arXiv:2602.05203v1 [math.AP] 5 Feb 2026

高阶 Hardy–Sobolev–Maz'ya 不等式极值函数的存在性与对称性

GUOZHEN LU 和 CHUNXIA TAO

ABSTRACT. 本文证明了上半空间$\mathbb{R}^{n+1}_+$上第 k 阶临界 Hardy–Sobolev–Maz'ya（HSM）不等式在 $k \geq 2$ 且 $n \geq 2k+2$时存在极值函数：

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla^k u|^2 dx - \prod_{i=1}^{k} \frac{(2i-1)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{u^2}{x_1^{2k}} dx \geq C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^{\frac{2n}{n-2k}} dx \right)^{\frac{n-2k}{n}}.$$

由于高阶导数的存在、平移不变性的缺失、重排技术不适用于上半空间，以及边界上存在 Hardy 奇点，这一极值问题的分析颇具挑战。为克服这些困难，我们不直接考虑上半空间上的 HSM 不等式，而是证明其等价形式——双曲空间上的庞加莱–索伯列夫不等式——存在极值函数。我们针对极小化序列发展了一种新颖的对偶理论，并建立了双曲空间背景下径向函数的浓缩紧性原理；结合 Helgason-傅里叶分析和双曲空间上的里斯重排不等式，从而解决紧性缺失问题。作为应用，我们还证明了整个双曲空间上与 GJMS 算子 P_k 相关的高阶 Brezis–Nirenberg 方程存在正对称解（即，当 $k \geq 2$时）：

$$P_k(f) - \alpha f = |f|^{p-2} f$$

在临界情形 $\alpha = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{(2i-1)}{4}\right)^2$，当 $2k+2 \leq n$ 和 $p = \frac{2n}{n-2k}$ 或 $2k < n$和 $2 < p < \frac{2n}{n-2k}$时。

1. INTRODUCTION

经典的 Hardy-Sobolev-马兹亚（HSM）不等式对上半空间上的 Sobolev 不等式和 Hardy 不等式都作了改进$\mathbb{R}^n_+$。其表述如下：对于 $n > 2k$， $2 < p \leq \frac{2n}{n-2k}$ 且 $\gamma = \left(\frac{(n-2k)}{2}\right)^p - n$，存在某个正常数 $C_{n,k,p}$

第一作者获得了 Simons基金会的 Simons合作项目资助和 Simons奖学金。第二作者获得了国家自然科学基金委员会资助（编号：12201016）以及北京工商大学资助（QNJJ2022-03）。

使得对每个 $u \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)$，都有

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla^k u|^2 dx - \prod_{i=1}^k \frac{(2i-1)^2}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u^2}{x_1^{2k}} dx \geq C_{n,k,p} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^\gamma |u|^p dx \right)^{\frac{2}{p}}. \tag{1.1}$$

一阶情形（$k=1$）由马兹亚 [29], 证明，而高阶情形则由 Lu 和 Yang [25]证明。特别地，当 $p = \frac{2n}{n-2k}$（对应于 $\gamma = 0$）时，不等式 (1.1) 称为临界 HSM 不等式:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla^k u|^2 dx - \prod_{i=1}^k \frac{(2i-1)^2}{4} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u^2}{x_1^{2k}} dx \geq C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |u|^{\frac{2n}{n-2k}} dx \right)^{\frac{n-2k}{n}}. \tag{1.2}$$

Lu 和 Yang [25] 发展了双曲空间上的傅里叶分析技术。双曲空间是一种非紧致完备黎曼流形，他们利用这些技术建立了半空间上的高阶导数 HSM 不等式。（另见 Flynn 等人 [12] 和 [27] 关于其他秩一对称空间情形的研究。）事实上，他们为双曲空间上的 GJMS 算子推导出了以下庞加莱-索博列夫不等式 $\mathbb{B}^n$: 对于 $n > 2k$ 和 $2 < p \leq \frac{2n}{n-2k}$，存在某个常数 $C_{n,\ k,\ p}$，使得对每个 $f \in C_c^\infty$（$\mathbb{B}^n$），都有

$$\int_{\mathbb{B}^n} P_k(f) f dV - \prod_{i=1}^k \frac{(2i-1)^2}{4} \int_{\mathbb{B}^n} |f|^2 dV \geq C_{n,k,p} \left(\int_{\mathbb{B}^n} |f|^p dV \right)^{\frac{2}{p}}, \tag{1.3}$$

其中， P_k 是双曲空间 $\mathbb{B}^n$上的GJMS算子。该算子的精确定义以及双曲空间的相关背景知识见第 2 节。通过证明 $\mathbb{B}^n$ 上的 Poincar´e-索博列夫不等式与半空间上的 HSM 不等式等价，他们推导出了高阶 HSM 不等式。这种方法为证明 HSM 不等式提供了一条技术上强有力的途径，使得高阶 HSM 不等式能够通过其双曲对应形式，以统一且间接的方式得到。受这一等价关系的启发，本文首先研究双曲空间 $\mathbb{B}^n$ 上 Poincar´e-索博列夫不等式的极值函数的存在性，并以此为框架，证明相应 HSM 不等式的极值函数存在。

双曲空间 $\mathbb{B}^n$ 上的 k 阶索伯列夫不等式如下:

$$\int_{\mathbb{B}^n} P_k(f) f dV \geq S_{n,k} \left(\int_{\mathbb{B}^n} |f|^{\frac{2n}{n-2k}} dV \right)^{\frac{n-2k}{n}}, \tag{1.4}$$

其中 $f \in C_c^\infty(\mathbb{B}^n)$, $1 \leq k < \frac{n}{2}$, $S_{n,\ k}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上 k 阶索伯列夫不等式的最佳常数。（见 Hebey [14]和 Liu [23]）。在 [25], , Lu 和 Yang 提出了一种证明 (1.4) 的替代方法。事实上，令 $g(x) = \left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^{\frac{n}{2}-k} f(x)$, 利用共形变换律（见 [25] 的引理 5.1）

$$P_k(f) = \left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^{-\frac{n}{2}-k} (-\Delta)^k \left(\left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^{\frac{n}{2}-k} f(x) \right),$$

我们可以看到，双曲空间 $\mathbb{B}^n$ 上的 k 阶索伯列夫不等式等价于 $\mathbb{R}^n$ 的单位球上以下 k 阶索伯列夫不等式:

$$\int_{\mathbb{B}^n}(-\Delta)^k g\cdot g dx \geq S_{n,k}\left(\int_{\mathbb{B}^n}|g|^{\frac{2n}{n-2k}}dx\right)^{\frac{n-2k}{n}}. \tag{1.5}$$

显然，利用平移、伸缩以及实数集 $\mathbb{R}^n$ 上索伯列夫不等式极值函数的分类（参见 Talenti [30]、Aubin [1]，以及 [34]的命题 1.43 中关于一阶情形的讨论；高阶情形则参见 Lieb[20] ），单位球 $\mathbb{R}^n$ 上的 k阶索伯列夫不等式没有极值函数。因此，双曲空间 $\mathbb{B}^n$ 上的 k阶索伯列夫不等式不允许存在极值函数。

另一方面，双曲空间 $\mathbb{B}^n$上有如下 k 阶 Poincar´e 不等式:

$$\int_{\mathbb{B}^n}P_k(f)\,f dV \geq \prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4}\left(\int_{\mathbb{B}^n}|f|^2 dV\right), \tag{1.6}$$

其中 $f\in C_c^\infty(\mathbb{B}^n)$，且常数 $\prod_{i=1}^{k}{}_{(2i-1)_4}{}^{2}$ 是最佳常数。需要注意的是，最佳常数无法取到。结合双曲空间 $\mathbb{B}^n$上的 k阶索伯列夫不等式和 k阶 Poincar´e 不等式，这两类最佳不等式都必然存在某种改进。这种改进正是双曲空间上的高阶 Poincare-Sobolev 不等式（1.3）所体现的。然而，双曲空间上高阶 Poincare-Sobolev 不等式的极值函数是否存在，仍然是一个悬而未决的问题。

对于一阶临界 HSM 不等式，Hebey [14] 证明了当 $n\geq 4$时，最佳常数$C_{n,1,\frac{2n}{n-2}}$严格小于Sobolev常数$S_{n,1}$。Tertikas 和 Tintarev[33] 进一步证明了 $n\geq 4$的极值函数存在。另一方面，Benguria、Frank 和 Loss [8] 证明，当$n=3$时，最佳常数$C_{n,1,\frac{2n}{n-2}}$等于 Sobolev常数$S_{n,1}$，而最佳常数$C_{n,1,\frac{2n}{n-2}}$无法取到。对于高阶临界情形，Lu 和 Yang 在 [26] 中证明，若$n=2k+1$，则 k 阶 HSM 不等式的最佳常数$C_{n,k,\frac{2n}{n-k}}$与 k 阶 Sobolev 常数$S_{n,k}$ 相同；若 $n\geq 2k+2$，则最佳常数$C_{n,k,\frac{2n}{n-k}}$严格小于 k阶 Sobolev 常数$S_{n,k}$。然而，当 $k\geq 2$时，$n\geq 2k+2$ 下最佳常数$C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}$能否取到仍是一个开放问题。在 [33], 中，作者运用一种巧妙的变换，将 HSM 不等式化为上半空间上的加权Sobolev不等式，并通过应用集中紧性原理，证明了一阶情形 $k=1$下极值函数的存在。由于高阶算子的复杂性增加，这种变换不再适用于高阶情形。

我们的第一个主要结果涉及临界高阶庞加莱-索伯列夫不等式的极值函数的存在性。我们通过对 $\dot{H}(H)$ 进行完备化，定义希尔伯特空间 $H(\mathbb{B}^n)$

其范数为

$$\|f\|_{H(\mathbb{B}^n)}=\left(\int_{\mathbb{B}^n}P_k\left(f\right)fdV-\prod_{i=1}^{k}\frac{\left(2i-1\right)^2}{4}\int_{\mathbb{B}^n}|f|^2dV\right)^{\frac{1}{2}}.$$

注意到，利用 Poincare-Sobolev不等式，$\|f\|_{H(\mathbb{B}^n)}$ 确实是一个范数。

定理1.1。 假设 $p=\frac{2n}{n-2k}$ 和 $n\geq 2k+2$。那么存在一个正函数$f_0\in H(\mathbb{B}^n)$，使得不等式 (1.3)取等号。此外，极值函数 f_0 必定关于某个点 $P\in\mathbb{B}^n$径向对称且单调递减，也就是说， f_0 在以 $P\in\mathbb{B}^n$ 为中心的测地球面上为常数，并且随到 P 的测地距离增大而径向递减。

证明的关键在于为双曲空间上的微分不等式建立 Lions 式集中紧性原理 [21, 22] 。微分不等式的集中紧性原理可分为第一类和第二类微分集中紧性。关键点之一是证明高阶 Poincar´e-Sobolev不等式的极小化序列 $\{u_k\}$ 是紧的。为此，必须排除消失现象和二分现象。伸缩不变性的丧失给排除消失现象带来了很大挑战。为了克服这些困难，我们需要找到一个在双曲空间无穷远处衰减的径向极小化序列，以帮助排除消失现象。然而，对于高阶微分不等式，P¨olya-Szeg¨o 重排不等式并不成立。利用双曲空间上的 Poincar´e-Sobolev不等式与 Hardy-Littlewood-Sobolev不等式的等价性、双曲空间上的黎斯重排不等式以及格林表示公式，可以找到 Poincar´e-Sobolev不等式的径向极小化序列。排除二分现象时，无法沿用 [22]中 Lions 的证明思路。事实上，回顾排除涉及高阶导数的 L^p 索伯列夫不等式极小化序列 w_k 发生二分现象的证明:

$$I=\inf\{\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla^m w|^p dx,\quad \int_{\mathbb{R}^n}|w|^{\frac{np}{n-mp}}dx=1\}.$$

Lions 构造了一个合适的集中函数

$$\rho_k=\sum_{j=0}^{m}|D^j w_k|^{q_j},\ q_j=\frac{np}{n-(m-j)p}$$

并证明，对于任意 $\epsilon>0$，存在 $y_k\in\mathbb{R}^n$ 和 $R_\epsilon>0$，使得 $\int_{|x-y_k|\geq R}\rho_k(x)dx<\epsilon$ 对任意 $R>R_\epsilon$均成立。这是通过缩放截断函数实现的，并且

$$\int_{R_0<|x-y_k|<R_k}\sum_{j=0}^{m-1}|D^j w_k|^{q_j}dx=o_k(1).$$

然而，对于双曲空间中的高阶 Poincar´e-索伯列夫不等式，不可能引入 $\mathbb{R}^n$ 的集中函数 ρ_k 来替代。此外，缩放截断函数的缺失也会带来额外的困难。为克服这一困难，

我们发现了 Poincare-索伯列夫不等式的极小化序列与等价积分不等式的极小化序列之间的定量关系（这不同于极值函数的等价性），从而能够将等价积分不等式的浓缩紧性技术应用于排除 Poincar´e-索伯列夫不等式极小化序列的二分性。一旦证明极小化序列是紧的，我们就可以遵循标准的 Lions 第二浓缩紧性过程，排除极小化序列收敛至 δ-测度的情形，使用 $C_{n,\ k,\ \frac{2n}{n-k}} < S_{n,\ k}$。

通过这一等价性，结合定理 1.1，我们立即得到上半空间上高阶临界 Hardy-Sobolev-Maz'ya 不等式 (1.2) 的极值函数的存在性。

定理 1.2. 设 $n \geq 2k+2$。则存在正函数 $f_0 \in \widetilde{H}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$，它在不等式 (1.2) 中达到等式，其中 $\widetilde{H}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ 是 $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ 在该范数下的完备化

$$\|u\|_{\widetilde{H}\left(\mathbb{R}^n_+\right)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla^k u|^2 dx - \prod_{i=1}^{k} \frac{(2i-1)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{u^2}{x_1^{2k}} dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

对 $n = 2k+1$，根据 $[26]$，的引理 4.3，我们可以推出临界不等式 (1.3) 和 (1.1) 的极值函数的不存在性。与临界情形不同，次临界不等式对所有 $n > 2k$ 都存在极值函数。我们有如下结果：

定理 1.3。 假设 $2 < p < \frac{2n}{n-2k}$ 和 $n > 2k$。那么存在一个正函数$f_0 \in H(\mathbb{B}^n)$，使得不等式 (1.3)取等号，

定理 1.4。 假设 $2 < p < \frac{2n}{n-2k}$ 和 $n > 2k$。那么存在一个正函数$f_0 \in \widetilde{H}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$，使得不等式 (1.1)取等号。

庞加莱-索博列夫不等式与整个双曲空间 $\mathbb{B}^n$上的 Brezis-Nirenberg 问题[9] 密切相关：

$$P_k(f) - \alpha f = |f|^{p-2} f. \tag{1.7}$$

对于 $k=1$，Mancini 和 Sandeep $[28]$ 证明，整体解存在的条件是$n \geq 4$、$p = \frac{2n}{n-2}$、$0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$，或者 $n \geq 3$、$1 < p < \frac{2n}{n-2}$和 $\alpha \leq \frac{1}{4}$。Bhakta 等人[5] 证明了当 $k=1$ 时，方程 (1.7) 具有定量稳定性。对于 $k \geq 2$，Li 等人 $[19]$ 证明，当 $n \geq 2k+2$、$p = \frac{2n}{n-2k}$、$\alpha < \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{(2i-1)}{4}\right)^2$ 时，非平凡解存在。不难计算得出，不等式 (1.3) 对应的欧拉-拉格朗日方程是方程 (1.7)，其中 $\alpha = \prod_{i=1}^{k} \frac{(2i-1)^2}{4}$，$2 < p \leq \frac{2n}{n-2k}$。定理 1.1 和定理 1.3 的一个直接推论如下：

推论 1.5. 设 $\alpha=\prod_{i=1}^{k}(2i-1)_4^2$。若 $2k+2\le n$、$p=\frac{2n}{n-2k}$，或 $2k<n$、$2<p<\frac{2n}{n-2k}$，则方程 (1.7) 至少存在一个正解 u，属于 $H(\mathbb{B}^n)$，且关于某点 $P\in\mathbb{B}^n$ 径向对称并单调递减。

注 1.6。这是首次在整个双曲空间上推导出高阶 *Brezis-Nirenberg* 问题 $\alpha=\prod_{i=1}^{k}(2i-1)_4^2$ 正解的存在性。

2. Preliminaries on the Hyperbolic space

本节回顾双曲空间的一些性质。双曲空间有若干种模型，例如庞加莱上半空间模型和庞加莱球模型。我们用 $\mathbb{B}^n$ 表示庞加莱球模型。本文始终采用庞加莱球模型。

2.1. 庞加莱球模型 $\mathbb{B}^n$。

庞加莱球模型 $\mathbb{B}^n$ 是单位球 $\mathbb{B}^n=\{x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n||x|<1\}$ 配备通常的庞加莱度量 $g=\left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^2 g_e$，其中 g_e 表示标准欧几里得度量。双曲体积元为 $dV=\left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^n dx$。对于可测集 $E\in\mathbb{B}^n$，我们用 $\tau(E)$ 表示 E 的双曲测度，即，

$$\tau(E)=\int_E dV=\int_E\left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^n dx.$$

对于 $0<R<1$，我们用 $B^n(0,R)$ 表示以原点为中心、欧几里得半径为 R 的球，则

$$\tau\left(B^n(0,R)\right)=\int_{B^n(0,R)}dV=\omega_{n-1}\int_0^R\left(\frac{2}{1-|s|^2}\right)^n s^{n-1}ds,$$

其中 ω_{n-1} 是欧几里得单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的表面积。对于 $x\in\mathbb{B}^n, r\in(0,+\infty)$，我们用 $B_{\mathbb{H}}(x,r)$ 表示以 x 为中心、双曲半径为 r 的双曲球。事实上，

$$B_{\mathbb{H}}(x,r)=\{y\in B^n(0,1)\mid\rho(y,x)=\log\big(\frac{1+|T_x(y)|}{1-|T_x(y)|}\big)<r\},$$

其中 $T_x(y)$ 是下一小节将要定义的 M¨obuis 变换。容易验证，双曲测地球 $B_{\mathbb{H}}(0,r)$ 就是欧几里得球 $B^n(0,\tanh(\frac{r}{2}))$，其中 $\tanh(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}<1$。

双曲梯度 $\nabla_{\mathbb{H}}$ 和相应的拉普拉斯–贝尔特拉米算子 $\Delta_{\mathbb{H}}$ 分别定义为

$$\nabla_{\mathbb{H}}=\frac{(1-|x|^2)}{2}\nabla,\quad\Delta_{\mathbb{H}}=\frac{1-|x|^2}{4}\left(\left(1-|x|^2\right)\Delta+2\left(n-2\right)\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

其中 $\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 是 $\mathbb{R}^n$上的拉普拉斯算子。双曲空间 $\mathbb{B}^n$ 上的 GJMS算子定义为（见 [10, 11, 13, 18]）

$$P_k=P_1\left(P_1+2\right)\cdot\cdots\cdot\left(P_1+k\left(k-1\right)\right),\ k\in\mathbb{N}^+,$$

wh其中 $P_1=-\Delta_{\mathbb{H}}=\frac{n}{(n-2)\ 4}$ 是双曲空间上的共形拉普拉斯算子 $\mathbb{B}^n$.

2.2. 莫比乌斯变换。 对每个 $a\in\mathbb{B}^n$，莫比乌斯变换 T_a 定义为（例如参见 [4, 17]）

$$T_a\left(x\right)=\frac{|x-a|^2a-\left(1-|a|^2\right)\left(x-a\right)}{1-2x\cdot a+|x|^2a^2},$$

其中 $x\cdot a$ 表示 $\mathbb{R}^n$中的标量积。需要注意的是， $\mathbb{B}^n$ 上的测度在莫比乌斯变换下保持不变。利用莫比乌斯变换，我们可以定义 x 到 y 在 $\mathbb{B}^n$ 上的距离为

$$\rho\left(x,y\right)=\rho\left(T_x\left(y\right)\right)=\rho\left(T_y\left(x\right)\right)=\log\frac{1+\left|T_y\left(x\right)\right|}{1-\left|T_y\left(x\right)\right|}.$$

原点到 $x\in\mathbb{B}^n$ 的距离为 $\rho(x)=\log\frac{1+|x|}{1-|x|}$。 $\mathbb{B}^n$ 上可测函数 f 与 g 的卷积可定义为（例如参见 [24]）

$$\left(f*g\right)\left(x\right)=\int_{\mathbb{B}^n}f\left(y\right)g\left(T_x\left(y\right)\right)dV_y.$$

2.3. Helgason-Fourier 变换。 关于双曲空间上的 Helgason-Fourier 变换，请参阅 [15, 16, 31, 32]。设

$$e_{\lambda,\xi}\left(x\right)=\left(\frac{\sqrt{1-|x|^2}}{|x-\xi|}\right)^{n-1+i\lambda},\ x\in\mathbb{B}^n,\ \lambda\in\mathbb{R},\ \xi\in\mathbb{S}^{n-1}.$$

用球模型表示时，定义在 $\mathbb{B}^n$ 上的函数 f 的傅里叶变换可定义为

$$\widehat{f}\left(\lambda,\xi\right)=\int_{\mathbb{B}^n}f\left(x\right)e_{-\lambda,\xi}\left(x\right)dV$$

$\widehat{\ \ \ }$ 前提是该积分存在。如果 $g\in C_c^\infty(\mathbb{B}^n)$是径向的，则$(f*g)=f\cdot\widehat{g}$。此外，对于$f\in C_c^\infty(\mathbb{B}^n)$，我们有如下反演公式：

$$f\left(x\right)=D_n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\widehat{f}\left(\lambda,\xi\right)e_{\lambda,\xi}\left(x\right)\left|c\left(\lambda\right)\right|^{-2}d\lambda d\xi,$$

其中 $D_n=\frac{1}{2^{3-n}\pi|\mathbb{S}^{n-1}|}$ 且 $c(\lambda)$ 是 Harish-Chandra函数，由下式给出（例如参见 [24] ）

$$c\left(\lambda\right)=\frac{2^{n-1-i\lambda}\Gamma\left(n/2\right)\Gamma\left(i\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1+i\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+i\lambda}{2}\right)}.$$

For $g \in L^2(\mathbb{B}^n)$, $h \in L^2(\mathbb{B}^n)$，我们还有以下普朗歇尔公式：

$$\int_{\mathbb{B}^n} g(x)\, h(x)\, dV = D_n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \widehat{g}(\lambda,\xi)\, \widehat{h}(\lambda,\xi)\, |c(\lambda)|^{-2} d\lambda d\xi.$$

由于 $e_{\lambda,\,\xi}$ 是 $-\Delta_{\mathbb{H}}$ 的特征函数，其特征值为 $\left(\frac{n-1}{4}\right)^2+\lambda^2$，因此对于 $f \in C_c^\infty(\mathbb{B}^n)$，有 $\widehat{-\Delta_{\mathbb{H}} f}(\lambda,\ \xi) = \left(\frac{n-1}{4}\right)^2+\lambda^2 \widehat{f}(\lambda,\ \xi)$。根据 GJMS 算子的定义，我们可以验证

$$\widehat{P_k(f)}(\lambda,\xi) = \frac{\lambda^2+1}{4}\left(\frac{\lambda^2+1}{4}+2\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{\lambda^2+1}{4}+k(k-1)\right)\widehat{f}(\lambda,\xi).$$

与欧氏情形类似，双曲空间上的分数阶拉普拉斯算子定义如下：

$$\widehat{(-\Delta_{\mathbb{H}^n})^\gamma f}(\lambda,\xi) = \left(\frac{(n-1)^2+\lambda^2}{4}\right)^\gamma \widehat{f}(\lambda,\xi), \gamma \in \mathbb{R}.$$

2.4. 双曲空间上的重排。 现在，我们回顾一些关于双曲空间上重排的性质（见 [2]）。对于双曲空间 $\mathbb{B}^n$上的可测函数 f，一维重排 $f^\sharp(s)$： $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$f^\sharp(s) = \inf\{t>0 : \int_{\{x\in\mathbb{B}^n : |f|>t\}} dV \le s\};$$

f的双曲测地线递减重排 $f^*(x)$： $\mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ 定义为

$$f^*(x) = f^\sharp(\tau(B_{\mathbb{H}}(0,\rho(x)))).$$

我们需要注意到， $f^*(x)$是关于原点径向递减的，因为 $\rho(x) = \log\left(\frac{1+|x|}{1-|x|}\right)$是关于原点递减的。由重排性质可知

$$\tau\{x\in\mathbb{B}^n : f^*(x) > t\} = \tau(\{x\in\mathbb{B}^n : |f| \ge t\}),$$

and

$$\int_{\mathbb{B}^n} |f^*|^p dV = \int_{\mathbb{B}^n} |f|^p dV,\ 0<p<\infty.$$

3. The proof of Theorem 1.1

本节将证明高阶临界庞加莱-索伯列夫不等式在 $\mathbb{B}^n$ 上的极值函数的存在性（即定理1.1）。也就是说，我们考虑以下极小化问题是否能够达到：

$$C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}} := \inf\{\|f\|^2_{H(\mathbb{B}^n)} : \int_{\mathbb{B}^n} |f|^{\frac{2n}{n-2k}} dV = 1\}. \tag{3.1}$$

证明分为三个步骤，每个步骤分别表述为一个命题。在第 3.1 小节中，我们将为这个极小化问题选取径向递减极小化序列（见命题3.1）。通过 Helgason-傅里叶分析和对偶理论，

我们将 Poincar´e-Sobolev 不等式转化为双曲空间上相应的 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式。通过建立 Poincar´e-Sobolev 不等式与 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的极值序列之间的关系（见引理 3.3），证明核的单调递减性质（见引理 3.4），并应用对称化引理，我们可以选取径向递减极小化序列。在第3.2小节中，我们将证明径向递减极小化序列的紧性（见命题3.5）。根据第一个 Lions集中紧性引理（见引理 3.4），可能出现三种现象。通过建立极小化序列在双曲空间无穷远处的径向估计（见引理3.7），我们可以排除消失现象。再次应用极小化序列之间的定量关系（引理 3.3），我们证明相应 Hardy–Littlewood–Sobolev 不等式的极小化序列不会出现二分现象，而不是直接对 Poincar´e-Sobolev 极小化序列排除这种现象。在第3.3小节中，我们将证明紧且径向递减的极小化序列在 $H(\mathbb{B}^n)$ 中强收敛到一个非零函数（见命题3.8），从而完成定理 1.1 的证明。我们首先证明 $H(\mathbb{B}^n) \subset W^{k,2}_{loc}(\mathbb{B}^n)$。然后，我们在双曲空间上为高阶临界 Poincar´e-Sobolev 不等式建立第二个 Lions集中紧性引理（见引理 3.9）。结合 Poincar´e-Sobolev 不等式常数 $C_{n,k}$ 严格小于 Sobolev常数$S_{n,k}$这一事实，我们便得到强收敛。

3.1. **构造径向递减极小化序列**。

命题3.1. 对于极小化问题 (3.1)，存在一个径向递减极小化序列 $\{f_m\}$。具体而言，存在一个序列 $\{f_m\}$，使得

$$\lim_{m\to\infty} \|f_m\|^2_{H(\mathbb{B}^n)} = C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}, \quad \int_{\mathbb{B}^n} |f_m|^{\frac{2n}{n-2k}} dV = 1$$

并且对于每个 $m \in \mathbb{N}$，函数 $f_m(x)$ 关于原点的测地距离径向递减。

证明。 对于 $f \in C_c^\infty(\mathbb{B}^n)$，定义 $G_k(f)$ 如下:

$$G_k(f) = P_k(f) - \prod_{i=1}^{k} \frac{(2i-1)^2}{4} f,$$

then

$$\widehat{G_k(f)} = \left(\frac{\lambda^2+1}{4} \cdots \left(\frac{\lambda^2+1}{4} + k(k-1) \right) - \prod_{i=1}^{k} \frac{(2i-1)^2}{4} \right) \widehat{f}(\lambda, \xi).$$

类比于分数阶拉普拉斯算子的情形， G_k^γ 在 f 上的分数阶算子定义如下:

$$\widehat{G_k^\gamma(f)}(\lambda,\xi)=\left(\frac{\lambda^2+1}{4}\cdots\left(\frac{\lambda^2+1}{4}+k(k-1)\right)-\prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4}\right)^{\gamma}\widehat{f}(\lambda,\xi),\gamma\in\mathbb{R}. \tag{3.2}$$

应用普朗歇尔公式，我们推导得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{B}^n}P_k(f)\,f dV-\prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4}\int_{\mathbb{B}^n}|f|^2dV\\
&=D_n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\widehat{G_k(f)}(\lambda,\xi)\,\widehat{f}(\lambda,\xi)\,|c(\lambda)|^{-2}d\lambda d\xi\\
&=D_n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{\lambda^2+1}{4}\cdots\left(\frac{\lambda^2+1}{4}+k(k-1)\right)-\prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4}\right)\cdot|\widehat{f}(\lambda,\xi)|^2|c(\lambda)|^{-2}d\lambda d\xi\\
&=D_n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\left(\frac{\lambda^2+1}{4}\cdots\left(\frac{\lambda^2+1}{4}+k(k-1)\right)-\prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\widehat{f}(\lambda,\xi)\right)^2\cdot|c(\lambda)|^{-2}d\lambda d\xi\\
&=D_n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\widehat{|G_k^{\frac{1}{2}}(f)}(\lambda,\xi)|^2|c(\lambda)|^{-2}d\lambda d\xi\\
&=\int_{\mathbb{B}^n}|G_k^{\frac{1}{2}}(f)|^2dV.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

因此， $\mathbb{B}^n$ 上的临界庞加莱-索伯列夫不等式可写为

$$\int_{\mathbb{B}^n}|G_k^{\frac{1}{2}}(f)|^2dV\geq C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}\left(\int_{\mathbb{B}^n}|f|^{\frac{2n}{n-2k}}dV\right)^{\frac{n-2k}{n}}. \tag{3.4}$$

[1] – [1]设 $G_k^{\frac{1}{2}}(f)=g$，则 $f=G_k^{-\frac{1}{2}}(g)$。由傅里叶变换的反演公式， f等于

$$D_n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{\lambda^2+1}{4}\cdots\left(\frac{\lambda^2+1}{4}+k(k-1)\right)-\prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\widehat{g}(\lambda,\xi)\,e_{\lambda,\xi}(x)\,|c(\lambda)|^{-2}d\lambda d\xi.$$

于是，上述庞加莱-索伯列夫不等式 (3.4) 化简为

$$\int_{\mathbb{B}^n}|g|^2dV\geq C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}\left(\int_{\mathbb{B}^n}|G_k^{-\frac{1}{2}}(g)|^{\frac{2n}{n-2k}}dV\right)^{\frac{n-2k}{n}}. \tag{3.5}$$

根据对偶性，上述不等式实际上等价于双曲空间上的以下不等式 $\mathbb{B}^n$:

$$\left(\int_{\mathbb{B}^n}|h|^{\frac{2n}{n+2k}}dV\right)^{\frac{n+2k}{n}}\geq C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}\int_{\mathbb{B}^n}|G_k^{-\frac{1}{2}}(h)|^2dV. \tag{3.6}$$

我们用 $G_k^{-1}(x,y)$ 表示算子 G_k^{-1} 的核函数。那么，不等式 (3.6) 等价于以下 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式：

$$C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n}h(x)\,G_k^{-1}(x,y)\,h(y)\,dV_xdV_y\le\left(\int_{\mathbb{B}^n}|h|^{\frac{2n}{n+2k}}dV\right)^{\frac{n+2k}{n}}. \tag{3.7}$$

由引理 3.4（稍后给出），我们知道 $G_k^{-1}(x,\ y)$ 关于距离函数 $\rho(T_x(y))$ 对称且递减。根据 [7], 中的对称化引理 3.2，我们可以选取 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式 (3.7) 的径向递减极大化序列 $\{h_m\}$。由不等式 (3.7) 与 (3.6) 直接等价可知，$\{h_m\}$ 也是不等式 (3.6) 的径向递减极大化序列，即，

$$\int_{\mathbb{B}^n}|h_m|^{\frac{2n}{n+2k}}dV=1,\quad\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}|G_k^{-\frac{1}{2}}(h_m)|^2dV=C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}^{-1}.$$

在下面的引理 3.3 中，我们证明了 (3.4) 的极值序列与 (3.6) 的极值序列之间的关系。取 $f_m=G_k^{-1}(h_m)$，则 $f_m(x)$ 是不等式 (3.4) 的径向递减极值序列。相差一个常数因子，我们有

$$\lim_{m\to\infty}\|f_m\|^2_{H(\mathbb{B}^n)}=C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}},\quad\int_{\mathbb{B}^n}|f_m|^{\frac{2n}{n-2k}}dV=1.$$

□

在上文命题3.1的证明中，我们依赖以下三个引理。引理 3.2 引自 [7]；详细证明也可见 [3, 6]。引理 3.3 建立了对偶不等式 (3.4) 和 (3.6) 之间的明确关系。为证明引理 3.4 中的径向单调性，我们改编了 [19] 中提出的方法。

引理 3.2. [7, 对称化引理] 设 K 是 $\mathbb{R}$ 上的单调递减函数，则

$$\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n}h(x)\,K(\rho(T_x(y)))h(y)\,dV_xdV_y\le\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n}h^*(x)\,K(\rho(T_x(y)))(x,y)\,h^*(y)\,dV_xdV_y,$$

其中，h 是非负可测函数，h^* 表示其在 $\mathbb{B}^n$ 上的双曲测地线递减重排，且左侧的被积函数可积。若 K 严格递减，则除非对任意 $a\in\mathbb{B}^n$ 都有 $h(x)=h^*(T_a(x))$，否则上述不等式为严格不等式。

引理 3.3. 设 $\{f_m\}$ 是不等式 (3.4) 的极值序列，且满足

$$\|G_k^{\frac{1}{2}}(f_m)\|_{L^2(\mathbb{B}^n)}=1\ and\ \lim_{m\to\infty}\|f_m\|_{L^{\frac{2n}{n-2k}}(\mathbb{B}^n)}=C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}^{-1}. \tag{3.8}$$

定义 $h_m=(f_m)^{\frac{n+2k}{n-2k}}$。那么，$\{h_m\}$ 是不等式 (3.6)的极值序列；具体而言，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\|G_k^{-\frac{1}{2}}(h_m)\|_{L^2(\mathbb{B}^n)}}{\|h_m\|_{L^{\frac{2n}{n+2k}}(\mathbb{B}^n)}}=C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}^{-1}.$$

另一方面　另一方面，设 $\{h_m\}$ 是满足以下条件的不等式 (3.6) 的极值序列

$$\|h_m\|_{L^{\frac{2n}{n+2k}}(\mathbb{B}^n)}=1 \ and \ \lim_{m\to\infty}\|G_k^{-\frac{1}{2}}(h_m)\|_{L^2(\mathbb{B}^n)}=C^{-1}_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}. \tag{3.9}$$

定义 $f_m=G_k^{-1}\ (h_m)$。那么 $\{f_m\}$ 是不等式 (3.4) 的极值序列；确切地说，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\|f_m\|_{L^{\frac{2n}{n-2k}}(\mathbb{B}^n)}}{\|G_k^{\frac{1}{2}}(f_m)\|_{L^2(\mathbb{B}^n)}}=C^{-1}_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}.$$

证明。 由不等式 (3.6) 显然可知

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\|G_k^{-\frac{1}{2}}(h_m)\|_{L^2(\mathbb{B}^n)}}{\|h_m\|_{L^{\frac{2n}{n+2k}}(\mathbb{B}^n)}}\le C^{-1}_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}.$$

[1]如果 $\{f_m\}$ 满足条件 (3.8)，并令 $G_k^2(f_m)=g_m$，那么 $\|g_m\|_{L^2(\mathbb{B}^n)}=1$ 且 $\lim_{m\to\infty}\|G_k^{-\frac{1}{2}}(g_m)\|_{L^{\frac{2n}{n-2k}}(\mathbb{B}^n)}=C^{-1}_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}$。令 $h_m=\left(G_k^{-\frac{1}{2}}(g_m)\right)^{\frac{2n}{n-2k}-1}=(f_m)^{\frac{n+2k}{n-2k}}$，则

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\frac{\|G_k^{-\frac{1}{2}}(h_m)\|_{L^2(\mathbb{B}^n)}}{\|h_m\|_{L^{\frac{2n}{n+2k}}(\mathbb{B}^n)}} &\ge \lim_{m\to\infty}\frac{\sup\limits_{\|w\|_{L^2}=1}\int_{\mathbb{B}^n}G_k^{-\frac{1}{2}}(h_m)\,w dV}{\|h_m\|_{L^{\frac{2n}{n+2k}}(\mathbb{B}^n)}}\\
&\ge \lim_{m\to\infty}\frac{\int_{\mathbb{B}^n}G_k^{-\frac{1}{2}}(h_m)\,g_m dV}{\|h_m\|_{L^{\frac{2n}{n+2k}}(\mathbb{B}^n)}}\\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{\int_{\mathbb{B}^n}h_m G_k^{-\frac{1}{2}}(g_m)\,dV}{\|h_m\|_{L^{\frac{2n}{n+2k}}(\mathbb{B}^n)}}\\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{\|h_m\|_{L^{\frac{2n}{n+2k}}(\mathbb{B}^n)}\|G_k^{-\frac{1}{2}}(g_m)\|_{L^{\frac{2n}{n-2k}}(\mathbb{B}^n)}}{\|h_m\|_{L^{\frac{2n}{n+2k}}(\mathbb{B}^n)}}\\
&= C^{-1}_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

另一方面，如果 $\{h_m\}$ 满足条件 (3.9) 并令 $g_m = G_k^{-\frac{1}{2}}(h_m)$，那么

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \frac{\left\|G_k^{-\frac{1}{2}}(g_m)\right\|_{L^{\frac{2n}{n-2k}}(\mathbb{B}^n)}}{\|g_m\|_{L^2(\mathbb{B}^n)}} &\geq \lim_{m\to\infty} \frac{\sup\limits_{\|w\|_{L^{\frac{2n}{n+2k}}}=1} \int_{\mathbb{B}^n} G_k^{-\frac{1}{2}}(g_m)\, w dV}{\|g_m\|_{L^2(\mathbb{B}^n)}} \\
&\geq \lim_{m\to\infty} \frac{\int_{\mathbb{B}^n} G_k^{-\frac{1}{2}}(g_m)\, h_m dV}{\|g_m\|_{L^2(\mathbb{B}^n)}} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{\int_{\mathbb{B}^n} g_m G_k^{-\frac{1}{2}}(h_m)\, dV}{\|g_m\|_{L^2(\mathbb{B}^n)}} \\
&= \lim_{m\to\infty} \|g_m\|_{L^2(\mathbb{B}^n)} \\
&= \lim_{m\to\infty} \|G_k^{-\frac{1}{2}}(h_m)\|_{L^2(\mathbb{B}^n)} \\
&= C^{-1}_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

因此，$\{g_m\}$ 是不等式 (3.5) 的极值序列。令 $f_m = G_k^{-\frac{1}{2}}(g_m) = G_k^{-1}(h_m)$，则 $\{f_m\}$ 是不等式 (3.4) 的极值序列。□

引理 3.4。设 $G_k^{-1}(x,y)$ 是双曲球 $\mathbb{B}^n$ 上算子 G_k^{-1} 的核函数。那么，$G_k^{-1}(x,y)$ 是关于测地距离 $\rho(T_x(y))$的正的径向严格递减函数。

证明。根据多项式分解定理，我们可以写成

$$G_k(f) = \left(P_k - \prod_{i=1}^{k} \frac{(2i-1)^2}{4}\right)(f) = (P_1-\lambda_1)(P_1-\lambda_2)\cdots(P_1-\lambda_k)(f),$$

其中 $\lambda_1, \cdots\lambda_k$ 是多项式方程的根

$$x(x+2)\cdots(x+k(k-1)) - \prod_{i=1}^{k} \frac{(2i-1)^2}{4} = 0.$$

如果 λ_j 是实数，那么 $\lambda_j \leq \frac{1}{4}$，否则 $\lambda_j(\lambda_j+2)\cdots(\lambda_j+k(k-1)) > \prod_{i=1}^{k}(2i-1)_4^2$。对于那些复数 λ_j，我们可以得到 $Re\lambda_j \leq \frac{1}{4}$，否则

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4} =&\lambda_j(\lambda_j+2)\cdots(\lambda_j+k(k-1))\\ =&|\lambda_j(\lambda_j+2)\cdots(\lambda_j+k(k-1))|\\ =&|\lambda_j||(\lambda_j+2)|\cdots|(\lambda_j+k(k-1))|\\ \geq&Re\lambda_j(Re\lambda_j+2)\cdots(Re\lambda_j+k(k-1))\\ >&\prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4},\end{aligned} \tag{3.12}$$

因此这导致了矛盾。设 $-\frac{n^2-2n}{4}-\lambda_j=\tilde{\lambda_j}$，则 $(P_1-\lambda_j)^{-1}=\left(\tilde{\lambda_j}-\Delta_{\mathbb{H}^n}\right)^{-1}$。根据 Lu 和 Yang 在 [25, 26], 中的工作，我们知道实值 $\lambda_j \leq \frac{1}{4}$ 的核函数 $\left(\tilde{\lambda_j}-\Delta_{\mathbb{H}^n}\right)^{-1}$ 的显式公式如下：

$$\left(\tilde{\lambda_j}-\Delta_{\mathbb{H}^n}\right)^{-1}=\frac{A_n}{(\sinh\rho)^{n-2}}\int_0^{\pi}(\cosh\rho+\cos t)^{\frac{n-4}{2}-\theta_n\left(\tilde{\lambda_j}\right)}(\sin t)^{2\theta_n\left(\tilde{\lambda_j}\right)+1}dt,\quad n\geq 3$$

其中

$$\theta_n\left(\tilde{\lambda_j}\right)=\sqrt{\tilde{\lambda_j}+\frac{(n-1)^2}{4}}-\frac{1}{2},$$

$$A_n=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\theta_n\left(\tilde{\lambda_j}\right)\right)}{2^{\theta_n\left(\tilde{\lambda_j}\right)+1}\Gamma\left(\theta_n\left(\tilde{\lambda_j}\right)+1\right)}.$$

Then

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\rho}\left(\tilde{\lambda_j}-\Delta_{\mathbb{H}^n}\right)^{-1}\\ &=\frac{A_n}{\sinh^{n-2}\rho}\int_0^{\pi}\left((2-n)\frac{\cosh\rho}{\sinh\rho}+\left(\frac{n-4}{2}-\theta_n\left(\tilde{\lambda_j}\right)\right)\frac{\sinh\rho}{\cosh\rho+\cos t}\right)\cdot\\ &\quad(\cosh\rho+\cos t)^{\frac{n-4}{2}-\theta_n\left(\tilde{\lambda_j}\right)}(\sin t)^{2\theta_n\left(\tilde{\lambda_j}\right)+1}dt.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Let

$$\begin{aligned} f(\rho) =& (2-n)\frac{\cosh\rho}{\sinh\rho} + \left(\frac{n-4}{2} - \theta_n\left(\tilde{\lambda_j}\right)\right)\frac{\sinh\rho}{\cosh\rho+\cos t} \\ \leq& (2-n)\frac{\cosh\rho}{\sinh\rho} + \left(\frac{n-3}{2}\right)\frac{\sinh\rho}{\cosh\rho-1} \\ =& (2-n)\frac{2\cosh^2\frac{\rho}{2}-1}{2\cosh\frac{\rho}{2}\sinh\frac{\rho}{2}} + \frac{n-3}{2}\frac{2\cosh\frac{\rho}{2}\sinh\frac{\rho}{2}}{2\sinh^2\frac{\rho}{2}} \\ =& \frac{1-n}{2}\frac{\cosh\frac{\rho}{2}}{\sinh\frac{\rho}{2}} + (n-2)\frac{1}{2\cosh\frac{\rho}{2}\sinh\frac{\rho}{2}} \\ =& \frac{1}{\sinh\frac{\rho}{2}}\left(\frac{1-n}{2}\cosh\frac{\rho}{2} + (n-2)\frac{1}{2\cosh\frac{\rho}{2}}\right) \\ \leq& \frac{1}{\sinh\frac{\rho}{2}}\left(\frac{1-n}{2} + \frac{n-2}{2}\right) \\ <& 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

因此，对于实值的 $\lambda_j \leq \frac{1}{4}$，$(P_1-\lambda_j)^{-1}(x,y)$ 关于 $\rho(T_x(y))$ 严格递减。根据 [19], 中 - 关于复值 λ_j 的情形的引理6.2，我们知道 $(P_1-\lambda_j)^{-1} * \left(P_1-\lambda_j\right)^{-1}$ 是正的径向递减函数，其中 λ_j 是 λ_j 的共轭。在 [19], 中，作者还证明，对于任意正函数 $H_1(x,y)$ $H_2(x,y) : (\mathbb{B}^n \times \mathbb{B}^n) \to \mathbb{R}$，若它们都关于 $\rho(x,y)$ 递减，则 $L(x,y) = \int_{\mathbb{B}^n} H_1(x,z)\ H_2(z,y)\ dV_Z$ 也关于 $\rho(x,y)$ 递减。由于

$$G_k^{-1}(x,y) = (P_1-\lambda_k)^{-1} * (P_1-\lambda_{k-1})^{-1} \cdots * (P_1-\lambda_1)^{-1},$$

G_k^{-1} 的核函数为正，并且关于 $\rho(x,\ y)$ 严格递减。 □

3.2. **极小化序列的紧性**。

命题3.5。 若 $\{f_m\}$ 是极小化问题 (3.1) 的径向递减极小化序列，则 $\{f_m\}$ 具有紧性，即对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个 $0 < R_\epsilon < 1$，使得

$$\int_{B^n(0,R_\epsilon)} |f_m|^{\frac{2n}{n-2k}} dV \geq 1-\epsilon \quad \text{for all } m \in \mathbb{N}.$$

在证明命题3.5之前，我们需要以下关于双曲空间中径向递减序列的第一个 Lions 浓缩-紧性引理。按照引理1.1中 [21], 的证明思路，我们可以得到引理3.6。我们仅对该引理作出说明，证明从略。

引理3.6。 设 $\{|h_m|^{\frac{2n}{n+2k}}\}$ 是一个非负且径向递减的序列，满足：

$$\int_{\mathbb{B}^n} |h_m|^{\frac{2n}{n+2k}} dV = 1.$$

那么存在一个仍记为 $\{|h_m|^{\frac{2n}{n+2k}}\}$ 的子序列，使得下列条件之一成立：

(a)（紧性）对于任意 $\epsilon>0$，存在 $R_\epsilon>0$，使得

$$\int_{B^n(0,R_\epsilon)}|h_m|^{\frac{2n}{n+2k}}dV\geq 1-\epsilon \ \text{ for all } m;$$

(b)（消失）对于所有 $R>0$，有：

$$\lim_{m\to\infty}\left(\int_{B^n(0,R)}|h_m|^{\frac{2n}{n+2k}}dV\right)=0;$$

(c)（二分性）存在一个 $\lambda\in(0,1)$，使得对于所有 $\epsilon>0$，存在一个接近于 *1* 的 R，以及一个满足 $R_m\to 1$（当 $m\to\infty$ 时）的序列 $\{R_m\}$，使得

$$h_m^1=h_m\chi_{B^n(0,R)},\quad h_m^2=h_m\chi_{\mathbb{B}^n\setminus B^n(0,R_m)},$$

$$\limsup_{m\to\infty}\left(|\lambda-\int_{\mathbb{B}^n}|h_m^1|^{\frac{2n}{n+2k}}dV|+|(1-\lambda)-\int_{\mathbb{B}^n}|h_m^2|^{\frac{2n}{n+2k}}dV|\right)\leq\epsilon.$$

为了排除 $|h_m|^{\frac{2n}{n+2k}}$ 的消失现象，我们证明一个径向引理。

引理3.7。设 $\{f_m\}$ 是双曲空间上临界 *Poincar´e*-索伯列夫不等式的径向递减极小化序列。那么存在常数 $D_{n,k,p}>0$，使得 $f_m(R)\leq D_{n,k,p}(1-R)^{\frac{n-1}{p}}$，对任意 $\frac{1}{2}\leq R<1$ 和 $2<p<\frac{2n}{n-2k}$ 均成立。

证明。回忆一下，$\{f_m\}$ 满足

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\int_{\mathbb{B}^n}P_k(f_m)f_mdV-\prod_{i=1}^k\frac{(2i-1)^2}{4}\int_{\mathbb{B}^n}|f_m|^2dV\right)=C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}$$

and

$$\int_{\mathbb{B}^n}|f_m|^{\frac{2n}{n-2k}}dV=1.$$

由高阶次临界 Poincaré-索伯列夫不等式可得，即

$$\left(\int_{\mathbb{B}^n}P_k(f_m)f_mdV-\prod_{i=1}^k\frac{(2i-1)^2}{4}\int_{\mathbb{B}^n}|f_m|^2dV\right)\geq C_{n,k,p}\left(\int_{\mathbb{B}^n}|f_m|^pdV\right)^{\frac{2}{p}}$$

对于任意 $2<p<\frac{2n}{n-2k}$，我们得到 f_m 在 $L^p(\mathbb{B}^n)$ 中关于 $2<p<\frac{2n}{n-2k}$ 有界。由 f_m 的径向单调性，对于 $0<R<1$，我们有

$$f_m^p(R)\int_{B^n(0,R)}\left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^n dx\leq\int_{B^n(0,1)}f_m^p(x)\left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^n dx\lesssim 1.$$

于是我们有 $f_m^p(R)\ w_{n-1}\int_0^R\left(\frac{2}{1-s^2}\right)^n s^{n-1}ds\lesssim 1$。根据洛必达法则，不难验证，当 R 趋近于 **1** 时，$\int_0^R\left(\frac{2}{1-s^2}\right)^n s^{n-1}ds$ 等价于 $\frac{1}{(1-R)^{n-1}}$。因此存在 $D_{n,k,p}>0$，使得当 $\frac{1}{2}\leq R<1$ 时，$f_m^p(R)\left(\frac{1}{1-R}\right)^{n-1}\leq D_{n,k,p}^p$，也就是说，$f_m(R)\leq D_{n,k,p}(1-R)^{\frac{n-1}{p}}$ 对于 $\frac{1}{2}\leq R<1$ 成立。□

现在我们转而证明命题3.5。

命题*3.5*的证明。 $\{f_m\}$ 是双曲空间上临界庞加莱-索伯列夫不等式的径向递减极小化序列。根据引理 3.3，我们知道 $h_m = (f_m)^{\frac{n+2k}{n-2k}}$ 是双曲空间上 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式 (3.7) 的极大化序列。需要注意的是

$$|h_m|^{\frac{2n}{n+2k}} = |f_m|^{\frac{2n}{n-2k}}.$$

证明极大化序列 $|h_m|^{\frac{2n}{n+2k}}$ 的紧性后，我们可以推出双曲空间上临界庞加莱-索伯列夫不等式的极小化序列 $|f_m|^{\frac{2n}{n-2k}}$ 的紧性。为此，我们需要排除双曲空间上 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式 (3.7) 的极大化序列 $|h_m|^{\frac{2n}{n+2k}}$ 的消失现象和二分现象。

我们首先排除消失现象。由引理 3.3 和引理 3.7 可得

$$h_m(R) \leq \left(D_{n,k,p}(1-R)^{\frac{n-1}{p}}\right)^{\frac{n+2k}{n-2k}} \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq R < 1, \quad 2 < p < \frac{2n}{n-2k}.$$

假设 $\{h_m\}$ 出现消失现象，即

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{B^n(0,R)} |h_m|^{\frac{2n}{n+2k}} dV = 0 \quad \text{for all } 0 < R < 1,$$

由此可得

$$\lim_{R\to 1} \lim_{m\to+\infty} \int_{B^n(0,R)} |h_m|^{\frac{2n}{n+2k}} \left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^n dx = 0. \tag{3.15}$$

不难验证，对于 $2 < p < \frac{2n}{n-2k}$，

$$\lim_{R\to 1} \int_{B^n(0,1)\setminus B^n(0,R)} |(1-|x|)^{\frac{n-1}{p}}|^{\frac{2n}{n-2k}} \left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^n dx = 0,$$

这意味着

$$\lim_{R\to 1} \lim_{m\to+\infty} \int_{B^n(0,1)\setminus B^n(0,R)} |h_m|^{\frac{2n}{n+2k}} \left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^n dx = 0.$$

结合此结论与 (3.15)，我们得出

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{\mathbb{B}^n} |h_m|^{\frac{2n}{n+2k}} dV = 0,$$

这与 $\int_{\mathbb{B}^n} |h_m|^{\frac{2n}{n+2k}} dV = 1$ 矛盾。

We c继续排除二分现象。若情形（c）发生，我们推导出

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{B}^n} |h_m^1|^{\frac{2n}{n+2k}} dV = \lambda, \quad \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{B}^n} |h_m^2|^{\frac{2n}{n+2k}} dV = 1-\lambda.$$

设 $h_m^3 = f_m \chi_{B^n(0,R_m)\setminus B^n(0,R)}$，则

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{B}^n} |h_m^3|^{\frac{2n}{n+2k}} dV = 0.$$

现在我们声称

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n} h_m(x)\, G_k^{-1}(x,y)\, h_m(y)\, dV_x dV_y \\
&= \lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n} h_m^1(x)\, G_k^{-1}(x,y)\, h_m^1(y)\, dV_x dV_y + \lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n} h_m^2(x)\, G_k^{-1}(x,y)\, h_m^2(y)\, dV_x dV_y.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

事实上，我们首先有

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n} h_m(x)\, G_k^{-1}(x,y)\, h_m(y)\, dV_x dV_y \\
&= \lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n} h_m^1(x)\, G_k^{-1}(x,y)\, h_m^1(y)\, dV_x dV_y + \lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n} h_m^2(x)\, G_k^{-1}(x,y)\, h_m^2(y)\, dV_x dV_y \\
&\quad + 2\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n} h_m^1(x)\, G_k^{-1}(x,y)\, h_m^2(y)\, dV_x dV_y \\
&\quad + 2\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n} \left(h_m^1(x) + h_m^2(x)\right) G_k^{-1}(x,y)\, h_m^3(y)\, dV_x dV_y \\
&\quad + \lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n} h_m^3(x)\, G_k^{-1}(x,y)\, h_m^3(y)\, dV_x dV_y.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n} \left(h_m^1(x) + h_m^2(x)\right) G_k^{-1}(x,y)\, h_m^3(y)\, dV_x dV_y \\
&\lesssim \lim_{m\to+\infty}\left(\int_{\mathbb{B}^n} |h_m^3|^{\frac{2n}{n+2k}} dV\right)^{\frac{n+2k}{2n}} \left(\int_{\mathbb{B}^n} |h_m^1 + h_m^2|^{\frac{2n}{n+2k}} dV\right)^{\frac{n+2k}{2n}} = 0
\end{aligned}$$

and

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n} h_m^3(x)\, G_k^{-1}(x,y)\, h_m^3(y)\, dV_x dV_y \lesssim \lim_{m\to+\infty}\left(\int_{\mathbb{B}^n} |h_m^3|^{\frac{2n}{n+2k}} dV\right)^{\frac{n+2k}{n}} = 0,$$

为了证明等式 (3.16)，我们只需证明

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n} h_m^1(x)\, G_k^{-1}(x,y)\, h_m^2(y) dV_x dV_y = 0.$$

根据陆-杨在 [25],中的研究，我们知道

$$G_k^{-1}(x,y)) \lesssim \left(\frac{1}{\sinh(\rho(x,y))}\right)^{n-2k}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n} h_m^1(x)\, G_k^{-1}(x,y)\, h_m^2(y) dV_x dV_y \\
&\lesssim \lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n} h_m^1(x)\left(\frac{1}{\sinh(\rho(x,y))}\right)^{n-2k} h_m^2(y)\, dV_x dV_y \\
&= \lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n} h_m^1(x)\left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}} |x-y|^{-(n-2k)} h_m^2(y)\left(\frac{2}{1-|y|^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}} dxdy \\
&= \lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n} \widetilde{h_m^1}(x)|x-y|^{-(n-2k)}\widetilde{h_m^2}(y) dxdy
\end{aligned} \tag{3.18}$$

其中

$$h_m^1(x)\left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}} = \widetilde{h_m^1}(x),\quad h_m^2(y)\left(\frac{2}{1-|y|^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}} = \widetilde{h_m^2}(y).$$

当 $x\in B^n(0,\ R)$ 且 $y\in B^n\setminus B^n(0,\ R_m)$ 时，存在 $\delta>0$ 使得

$$|x-y|^{-(n-2k)} \lesssim |x-y|^{-(n-2k-\delta)}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n} \widetilde{h_m^1}(x)|x-y|^{-(n-2k)}\widetilde{h_m^2}(y) dxdy \\
&\lesssim \lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n} \widetilde{h_m^1}(x)|x-y|^{-(n-2k-\delta)}\widetilde{h_m^2}(y) dxdy \\
&\lesssim \left(\int_{\mathbb{B}^n} |\widetilde{h_m^1}|^{\frac{2n}{n+2k}} dx\right)^{\frac{n+2k}{2n}} \left(\int_{\mathbb{B}^n} |\widetilde{h_m^2}|^{p_\delta} dx\right)^{\frac{1}{p_\delta}},
\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中，我们对 $\mathbb{R}^n$ 使用了 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式

$$\frac{n+2k}{2n}+\frac{1}{p_\delta}+\frac{n-2k-\delta}{n}=2$$

且 $p_\delta < \frac{2n}{n+2k}$。经过仔细计算可得

$$\int_{\mathbb{B}^n} |\widetilde{h_m^1}|^{\frac{2n}{n+2k}} dx = \int_{\mathbb{B}^n} |h_m^1|^{\frac{2n}{n+2k}}\left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^n dx \le \int_{\mathbb{B}^n} |h_m|^{\frac{2n}{n+2k}} dV \le 1.$$

and

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n} |\widetilde{h_m^2}|^{p_\delta} dx &= \lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n\setminus B^n(0,R_m)} |h_m^2|^{p_\delta}\left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}p_\delta} dV \\
&= \lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n\setminus B^n(0,R_m)} |h_m^2|^{p_\delta}\left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^{n}\left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}p_\delta-n} dx \\
&\le \lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n\setminus B^n(0,R_m)} |h_m^2|^{p_\delta} dV \left(\frac{2}{1-|R_m|^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}p_\delta-n} = 0,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

其中最后一个等式成立是因为

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\frac{2}{1-|R_m|^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}p_\delta-n} = 0$$

and

$$\int_{\mathbb{B}^n\setminus B^n(0,R_m)}|h_m^2|^{p_\delta}dV\leq\int_{\mathbb{B}^n\setminus B^n(0,R_m)}|f_m|^{\frac{n+2k}{n-2k}p_\delta}dV\lesssim\left(\int_{\mathbb{B}^n}P_k\left(f_m\right)f_mdV-\prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4}\int_{\mathbb{B}^n}|f_m|^2dV\right)^{\frac{1}{2}}$$

通过不等式（1.3）。结合上述估计，我们证明

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n}h_m\left(x\right)G_k^{-1}\left(x,y\right)h_m\left(y\right)dV_xdV_y\\&=\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n}h_m^1\left(x\right)G_k^{-1}\left(x,y\right)h_m^1\left(y\right)dV_xdV_y+\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n}h_m^2\left(x\right)G_k^{-1}\left(x,y\right)h_m^2\left(y\right)dV_xdV_y.\end{aligned}$$

那么，由此可知双曲空间中的哈代-利特尔伍德-索博列夫不等式 (3.7) 给出

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n}h_m\left(x\right)G_k^{-1}\left(x,y\right)h_m\left(y\right)dV_xdV_y\\&\leq C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}^{-1}\lim_{m\to+\infty}\left(\int_{\mathbb{B}^n}|h_m^1|^{\frac{2n}{n+2k}}\right)^{\frac{n+2k}{n}}+C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}^{-1}\lim_{m\to+\infty}\left(\int_{\mathbb{B}^n}|h_m^1|^{\frac{2n}{n+2k}}\right)^{\frac{n+2k}{n}}\\&=C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}^{-1}\lambda^{\frac{n+2k}{n}}+C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}^{-1}\left(1-\lambda\right)^{\frac{n+2k}{n}}\\&<C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}^{-1},\end{aligned}\tag{3.20}$$

这与.....矛盾

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\int_{\mathbb{B}^n}h_m\left(x\right)G_k^{-1}\left(x,y\right)h_m\left(y\right)dV_xdV_y=C_{n,k,\frac{2n}{n-2k}}^{-1}.$$

因此，命题3.5的证明完成。 □

3.3. $\{f_m\}$ 强收敛到 $f_0\neq0$。

命题3.8。 若 $\{f_m\}$ 是极小化问题(3.1)的紧且径向递减的极小化序列，则 $\{f_m\}$ 强收敛于函数 $f_0\neq0$，其中 $f_0\neq0$ 属于 $H(\mathbb{B}^n)$。

在证明命题3.8之前，我们先在双曲空间 $\mathbb{B}^n$ 上建立高阶临界Poincar´é-索伯列夫不等式的Lions第二集中紧性引理。

由于$\|f_m\|_{H(\mathbb{B}^n)}$ 一致有界，我们可以设 $f_m\to f_0$ 在 $H(\mathbb{B}^n)$中弱收敛。取满足$\phi|_{B^n(0,2R)}=1$ 和 $0\leq\phi\leq1$的$\phi\in C_c^\infty(\mathbb{B}^n)$，将双曲空间上的Poincar´é-索伯列夫不等式应用于 $\mathbb{B}^n$ 到 $f_m\phi$，我们得到

$$\left(\int_{\mathbb{B}^n}P_k\left(f_m\phi\right)\left(f_m\phi\right)dV-\prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4}\int_{\mathbb{B}^n}|f_m\phi|^2dV\right)\geq C_{n,k}\left(\int_{\mathbb{B}^n}|f_m\phi|^{\frac{2n}{n-2k}}\right)^{\frac{n-2k}{n}}.$$

由于 ϕ 具有紧支集，因此我们可以推得存在 $C_{n,k,supp(\phi)}>0$ ，使得

$$\left(\int_{\mathbb{B}^n}P_k\left(f_m\phi\right)\left(f_m\phi\right)dV-\prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4}\int_{\mathbb{B}^n}|f_m\phi|^2dV\right)\geq C_{n,k,supp(\phi)}\int_{\mathbb{B}^n}|f_m\phi|^2dV.$$

于是我们有

$$\left(\int_{\mathbb{B}^n} P_k\left(f_m\phi\right)\left(f_m\phi\right)dV-\prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4}\int_{\mathbb{B}^n}|f_m\phi|^2dV\right)$$

等价于

$$\int_{\mathbb{B}^n} P_k\left(f_m\phi\right)\left(f_m\phi\right)dV.$$

这推导出 $f_m\phi$ 在高阶索伯列夫空间 $W^{k,2}\left(\mathbb{B}^n\right)$ 中有界，这意味着 f_m在 $W^{k,2}_{loc}\left(\mathbb{B}^n\right)$ 中有界。也就是说,

$$H\left(\mathbb{B}^n\right)\subset W^{k,2}_{loc}\left(\mathbb{B}^n\right).$$

$\mathbb{B}^n$ 上的紧嵌入定理推导出 $f_m\to f_0$ 在 $W^{t,2}_{loc}\left(\mathbb{B}^n\right)$ 中强收敛，$0<t<k$ 满足.....，因此 $f_m(x)\to f_0(x)\quad a.e.\ x\in\mathbb{B}^n$。

我们借鉴 [22]中的类似思路，在双曲球 $\mathbb{B}^n$上证明以下第二个集中紧性原理。

引理 3.9. 设

$$\mu_m:=|f_m|^{\frac{2n}{n-2k}}dV,\quad \nu_m:=\left(P_k\left(f_m\right)f_m-\prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4}|f_m|^2\right)dV.$$

那么， μ_m、ν_m 在测度意义下弱收敛到 $\mathbb{B}^n$ 上的某些有界非负测度 μ、ν。我们还假设 $\{f_m\}$ 在 $H\left(\mathbb{B}^n\right)$ 中弱收敛到 f_0，且 $\{|f_m|^{\frac{2n}{n-2k}}\}$ 是紧的。于是，存在至多可数个点 $\{x_i\}_{i\in I}\subset\mathbb{B}^n$，使得:

$$\nu\geq\left(P_k\left(f_0\right)f_0-\prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4}|f_0|^2\right)dV+\sum_{i\in I}v^i\delta_{x_i}$$

and

$$\mu=|f_0|^{\frac{2n}{n-2k}}dV+\sum_{i\in I}u^i\delta_{x_i},$$

其中 $v^i=\nu\{x_i\}$、 $u^i=\mu\{x_i\}$。此外，我们还有 $v^i\geq C_{n,\ k}\left(u^i\right)^{\frac{n-2k}{n}}$。 ——

引理 3.9 是通过应用下面的引理 3.10 得以证明的，其原始版本见 $\mathbb{R}^n$。由于关键要素在任意测度空间中都成立，我们可以按照 [22] 中引理 1.2 的相同证明过程来证明引理 3.10。因此，此处省略引理 3.10 的证明。

引理 3.10。 设 $\widetilde{\mu}$、$\widetilde{\nu}$ 是 $\mathbb{B}^n$ 上的两个有界非负测度，并满足某个常数 $C_0\geq 0$

$$\left(\int_{\mathbb{B}^n}|\varphi|^q d\widetilde{\mu}\right)^{\frac{1}{q}}\leq C_0\left(\int_{\mathbb{B}^n}|\varphi|^p d\widetilde{\nu}\right)^{\frac{1}{p}},\quad for\ any\ \varphi\in C_c^{\infty}\left(\mathbb{B}^n\right)\tag{3.21}$$

其中 $1\leq p<q\leq+\infty$。那么存在一个至多可数集 I，以及由 $\mathbb{B}^n$ 中互不相同的点组成的族 $\{x_i\}$、$[0,+\infty]$ 中的 $\{v^i\}$，使得

$$\widetilde{\mu}=\sum_{i\in I}v^i\delta_{x_i},\quad \widetilde{\nu}\geq C_0^{-p}\sum_{i\in I}\left(v^i\right)^{\frac{p}{q}}\delta_{x_i}.\tag{3.22}$$

引理 *3.9* 的证明。经过计算，对于任意 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{B}^n)$，有如下公式

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{B}^n} P_k(f_m\varphi) f_m\varphi dV - \prod_{i=1}^k \frac{(2i-1)^2}{4}\int_{\mathbb{B}^n} |f_m\varphi|^2 dV \\
&= \int_{\mathbb{B}^n} \sum_{l=1}^k c_l \left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^l (f_m\varphi)(f_m\varphi) dV - \prod_{i=1}^k \frac{(2i-1)^2}{4}\int_{\mathbb{B}^n} |f_m\varphi|^2 dV \\
&= \int_{\mathbb{B}^n} P_k(f_m) f_m\varphi^2 dV - \prod_{i=1}^k \frac{(2i-1)^2}{4}\int_{\mathbb{B}^n} |f_m\varphi|^2 dV + \int_{\mathbb{B}^n} \sum_{l=1}^k c_l \sum_{j=1}^{2l} \nabla_{\mathbb{H}}^{2l-j} f_m \nabla_{\mathbb{H}}^j \varphi (f_m\varphi) dV.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

若记 $g_m = f_m - f_0$，则 $\|g_m\|_{L^{\frac{2n}{n-2k}}}$ 和 $\|g_m\|_H$ 一致有界。令

$$\widetilde{\mu_m} := |g_m|^{\frac{2n}{n-2k}} dV, \quad \widetilde{\nu_m} := \left(P_k(g_m) g_m - \prod_{i=1}^k \frac{(2i-1)^2}{4}|g_m|^2\right) dV,$$

则存在两个有界测度 $\widetilde{\mu}$ 和 $\widetilde{\nu}$，使得 $\widetilde{\mu_m}$，$\widetilde{\nu_m}$ 按照测度意义弱收敛于 $\widetilde{\mu}$、$\widetilde{\nu}$（在 $\mathbb{B}^n$ 上）。由 Poincar´e-索伯列夫不等式、公式 (3.23) 及紧嵌入定理可得

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{B}^n} |g_m\varphi|^{\frac{2n}{n-2k}} dV\right)^{\frac{n-2k}{n}} \\
&\le C_{n,k}\int_{\mathbb{B}^n} P_k(g_m\varphi)(g_m\varphi) dV - \prod_{i=1}^k \frac{(2i-1)^2}{4}\int_{\mathbb{B}^n} |g_m\varphi|^2 dV \\
&= \int_{\mathbb{B}^n} P_k(g_m) g_m\varphi^2 dV - \prod_{i=1}^k \frac{(2i-1)^2}{4}\int_{\mathbb{B}^n} |g_m\varphi|^2 dV,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

当 $m \to \infty$ 时。

因此，对于任意 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{B}^n)$，有

$$\left(\int_{\mathbb{B}^n} |\varphi|^{\frac{2n}{n-2k}} d\widetilde{\nu}\right)^{\frac{n-2k}{2n}} \le C_0 \left(\int_{\mathbb{B}^n} |\varphi|^2 d\widetilde{\mu}\right)^{\frac{1}{2}},$$

根据 Le 引理 3.10，$\widetilde{\nu} = \sum_{i\in I} u^i \delta_{x_i}$。Br´ezis-Lieb 引理表明，对于任意 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{B}^n)$，

$$\int_{\mathbb{B}^n} |f_m\varphi|^{\frac{2n}{n-2k}} dV - \int_{\mathbb{B}^n} |g_m\varphi|^{\frac{2n}{n-2k}} dV \to \int_{\mathbb{B}^n} |f_0\varphi|^{\frac{2n}{n-2k}} dV.$$

因此，我们有

$$\mu = |f_0|^{\frac{2n}{n-2k}} + \sum_{i\in I} u^i \delta_{x_i}.$$

接下来，对于公式 (3.23)，通过分部积分，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{B}^n}\sum_{l=1}^{k}c_l\sum_{j=1}^{2l}\nabla_{\mathbb{H}}^{2l-j}f_m\nabla_{\mathbb{H}}^{j}\varphi\left(f_m\varphi\right)dV\\&=\int_{\mathbb{B}^n}\sum_{l=1}^{k}\sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=2l}c_{l,\alpha,\beta,\gamma,\delta}\nabla_{\mathbb{H}}^{\alpha}f_m\nabla_{\mathbb{H}}^{\beta}\varphi\nabla_{\mathbb{H}}^{\gamma}f_m\nabla_{\mathbb{H}}^{\delta}\varphi dV,\end{aligned}\tag{3.25}$$

其中 $0\leq\gamma\leq\alpha\leq l$, $\alpha+\gamma\leq 2l-1$。

此外,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{B}^n}\sum_{l=1}^{k}\sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=2l}c_{l,\alpha,\beta,\gamma,\delta}\nabla_{\mathbb{H}}^{\alpha}f_m\nabla_{\mathbb{H}}^{\beta}\varphi\nabla_{\mathbb{H}}^{\gamma}f_m\nabla_{\mathbb{H}}^{\delta}\varphi\\&-\sum_{l=1}^{k}\sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=2l}c_{l,\alpha,\beta,\gamma,\delta}\nabla_{\mathbb{H}}^{\alpha}f\nabla_{\mathbb{H}}^{\beta}\varphi\nabla_{\mathbb{H}}^{\gamma}f\nabla_{\mathbb{H}}^{\delta}\varphi dV\\&=\int_{\mathbb{B}^n}\sum_{l=1}^{k}\sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=2l}c_{l,\alpha,\beta,\gamma,\delta}\nabla_{\mathbb{H}}^{\alpha}f_m\nabla_{\mathbb{H}}^{\beta}\varphi\left(\nabla_{\mathbb{H}}^{\gamma}f_m-\nabla_{\mathbb{H}}^{\gamma}f\right)\nabla_{\mathbb{H}}^{\delta}\varphi\\&+\sum_{l=1}^{k}\sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=2l}c_{l,\alpha,\beta,\gamma,\delta}\left(\nabla_{\mathbb{H}}^{\alpha}f_m-\nabla_{\mathbb{H}}^{\alpha}f\right)\nabla_{\mathbb{H}}^{\beta}\varphi\nabla_{\mathbb{H}}^{\gamma}f\nabla_{\mathbb{H}}^{\delta}\varphi dV\\&=I+II.\end{aligned}\tag{3.26}$$

由于 $f_m\to f$在 W^t 中强收敛$_{loc}^{2}(\mathbb{B}^n)$，对 $t<k$和$\|f_m\|_{W^{k,}{}_{loc}^{2}}\leq\|f_m\|_H\leq C$,

$$I\leq\|\nabla_{\mathbb{H}}^{\alpha}f_m\|_{L^2_{loc}(\mathbb{B}^n)}\|\nabla_{\mathbb{H}}^{\alpha}f_m-\nabla_{\mathbb{H}}^{\alpha}f\|_{L^2_{loc}(\mathbb{B}^n)}\to 0.$$

由于 $f_m\to f$在 W^t 中弱收敛$_{loc}^{2}(\mathbb{B}^n)$，对 $t\leq k$和$\|f\|_{W^{k,}{}_{loc}^{2}}\leq\|f\|_H\leq C$，于是 $II\to 0$。将 (3.23) 中的极限传递过去，我们发现对于任意 $\varphi\in C_c^{\infty}(\mathbb{B}^n)$,

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\mathbb{B}^n}|\varphi|^{\frac{2n}{n-2k}}d\mu\right)^{\frac{n-2k}{n}}\cdot\left(C_{n,k}\right)^{\frac{n-2k}{n}}\\&\leq\int_{\mathbb{B}^n}|\varphi|^2d\nu+\int_{\mathbb{B}^n}\sum_{l=1}^{k}\sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=2l}c_{l,\alpha,\beta,\gamma,\delta}\nabla_{\mathbb{H}}^{\alpha}f\nabla_{\mathbb{H}}^{\beta}\varphi\nabla_{\mathbb{H}}^{\gamma}f\nabla_{\mathbb{H}}^{\delta}\varphi dV.\end{aligned}$$

取满足 $0\leq\varphi_\epsilon^0\leqq 1$, $\varphi_\epsilon^0=1$ 属于 $B_{\mathbb{H}}\left(0,\frac{\epsilon}{2}\right)$的 $\varphi_\epsilon^0=\varphi(\frac{x}{\epsilon})\in C_c^{\infty}(B_{\mathbb{H}}(0,\epsilon))$,-我们很容易验证 $|\nabla_{\mathbb{H}}\varphi_\epsilon^0|=|(1-|x|^2)_2\quad\underline{\nabla_{\mathbb{R}^n}\varphi_\epsilon^0}|\lesssim\epsilon^{-1}$。定义 $\varphi_\epsilon^{x_i}$为 $\varphi_\epsilon^{x_i}=\varphi_\epsilon^0(T_{x_i}(x))$，根据莫比乌斯变换 T_{x_i} 的等距性质，我们可以立即推出， $\varphi_\epsilon^{x_i}\in C_c^{\infty}(B_{\mathbb{H}}(x_i,\epsilon))$ 满足$0\leq\varphi_\epsilon^{x_i}\leq 1$, $\varphi_\epsilon^{x_i}=1$ 属于 $B_{\mathbb{H}}\left(x_i,\frac{\epsilon}{2}\right)$，且 $|\nabla_{\mathbb{H}}\varphi_\epsilon^{x_i}|\lesssim\epsilon^{-1}$。取足够小的 $\epsilon>0$ 和 $i\in I$，令 $\varphi_\epsilon^{x_i}$，应用上述结论，则

$$\left(\int_{\mathbb{B}^n}|\varphi_\epsilon^{x_i}|^{\frac{2n}{n-2k}}d\mu\right)^{\frac{n-2k}{n}}\cdot C_{n,k}$$
$$\leq\int_{\mathbb{B}^n}|\varphi_\epsilon^{x_i}|^2d\nu$$
$$+\int_{B_{\mathbb{H}}(x_i,\epsilon)}\sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=2l}c_{l,\alpha,\beta,\gamma,\delta}\epsilon^{-(\beta+\delta)}\nabla_{\mathbb{H}}^{\alpha}f\left(\nabla_{\mathbb{H}}^{\beta}\varphi\right)\left(\frac{T_{x_i}(x)}{\epsilon}\right)\nabla_{\mathbb{H}}^{\gamma}f\left(\nabla_{\mathbb{H}}^{\delta}\varphi\right)\left(\frac{T_{x_i}(x)}{\epsilon}\right)dV.$$

回顾一下，我们在双曲空间 $\mathbb{B}^n$上有如下索伯列夫不等式:

$$\left(\int_{\mathbb{B}^n}|\nabla_{\mathbb{H}}^{j}f|^{q_j}dV\right)^{\frac{1}{q_j}}\leq\left(\int_{\mathbb{B}^n}|\nabla_{\mathbb{H}}^{l}f|^2dV\right)^{\frac{1}{2}},\tag{3.27}$$

其中 $j=0$，1，2，$\cdots$，$l-1$，$q_j=\frac{2n}{n-2(l-j)}$。利用 H¨older 不等式和不等式 (3.27)，我们得到如下估计:

$$\int_{B_{\mathbb{H}}(x_i,\epsilon)}\sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=2l}c_{l,\alpha,\beta,\gamma,\delta}\epsilon^{-(\beta+\delta)}\nabla_{\mathbb{H}}^{\alpha}f\left(\nabla_{\mathbb{H}}^{\beta}\varphi\right)\left(\frac{T_{x_i}(x)}{\epsilon}\right)\nabla_{\mathbb{H}}^{\gamma}f\left(\nabla_{\mathbb{H}}^{\delta}\varphi\right)\left(\frac{T_{x_i}(x)}{\epsilon}\right)dV$$
$$\leq\sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=2l}c_{l,\alpha,\beta,\gamma,\delta}\epsilon^{-(\beta+\delta)}\|\nabla_{\mathbb{H}}^{\alpha}f\|_{L^{\frac{2n}{n-2(l-\alpha)}}_{B_{\mathbb{H}}(x_i,\epsilon)}}\|\left(\nabla_{\mathbb{H}}^{\beta}\varphi\right)\|_{L^{\frac{n}{\beta}}_{B_{\mathbb{H}}(x_i,\epsilon)}}\|\nabla_{\mathbb{H}}^{\gamma}f\|_{L^{\frac{2n}{n-2(l-\gamma)}}_{B_{\mathbb{H}}(x_i,\epsilon)}}\|\left(\nabla_{\mathbb{H}}^{\delta}\varphi\right)\|_{L^{\frac{n}{\gamma}}_{B_{\mathbb{H}}(x_i,\epsilon)}}$$
$$\leq\sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=2l}c_{l,\alpha,\beta,\gamma,\delta}\|\nabla_{\mathbb{H}}^{\alpha}f\|_{L^{\frac{2n}{n-2(l-\alpha)}}_{B_{\mathbb{H}}(x_i,\epsilon)}}\|\nabla_{\mathbb{H}}^{\gamma}f\|_{L^{\frac{2n}{n-2(l-\gamma)}}_{B_{\mathbb{H}}(x_i,\epsilon)}}.$$

因此，我们有

$$\left(\int_{B_{\mathbb{H}}(x_i,\epsilon)}|\varphi|^{\frac{2n}{n-2k}}d\mu\right)^{\frac{n-2k}{n}}\cdot C_{n,k}$$
$$\leq\int_{B_{\mathbb{H}}(x_i,\epsilon)}|\varphi|^2d\nu+\sum_{l=1}^{k}\sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=2l}c_{l,\alpha,\beta,\gamma,\delta}\|\nabla_{\mathbb{H}}^{\alpha}f\|_{L^{\frac{2n}{n-2(l-\alpha)}}_{B_{\mathbb{H}}(x_i,\epsilon)}}\|\nabla_{\mathbb{H}}^{\gamma}f\|_{L^{\frac{2n}{n-2(l-\gamma)}}_{B_{\mathbb{H}}(x_i,\epsilon)}}.$$

令 $\epsilon\to0$，我们可以得到 $v^i=\nu\{x_i\}\geq C_{n,\ k}\left(u^i\right)^{\frac{n-2k}{n}}>0$，$\nu\geq C_{n,\ k}\left(u^i\right)^{\frac{n-2k}{n}}\delta_{x_i}$ 对任意 $i\in I$成立。因此，

$$\nu\geq\sum v^i\delta_{x_i}.$$

由测度意义下的下半连续性，我们有 $\nu\geq\left(P_k^i(f_0)\ f_0-\prod_{i=1}^{k}{}^{(2i-1)}{}_4{}^2|f_0|^2\right)dV$。于是，我们有

$$\nu\geq\left(P_k\left(f_0\right)f_0-\prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4}|f_0|^2\right)dV+\sum_{i\in I}v^i\delta_{x_i}.$$

我们完成引理 3.9 的证明。 □

命题*3.8*的证明。 根据测度的弱下半连续性，我们有$\mu\left(\mathbb{B}^n\right)\leq\lim_{m\to+\infty}\mu_m\left(\mathbb{B}^n\right)=1$。由 μ_m的紧性可知，对于任意 $\epsilon>0$，存在

R_ϵ 使得

$$\int_{\mathbb{B}^n(0,R_\epsilon)} d\mu_m \geq 1-\epsilon.$$

取 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{B}^n)$，其中 $\psi|_{B^n(0,\ R_\epsilon)}=1$ 且 $0\leq\psi\leq 1$，可得

$$\mu\left(\mathbb{B}^n\right) \geq \int_{\mathbb{B}^n} \psi d\mu \geq \lim_{m\to+\infty} \int_{\mathbb{B}^n(0,R_\epsilon)} d\mu_m \geq 1-\epsilon.$$

设 $\epsilon\to 0$，可得 $\mu(\mathbb{B}^n)=1$。

现在证明 $f_0=0$ 不可能。根据公式 (3.23)，对于 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{B}^n)$，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{B}^n} P_k\left(f_m\varphi\right) f_m\varphi dV \\
&= \lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{B}^n} P_k\left(f_m\right) f_m\varphi^2 dV + \lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\sum_{l=1}^{k} c_l \sum_{j=1}^{2l} \nabla_{\mathbb{H}}^{2l-j} f_m \nabla_{\mathbb{H}}^{j}\varphi\left(f_m\varphi\right) dV
\end{aligned}$$

在 (3.25) 和 (3.26) 中，我们已经证明

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{B}^n}\sum_{l=1}^{k} c_l \sum_{j=1}^{2l} \nabla_{\mathbb{H}}^{2l-j} f_m \nabla_{\mathbb{H}}^{j}\varphi\left(f_m\varphi\right) dV = \int_{\mathbb{B}^n}\sum_{l=1}^{k} c_l \sum_{j=1}^{2l} \nabla_{\mathbb{H}}^{2l-j} f_0 \nabla_{\mathbb{H}}^{j}\varphi\left(f_0\varphi\right) dV.$$

若 $f_0=0$，则有

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{B}^n} P_k\left(f_m\varphi\right) f_m\varphi dV = \lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{B}^n} P_k\left(f_m\right) f_m\varphi^2 dV. \tag{3.28}$$

我们可以进一步证明，当 $f_0=0$ 时，$\nu(\mathbb{B}^n)=C_{n,k}$。对任意 $\epsilon>0$，选取 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{B}^n)$，使得 $\varphi|_{B^n(0,R_\epsilon)}=1$，则

$$\begin{aligned}
\nu\left(\mathbb{B}^n\right) &\geq \int_{\mathbb{B}^n}\varphi^2 d\nu \\
&= \lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{B}^n} P_k\left(f_m\right) f_m\varphi^2 dV - \prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4}\int_{\mathbb{B}^n}\left|f_m\varphi\right|^2 dV \\
&= \lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{B}^n} P_k\left(f_m\varphi\right) f_m\varphi dV - \prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4}\int_{\mathbb{B}^n}\left|f_m\varphi\right|^2 dV \\
&\geq C_{n,k}\left(\int_{\mathbb{B}^n}\left|f_m\varphi\right|^{\frac{2n}{n-2k}} dV\right)^{\frac{n-2k}{n}} \\
&\geq C_{n,k}\left(\int_{\mathbb{B}^n(0,R_\epsilon)}\left|f_m\right|^{\frac{2n}{n-2k}} dV\right)^{\frac{n-2k}{n}} \\
&\geq C_{n,k}\left(1-\epsilon\right)^{\frac{n-2k}{n}}.
\end{aligned}$$

结合测度的弱下半连续性，$\nu(\mathbb{B}^n)=C_{n,\ k}$。

若 $f_0 = 0$，根据第二浓缩紧性原理，$\mu(\mathbb{B}^n) = 1$ 且$\nu(\mathbb{B}^n) = C_{n,\ k}$，我们可以推导出

$$\begin{aligned} 1 = \mu\left(\mathbb{B}^n\right) &= \sum_{j=1}^{l} \mu_i \\ &\leq C_{n,k}^{-\frac{n}{n-2k}} \sum_{j=1}^{l} \left(\nu_i\right)^{\frac{n}{n-2k}} \\ &\leq C_{n,k}^{-\frac{n}{n-2k}} \left(\sum_{j=1}^{l} \nu_i\right)^{\frac{n}{n-2k}} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{3.29}$$

这推得 $\mu(\mathbb{B}^n) = \delta_{x_0}$ 和 $\nu\left(\mathbb{B}^n\right) = C_{n,\ k}\delta_{x_0\circ}$ 取满足 $\psi|_{B^n(x_0,R)} = 1$, $supp(\psi) \subseteq B^n\left(x_0, 2R\right)$ 且满足 $0 \leq \psi \leq 1$ 的 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{B}^n)$，由 μ_m 弱收敛到 μ 且 μ_m 弱收敛到 $C_{n,\ k}\delta_{x_0}$ 可得

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{\mathbb{B}^n} |f_m\psi|^{\frac{2n}{n-2k}} dV = \lim_{m\to+\infty} \int_{\mathbb{B}^n} |\psi|^{\frac{2n}{n-2k}} d\mu_m = \int_{\mathbb{B}^n} |\psi|^{\frac{2n}{n-2k}} d\mu = 1$$

and

$$\lim_{m\to+\infty} \left(\int_{\mathbb{B}^n} P_k\left(f_m\right) f_m |\psi|^2 - \prod_{i=1}^{k} \frac{(2i-1)^2}{4} |f_m\psi|^2 dV \right) = C_{n,k}.$$

结合上述估计，我们得到

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{\left(\int_{\mathbb{B}^n} P_k\left(f_m\psi\right)\left(f_m\psi\right) dV - \prod_{i=1}^{k} \frac{(2i-1)^2}{4} \int_{\mathbb{B}^n} |f_m\psi|^2 dV \right)}{\left(\int_{\mathbb{B}^n} |f_m\psi|^{\frac{2n}{n-2k}} dV \right)^{\frac{n-2k}{n}}} = C_{n,k}.$$

另一方面，由于 ψ 具有紧支集，$\int_{\mathbb{B}^n} |f_m\psi|^{\frac{2n}{n-2k}} dV \leq 1$, ψf_m 几乎处处收敛到零，因此由维塔利收敛定理可得

$$\lim_{m\to+\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{(2i-1)^2}{4} \int_{\mathbb{B}^n} |f_m\psi|^2 dV = 0,$$

这意味着

$$\lim_{m\to+\infty} \left(\int_{\mathbb{B}^n} P_k\left(f_m\psi\right)\left(f_m\psi\right) dV - \prod_{i=1}^{k} \frac{(2i-1)^2}{4} \int_{\mathbb{B}^n} |f_m\psi|^2 dV \right) = \lim_{m\to+\infty} \int_{\mathbb{B}^n} P_k\left(f_m\psi\right)\left(f_m\psi\right) dV.$$

回顾双曲空间 $\mathbb{B}^n$ 上的经典索伯列夫不等式：对任意 $u \in C_c^\infty(\mathbb{B}^n)$，成立

$$\int_{\mathbb{B}^n} P_k\left(u\right) u dV \geq S_{n,k} \left(\int_{\mathbb{B}^n} |u|^{\frac{2n}{n-2k}} \right)^{\frac{n-2k}{n}}.$$

将索伯列夫不等式应用于 ψf_m，我们得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to+\infty}\frac{\int_{\mathbb{B}^n}P_k\left(f_m\psi\right)\left(f_m\psi\right)dV-\prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4}\int_{\mathbb{B}^n}|f_m\psi|^2dV}{\left(\int_{\mathbb{B}^n}|f_m\psi|^{\frac{2n}{n-2k}}dV\right)^{\frac{n-2k}{n}}}\\
=&\lim_{m\to+\infty}\frac{\int_{\mathbb{B}^n}P_k\left(f_m\psi\right)\left(f_m\psi\right)dV}{\left(\int_{\mathbb{B}^n}|f_m\psi|^{\frac{2n}{n-2k}}dV\right)^{\frac{n-2k}{n}}}\\
\geq&S_{n,k},
\end{aligned}\tag{3.30}$$

这与 $C_{n,k}$ 严格小于 Sobolev常数 $S_{n,k}$相矛盾。因此， $f_0\neq 0$。

接下来，根据希尔伯特空间 $H(\mathbb{B}^n)$ 中的 Poincar´e-Sobolev 不等式和 Br´ezis-Lieb 引理，我们有

$$\begin{aligned}
1=&\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}|f_m|^{\frac{2n}{n-2k}}dV\\
=&\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n}|f_m-f_0|^{\frac{2n}{n-2k}}dV+\int_{\mathbb{B}^n}|f_0|^{\frac{2n}{n-2k}}dV\\
\leq&\lim_{m\to+\infty}\left(\frac{1}{C_{n,k}}\right)^{\frac{n}{n-2k}}\left(\|f_m-f_0\|_H^2\right)^{\frac{n}{n-2k}}+\left(\frac{1}{C_{n,k}}\right)^{\frac{n}{n-2k}}\left(\|f_0\|_H^2\right)^{\frac{n}{n-2k}}\\
\leq&\lim_{m\to+\infty}\left(\frac{1}{C_{n,k}}\right)^{\frac{n}{n-2k}}\left(\|f_m-f_0\|_H^2+\|f_0\|_H^2\right)^{\frac{n}{n-2k}}\\
\leq&\lim_{m\to+\infty}\left(\frac{1}{C_{n,k}}\right)^{\frac{n}{n-2k}}\left(\|f_m\|_H^2\right)^{\frac{n}{n-2k}}\\
=&1.
\end{aligned}\tag{3.31}$$

因此，上述所有不等式都必须取等号。结合 $f_0\neq 0$ 可得，f_m 在 $H(\mathbb{B}^n)$ 中强收敛于 f_0。这证明了 f_0 是双曲空间 $\mathbb{B}^n$上 Poincar´e-Sobolev 不等式的极值函数。

由此完成定理1.1的证明。 □

4. The proof of Theorem 1.3

我们现在开始证明双曲空间 $\mathbb{B}^n$上的高阶次临界庞加莱´-索伯列夫不等式:

$$\int_{\mathbb{B}^n}P_k\left(f\right)fdV-\prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4}\int_{\mathbb{B}^n}|f|^2dV\geq C_{n,k,q}\left(\int_{\mathbb{B}^n}|f|^qdV\right)^{\frac{2}{q}}$$

对 $2<q<\frac{2n}{n-2k}$ 存在极值函数。设 $\{f_m\}$ 是双曲空间 $\mathbb{B}^n$ 上次临界 Poincar´e-索伯列夫不等式的极小化序列，即

$$\int_{\mathbb{B}^n}|f_m|^qdV=1,\quad\lim_{m\to+\infty}\left(\int_{\mathbb{B}^n}P_k\left(f_m\right)fdV-\prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2}{4}\int_{\mathbb{B}^n}|f_m|^2dV\right)=C_{n,k,q}.$$

类似于双曲空间 $\mathbb{B}^n$上 Poincar´e-索伯列夫不等式存在性的证明（定理1.1），根据格林表示公式和里斯重排不等式，我们可以假设极小化序列 $\{f_m\}$ 关于原点径向递减。为了证明极值函数的存在性，我们只需证明 $f_m \to f_0$ 在 $L^q(\mathbb{B}^n)$ 中强收敛。由于 f_m 是径向递减的，根据海利定理，我们知道存在 $f_0 \in L^p(\mathbb{B}^n)$，使得 f_m 几乎处处收敛于 f_0 $x \in \mathbb{B}^n$。通过 Poincar´e-索伯列夫不等式，我们看到 f_m在 $L^{\frac{2n}{n-2k}}(\mathbb{B}^n)$ 中也有界。这与维塔利收敛定理一起得到

$$\lim_{R\to 1}\lim_{m\to+\infty}\int_{B^n(0,R)}|f_m|^q dV=\lim_{R\to 1}\int_{B^n(0,R)}|f_0|^q dV=\int_{\mathbb{B}^n}|f_0|^q dV.$$

为了证明 f_m 在 $L^q(\mathbb{B}^n)$ 中强收敛于 f_0，还需证明

$$\lim_{R\to 1}\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{B}^n\setminus B^n(0,R)}|f_m|^q dV=0,$$

也就是说,

$$\lim_{R\to 1}\lim_{m\to+\infty}\int_{B^n\setminus B^n(0,R)}|f_m|^q\left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^n dx=0.$$

由前面的径向引理3.7可知，存在 $D_{n,\ k,\ q_0}>0$ 使得 $f_m(R) \leq_{n-1}(1-R)^{\ q_0}$，其中 q_0 取为 $q_0<q$。于是，不难验证

$$\begin{aligned}&\lim_{R\to 1}\lim_{m\to+\infty}\int_{B^n\setminus B^n(0,R)}|f_m|^q\left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^n dx\\ \leq& D_{n,k,q_0}\lim_{R\to 1}\lim_{m\to+\infty}\int_{B^n\setminus B^n(0,R)}(1-R)^{\frac{q(n-1)}{q_0}}\left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^n dx=0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

至此，定理 1.3 的证明完成。

References

[1] T. Aubin, 《等周问题与 Sobolev 空间》, 《微分几何杂志》11 (1976) 573–598。[2] A. Baernstein II, 《分析中的对称化》。《新数学专著》36，剑桥大学，剑桥，2019。[3]A. Baernstein II 和 B. A. Taylor, 《n 维空间中的球面重排、次调和函数与 *-函数》, 《杜克数学杂志》43(1976)，245-268。[4] L. V. Ahlfors, 《M¨*obius Transformation in Several Dimensions*》（多维莫比乌斯变换）。奥德韦数学讲席讲座，明尼苏达大学数学学院，美国明尼苏达州明尼阿波利斯，1981。[5] M. Bhakta、D. Ganguly、D. Karmakar、S. Mazumdar, 《双曲空间中 Poincar´*e-Sobolev inequalities on the hyperbolic space: Part I* 不等式的 Struwe 分解的最佳定量稳定性》, 《数学进展》**479**(2025)，第 110447 号，84 页。[6] W. Beckner, 《Sobolev 不等式、泊松半群与球面分析》 $\mathbb{S}^n$, 《美国国家科学院院刊》**89**(1992)，4816-4819。。[7] W. Beckner, 《球面上的最佳 Sobolev 不等式与莫泽-特鲁丁格不等式》, 《数学年刊》(2) **138** (1993)，第 1 期，213-242。[8] R. D. Benguria、R. L. Frank 和 M. Loss, 《三维上半空间中 Hardy–Sobolev–Maz'ya 不等式的最佳常数》, 《数学研究快报》**15** (2008)，第 4 期，613-622。[9] H. Br´ezis 和 L. Nirenberg, 《涉及临界 Sobolev 指数的非线性椭圆方程的正解》。《纯粹与应用数学通讯》36 (1983)，第 4 期，437–477。

[10] C. Fefferman 和 R. Graham，GJMS 算子与 Q 曲率的 Juhl 公式。《美国数学会杂志》26 (2013)，第 4 期，1191–1207。[11] C. Fefferman 和 R. Graham，《环境度量》。《数学年刊研究丛书》178。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2012。[12] J. Flynn、G. Lu 和 Q. Yang，四元数双曲空间与凯莱双曲平面上的最佳 Hardy–Sobolev–Maz'ya、Adams 和 Hardy–Adams 不等式。《伊比利亚美洲数学评论》40 (2024)，第 2 期，403–462。[13] C. R. Graham、R. Jenne、L. J. Mason 和 G. A. J. Sparling，拉普拉斯算子的共形不变幂。I. 存在性。《伦敦数学会杂志》(2) 46 (1992)，第 3 期，557-565。[14] E. Hebey，《流形上的非线性分析：Sobolev 空间与不等式》。《库朗数学讲义》第 5 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999。[15] S. Helgason，《群与几何分析：积分几何、不变微分算子与球函数》。《纯粹与应用数学》第 113 卷，学术出版社，1984。[16] S. Helgason，《对称空间上的几何分析》，第二版。《数学调查与专著》第 39 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008。[17] L. K. Hua，《从单位圆开始：高等分析入门》，施普林格出版社，纽约，1981。[18] A. Juhl，GJMS 算子与 Q 曲率的显式公式，《几何与泛函分析》23(2013)，第 4 期，1278-1370。[19] J. Li、G. Lu、Q. Yang，双曲空间上的高阶 Brezis-Nirenberg 问题：解的存在性、非存在性与对称性，《数学进展》399 (2022)，39页。[20] E. Lieb，Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式及相关不等式的最佳常数。《数学年刊》(2) 118 (1983)，第 2 期，349–374。[21] P. L. Lions，变分法中的浓缩紧性原理：局部紧情形。I.，《亨利·庞加莱研究所分析非线性年刊》1(1984)，第 2 期，109-145。[22] P. L. Lions，变分法中的浓缩紧性原理：极限情形。I.，《伊比利亚美洲数学评论》1(1985)，第 1 期，145-201。[23] G. Liu，双曲空间上的高阶最佳 Sobolev 不等式 $\mathbb{H}^n$。《变分法与偏微分方程》47 (2013)，第 3-4 期，567-588。[24] C. Liu 和 L. Peng，与单位球上拉普拉斯-贝尔特拉米算子的变体相关的广义 Helgason-Fourier 变换 $\mathbb{R}^n$。《印第安纳大学数学杂志》58 (2009)，第 3 期，1457-1491。[25] G. Lu、Q. Yang，双曲空间上的 Paneitz 算子及半空间上的高阶 Hardy–Sobolev–Maz'ya 不等式，《美国数学杂志》141 (2019)，第 6 期，1777-1816。[26] G. Lu、Q. Yang，双曲空间上 Paneitz 算子与 GJMS 算子的格林函数及半空间上的最佳 Hardy–Sobolev–Maz'ya 不等式，《数学进展》398 (2022)，42页。[27] G. Lu 和 Q. Yang，Siegel 域与复双曲空间上的最佳 Hardy–Sobolev–Maz'ya、Adams 和 Hardy–Adams 不等式。《数学进展》405 (2022)，论文编号 108512，62页。[28] G. Mancini、K. Sandeep，$\mathbb{H}^n$上的半线性椭圆方程，《比萨高等师范学校科学年刊》(5) 7 (2008)，第 4 期，635-671。[29] V. G. Maz'ya，《Sobolev 空间》，T. O. Shaposhnikova 从俄文译出，《施普林格苏联数学丛书》，施普林格出版社，柏林，1985。[30] G. Talenti，Sobolev 不等式中的最佳常数，《纯粹与应用数学年刊》110 (1976) 353–372。[31] S. Thangavelu，非紧秩一对称空间上 Helgason Fourier 变换的 Hardy 定理。《数学讨论会》94 (2002) 263–280。[32] S. Thangavelu，《不确定性原理导论：李群上的 Hardy 定理》。《数学进展丛书》第 217 卷，波士顿施普林格出版社，2004。[33] A. Tertikas、K. Tintarev，Hardy–Sobolev–Maz'ya 不等式极小化函数的存在性，《纯粹与应用数学年刊》(4) 186 (2007)，第 4 期，645-662。

[34] M.Willem，极小极大定理。《非线性微分方程及其应用进展》，第 24 卷。Birkh$\ddot{a}$user Boston, Inc., 美国马萨诸塞州波士顿，1996年。

Department of Mathematics, University of Connecticut, Storrs, CT 06269, USA电子邮箱: guozhen.lu@uconn.edu

School of Mathematics and statistics, Beijing Technology And Business University, Beijing, 100048, China电子邮箱: taochunxia01@126.com