arXiv:2602.05197v1 [math.AG] 5 Feb 2026

局部上同调缺陷与˘MUSTAT。A-POPA 的一个猜想

ANDREW BURKE

Abstract. 我们证明了关于奇异簇的杜布瓦复形深度的一般性结果。我们将其应用于证明 Mustaţ˘a-Popa 的一个猜想，并研究局部上同调缺陷，从而将 Ogus 和 Dao-Takagi 的结果推广到复数域上。

A. Introduction

本文致力于探讨局部上同调缺陷方面的新结果。局部上同调缺陷是一种奇点不变量，近年来受到越来越多的关注。它具有拓扑 [BBL+25]、 [Og73]，[RSW21]和全纯刻画 [MP22]。此外，它还控制奇异簇上的 Lefschetz 型定理 [PP25]。

全文中，设 X 是一个维数为 n 的复代数簇。若 X 嵌入在维数为 d 的光滑簇 Y 中，则考虑局部上同调层 $\mathcal{H}^q_X(\mathscr{O}_Y)$。第一个非零层出现在 $q = c$，其中 $c = d - n$。我们定义局部上同调缺陷

$$\operatorname{lcdef}(X) = \max\{q : \mathcal{H}^q_X(\mathscr{O}_Y) \neq 0\} - c.$$

它满足 $0 \leq$对数典范缺陷$(X) \leq n$。若 X 具有商奇点或局部完全交奇点，则对数典范缺陷$(X) = 0$；更多例子见 [PS24，例子 2.4] 。

可以用更精细的全纯不变量来表示对数典范缺陷(X)。记 $\Omega^p_X \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ 为 p阶杜布瓦复形 [DB81] ，定义在 X上。它是光滑簇上全纯 p形式层的霍奇理论替代物，可通过超解消计算。那么， [MP22，定理 E]证明了

$$\operatorname{lcdef}(X) = n - \min_{0 \leq p \leq n} \{\operatorname{depth} \underline{\Omega}^p_X + p\}. \tag{0.1}$$

特别地，对数典范缺陷(X)与嵌入无关。原则上，必须计算所有 $p \leq n$ 对应的深度 Ω^p_X ，才能确定对数典范缺陷(X)。本文主要结果的一个应用是，只需检查 $p \leq \lceil (n-3)/2 \rceil$。事实上，还有更强的结论：

定理 A. 设 k 为一个整数。则我们有 对数典范缺陷$(X) \leq n - k$ 当且仅当深度 $\Omega^p_X + p \geq k$ 对所有 $p \leq \lceil (k-3)/2 \rceil$。

当 $k \leq 3$时，我们得到了 Ogus [Og73] 和 Dao-Takagi [DT16]的著名结果的（略微推广）：若深度 $\mathscr{O}_X \geq k$，则对数典范缺陷$(X) \leq n - k$。注意，根据 $\underline{0}_X \geq$KS$\mathscr{O}_X$，Ω 的深度 [。例子 7.8 表明，涉及 Ω 深度的结论$\underline{0}_X$严格强于涉及深度 $\mathscr{O}_X$的结论。显然的模式在 $k = 3$之后不再成立；参见[DT16，例子 2.11]。我们的结果解释了这一失效，并完整呈现了整体图景。

定理 A 是关于杜布瓦复形深度的一个更一般结果的推论，而这正是我们的主要定理。

定理 B. 设 k 和 m 为整数。如果

$$\operatorname{depth} \underline{\Omega}^p_X + p \geq k \quad \textit{for all } p \leq m,$$

那么对 $p \geq k - m - 2$ 也有相同的不等式成立。

定理 B 的另一项应用 是证明 Mustaţă-Popa 的一个猜想。该猜想源于尝试将 Ogus 和 Dao-Takagi 的结果置于关于局部上同调的霍奇滤过的背景下，见 [MP22]。设 X 嵌入于一个维数为 Y 的光滑簇 d中。取一个对数解消 $f: Z \to Y$，它是数对 (Y, X) 的对数解消，并假设它在 X之外是同构。记 $E = f^{-1}(X)_{\mathrm{red}}$，它是 Z 上的简单正规交叉除子。

猜想 C. [MP22，猜想 14.1] 若 深度 $\mathscr{O}_X \geq j+2$，则 $R^{d-2} f_* \Omega^{d-j}_Y(\log E) = 0$。

尽管其表述未提及霍奇理论，但结论等价于深度$\underline{\Omega}^j_X \geq 2$，见 [MP22，引理 14.4]。将 $m = 0$ 代入定理 B 可得以下稍强的陈述。

推论 D。若 深度$\underline{\Omega}^0_X \geq j + 2$，则 深度 $\underline{\Omega}^j_X \geq 2$。

该猜想此前已知成立，当 X 具有孤立奇点 [MP22，定理 14.3]或在有限点集之外具有有理奇点 [AH24，定理 0.7]。

定理 A 还蕴含推论 7.9中局部上同调缺陷的一个界，该界由最小指标 $p(X)$ 给出，该指标使 0.1 中的最小值得以取得。这严格改进了 [PP25，推论 7.5]对对数典范缺陷(X) 的界（见例子 7.10），并且有时能确定哪个深度$\underline{\Omega}^p_X$ 计算对数典范缺陷(X)。

定理 E。 设 m 为一个整数，并假设深度 $\underline{\Omega}^p_X + p \geq n$ 对所有 $p \leq m - 1$成立。若深度 $\underline{\Omega}^m_X \leq m + 3$，则

$$\operatorname{lcdef}(X) = \max\{0, n - \operatorname{depth} \underline{\Omega}^m_X - m\}.$$

若 X 具有预-$(m-1)$-有理奇点，则第一个假设成立。

特别地，当深度 $\underline{\Omega}^0_X\}$ 时，$\operatorname{lcdef}(X) = \max\{0, n - $。当深度$\underline{\Omega}^0_X \leq 3$时，这个等式不再成立。尽管如此，Dao-Takagi [DT16] 证明，当深度 $\mathscr{O}_X \geq 4$时，$\operatorname{lcdef}(X) \leq n - 4$ 当且仅当 X 具有挠局部解析 Picard 群。更一般地，在假设对 $p \leq m$有深度 $\underline{\Omega}^p_X + p \geq k$ 且 m 固定的情况下，我们的最终结果给出了一个关于 $\operatorname{lcdef}(X) \leq n - k$的技术判据。它以一族由整数 $0 \leq d \leq n$参数化的不变量来表述，我们称之为 X 的 perversity 缺陷 $\operatorname{pdef}(X, d)$（见定义 5.6）。例如，$\operatorname{pdef}(X, n) = \operatorname{lcdef}(X)$，而 $\operatorname{pdef}(X, 0)$ 称为可构造缺陷，用于度量 $\mathbb{DQ}_X$的可构造上同调。这些不变量可以用点的小穿孔邻域的上同调来表示，如引理 5.8 所示。

定理 F. 令 k 和 m 为整数。当且仅当对所有 $p \leq m$，$\operatorname{lcdef}(X) \leq n - k$，且深度 $\underline{\Omega}^p_X + p \geq k$ 以及$\operatorname{pdef}(X, k - 2m - 4) \leq n - k$。

定理 F 蕴含了 Dao-Takagi 的上述结果（见例子 8.6），以及 Park-Popa $X) \leq n-5$ 关于 lcdef(的类似判据 [PP25，推论 G]（见例子 8.8）。

我们的研究方法始终依赖于混合霍奇模理论。主要技术结果是命题6.5，这是关于混合霍奇模分次de Rham分量的一个抽象消失定理。它导出了我们的主要定理 B，因为杜波依斯复形可以等同于平凡霍奇模的分次de Rham分量的平移。我们还直接阐释了（定理 7.1）对数典范缺陷（X）的拓扑刻画与全纯刻画之间的等价性，正如[MP22，注释 11.2]所提出的问题。

致谢。我谨向我的导师 Mihnea Popa 致以诚挚谢意，感谢他始终如一的支持与指导。我也要感谢 Hyunsuk Kim、Sung Gi Park、Wanchun Shen 和 Anh Duc Vo，感谢他们给予的有益讨论。

B. Preliminaries

1. **混合霍奇模**。本文将广泛使用混合霍奇模的语言 [Sa88, Sa90]. 我们将混合霍奇模视为配备了额外结构的反常层，这些结构包括霍奇滤过和权滤过。混合霍奇模范畴 MHM(X) 是阿贝尔范畴，因此它有导出范畴 $D^b(\mathrm{MHM}(X))$。

存在一个忠实实现函子

$$\mathrm{rat}_X : D^b(\mathrm{MHM}(X)) \to D^b_c(X)$$

它将混合霍奇模映射为其底层的反常层，并将其视为可构造层的复形。通常的函子 f_*, $f^*, f_!, f^!, \otimes$ 和 $\mathbb{D}$ 在 $D^b_c(X)$ 上提升为 D^b(MHM(X))。

设 M 是定义在 X 上的混合霍奇模，并假设 X 局部嵌入于维数为 d 的光滑簇 Y 中。记 $\mathcal{M}$ 为在黎曼 - 希尔伯特对应下与 M 的实现相对应的 $\mathcal{D}_Y$- 模。霍奇滤过是 $\mathcal{M}$ 上的一个滤过 $F_\bullet\mathcal{M}$ 。需要强调的是，滤过对象 $F_\bullet\mathcal{M}$ 定义在环境空间 Y 上，而非 X 上。值得考虑的、更具不变性的整体对象是 M 的分次 de Rham 分量，其局部定义公式如下：

$$\mathrm{gr}^F_p \,\mathrm{DR}(M) = \big(\mathrm{gr}^F_{p-d} M \otimes \wedge^m T_Y \to \ldots \to \mathrm{gr}^F_{p-1} M \otimes T_Y \to \mathrm{gr}^F_p M\big). \tag{1.1}$$

它们是 X 上由 [Sa90，命题 2.33] 所定义的凝聚层复形。此外，gr^F_p DR 是一个正合函子，因此它可扩展到

$$\mathrm{gr}^F_p \,\mathrm{DR} : D^b(\mathrm{MHM}(X)) \to D^b_{\mathrm{coh}}(X).$$

通过对每一项应用 $\mathrm{gr}^F_p\mathrm{DR}(M^\bullet)$ 来计算复形 $M^\bullet$ 的 gr1.1。

混合霍奇模在其底层反常层上也带有权滤过 $W_\bullet$。若一个复形 $M^\bullet \in D^b$(MHM(X)) 的权重为 $\geq c$（分别为 $\leq c$），则称其具有相应权重；如果对所有 $\ell - j < c$（分别对所有 $\ell - j \geq c$），均有 $\mathrm{gr}^W_\ell \mathcal{H}^j M^\bullet = 0$。

2. **平凡霍奇模**。设 X 是一个维数为 n 的复代数簇。我们将 平凡霍奇模 $\mathbb{Q}_X^H[n] \in D^b(\mathrm{MHM}(X))$ 定义为复形 $a^*\mathbb{Q}^H[n]$，其中 $a\colon X \to \operatorname{Spec}\mathbb{C}$。它在次数 ≤ 0 上有上同调，且权重为 $\leq n$。

该交叉上同调霍奇模 IC_X^H 是 $\mathrm{gr}_n^W \mathcal{H}^0\mathbb{Q}_X^H[n]$，一个权重为 n （见 [Sa90， 4.5]）的纯霍奇模。记 γ_X 为自然态射的复合 $\mathbb{Q}_X^H[n] \to \mathcal{H}^0\mathbb{Q}_X^H[n] \to \mathrm{gr}_n^W \mathcal{H}^0\mathbb{Q}_X^H[n] = \mathrm{IC}_X^H$。*RHM* 缺陷对象$\mathcal{K}_X^\bullet \in D^b$（MHM($X$)）是位于特 distinguished 三角中的复形

$$\mathcal{K}_X^\bullet \to \mathbb{Q}_X^H[n] \xrightarrow{\gamma_X} \mathrm{IC}_X^H \xrightarrow{+1} \tag{2.1}$$

见 [PP25，定义 6.1]和 [PP25，命题 6.4]，其中证明了以下结论 .

引理 2.2。$\mathcal{K}_X^\bullet$ 的权重为 $\leq (n-1)$

3. **杜布瓦复形**。Saito [Sa00，定理 0.2]证明了 X 的杜布瓦复形可以与平凡霍奇模的分次de Rham分量（差一个平移）相识别:

$$\underline{\Omega}_X^p \cong \mathrm{gr}_{-p}^F \mathrm{DR}\left(\mathbb{Q}_X^H[n]\right)[p-n].$$

本文中我们始终采用这一识别。类似地， p阶交叉杜布瓦复形 [PSV24] 的 X 是复形 $I\underline{\Omega}_X^p = \mathrm{gr}_{-p}^F \mathrm{DR}(\mathrm{IC}_X^H)[p-n]$。这些复形仅在 $0 \leq p \leq n$时非零。此外，还有自然映射 $\underline{\Omega}_X^p \to \overline{\Omega}_X^p \to I\underline{\Omega}_X^p$，当 X 光滑时，这些映射是同构。

供日后参考，我们记录如下：由于 IC_X^H 是权为 n的纯霍奇模，

引理 3.1。 $\mathcal{H}^j \mathrm{gr}_p^F \mathrm{DR}(\mathrm{IC}_X^H) = 0$，当 $j > 0$、 $p > 0$或 $p < -n$时。

近年来，人们对与杜布瓦复形相关的奇点概念产生了浓厚兴趣。其中尤为重要的是有理奇点和杜布瓦奇点的推广，称为 m-有理奇点和 m-杜布瓦奇点。除了几个定义之外，我们并不需要深入了解这一主题。称 X 具有 预-m-有理奇点[SVV23] 若

$$\mathcal{H}^i(\mathbb{D}(\underline{\Omega}_X^{n-p})[-n]) = 0 \qquad \text{for all } i > 0 \text{ and } 0 \leq p \leq m.$$

我们记 $\mathbb{D}(-) = \mathcal{RH}om_{\mathscr{O}_X}(-, \omega_X^\bullet)$，其中 $\omega_X^\bullet$ 是对偶化复形。当 X 光滑时，它同构于 $\omega_X[n]$。称 X 满足条件 D_m，如果对所有 $p \leq m$，$\underline{\Omega}_X^p \to I\underline{\Omega}_X^p$ 是同构。参见 [PP25] 或 [DOR25], ，其中研究了一个等价条件。若 X 具有预-m-有理奇点，则它满足条件 D_m。

4. **深度与局部上同调缺陷**。我们需要凝聚层复形 $E \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ 的深度概念。记

$$\operatorname{depth} E = -\max\{j : \mathcal{H}^j \mathbb{D}E \neq 0\},$$

若 E 是凝聚层，则这与深度 E的通常定义一致。

我们将详细研究深度 $\underline{\Omega}_X^p$。注意到 $\mathbb{D}\underline{\Omega}_X^p = \mathrm{gr}_p^F \mathrm{DR}(\mathbb{D}\mathbb{Q}_X^H)[-p]$，因为$\mathbb{D} \circ \mathrm{gr}_{-p}^F \mathrm{DR} = \mathrm{gr}_p^F \mathrm{DR} \circ \mathbb{D}$ 根据 [Sa88，第 2.4] 节或 [Pa23，引理 3.2]。因此

$$\operatorname{depth} \underline{\Omega}_X^p + p = -\max\{j : \mathcal{H}^j \mathrm{gr}_p^F \mathrm{DR}(\mathbb{D}\mathbb{Q}_X^H) \neq 0\}. \tag{4.1}$$

我们有基本不等式 $0 \leq$深度 $\Omega_X^p \leq n$。事实上，深度 $\Omega_X^p \geq 1$，因为 $\mathcal{H}^0\Omega_X^p$由 [HJ13，注 3.8]可知是无扭的。此外，深度 $I\Omega_X^p \geq n-p$，因为 IC_X^H在扭曲意义下是自对偶的，并且霍奇模的分次de Rham分量集中在非正次数中。由此我们推得

引理 4.2。若 X 满足条件 D_m，则对所有 $p \leq m$，$\operatorname{depth} \Omega_X^p + p \geq n$。

我们还需要 [KS16]的单射定理。它表明映射

$$\mathscr{E}xt^j_{\mathscr{O}_X}(\Omega^0_X, \omega_X^\bullet) \to \mathscr{E}xt^j_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X, \omega_X^\bullet).$$

由 $\mathscr{O}_X \to \Omega^0_X$ 诱导的映射对每个 j都是单射。特别地，

$$\operatorname{depth} \Omega^0_X \geq \operatorname{depth} \mathscr{O}_X. \tag{4.3}$$

回顾一下，局部上同调缺陷 lcdef(X) 是用局部上同调层定义的。若将 X 嵌入光滑簇 Y 中，则

$$\operatorname{lcdef}(X) = \max\{q : \mathcal{H}^q_X(\mathscr{O}_Y) \neq 0\} - c,$$

其中 $c =$维数 $Y -$维数 X。它可以通过修正$\mathbb{Q}$-同调深度 $\mathrm{RHD}_{\mathbb{Q}}(X)$ $=$最小值$\{j :$ ${}^p\mathcal{H}^j(\mathbb{Q}_X) \neq 0\}$ 得到拓扑解释。事实上，[RSW21] 证明了

$$\operatorname{lcdef}(X) = n - \mathrm{RHD}_{\mathbb{Q}}(X). \tag{4.4}$$

由于对偶在 perverse 层上是正合的，我们有 $\mathbb{D}({}^p\mathcal{H}^j(\mathbb{Q}_X)) = {}^p\mathcal{H}^{-j}(\mathbb{D}\mathbb{Q}_X)$。结合混合霍奇模的实现函子是忠实函子这一事实，我们推得

$$\operatorname{lcdef}(X) = \max\{j : \mathcal{H}^j(\mathbb{D}(\mathbb{Q}_X^H[n])) \neq 0\}. \tag{4.5}$$

本文将始终使用此公式计算 lcdef(X)。

5. **反常函数与反常度缺陷**。反常层范畴是所谓中间反常 t-结构在可构造层导出范畴 $D^b_c(X)$ 上的心。在本节中，我们更一般地回顾反常函数如何在 X上确定一个 t-结构 $D^b_c(X)$。详情请参见 [BBD82] 或 [KS06]。我们还将介绍相对于此类反常函数的局部上同调缺陷变体。

固定函数 $p\colon \{0,1,\ldots,n\} \to \mathbb{Z}$，使得对于所有 k，$p(k) - p(k+1)$ 均为 0、1 或 2。这称为反常函数。

定义 5.1。如下定义 $D^b_c(X)$ 的一对全子范畴 $({}^pD^{\leq 0}_c(X)\ {}^pD^{\geq 0}_c(X))$。对于 $K \in D^b_c(X)$，若满足以下条件，则称 $K \in {}^pD^{\leq 0}(X)$：

$$\dim\{\operatorname{Supp} \mathcal{H}^j(K)\} < k, \quad \text{if } j > p(k),$$

若满足以下条件，则称 $K \in {}^pD^{\geq 0}(X)$：

$$\dim\{\operatorname{Supp} \mathcal{H}^{-j}(\mathbb{D}K)\} < k, \quad \text{if } j < p(k) + 2k.$$

这些子范畴通过 $D^b_c(X)$ 形成一个 t-结构，见 [KS06，定理 10.2.8]。借助选定的 Whitney 分层，可以方便地重新表述这一定义。

命题 5.2。[KS06，命题 10.2.4] 设 $K \in D^b_c(X)$ 并考虑 X 的一个惠特尼分层，使得 i_S^*K 和 $i_S^!K$ 对于每一对层的包含关系 $i_S\colon S \to X$，其上同调层均为局部常值。则：

(1) $K \in {}^pD_c^{\leq 0}(X)$ 当且仅当 $\mathcal{H}^j(i_S^*K) = 0$，只要 $j > p(d_S)$,(2)
$K \in {}^pD_c^{\geq 0}(X)$ 当且仅当 $\mathcal{H}^j(i_S^!K) = 0$，只要 $j < p(d_S)$。

$D_c^b(X)$上较为熟悉的 t-结构是这一构造的特例。

例子 5.3. 函数 $p_0(x) = 0$ 称为零 *perversity*。它确定了 $D_c^b(X)$上的通常可构造 t-结构。

例子 5.4. 函数 $p_n(x) = -x$ 称为中间 *perversity*。它确定了中间 perversity t-结构，其心由 perverse 层组成。除非另有说明，以下字母 p 均特指中间 perversity。

我们需要一个在零 perversity 与中间 perversity 之间插值的 perversity 族。

例子 5.5. 对每个整数 $0 \leq d \leq n$，考虑反常函数

$$p_d(x) = -\min\{x, d\}$$

为简便起见，我们将相应的 t-结构记为 $({}^dD_c^{\leq 0}(X)\ {}^dD_c^{\geq 0}(X))$，并将其上同调层记为 ${}^d\mathcal{H}^j(-)$。注意，$d = 0$ 是零 perversity，而 $d = n$ 是中间 perversity。

回顾4.5，$\mathrm{lcdef}(X)$ 是相对于中间 perversity 而言，$\mathbb{D}(\mathbb{Q}_X[n])$ 的最大非零上同调。我们根据 perversity p_d，对 $0 \leq d \leq n$定义 $\mathrm{lcdef}(X)$ 的推广。

定义 5.6。 称 d-次反常度缺陷 为 X：

$$\mathrm{pdef}(X, d) = \max\{j : {}^d\mathcal{H}^j(\mathbb{D}(\mathbb{Q}_X[n])) \neq 0\}.$$

换言之，$\mathrm{pdef}(X, d)$ 是满足 $\mathbb{D}(\mathbb{Q}_X[n]) \in {}^dD_c^{\leq j}(X)$ 的最小指标 j。

由例子 5.4可知，$\mathrm{pdef}(X, n) = \mathrm{lcdef}(X)$。我们称 $\mathrm{pdef}(X, 0)$ 为可构造缺陷$\mathrm{cdef}(X)$，它属于 X。根据例子 $\mathbb{D}(\mathbb{Q}_X[n])$，它等于5.3的最大非零可构造上同调。

存在一串反常函数不等式 $p_n \leq \ldots \leq p_1 \leq p_0$。由此可得包含关系 ${}^nD_c^{\leq j}(X)$ $\subset \ldots \subset {}^1D_c^{\leq j}(X) \subset {}^0D_c^{\leq j}(X)$，因此

$$\mathrm{cdef}(X) = \mathrm{pdef}(X, 0) \leq \mathrm{pdef}(X, 1) \leq \ldots \leq \mathrm{pdef}(X, n) = \mathrm{lcdef}(X). \tag{5.7}$$

我们也可以从小穿孔邻域的上同调来理解偏 perversity 缺陷 $\mathrm{pdef}(X, d)$。事实上，固定 X的一个惠特尼分层。根据惠特尼分层的局部结构，$\mathbb{D}(\mathbb{Q}_X[n])$ 的上同调层沿每个层局部恒定。命题5.2 表明，$\mathrm{pdef}(X, d) \leq n - k$ 当且仅当$\mathcal{H}^j(i_S^*\mathbb{D}(\mathbb{Q}_X[n])) = 0$ 对每个层 S 以及 $j > n - k - \min\{d_S, d\}$均成立。对于一点 $x \in S$，若 $i_x : \{x\} \to X$，则有

$$\mathcal{H}^j(i_x^*\mathbb{D}(\mathbb{Q}_X[n])) = H^{-j}(i_x^!\mathbb{Q}_X[n]) = H^{n-j}_{\{x\}}(X, \mathbb{Q}).$$

我们用 U 表示 x的一个Stein 解析邻域。存在一条长正合列

$$\ldots \to H^{n-j-1}(U \setminus \{x\}, \mathbb{Q}) \to H^{n-j}_{\{x\}}(X, \mathbb{Q}) \to H^{n-j}(U, \mathbb{Q}) \to \ldots$$

由于 U 是可缩的，这给出同构 $H^{n-j}_{\{x\}}(X,\mathbb{Q}) \simeq \tilde{H}^{n-j-1}(U\setminus\{x\},\mathbb{Q})$。我们得出：

引理 5.8. 若 k 和 d 是整数，则 $\operatorname{pdef}(X,d) \le n-k$ 当且仅当

$$\tilde{H}^i(U\setminus\{x\},\mathbb{Q})=0 \qquad \textit{for all } i\le k-2+\min\{d_S,d\} \textit{ and all } x\in X.$$

例如，对数典范缺陷$(X)\le n-k$当且仅当 $\tilde{H}^i(U\setminus\{x\},\mathbb{Q})=0$对所有 $i\le k+d_S-2$以及所有 $x\in X$，正如 [RSW21 中根据链接给出的推论 3] 所证明的那样。此外，cdef$(X)\le n-k$当且仅当 $\tilde{H}^i(U\setminus\{x\},\mathbb{Q})=0$对所有 $i\le k-2$以及所有 $x\in X$成立。这一刻画为不等式5.7提供了另一种理解视角。

我们再提供一种理解可构造缺陷 cdef(X) =pdef$(X,0)$ 的方法。可以将平凡霍奇模 $\mathbb{Q}^H_X$ 视为杜布瓦复形的迭代扩张

$$\mathbb{Q}^H_X=\left(\underline{\Omega}^0_X\to\underline{\Omega}^1_X\to\ldots\to\underline{\Omega}^n_X\right)$$

在 X上的微分复形导出范畴中。对这个表达式取对偶，我们得到

$$\mathbb{D}(\mathbb{Q}^H_X[n])=\left(\mathbb{D}\underline{\Omega}^n_X\to\ldots\to\mathbb{D}\underline{\Omega}^1_X\to\mathbb{D}\underline{\Omega}^0_X\right).$$

它导出一个上同调谱序列

$$E_1^{p,q}=\mathcal{H}^q\mathbb{D}\underline{\Omega}^{n-p}_X\Rightarrow {}^c\mathcal{H}^{p+q}\mathbb{D}(\mathbb{Q}_X[n]).$$

利用0.1，我们有：当且仅当对所有 $p+q>n-k$，lcdef$(X)\le n-k$ $E^{p,q}_1=0$。另一方面，当且仅当对所有 $p+q>n-k$，cdef$(X)\le n-k$ ${}^c\mathcal{H}^{p+q}\mathbb{D}(\mathbb{Q}^H_X[n])=0$。

如果谱序列在 E_1 页退化，那么显然 cdef$(X)=$ lcdef(X)。粗略地说，我们可以将 lcdef(X) 与 cdef(X) 之间的差异视为退化失败程度的度量。

注 5.9。虽然下文不会用到，但我们指出，对于每个 perversity 函数 p，在混合霍奇模的导出范畴上都有一个相应的 t-结构 ($^pD^{\le 0}$(MHM(X)) $^pD^{\ge 0}$(MHM(X))，它提升了 ($^pD^{\le 0}_c(X)$ $^pD^{\ge 0}_c(X)$)。更准确地说，复形 $\mathcal{M}^\bullet$ 属于 $^pD^{\le 0}$(MHM(X))（分别属于 $^pD^{\ge 0}$(MHM(X))）当且仅当 rat$_X(M^\bullet)$ 属于 $^pD^{\le 0}_c(X)$（分别属于 $^pD^{\ge 0}_c(X)$）。这可由 KS06 定理 1.2.8]的论证推出，该论证仅使用六函子形式。Saito 在 Sa90 注 4.6.2] 中指出，可构造 t-结构可提升到混合霍奇模。

C. Depth and Local Cohomological Defect

6. 基本引理。 在本小节中，我们证明一些技术性结果，它们将成为我们分析的关键。

固定一个整数 m 和一个对象 $M^\bullet\in D^b(\mathrm{MHM}(X))$。局部而言，$X$ 是可嵌入的，且 1.1 表明条件 $\mathrm{gr}^F_p\mathrm{DR}(M^\bullet)=0$对所有 $p\le m$都等价于 $F_mM^\bullet=0$。我们需要对这一基本观察作进一步细化，以涵盖上同调。

引理 6.1。 假设 X 是可嵌入的。固定整数 m 和 c 以及一个对象 $M^\bullet\in D^b(\mathrm{MHM}(X))$。则

$$\mathcal{H}^j \operatorname{gr}_p^F \operatorname{DR}(M^\bullet) = 0 \quad \text{for all } j \geq c \text{ and } p \leq m$$

当且仅当

$$\mathcal{H}^j \operatorname{gr}_p^F (M^\bullet) = 0 \quad \text{for all } j \geq c \text{ and } p \leq m.$$

特别是，如果 $m \gg 0$，则后一条件等价于对所有 $j \geq c$，$\mathcal{H}^j M^\bullet = 0$ 在 .

证明。假设对所有 $j \geq c$ 和 $p \leq m-1$，均有 $\mathcal{H}^j \operatorname{gr}_p^F(M^\bullet) = 0$。只需证明 e

$$\mathcal{H}^j \operatorname{gr}_m^F \operatorname{DR}(M^\bullet) \cong \mathcal{H}^j \operatorname{gr}_m^F (M^\bullet) \quad \text{for all } j \geq c.$$

考虑以下表达式

$$\operatorname{gr}_m^F \operatorname{DR}(M^\bullet) = \left(\operatorname{gr}_{m-d}^F M^\bullet \otimes \wedge^d T_Y \to \ldots \to \operatorname{gr}_{m-1}^F M^\bullet \otimes T_Y \to \operatorname{gr}_m^F M^\bullet \right).$$

存在一个收敛的谱序列，其 E_1 页为

$$E_1^{p,q} = \mathcal{H}^q(\operatorname{gr}_{m+p}^F M^\bullet \otimes \wedge^{-p} T_Y) \implies \mathcal{H}^{p+q} \operatorname{gr}_m^F \operatorname{DR}(M^\bullet) = 0.$$

项 $E^{p}{}_{1}{}^{q}$ 在 $p > 0$ 时消失，或在 $p < 0$ 且 $q \geq c$ 时由假设消失。由此可推得 $E^{0,}{}_{1}{}^{j} = E^{0,}{}_{\infty}{}^{j}$ 对 $j \geq c$ 成立，并且事实上，

$$\mathcal{H}^j \operatorname{gr}_m^F \operatorname{DR}(M^\bullet) \cong \mathcal{H}^j \operatorname{gr}_m^F (M^\bullet)$$

即为所求。

最后一项结论成立，因为 gr_p^F 与取上同调可交换。 □

注 6.2. 尽管本文不会用到它，类似的谱序列论证可证明：$\mathcal{H}^j \operatorname{gr}_p^F \operatorname{DR}(M^\bullet) = 0$ 对所有 $j \leq c - p$ 与 $p \leq m$ 成立，当且仅当 $\mathcal{H}^j \operatorname{gr}_p^F (M^\bullet) = 0$ 对所有 $j \leq c - p$ 与 $p \leq m$ 成立。

我们将经常引用下述由引理6.1直接得到的推论。

推论 6.3。

$$\mathcal{H}^j \operatorname{gr}_p^F \operatorname{DR}(M^\bullet) = 0 \quad \text{for all } j \geq c \text{ and } p \leq m$$

当且仅当

$$\operatorname{gr}_p^F \operatorname{DR}(\mathcal{H}^j M^\bullet) = 0 \quad \text{for all } j \geq c \text{ and } p \leq m.$$

证明。将引理 6.1 应用于 $M^\bullet$ 以及每个 $\mathcal{H}^j M^\bullet$，分别对 $j \geq c$ 进行处理，并利用 gr_p^F 与取上同调可交换这一事实。 □

我们还需要一个引理，将权重纳入讨论。

引理 6.4。设 M 是 X 上的一个权重为 $\geq \ell$ 的混合霍奇模。若

$$\operatorname{gr}_p^F \operatorname{DR}(M) = 0 \quad \textit{for all } p \leq m$$

则对 $p \geq -\ell - m$ 也同样成立。

证明。这恰好是 [PP25命题 5.2]的对偶。 □

现在我们可以证明主要的抽象结果。

命题 6.5。 固定整数 c、m 和 w。设 $M^\bullet \in D^b(\mathrm{MHM}(X))$，并假设 $M^\bullet$具有权重 $\geq w$。若

$$\mathcal{H}^j \operatorname{gr}_i^F \mathrm{DR}(M^\bullet) = 0 \quad \textit{for all } j \geq c \textit{ and } i \leq m,$$

then

$$\mathcal{H}^j \operatorname{gr}_i^F \mathrm{DR}(M^\bullet) = 0 \quad \textit{for all } j \geq c \textit{ and } i \geq -c-m-w.$$

证明。 根据推论 6.3，我们的假设等价于以下消失条件

$$\operatorname{gr}_i^F \mathrm{DR}(\mathcal{H}^j M^\bullet) = 0 \quad \text{for all } j \geq c \text{ and } i \leq m.$$

由于混合霍奇模 $\mathcal{H}^j M^\bullet$ 具有权重 $\geq$ （$w+j$），引理 6.4 表明 s

$$\operatorname{gr}_i^F \mathrm{DR}(\mathcal{H}^j M^\bullet) = 0 \quad \text{for all } j \geq c \text{ and } i \geq -j-m-w.$$

固定 $i \geq -c-m-w$，并考虑收敛的谱序列

$$E_2^{p,q} = \mathcal{H}^p \operatorname{gr}_i^F \mathrm{DR}(\mathcal{H}^q M^\bullet) \Rightarrow \mathcal{H}^{p+q} \operatorname{gr}_i^F \mathrm{DR}(M^\bullet).$$

我们已经证明了 $E^{p,}{}_2{}^q = 0$对 $q \geq c$成立，并且对 $p > 0$也消失。这意味着$\mathcal{H}^{p+q}$ $\operatorname{gr}_i^F\mathrm{DR}(M^\bullet) = 0$ 对 $p+q \geq c$成立。结果即得。 □

7. **应用**。 现在我们将所建立的工具应用于 $\mathbb{D}$（$\mathbb{Q}_X^H[n]$） $\in D^b$（MHM(X)）以及相关复形。作为预备，这给出了对 lcdef(X) 的拓扑（4.4）和全纯（0.1）刻画之间等价性的直接证明。

定理 7.1. $\mathrm{RHD}_{\mathbb{Q}}(X) = \min_{0\leq p\leq n}\{\text{深度 } \underline{\Omega}_X^p + p\}$

证明. 由 4.1，我们有

$$\min_{0\leq p\leq n}\{\operatorname{depth} \underline{\Omega}_X^p + p\} = -\max\{j : \mathcal{H}^j \operatorname{gr}_p^F \mathrm{DR}(\mathbb{D}\mathbb{Q}_X^H) \neq 0 \text{ for some } p\}.$$

另一方面，对 $\mathrm{RHD}_{\mathbb{Q}}(X)$ 的定义取对偶，得到

$$\mathrm{RHD}_{\mathbb{Q}}(X) = -\max\{j : \mathcal{H}^j(\mathbb{D}\mathbb{Q}_X^H) \neq 0\}.$$

根据引理 6.1，取 $M^\bullet = \mathbb{D}\mathbb{Q}_X^H$ 和 $m \gg$，这两个量相等 0. □

我们证明关于杜布瓦复形深度的主定理。

定理 7.2 (=定理 B)**.** 固定整数 k 和 m。如果

$$\operatorname{depth} \underline{\Omega}_X^p + p \geq k \quad \textit{for all } p \leq m,$$

则对 $p \geq k-m-2$ 同样成立该不等式。

该定理本应是命题 6.5 的直接推论，若 $\mathbb{D}(\mathbb{Q}_X^H[n])$ 具有权重 $\geq(-n+1)$。事实并非如此，但 $\mathbb{D}(\mathcal{K}_X^\bullet)$ 具有权重 $\geq(-n+1)$，这由引理 2.2 得出。这将是下文证明的核心所在。

证明。 由于深度为 $\underline{\Omega}_X^0 \leq n$，我们要么有 $k \leq n$，否则有 $m \leq -1$。

我们的假设恰好表明

$$\mathcal{H}^j \operatorname{gr}_p^F \mathrm{DR}(\mathbb{D}(\mathbb{Q}_X^H[n])) = 0 \qquad \text{for all } j \geq -k+1+n \text{ and } p \leq m.$$

下面证明，将 $\mathbb{D}\mathcal{K}_X^\bullet$ 替换为 $\mathbb{D}\mathbb{Q}_X^H[n]$ 时，同样的消失结论仍然成立。

考虑特 distinguished 三角的对偶2.1

$$\mathrm{IC}_X^H(n) = \mathbb{D}\,\mathrm{IC}_X^H \to \mathbb{D}(\mathbb{Q}_X^H[n]) \to \mathbb{D}(\mathcal{K}_X^\bullet) \xrightarrow{+1},$$

以及其上同调长正合列

$$\begin{aligned}(7.3)\qquad \ldots \to \mathcal{H}^j \operatorname{gr}_{p-n}^F \mathrm{DR}(\mathrm{IC}_X^H) \to \mathcal{H}^j \operatorname{gr}_p^F \mathrm{DR}\big(\mathbb{D}(\mathbb{Q}_X^H[n])\big) \to \mathcal{H}^j \operatorname{gr}_p^F \mathrm{DR}\big(\mathbb{D}\mathcal{K}_X^\bullet\big) \\ \to \mathcal{H}^{j+1} \operatorname{gr}_{p-n}^F \mathrm{DR}(\mathrm{IC}_X^H) \to \ldots\end{aligned}$$

或者 $j > 0$ 或者 $p < 0$，因此引理 3.1 推出最后一项消失。因此，

$$\mathcal{H}^j \operatorname{gr}_p^F \mathrm{DR}(\mathbb{D}\mathcal{K}_X^\bullet) = 0 \qquad \text{for all } j \geq -k+1+n \text{ and } p \leq m.$$

由于 $\mathbb{D}\mathcal{K}_X^\bullet$ 具有权重 $\geq (-n+1)$，由引理 2.2，我们可以应用命题 6.5 推出

$$\mathcal{H}^j \operatorname{gr}_p^F \mathrm{DR}(\mathbb{D}\mathcal{K}_X^\bullet) = 0 \qquad \text{for all } j \geq -k+1+n \text{ and } p \geq k-m-2.$$

现在只需证明将 $\mathbb{D}(\mathbb{Q}_X^H[n]$替换为 $\mathbb{D}\mathcal{K}_X^\bullet$时，同样的消失结论仍成立。在情形 $j > 0$下，所需的消失由 7.3 和引理 3.1推出。否则，$k \geq n+1$ 因此 $m \leq -1$。由此可得 $p \geq k-m-2 \geq n$。若某个不等式为严格不等式，则 $p > n$，而消失由 7.3 和引理 3.1推出。

需要考虑的最终情形是 $j = 0$ 和 $p = n$，此时我们有 $\mathcal{H}^0 \operatorname{gr}_n^F \mathrm{DR}(\mathbb{D}(\mathbb{Q}_X^H[n])) = \mathcal{H}^0\mathbb{D}\Omega_X^n$。这是因为深度 $\Omega_X^n \geq 1$，故其消失。□

我们得到定理 B 的一个直接推论。

推论 7.4 (= 推论 D)。 若 深度$\Omega_X^0 \geq j+2$，则 深度 $\Omega_X^j \geq 2$。

这蕴含猜想 C，因为深度 $\Omega_X^0 \geq$ 深度 $\mathscr{O}_X$ 由 4.3 得出。

结合定理 B 与定理 7.1，我们得到一个界，指出计算对数典范缺陷($\overset{p}{X}$) 实际需要哪些深度ΩX。

推论 7.5 (= 定理 A)。 固定一个整数 k。则当且仅当对所有 对数典范缺陷(X) $\leq n-k$，都有 深度 $\Omega_X^p + p \geq k$， $p \leq \lceil (k-3)/2 \rceil$。

证明。必要性由定理 7.1 显然成立。反之，假设对 $\overset{p}{X} + p \geq k$，有 $p \leq \lceil (k-3)/2 \rceil$。定理 B 指出，对 $p \geq \lfloor (k-1)/2 \rfloor$，同一不等式也成立。这意味着它对所有 p 都成立，因此由定理 7.1，对数典范缺陷(X) $\leq n-k$。□

对于 $k \leq 3$，这有一个特别简单的形式。

推论 7.6。 若 $k \leq 3$，则 深度 $\Omega_X^0 \geq k$ 当且仅当 对数典范缺陷(X) $\leq n-k$.

注释 7.7。 我们重新得到 Ogus 的以下结果 [Og73] 以及 Dao-Takagi 的结果 [DT16]: 对于 $k \leq 3$，若深度 $\mathscr{O}_X \geq k$，则对数典范缺陷(X) $\leq n-k$。事实上，这直接由推论 7.6以及不等式 深度 $\mathscr{O}_X \leq$ 深度 Ω_X^0 （见 4.3 ）得出。

下面的例子表明，推论 7.6 严格强于 Dao-Takagi 关于深度为三的结果。

例 7.8。 设 Y 是一个带有丰线丛 L的光滑射影曲面，使得 $H^1(Y,\mathscr{O}_Y) = 0$ 且 $H^1(Y, L) \neq 0$（例如，一个沿光滑 (2,6)-除子分歧的双覆盖 Y，其中 L 是 $\mathscr{O}(1,1)$ 的拉回）。

取 $X = \mathrm{Cone}(Y, L)$。我们有深度$\underline{\Omega^0_X} = 3$，因为 $H^1(Y,\mathscr{O}_Y) = 0$ 由 [PS24，定理 3.1(2)]。然而，由于 $H^1(Y, L) \neq 0$， [KS21，命题 B.3] 蕴含X 不是 Cohen-Macaulay 的，即深度 $\mathscr{O}_X < 3$。我们需要推论 7.6 才能得出对数典范缺陷$(X) = 0$。

为了从定理A中提取更多内容，让我们定义一个不变量

$$p(X) = \min\{p \geq 0 : \operatorname{depth} \underline{\Omega^p_X} + p = n - \operatorname{lcdef}(X)\}.$$

尽管下文不会用到这一点，但利用引理 $p(X)$ 可以证明， p 是使 $\mathrm{gr}^F_p \mathcal{H}^{\operatorname{lcdef}(X)}\mathbb{D}(\mathbb{Q}^H_X[n])$ 非零的最小指标。 moreover，若 lcdef$(X) > 0$ 且 X 满足条件 D_m，则引理 4.2 表明，$\underline{\Omega^p_X} + p \geq n$ 关于 $p \leq m$ 的深度为 Ω，因此 $p(X) \geq m + 1$。 —

推论 7.9. 我们有

$$\operatorname{lcdef}(X) \leq n - 2p(X) - 1.$$

特别地，若 X 满足条件 D_m，则 对数典范缺陷$(X) \leq$ 最大值$\{n - 2m - 3, 0\}$。

后一结论已在 [PP25，推论 7.5]中证明。

证明。 根据 $p(X)$ 的定义，

$$\operatorname{depth} \underline{\Omega^p_X} + p \geq n - \operatorname{lcdef}(X) + 1 \quad \text{for all } p \leq p(X) - 1.$$

定理 A 推出 $p(X) - 1 < ((n -$ 对数典范缺陷$(X) + 1) - 3)/2$。重新整理各项即可得到该结果。 □

下面的例子表明，推论 7.9 中的第一个不等式严格强于第二个，其中我们取 m 为满足以下条件的 X 的最大取值D_m。

例 7.10. 设 Y 是一个光滑射影五维簇，其霍奇菱形具有如下形式：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & 0 & & 0 & & & & & \\
 & & 0 & & 1 & & 0 & & & & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & \\
0 & & 0 & & >1 & & 0 & & 0 & & \\
 & >0 & & * & & * & & >0 & & 0 & \\
0 & & 0 & & >1 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & \\
 & & 0 & & 1 & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & & 0 & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & &
\end{array}$$

根据 [PS20，定理 5]，这样的簇确实存在。将 Y 嵌入射影空间，并令 X为以 Y为底的射影锥。

于是对数典范缺陷$(X) = 1$ 由 [PS24，定理 A]，，因为 Y 首次不再具有与 $\mathbb{P}^5$ 在次数 $\dim Y - 1$处相同的上同调。尽管如此，深度$\underline{\Omega^0_X} = 6$ 与深度 $\underline{\Omega^1_X} = 5$ 由 —

[PS24，注记 4.5]，因为这一失效仅出现在霍奇次数 2。由此，我们得出 $p(X) = 2$。

然而，根据 [PP25，定理 7.1]， X 不满足条件 D_1 。事实上，由于 $H^{1,4}(Y)$不为零，X 的霍奇菱形在最外两层不满足Hodge 对称性。它确实满足条件 D_0，因此我们取 $m = 0$。

我们得出结论

$$\operatorname{lcdef}(X) = 1 = n - 2p(X) - 1 < n - 2m - 3 = 3.$$

在更强的假设下，我们可以利用推论7.9 来确定对数典范缺陷(X)。

推论 7.11 (= 定理 E)**.** 假设 X 满足 深度 $\underline{\Omega}^p_X + p \geq n$ 对所有 $p \leq m-1$。若 深度 $\underline{\Omega}^m_X \leq m+3$，则

$$\operatorname{lcdef}(X) = \max\{0, n - \operatorname{depth} \underline{\Omega}^m_X - m\}.$$

若 X 满足条件 D_{m-1}，则第一个假设成立。

证明。 显然，最大值$\{0, n -$ 深度 $\underline{\Omega}^m_X - m\} \leq$ 对数典范缺陷(X)。假设不等式是严格的。这意味着 $p(X) \geq m+1$，因此推论 7.9 推出

$$\operatorname{lcdef}(X) \leq n - 2m - 3 \leq n - \operatorname{depth} \underline{\Omega}^m_X - m.$$

这与我们的假设相矛盾。 □

我们还得到了 Hiatt 最近一个定理的另一种证明 [Hi25，定理 0.4]。

推论 7.12。 假设 X 具有某个 $m \leq n-2$ 下的预-m-有理奇点。那么

$$\operatorname{depth} \underline{\Omega}^p_X \geq m+2 \qquad \textit{for all } 0 \leq p \leq n$$

证明。 假设 $p \leq n-m-2$。由于 X 满足条件 D_m，引理 4.2 推出

$$\operatorname{depth} \underline{\Omega}^q_X + q \geq n \geq p+m+2 \qquad \text{for all } q \leq m.$$

根据定理 B，我们得到

$$\operatorname{depth} \underline{\Omega}^p_X \geq m+2.$$

若 $p \geq n-m$，则 $(\underline{\mathbb{D}}\underline{\Omega}^p_X)[-n]$ 是零次的一个层，因为 X 具有预-m-有理奇点。这说明深度 $\underline{\Omega}^p_X = n$。

对于最终情形 $p = n-m-1$，$\underline{\Omega}^{n-m-1}_X = I\underline{\Omega}^{n-m-1}_X$ 根据 [PP25，命题 7.4]。由于深度 $I\underline{\Omega}^{n-m-1}_X \geq m+1$，接下来只需证明

$$\mathcal{H}^{-m-1}\mathbb{D}I\underline{\Omega}^{n-m-1}_X = \mathcal{H}^{n-m-1}I\underline{\Omega}^{m+1}_X,$$

其中等式成立是因为 IC^H_X 在扭曲意义下是自对偶的。对三角形 2.1 应用 $\mathrm{gr}^F_{-p}\mathrm{DR}$ 并取上同调，可得一个长正合列

$$\ldots \to \mathcal{H}^{n-m-1}\underline{\Omega}^{m+1}_X \to \mathcal{H}^{n-m-1}I\underline{\Omega}^{m+1}_X \to \mathcal{H}^1 \operatorname{gr}^F_{-m-1}\operatorname{DR}(\mathcal{K}^\bullet_X) \to \ldots$$

由于 X 是预-m-Du Bois 的，我们有 $\mathcal{H}^{n-m-1}\underline{\Omega}^{m+1}_X = 0$ ，依据 [PSV24，命题 C]。此外， $\mathcal{K}^\bullet_X$ 在次数 ≤ 0 上具有上同调，且 $\mathrm{gr}^F_{-m-1}\mathrm{DR}(-)$ 集中于非正次数，因此 $\mathcal{H}^1 \operatorname{gr}^F_{-m-1}\operatorname{DR}(\mathcal{K}^\bullet_X) = 0$。该结果随之成立。 □

D. Perversity Defect

8. 反常度缺陷。这最后一节的动机在于将对数典范缺陷(X)与 $n-$深度 $\mathscr{O}_X$加以比较。Ogus [Og73] 证明了深度 $\mathscr{O}_X \geq 2$ 蕴含对数典范缺陷$(X) \leq n-2$，而 Dao-Takagi [DT16] 进一步证明了深度 $\mathscr{O}_X \geq 3$ 蕴含对数典范缺陷$(X) \leq n-3$。这一模式在此之后不再成立；参见 [DT16，例子 2.11]或 [KV25] 中 X 为环面四维簇的例子。尽管如此，Dao-Takagi 证明：若深度 $\mathscr{O}_X \geq 4$，则对数典范缺陷$(X) \leq n-4$当且仅当 X 具有挠局部解析 Picard 群。

我们旨在通过探究需要满足哪些条件才能确保 lcdef$(X) \leq n-k$，来推广这一图景；前提是我们只知道 depth $\Omega^p_X + p \geq k$ 对于 $p \leq m$ 在某个固定值 m下成立。我们的回答以定义 5.6中的反常度缺陷来表述。

定理 8.1 $(=$ 定理 F$)$**.** 设 k 和 m 是整数。我们有 对数典范缺陷$(X) \leq n-k$ 当且仅当 depth $\Omega^p_X + p \geq k$对所有 $p \leq m$ 以及 $\operatorname{pdef}(X, k-2m-4) \leq n-k$。

这将由一个更精确的结果推出，该结果将条件 depth $\Omega^p_X + p \geq k$对于 $p \leq m$ 与小穿孔邻域的上同调联系起来。

命题 8.2. 设 k 与 m 为整数。假设对所有 $p \leq m$，深度 $\Omega^p_X + p \geq k$。若 $x \in X$ 位于维数为 $d_S \geq k-2m-3$的 *Whitney* 分层中，则

$$\tilde{H}^i(U \setminus \{x\}, \mathbb{Q}) = 0 \qquad \textit{for all } i \leq k-2+d_S,$$

其中 U 是 x的一个小 *Stein* 解析邻域。

证明。在 X上固定一个惠特尼分层。设 $\iota\colon Y \to X$ 为 $k-2m-3$ 个一般超平面的完全交的含入。它在 Y上诱导一个分层，使得 X 的每一层 S 与 Y 横截相交，其交为层 T的并。此外，若 y 位于 Y的一层 T 中，则在 X 中存在 y 的一个形如 $V \times B$的小邻域 U，其中 $V \subset T$ 是一个小邻域，而 B 是一个可缩球。特别地，$U \setminus (U \cap S)$ 与 $V \setminus (V \cap T)$ 同伦等价。将此与[PP25 的引理 15.10]相结合，我们有

$$\begin{aligned} \tilde{H}^i(U \setminus \{y\}, \mathbb{Q}) &\simeq \tilde{H}^{i-2d_S}(U \setminus (U \cap S), \mathbb{Q}) \\ &\simeq \tilde{H}^{i-2d_S}(V \setminus (V \cap T), \mathbb{Q}) \\ &\simeq \tilde{H}^{i-2d_S+2d_T}(V \setminus \{y\}, \mathbb{Q}). \end{aligned} \tag{8.3}$$

这里，$d_S - d_T = \operatorname{codim}_Y X = k-2m-3$。在整个证明过程中，我们将继续使用这一记号。

引理 8.4 蕴含 depth $\Omega^p_Y + p \geq 2m+3$ 对所有 $p \leq m$。由定理 A，我们推得 lcdef$(Y) \leq$ 维数 $Y - 2m - 3$。换言之，由引理 5.8，

$$\tilde{H}^i(V \setminus \{y\}, \mathbb{Q}) = 0 \qquad \text{for all } i \leq 2m+1+d_T \text{ and all } y \in Y.$$

由8.3，这等价于

$$\tilde{H}^i(U \setminus \{y\}, \mathbb{Q}) = 0 \qquad \text{for all } i \leq k-2+d_S \text{ and all } y \in Y.$$

该结果成立，因为去心邻域的上同调只取决于被移除点所在的层，而具有 $S \cap Y \neq \emptyset$ 的 X 的层 S 正是维数为 $d_S \geq k-2m-3$ 的那些层。□

我们需要以下引理，它表明对于 $p \leq m$，条件 $\operatorname{depth} \Omega_X^p + p \geq k$ 在一般超平面截面下具有良好的性质。

引理 8.4。设 k 和 m 为整数，并设 $\iota\colon Y \to X$ 为一般超平面截面。若对所有 $p \leq m$ 都有 深度$\Omega_X^p + p \geq k$，则对所有 $p \leq m$ 都有 深度$\Omega_Y^p + p \geq k-1$。

证明。我们的假设恰好意味着

$$\mathcal{H}^j \operatorname{gr}_p^F \operatorname{DR}(\mathbb{D}(\mathbb{Q}_X^H[n])) = 0 \quad \text{for all } j \geq -k+1+n \text{ and } p \leq m.$$

应用 6.1 引理并取对偶，可知这等价于

$$\mathcal{H}^{-j} \operatorname{gr}_{-p}^F(\mathbb{Q}_X^H[n]) = 0 \quad \text{for all } j \geq -k+1+n \text{ and } p \leq m.$$

沿 ι^* 拉回，并利用 Y 为一般的这一事实，[Sa90、引理 2.25]和 [Sc14、定理 9.3]以及恒等式 $\iota^*\mathbb{Q}_X^H = \mathbb{Q}_Y^H$ 即可推出

$$\mathcal{H}^{-j} \operatorname{gr}_{-p}^F(\mathbb{Q}_Y^H[n-1]) = 0 \quad \text{for all } j \geq -k+1+n \text{ and } p \leq m.$$

用相同的论证反向推理，即得证明。 □

定理 *8.1* 的证明。必要性方向由定理 7.1 以及不等式 5.7得出。对于充分性方向，我们需要证明

$$\tilde{H}^i(U \setminus \{x\}, \mathbb{Q}) = 0 \qquad \text{for all } i \leq k-2+d_S \text{ and all } x \in X.$$

对于维数为 $d_S \geq k-2m-3$ 的层，这由命题 8.2 所给出的深度假设推出。否则，$d_S \leq k-2m-4$，而消失性由条件 $\operatorname{pdef}(X, k-2m-4) \leq n-k$推出；按照引理 5.8，将其解释为去心邻域的上同调群方面的条件。 □

定理 F 有几个有趣的推论。例如，如果 $m = \lceil (k-3)/2 \rceil$，反常度缺陷假设是空泛的，因此该陈述等价于定理 A。在下一种情形中，取 $k = 2m+4$，我们得到：

推论 8.5。令 k 为偶整数。则 对数典范缺陷$(X) \leq n-k$ 当且仅当深度 $\Omega_X^p + p \geq k$ 对所有 $p \leq (k-4)/2$ 以及 $\operatorname{cdef}(X) \leq n-k$。

例子 8.6 (深度为四时的 Dao-Takagi 定理)。我们重新得到 Dao-Takagi 的动机结果 [DT16]：若深度 $\mathscr{O}_X \geq 4$，则 $\operatorname{lcdef}(X) \leq n-4$ 当且仅当 X 具有挠局部解析 Picard 群。

事实上，假设深度 $\mathscr{O}_X \geq 4$。则深度 $\Omega_X^0 \geq 4$，且 $\operatorname{cdef}(X) \leq \operatorname{lcdef}(X) \leq n-3$由推论 7.6得出。结合推论 8.5，取 $k=4$，并按照引理 5.8中的方法，用去心邻域的上同调群来解释 cdef()，只需证明 $H^2(U \setminus \{x\}, \mathbb{Q})$ 同构于 $\operatorname{Pic}^{\text{an-loc}}(X,x)_{\mathbb{Q}}$ 对所有点 $x \in X$均成立。

$U \setminus \{x\}$ 的指数正合列给出一个长正合列

$$\begin{aligned} \ldots H^1(U \setminus \{x\}, \mathscr{O}) &\to H^1(U \setminus \{x\}, \mathscr{O}^*) \\ &\to H^2(U \setminus \{x\}, \mathbb{Z}) \to H^2(U \setminus \{x\}, \mathscr{O}) \to \ldots \end{aligned}$$

深度假设 $\operatorname{depth} \mathscr{O}_X \geq 4$ 意味着最外侧的两项消失 [ST06，定理 1.14]，因此 $H^2(U \setminus \{x\}, \mathbb{Z}) \simeq H^1(U \setminus \{x\}, \mathscr{O}^*)$。后者由 an-locKo12，第 1] 节同构于 $\operatorname{Pic}^{\text{an-loc}}(X,x)$。

我们还可以在定理 $m=0$ 中取 F，从而推出：

推论 8.7。若 k 是一个整数，则 对数典范缺陷$(X) \leq n-k$ 当且仅当 深度 $\Omega^0_X \geq k$且 $\mathrm{pdef}(X, k-4) \leq n-k$。

例 8.8 (Park-Popa 深度五定理)。我们来讨论这一结果在以下情形下如何 $k=5$ 推出 [PP25，推论 G]：若 $n \geq 5$ 且 X 具有有理局部解析$\mathbb{Q}$-阶乘奇点，则 lcdef$(X) \leq n-5$ 当且仅当 X 具有挠局部解析 gerbe 群。我们关键地利用了这样一个事实：有理局部解析 $\mathbb{Q}$-阶乘奇点在一般超平面截面下保持不变 [PP25，命题12.1]。

在这些假设下，我们有深度 Ω^0_X = 深度 $\mathscr{O}_X = n$。此外，X 具有挠局部解析 Picard 群，因此 lcdef$(X) \leq n-4$ 由例 8.6可知。

如例 8.6所示，指数长正合列表明 X 具有局部解析 gerbe 群当且仅当

$$H^3(U \setminus \{x\}, \mathbb{Q}) = 0 \qquad \text{for all } x \in X.$$

另一方面，由引理 5.8，我们有 pdef$(X, 1) \leq n-5$ 当且仅当

$$\tilde{H}^i(U \setminus \{x\}, \mathbb{Q}) = 0 \qquad \text{for all } i \leq 3 + \min\{d_S, 1\} \text{ and all } x \in X. \tag{8.9}$$

我们旨在证明这些条件的等价性。由于 lcdef$(X) \leq n-4$，只需证明 $H^4(U \setminus \{x\}, \mathbb{Q})$ 消失，其中 $d_S = 1$。

令 $\iota: Y \to X$ 为经过 x的一般超平面截面。根据 8.3，有 $H^4(U \setminus \{x\}, \mathbb{Q}) \simeq H^2(V \setminus \{x\}, \mathbb{Q})$，其中 $V \subset Y$是 x的一个小邻域。后一个上同调群恰为 $\mathrm{Pic}^{\text{an-loc}}(Y, x)_{\mathbb{Q}}$，由例 8.6 中的论证可知。但 Y 具有有理的局部解析 $\mathbb{Q}$-阶乘奇点，因此其局部解析 Picard 群都是挠群。于是 $\mathrm{Pic}^{\text{an-loc}}(Y, x)_{\mathbb{Q}} = 0$。

References

[AH24] Donu Arapura 和 Scott Hiatt。《奇异簇上的微分形式与霍奇结构》。*arXiv preprint arXiv:2410.21007*。[BBD 82] *Analysis and topology on singular spaces I (Luminy, 1981)* 100 *Astérisque* 5 171 Alexander A. Beilinson、Joseph Bernstein 和 Pierre Deligne。《反常层》。载于，，第 卷，页码 -。法国数学会，巴黎，（1982）。[BBL+25] Bhargav Bhatt、Manuel Blickle、Gennady Lyubeznik、Anurag K. Singh 和 Wenliang Zhang。《反常层在交换代数中的应用》。*J. Reine Angew. Math.* **825**（2025），81–138。[DT16] Hailong Dao 和 Shunsuke Takagi。关于深度与上同调维数之间的关系 *Compos. Math.* **152**（2016），第4期，876–888。[DOR25] Bradley Dirks、Sebasti´an Olano 和 Debatiya Raychadhury。Q-同调流形的霍奇理论推广。*arXiv preprint arXiv:2501.14065*。[DB 81] ´ ´ ` *Bull. Soc. Math. France* Philippe Du **109** 1981 1, 41 81 Bois。奇异簇的滤过 de Rham 复形。（），第 期，–。[Hi25] Scott Hiatt。具有前- k *arXiv preprint* -有理奇点的簇 *arXiv:2509.04382* 上的微分形式。[。13] HJ¨Annette Huber 和 Clemens J¨order。h-拓扑中的微分形式。*Algebr. Geom.* **1**（2014），第4期，449–478。[KS 06] *Grundlehren der Mathematis-* Masaki *chen Wissenschaften* **332** 2006 2006 Kashiwara 和 Pierre Schapira。《范畴与层》。 06] *Grundlehren der Mathematis-*，（）。施普 *chen Wissenschaften* **332** 2006 2006 林格出版社，柏林（）。[KS21] Stefan Kebekus 和 Christian Schnell。将复空间正则轨迹上的全纯形式延拓到奇点消解上。*J. Amer. Math. Soc.* **34**（2021），第2期，315–368。[KV25] Hyunsuk Kim 和 Sridhar Venkatesh。奇异上同调上的 Lefschetz 态射与环面簇的局部上同调维数。*arXiv preprint arXiv:2506.03026*。

[KS16] ´ ´ *Minimal Models and extremal* Sandor *rays (Kyoto, 2011) Adv. Stud. in Pure Math. Math. Soc. Japan* **70** 2016 49 65 Kovacs 和 Karl Schwede。杜布瓦奇点在变形下保持。[, [, （），–。[Ko 12] ´ ´ *J. Ramanujan* Janos Kollar。*Math. Soc.* **28** 2013 267 285 局部 Picard 群的 Grothendieck–Lefschetz 型定理。A（），–。[MP22] Mircea Mustaţ˘a 和 Mihnea Popa。局部上同调上的霍奇滤过、杜布瓦复形与局部上同调维数。 *Forum Math. Pi* **10**（2022），e22。[Og73] Arthur Ogus。代数簇的局部上同调维数。 *Ann. of Math.* **98**（1973），第2期，327–365。[Pa 23] *arXiv* Sung Gi *preprint arXiv:2311.15159* Park。杜布瓦复形与超越有理奇点的微分形式延拓。[。25] PP*arXiv preprint arXiv:2410.15638*Sung Gi Park 和 Mihnea Popa。奇异簇的霍奇对称性与 Lefschetz 定理。[。20] PS *Algebra Number Theory* **13** Matthias Paulsen 和 Stefan Schreieder。模整数的 Hodge 数构造问题。[（2019），第10期，2427–2434。24] PS *Rev. Roumaine Math. Pures Appl. L. Bădescu memorial* Mihnea *issue* **70** 2025 1 2, 133 155 Popa 和 Wanchun Shen。奇异簇上的锥的杜布瓦复形、局部上同调维数与 K 群。[, （），第 期，–。[PSV24] Mihnea Popa、Wanchun Shen 和 Anh Duc Vo。孤立奇点杜布瓦复形的单射性与消失。 *arXiv preprint arXiv:2409.18019*, *to appear in Algebra and Number Theory* 2024 （）。[RSW 21] Thomas Reichelt、Morihiko Saito 和 Uli Walther。局部上同调维数的拓扑计算。 *J. Singul.* **26**（2023），13–22。[Sa87] Morihiko Saito。《混合霍奇模导论》。 *Astérisque* **179–180**（1987），145–162。[Sa88] Morihiko Saito。极化霍奇模。 *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **24**（1988 6，849 995），第 期，–。[Sa90] Morihiko Saito。混合霍奇模。 *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **26**（1990），第2期，221–333。[Sa00] Morihiko Saito。代数簇上的混合 Hodge 复形。 *Math. Ann.* **316**（2000 2，283 331），第 期，–。[Sc14] Christian Schnell。关于 Saito 消失定理。 *Math. Res. Lett.* **23**（2016），第2期，499–527。[ST06] Yum-Tong Siu 和 G¨ unther Trautmann。间隙层与凝聚解析子层的延拓，载于 *Lecture Notes in Mathematics*第172卷。施普林格出版社，柏林-纽约，（1971）。[SVV23] Wanchun Shen、Sridhar Venkatesh 和 Anh Duc Vo。关于 k-杜布瓦奇点与 k-有理奇点。 *arXiv preprint arXiv:2306.03977*， *to appear in Ann. Inst. Fourier*，（2023）。

Department of Mathematics, Harvard University, 1 Oxford Street, Cambridge, MA 02138, USA

Email address: aburke@math.harvard.edu