*9*（*1968*），第*190–194*页。[34] *V. E. Zakharov* 和 *A. B. Shabat*，非线性介质中二维自聚焦波与一维自调制波的精确理论，*Soviet Physics JETP*，*34*（*1972*），第*62–69*页。