KL散度的迭代对数渐近律$_{\inf}$

Ashwin Ram ARAM2@ANDREW.CMU.EDU
Aaditya Ramdas ARAMDAS@CMU.EDU
卡内基梅隆大学

arXiv:2602.05259v1 [math.ST] 5 Feb 2026

摘要

总体 $\mathrm{KL}_{\inf}$ 是纯探索随机多臂老虎机算法（渐近）最优遗憾下界以及序贯检验最优停止时间中的一个基本量。受此启发，经验 $\mathrm{KL}_{\inf}$ 统计量常用于设计（渐近）最优的多臂老虎机算法和序贯检验。尽管已有针对经验 $\mathrm{KL}_{\inf}$ 的非渐近集中界，但其在常数和速率方面的最优性仍存疑，适用范围也有限（通常仅适用于有界观测值）。非渐近集中的基本极限通常由统计量的渐近涨落描述。基于这一动机，本文提出了一个适用于极其一般（无界）数据的经验 $\mathrm{KL}_{\inf}$ 紧确（上界和下界）迭代对数律。

关键词： 迭代对数律（LIL）、Kullback-Leibler（KL）散度、序贯检验、在线学习。

1. 引言

考虑如下典型情形：观测独立同分布随机变量X_1，X_2，……，它们均服从共同分布 $\mathbf{P} \in \mathcal{P}([a,b])$，且均值为 μ、方差为 $\sigma^2 \in (0, \infty)$。将这些随机变量的经验分布记为 $\widehat{P}_t = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} \delta_{X_i}$，其经验均值为 $\widehat{\mu}_t$、方差为 $\widehat{\sigma}_t^2$。考虑一个支撑于紧区间 $[a,b]$ 上的分布 ν 以及一个目标均值$m \in [a,b]$。据此，将单侧均值约束信息投影定义为：

$$\mathrm{KL}_{\inf}(\nu, m) := \inf\left\{ \mathrm{KL}(\nu \| Q) : Q \in \mathcal{P}([a,b]),\ \int x\, dQ(x) \geq m \right\},$$

并且当 $\nu \not\ll Q$ 时，我们令 $\mathrm{KL}(\nu\|Q) = \infty$。本文刻画真实均值处经验投影代价 $\mathrm{KL}_{\inf}(P_t, \mu)$ 的几乎必然迭代对数尺度；所有概率及几乎必然性陈述均基于从$\mathbf{P}$进行的独立同分布抽样。

众所周知，样本均值满足 Hartman-Wintner 迭代对数律（LIL）（Khinchin，1924年；Kolmogoroff，1929年；Hartman和Wintner，1941；Feller，1943年；Chung，1948年；Strassen，1964年；Teicher，1974年）。也就是说，几乎必然有 $\limsup_{t\to\infty} \frac{\mu_t - \mu}{\sqrt{(2\sigma^2 \log\log t)/t}} = 1$ 和 $\liminf_{t\to\infty} \frac{\mu_t - \mu}{\sqrt{(2\sigma^2 \log\log t)/t}} = -1$。然而，我们的主要贡献在于证明，$\mathrm{KL}_{\inf}(P_t, \mu)$ 实际上具有相同的迭代对数常数（通过将 $\mathrm{KL}_{\inf}$ 作二次展开）。换言之，我们证明 $\mathrm{KL}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu) = (1 + o(1))\, \frac{(\mu - \widehat{\mu}_t)^2}{2\widehat{\sigma}_t^2}$。因此，以概率一，$\limsup_{t\to\infty} \frac{t\, \mathrm{KL}_{\inf}(P_t, \mu)}{\log\log t} = 1$。我们通过分析 $\widehat{P}_t$的仿射倾斜来证明这一点，从而得到精确的上界；随后结合 Donsker-Varadhan 不等式（Donsker 和 Varadhan，1975年；Csisz´ar 和 Mat´uˇs，2003年）以及一致泰勒控制，得到对偶下界。

© A. Ram 和 A. Ramdas。

重要的是，我们将精确重对数律等式推广到上述紧支撑之外的情形，方法是将竞争类限制在一个缓慢增长的确定性包络 $[-B_t, B_t]$内；并证明，只要满足一个非常弱的充分条件（数据几乎必然最终满足 $|X_i| \leq B_t$，对所有 $i \leq t$均成立，其中某个序列 $B_t = o(\sqrt{t/\log\log t})$），那么定义在 $\mathcal{P}([-B_t, B_t])$ 上的时变泛函 $\mathrm{KL}^{(t)}{}_{\inf}$ 仍具有相同的 sharp-1 重对数律常数。我们还表明，在分析次高斯、次指数以及有限 p 阶矩等典型尾部“情形”时，这类包络可直接得到。

随机多臂赌博机中基于KL的指标策略，其背后的基本机制实际上是均值约束KL投影（Robbins，1952年；Gittins，1989年；Lai 和 Robbins，1985年；Burnetas 和 Katehakis，1996年；Auer 等，2002年；Bubeck 和 Cesa-Bianchi，2012年；Garivier 和 Capp´e，2011年；Capp´e 等，1924年；Honda 和 Takemura，2010年、2015年；Kaufmann 等，2012年；Lattimore 和 Szepesv´ari，2020年）。此外，大量研究利用大偏差和非渐近集中来推导对数遗憾（Cram´er，1938年；Kullback 和 Leibler，1951年；Sanov，1957年；Dembo 和 Zeitouni，1998年；Boucheron 等，2013年；Howard 等，2020年、2021年）。而我们的工作首次分析（并刻画）了经验投影自然具有的几乎必然 ˆ波动尺度，即 $t\mathrm{KL}_{\inf}(P_t, \mu)$：我们证明其以对数函数对数函数 t 的量级振荡，且具有精确常数。

相关工作。Khinchin 和柯尔莫哥洛夫是最早研究随机变量和的迭代对数律（LIL），并对 Hartman-Wintner 定理给出有限方差细化的学者之一（Khinchin，1924年；Kolmogoroff，1929年；Hartman和Wintner，1941），此后也无疑出现了无数扩展与变体（Feller，1943年；Chung，1948年；Strassen，1964年；Teicher，1974年；Stout，1970年、1974年；Bingham，1986年；de Acosta，1983年）。对序贯推断尤为重要的是，后续研究将迭代对数律推广到了有限时域或时间一致的情形，例如提出了尖锐的有限时间鞅重对数律界和置信序列（Wald，1947年；Darling 和 Robbins，1967年；Balsubramani，2015年；Howard 等，2020年、2021年）。此外，迭代对数律已被证明可推广到远不止样本均值本身的范围：经验过程和局部经验过程也具有对数律及函数型迭代对数律（Shorack 和 Wellner，1986年；van der Vaart 和 Wellner，1996年；Deheuvels 和 Mason，1994年；Mason，2004年；Einmahl 和 Rosalsky，2001年）。

从根本上说，KL 散度（Kullback 和 Leibler，1951年）可谓是经验测度大偏差和熵最小化的驱动力（Sanov，1957年；Dembo 和 Zeitouni，1998年；Dupuis 和 Ellis，1997年）。Csisz´ar 的 I-散度几何及其相关改进，为理解线性约束下的信息投影提供了直观认识（Csisz´ar，1975年、1984年；Csisz´ar 和 Mat´uˇs，2003年）。与这些熵倾斜思想密切相关的，还有统计学中的经验似然和指数倾斜方法（Owen，1988年、2001年）。如今，老虎机文献已充分认识到，最优性和老虎机下界由 KL“信息”刻画，该信息通过对所谓的混淆替代项取下确界来定义（Robbins，1952年；Gittins，1989年；Lai 和 Robbins，1985年；Burnetas 和 Katehakis，1996年；Kaufmann 等，2012年）。这正是许多研究提出基于 KL 的乐观指数及其非参数变体的动机（Robbins，1952年；Garivier 和 Capp´e，2011年；Capp´e 等，1924年；Honda 和 Takemura，2010年、2015年；Lattimore 和 Szepesv´ari，2020年）。尽管如此，我们在此提出一项完全正交的贡献。这些程序常常会计算前述经验均值约束投影代价。为此，我们首次为这一 $\mathrm{KL}_{\inf}$ 代价提供几乎必然的迭代对数律校准。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们给出经验 KL散度$_{\inf}$ 的一个上界，并在第 3 节中进一步收紧该界（从而证明等号成立）。我们将介绍

第 4 节中的一条定理，将这些结果推广到无界数据。在附录 A 中，我们给出正文中未提供的全部证明。在附录 B 中，我们给出第 4 节一般定理的三个具体"实例"。最后，在附录 C 中，我们证明第 4 节引入的尖锐包络具有紧性，该包络使我们能够将结果推广到无界数据。

2. 经验 KL 散度的迭代对数律上界 KL散度$_{\inf}$

本节中，我们将在一般情形下形式化 $\mathrm{KL}_{\inf}$ 满足渐近迭代对数律这一概念，不局限于序贯检验等任何特定应用。回顾前述相同的设定： $X_1, X_2, X_3, \ldots$ 是具有共同分布 $\mathbf{P} \in \mathcal{P}([a,b])$ 的独立同分布随机变量，支撑于紧区间 $[a,b]$ 上，均值为 $\mu := \mathbb{E}[X_1]$，方差为 $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_1) \in (0,\infty)$。下文中所有概率 $\mathbf{P}(\cdot)$ 和期望 $\mathbb{E}[\cdot]$ 均相对于$\mathbf{P}$而言。基于以上设定，我们将 $t \geq 1$ 的经验测度记为：

$$\widehat{P}_t := \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} \delta_{X_i},$$

并分别将经验均值和方差记为：

$$\widehat{\mu}_t := \int x\, d\widehat{P}_t(x) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} X_i, \qquad \widehat{\sigma}_t^2 := \int (x-\widehat{\mu}_t)^2\, d\widehat{P}_t(x) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} (X_i-\widehat{\mu}_t)^2.$$

此外，对于任意可测的 h，我们写作 $\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[h(X)] := \int h(x) d\widehat{P}_t(x) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} h(X_i)$。重要的是，尽管 P_t 确实是随机的，但在给定数据 $(X_1, X_2, \ldots)$ 的条件下，它是固定的。因此，$\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}$ 只是一个经验平均。定义完这些之后，我们来说明在此设定下如何表示 $\mathrm{KL}_{\inf}$。具体而言，对于支撑集位于 $[a,b]$ 上的概率测度 ν 和标量 $m \in [a,b]$，将其定义为：

$$\mathrm{KL}_{\inf}(\nu, m) := \inf\left\{ \mathrm{KL}(\nu\|Q) : Q \in \mathcal{P}([a,b]),\ \int x\, dQ(x) \geq m \right\},$$

其中，$\mathrm{KL}(\nu\|Q)$ 就是通常所说的 KL 散度。我们约定，当 $\nu \not\ll Q$ 时，$\mathrm{KL}(\nu\|Q) = \infty$。此外，我们还想指出的一点是，我们在此分析的紧致类确实很重要。为什么？因为如果允许 Q 在上尾的任意远处放置质量，[1]那么显然，只要 m 超过 ν的均值，$\mathrm{KL}_{\inf}(\nu,\ m)$ 就可以降至 0。也就是说，只需在某个非常大的点上"撒入"任意少量的质量，就能满足均值约束，同时 KL代价趋于零。因此，只有采用有界的（或以其他方式受到约束的）模型类，才能使 $\mathrm{KL}_{\inf}$ 保持非平凡。这正是我们下面给出上界迭代对数律定理的动机。

定理1 在上述设定下，我们有：

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\limsup_{t\to\infty} \frac{t\ \mathrm{KL}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu)}{\log\log t} \leq 1 \right) = 1.}$$

1. 例如，在 $\mathbb{R}$ 上不加任何约束。

等价地，对于每个 $\varepsilon > 0$，几乎必然存在一个（可能是随机的） $T_\varepsilon < \infty$ ，使得对所有 $t \geq T_\varepsilon$，

$$\mathrm{KL}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu) \leq (1+\varepsilon)\frac{\log\log t}{t}.$$

在继续证明该定理之前，请回顾一下，从某种意义上说，$\mathrm{KL}_{\inf}(P_t, \mu)$ 是扰动经验分布所需的最小相对熵预算，使其均值至少达到真实均值 μ。如果事实上经验均值为 $\widehat{\mu}_t \geq \mu$，那么当然无需进行任何扰动，$\mathrm{KL}_{\inf}(P_t, \mu) = 0$。现在，在 $\widehat{\mu}_t < \mu$ 的情况下，提高均值的最简单方法之一，是略微增加高于 $\widehat{\mu}_t$ 的观测值的权重，并降低低于 $\widehat{\mu}_t$ 的观测值的权重。这必须以保持总质量不变的方式进行。这种扰动是无穷小的，因此其 KL代价是二阶的：也就是说，它与 $\left(\mu - \widehat{\mu}_t\right)^2/(2\widehat{\sigma}_t^2)$ 成正比。接下来，我们可以利用 $\widehat{\mu}_t$ 的经典迭代对数律，立即将其转化为 $\mathrm{KL}_{\inf}$ 的迭代对数律。综上，我们还需要一个工具来证明该定理，即以下引理：在一个不断缩小的邻域上，对 $-\log(1+u)$ 的一致泰勒界。

引理2 取某个 $r \in (0,1)$ 并定义 $f(u) := -\log(1+u)$ 在 $(-1,\infty)$上。于是，对每个 $u \in [-r, r]$，我们都有 $f(u) \leq -u + \frac{u^2}{2} + \frac{|u|^3}{3(1-r)^3}$.

有了这些准备，我们终于可以开始证明定理1了。

证明 [定理 1] 首先设定 $\Delta_t := (\mu - \widehat{\mu}_t)_+ =$ 最大值$\{0, \mu - \widehat{\mu}_t\}$。注意，如果 $\Delta_t = 0$，那么必然有 $\widehat{\mu}_t \geq \mu$。这意味着经验分布 P_t 本身必须满足均值约束。因此，KL散度$_{\inf}(P_t, \mu) = 0$。所以，只有满足 $\Delta_t > 0$ 的时刻才需要考虑，这正是我们要关注的内容。我们考虑强大数定律和 $\widehat{\mu}_t$ 的迭代对数律都成立的几乎必然事件。也就是说，$\widehat{\mu}_t \to \mu$几乎必然且 $\widehat{\sigma}_t^2 \to \sigma^2$ 几乎必然。还要注意，Hartman和Wintner（1941）的“经典”迭代对数律也表明，对于满足 $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 \in (0,\infty)$ 的独立同分布序列，

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\widehat{\mu}_t - \mu}{\sqrt{(2\sigma^2\log\log t)/t}} = 1, \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{\widehat{\mu}_t - \mu}{\sqrt{(2\sigma^2\log\log t)/t}} = -1,$$

几乎必然。现在，我们来定义经验分布的一种可行仿射倾斜。也就是说，对于那些满足 t 和$\Delta_t > 0$ 且 $\widehat{\sigma}_t^2 > 0$的情况，定义 $\theta_t := \frac{\Delta_t}{\widehat{\sigma}_t^2}$和 $\frac{dQ_t}{d\widehat{P}_t}(x) := 1 + \theta_t(x - \widehat{\mu}_t)$。关键在于，这是能够保持总质量不变的最简单扰动，因为 $\int (x - \widehat{\mu}_t)\, d\widehat{P}_t(x) = 0$。此外，这种扰动会使均值以与方差成正比的速率上升。再者，由于 $x \in [a,b]$，我们有 $|x - \widehat{\mu}_t| \leq (b-a)$，因此，

$$\inf_{x\in[a,b]} \Big(1 + \theta_t(x - \widehat{\mu}_t)\Big) \geq 1 - \theta_t(b-a).$$

由于 $\Delta_t \to 0$ 和 $\widehat{\sigma}_t^2 \to \sigma^2 > 0$，我们有 $\theta_t(b-a) \to 0$ 几乎必然成立。因此，这意味着对于所有充分大的 t ，拉东-尼科迪姆导数在 $[a,b]$ 上严格为正。因此，对于这样充分大的 t， Q_t 是定义良好的概率测度，其支撑集为 $[a,b]$，并且

$$\int dQ_t = \int \left(1 + \theta_t(x - \widehat{\mu}_t)\right) d\widehat{P}_t(x) = 1 + \theta_t \underbrace{\int (x - \widehat{\mu}_t)\, d\widehat{P}_t(x)}_{=0} = 1.$$

此外，我们知道其均值恰好提升至 μ。也就是说，

$$\begin{aligned}\int x\,dQ_t(x) &= \int x\big(1+\theta_t(x-\widehat{\mu}_t)\big)\,d\widehat{P}_t(x)\\ &= \underbrace{\int x d\widehat{P}_t(x)}_{\widehat{\mu}_t} + \theta_t\int x(x-\widehat{\mu}_t)\,d\widehat{P}_t(x) = \widehat{\mu}_t + \theta_t\int \underbrace{x(x-\widehat{\mu}_t)}_{(x-\widehat{\mu}_t)^2+\widehat{\mu}_t(x-\widehat{\mu}_t)}\quad d\widehat{P}_t(x)\\ &= \widehat{\mu}_t + \theta_t\int (x-\widehat{\mu}_t)^2\,d\widehat{P}_t(x) + \underbrace{\theta_t\int \widehat{\mu}_t(x-\widehat{\mu}_t)\,d\widehat{P}_t(x)}_{=0}\\ &= \widehat{\mu}_t + \theta_t\int (x-\widehat{\mu}_t)^2\,d\widehat{P}_t(x)\\ &= \widehat{\mu}_t + \theta_t\,\widehat{\sigma}_t^2 = \widehat{\mu}_t + \Delta_t = \mu.\end{aligned}$$

因此，显然，Q_t 恰好满足约束 $\int x\,dQ_t(x) \geq \mu$。因此可得$\widehat{\ }\qquad\qquad\widehat{\ }\mathrm{KL}_{\inf}(P_t,\ \mu) \leq \mathrm{KL}(P_t\|Q_t)$。现在我们需要界定实际倾斜的 KL 代价。根据定义，我们知道，

$$\mathrm{KL}(\widehat{P}_t\|Q_t) = \int \log\left(\frac{d\widehat{P}_t}{dQ_t}\right)\,d\widehat{P}_t = -\int \log\Big(1+\theta_t(x-\widehat{\mu}_t)\Big)\,d\widehat{P}_t(x).$$

$\widehat{\ }$现在，令 $X\sim P_t$ 并定义随机变量 $U_t := \theta_t(X-\widehat{\mu}_t)$。那么，由于我们将 $\widehat{P}_t$ 视为在条件$(X_1, \ldots, X_t)$ 下固定，必然有 $\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[U_t] = \theta_t\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[X-\widehat{\mu}_t] = \theta_t\left(\int x d\widehat{P}_t(x) - \widehat{\mu}_t\right) = 0$。此外，我们知道 $|U_t| \leq r_t$，其中 $r_t := \theta_t(b-a) = \frac{\Delta_t}{\widehat{\sigma}_t^2}(b-a) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ 几乎必然。因此，总结一下，我们了解了随机变量 U_t的两个性质。首先，它是中心化的；其次，它一致地有界。现在，取足够大的 t，使得 $r_t \in (0,1)$，然后将引理2与 $r = r_t$ 快速逐点应用于 $u = U_t$。这样可得，

$$-\log(1+U_t) \leq -U_t + \frac{U_t^2}{2} + \frac{|U_t|^3}{3(1-r_t)^3}.$$

$\widehat{\ }$然后，取 P_t-期望并利用 $\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[U_t] = 0$ 这一事实，我们得到：

$$\mathrm{KL}(\widehat{P}_t\|Q_t) \leq \frac{\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[U_t^2]}{2} + \frac{\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[|U_t|^3]}{3(1-r_t)^3}, \tag{1}$$

作为第一项 $-\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[U_t] = 0$。现在我们来计算这些矩，再代入其中。首先，对于二阶矩，我们知道 $\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[U_t^2] = \theta_t^2\,\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[(X-\widehat{\mu}_t)^2] = \theta_t^2\,\widehat{\sigma}_t^2$。其次，对于三阶绝对矩，我们知道 $|U_t| \leq r_t$。因此可得 $\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[|U_t|^3] \leq r_t\,\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[U_t^2] = r_t\,\theta_t^2\,\widehat{\sigma}_t^2$。将这些结果代入（1），得到：

$$\mathrm{KL}(\widehat{P}_t\|Q_t) \leq \frac{\theta_t^2\,\widehat{\sigma}_t^2}{2}\left(1+\frac{2r_t}{3(1-r_t)^3}\right) = \frac{\Delta_t^2}{2\widehat{\sigma}_t^2}\left(1+\frac{2r_t}{3(1-r_t)^3}\right).$$

现在，我们知道 $r_t \to 0$ 几乎必然成立。因此，$(1 + 3^{2r_t}_{(1-r_t)^3})$ 项实际上几乎必然就是 $(1 + o(1))$。于是我们得到：

$$\mathrm{KL}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu) \le \mathrm{KL}(\widehat{P}_t \| Q_t) \le (1 + o(1)) \frac{\Delta_t^2}{2\widehat{\sigma}_t^2}, \quad \text{almost surely as } t \to \infty. \tag{2}$$

这里确实非常有意思。我们看到了 KL散度的局部二次行为。也就是说，KL代价关于均值偏差是二阶的。撇开这一点不谈，现在让我们引入均值的经典迭代对数律：换言之，把均值迭代对数律转化为 $\mathrm{KL}_{\inf}$ 迭代对数律，以完成证明。关于 $\widehat{\mu}_t$ 的经典迭代对数律当然告诉我们，几乎必然有 $\limsup_{t\to\infty} \frac{(\widehat{\mu}_t - \mu)^2}{(2\sigma^2 \log\log t)/t} = 1$。此外，由于 $(\mu - \widehat{\mu}_t)_+ \le |\widehat{\mu}_t - \mu|$，我们知道同一个上界也适用于 Δ_t。另外，经典迭代对数律还给出 $\liminf_{t\to\infty} (\widehat{\mu}_t - \mu)/\sqrt{(2\sigma^2 \log\log t)/t} = -1$。这意味着沿着某个子序列，我们有 $\widehat{\mu}_t - \mu < 0$，其大小渐近达到最大值。因此，这自然迫使我们以概率一有 $\limsup_{t\to\infty} \frac{\Delta_t^2}{(2\sigma^2 \log\log t)/t} = 1$。显然，我们也知道以概率一有 $\widehat{\sigma}_t^2 \to \sigma^2$。因此，

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t}{\log\log t} \cdot \frac{\Delta_t^2}{2\widehat{\sigma}_t^2} = \limsup_{t\to\infty} \left(\frac{\sigma^2}{\widehat{\sigma}_t^2}\right) \left(\frac{\Delta_t^2}{(2\sigma^2 \log\log t)/t}\right) = 1, \quad \text{almost surely.}$$

为了完成，只需将该结果与（2）结合，即可得到以概率一 t，

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t\ \mathrm{KL}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu)}{\log\log t} \le 1,$$

这正是我们所要的迭代对数律下界。至此，证明完毕。 ■

3. 经验 KL 散度的迭代对数律匹配下界KL散度$_{\inf}$

本节将进一步证明，除了我们已经证明的上界之外，事实上还存在一个匹配的下界，因此KL散度$_{\inf}$ 确实满足等号形式的渐近迭代对数律。回顾一下，定理1以概率一确立了如下上界：

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t\ \mathrm{KL}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu)}{\log\log t} \le 1.$$

现在我们将证明一个匹配的下界。为此，极限上确界常数将恰好为 1。作为本节的引言，我们先陈述主要定理。

定理 3 在与定理*1* 的完全相同设定下，事实上我们有：

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\limsup_{t\to\infty} \frac{t\ \mathrm{KL}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu)}{\log\log t} = 1\right) = 1.}$$

为证明这一点，我们唯一还需要的是关于$\mathrm{KL}(\nu\|Q)$ (Donsker 和 Varadhan，1975年的 Donsker-Varadhan 变分不等式。下文将陈述该不等式，并在附录中给出一个完整的证明。

KL 的渐近迭代对数律$_{\inf}$

引理4 设$(\Omega\ \mathcal{F})$ 是一个可测空间，且 ν、Q 是该空间上的概率测度。现在假设 $\nu \ll Q$。那么，对于每个有界可测的 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$，有：

$$\mathrm{KL}(\nu\|Q) \geq \int \varphi\, d\nu - \log\left(\int e^{\varphi} dQ\right).$$

若 $\nu \not\ll Q$，则按约定，$\mathrm{KL}(\nu\|Q) = \infty$，因此该不等式显然成立 *e.*

现在我们可以证明定理3。

证明 [定理 3] 如前所述，我们已从第一个定理 1中得到一个几乎必然上界。因此，接下来只需以概率一证明匹配的下界：

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t\mathrm{KL}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu)}{\log\log t} \geq 1.$$

首先，如同我们证明定理 1时那样，定义 $\Delta_t := (\mu - \widehat{\mu}_t)_+ = \max\{0, \mu - \widehat{\mu}_t\}$。我们知道 ^，每当 $\Delta_t = 0$ 时，都有 $\widehat{\mu}_t \geq \mu$，这意味着 $\mathrm{KL}_{\inf}(P_t,\ \mu) = 0$ 仅凭 $\sim P_t$ 的可行性即可成立。因此，lim sup 的下界只能来自满足 $\Delta_t > 0$ 的那些时刻。让我们考虑强大数定律和经典迭代对数律均成立的概率为一事件。也就是说，我们将在 $\widehat{\mu}_t \to \mu$ 和 $\widehat{\sigma}_t^2 \to \sigma^2 \in (0,\ \infty)$ 成立的情形下进行讨论。此外，我们考虑满足以下条件的情形：$\widehat{\limsup}^{t\to\infty} \frac{\mu_t - \mu}{\sqrt{(2\sigma^2\ \text{对数函数}\ \text{对数函数}\ t)/t}} = 1$，且 $\overline{\liminf^{t\to\infty} \frac{\mu_t - \mu}{\sqrt{(2\sigma^2\ \text{对数函数}\ \text{对数函数}\ t)/t}}} = \overline{-1}$。重要的是，第二个关系告诉我们，沿着某个子序列 $\{t_k\}$，有 $\widehat{\mu}_{t_k} < \mu$，且其量级渐近最优。也就是说，以概率一有：

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\Delta_t^2}{(2\sigma^2 \log\log t)/t} = 1. \tag{3}$$

事实上，若令 $a_t := \sqrt{(2\sigma^2\ \text{对数函数}\ \text{对数函数}\ t)/t}$，则迭代对数律给出 lim sup$(\widehat{\mu}_t - \mu)$ $/a_t = 1$ 以及 lim inf$(\widehat{\mu}_t - \mu)/a_t = -1$。根据我们上文所解释的第二个恒等式，我们知道存在一个子序列 t_k，满足 $(\widehat{\mu}_{t_k} - \mu)/a_{t_k} \to -1$。因此，对所有足够大的 k，我们有 $\widehat{\mu}_{t_k} < \mu$，从而有 $\frac{\Delta_{t_k}}{a_{t_k}} = \frac{\mu - \widehat{\mu}_{t_k}}{a_{t_k}} = -\frac{\widehat{\mu}_{t_k} - \mu}{a_{t_k}} \to 1$。另一方面，我们知道对所有 t，$\Delta_t \leq |\widehat{\mu}_t - \mu|$ 且 lim s up $|\widehat{\mu}_t - \mu|/a_t = 1$。所以，lim sup $\Delta_t/a_t \leq 1$。若现在将二者结合起来，我们便得到 lim sup $\Delta_t/a_t = 1$，这恰好就是 (3)。现在让我们推导 KL散度$_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu)$ 关于 Δ_t 和 $\widehat{\sigma}_t^2$ 的确定性下界。首先，考虑一个特定的 $t \geq 1$ 以及一个任意测度$Q \in \mathcal{P}([a, b])$，使得 $\int x dQ(x) \geq \mu$。令 $\lambda \geq 0$ 满足 $\lambda(b - \mu) < 1$，从而对每一个$x \in [a, b]$，我们有 $1 + \lambda(\mu - x) \geq 1 - \lambda(b - \mu)$ > 0。由此可知，$\varphi_\lambda(x) :=$ 对数函数$(1 + \lambda(\mu - x))$ 确实是良定义的，并且在 $[a, b]$ 上有界。现在让我们将 ^引理4 应用于 $\nu = P_t$、这个特定的 Q 以及 $\varphi = \varphi_\lambda$。这样做便得到

$$\mathrm{KL}(\widehat{P}_t\|Q) \geq \int \log(1 + \lambda(\mu - x))\, d\widehat{P}_t(x) - \log\left(\int (1 + \lambda(\mu - x))\, dQ(x)\right).$$

我们知道，第二项受均值约束控制。因此，

$$\int (1 + \lambda(\mu - x))\, dQ(x) = 1 + \lambda\Big(\mu - \int x\, dQ(x)\Big) \leq 1.$$

显然，函数 $\log(\cdot)$ 是递增的，这意味着，

$$-\log\left(\int(1+\lambda(\mu-x))\,dQ(x)\right)\geq-\log(1)=0.$$

所以！由此可知，对于每个这样的 Q 以及每个 $\lambda\in[0,1/(b-\mu)$，我们有：

$$\mathrm{KL}(\widehat{P}_t\|Q)\;\geq\;\int\log(1+\lambda(\mu-x))\,d\widehat{P}_t(x).$$

然后，对所有可行的 Q 迅速取下确界，便得到下界：

$$\mathrm{KL}_{\inf}(\widehat{P}_t,\mu)\geq\sup_{0\leq\lambda<1/(b-\mu)}\int\log(1+\lambda(\mu-x))\,d\widehat{P}_t(x).\tag{4}$$

这里关键而优美的一点是，我们现在得到了一个仅以经验测度为依据的 $\mathrm{KL}_{\inf}$ 下界。接下来，我们将在此处右侧选取一个非常精心设定的 λ 来求值，它与我们此前观察到的 KL 的局部二次尺度相匹配。具体定义如下：

$$\lambda_t:=\begin{cases}\frac{\Delta_t}{\widehat{\sigma}_t^2}, & \text{if } \Delta_t>0 \text{ and } \widehat{\sigma}_t^2>0,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

现在，在这个概率为一事件上，我们知道 $\widehat{\sigma}_t^2\to\sigma^2>0$ 且 $\Delta_t\to0$。因此，$\lambda_t\to0$。也就是说，对于所有 t 充分大的情形，我们有 $\lambda_t(b-\mu)\;<1$，因而 λ_t 在（4）中是可行的。因此，对于所有这样的充分大的 t，我们确实有：

$$\mathrm{KL}_{\inf}(\widehat{P}_t,\mu)\geq\int\log(1+\lambda_t(\mu-x))\,d\widehat{P}_t(x).\tag{5}$$

现在，令 $X\sim P_t$ 并设 $U_t:=\lambda_t(\mu-X)$。这里，同样按照我们的约定，$\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}$ 表示对经验测度积分。我们知道 $X\in[a,b]$ 必然成立，因此必有 $|\mu-X|\leq b-a$。由此可知，几乎必然有 $|U_t|\leq r_t$，其中 $r_t:=\lambda_t(b-a)=\frac{\Delta_t}{\widehat{\sigma}_t^2}(b-a)\xrightarrow[t\to\infty]{}0$。现在，由于 $r_t\to0$ 几乎必然成立，我们知道，几乎必然存在一个有限的随机时间 T_r，使得对于所有 $t\geq T_r$，都有 $r_t<1$。而当 $r_t=0$ 时，有 $\lambda_t=0$，这意味着 $U_t\equiv0$，因此该不等式显然成立。所以，在应用引理2时，我们当然可以将注意范围限制在 $r_t\in(0,1)$ 严格成立的情形。为此，逐点将 $r=r_t$ 应用于 $u=U_t$，再应用引理2，可得 $\log(1+U_t)\;\geq U_t-\frac{U_t^2}{2}-\frac{|U_t|^3}{3(1-r_t)^3}$。现在让我们对 P_t 取期望。这样便得到：

$$\int\log(1+\lambda_t(\mu-x))\,d\widehat{P}_t(x)\geq\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[U_t]-\frac{1}{2}\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[U_t^2]-\frac{1}{3(1-r_t)^3}\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[|U_t|^3].\tag{6}$$

现在我们将分别用 Δ_t 和 $\widehat{\sigma}_t^2$ 显式计算这些项。对于第一项，我们知道，

$$\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[U_t]=\lambda_t\,\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[\mu-X]=\lambda_t(\mu-\widehat{\mu}_t)=\lambda_t\,\Delta_t.$$

现在来看第二项。我们知道 $\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[U_t^2]\;=\;\lambda_t^2\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[(\mu-X)^2]$。当然，$\widehat{\mu}_t=\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[X]$，因此我们可以轻松地在 $\widehat{\mu}_t$ 附近展开 $(\mu-X)^2$。如何展开？我们可以利用以下基本事实

即 $\mu - X = (\mu - \widehat{\mu}_t) + (\widehat{\mu}_t - X)$，该式对所有 t 都成立。现在将两边平方，并取期望$\widehat{\ }$（相对于 P_t）。也就是说，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[(\mu - X)^2] &= \mathbb{E}_{\widehat{P}_t}\left[(\mu - \widehat{\mu}_t)^2 + 2(\mu - \widehat{\mu}_t)(\widehat{\mu}_t - X) + (\widehat{\mu}_t - X)^2\right] \\ &= (\mu - \widehat{\mu}_t)^2 + 2(\mu - \widehat{\mu}_t)\underbrace{\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[\widehat{\mu}_t - X]}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[(\widehat{\mu}_t - X)^2]}_{=\widehat{\sigma}_t^2} \\ &= \widehat{\sigma}_t^2 + (\mu - \widehat{\mu}_t)^2.\end{aligned}$$

因此，我们得到 $\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[U_t^2] = \lambda_t^2\big(\widehat{\sigma}_t^2 + (\mu - \widehat{\mu}_t)^2\big)$。最后，根据定义，我们知道 $\lambda_t = \Delta_t/\widehat{\sigma}_t^2$。并且我们知道，当 $\Delta_t = 0$ 时，$\lambda_t = 0$。因此，对于所有 t，我们有 $\lambda_t^2(\mu - \widehat{\mu}_t)^2 = \lambda_t^2\Delta_t^2$。因此，我们得到，

$$\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[U_t^2] = \lambda_t^2(\widehat{\sigma}_t^2 + \Delta_t^2).$$

这样，第二项就计算完了。接下来需要计算第三个最终矩。我们来计算一下。只需利用事实 $|\mu - X| \le b - a$ 即可。由此可得

$$\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[|U_t|^3] = \lambda_t^3\,\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[|\mu - X|^3] \le \lambda_t^3(b-a)^3.$$

现在我们已经计算出所有项。因此，将它们代回（6）即可得到

$$\int \log(1 + \lambda_t(\mu - x))\, d\widehat{P}_t(x) \ge \lambda_t\Delta_t - \frac{1}{2}\lambda_t^2(\widehat{\sigma}_t^2 + \Delta_t^2) - \frac{1}{3(1-r_t)^3}\lambda_t^3(b-a)^3.$$

让我们将注意力放在相关的大 t范围内，其中 $\Delta_t > 0$ 和 $\widehat{\sigma}_t^2 > 0$。为此，代入 $\lambda_t = \Delta_t/\widehat{\sigma}_t^2$。对于第一项，我们得到 $\lambda_t\Delta_t = \frac{\Delta_t^2}{\widehat{\sigma}_t^2}$。二次项则恰好变为 $\frac{1}{2}\lambda_t^2(\widehat{\sigma}_t^2 + \Delta_t^2) = \frac{1}{2}\frac{\Delta_t^2}{\widehat{\sigma}_t^4}(\widehat{\sigma}_t^2 + \Delta_t^2)$ $= \frac{\Delta_t^2}{2\widehat{\sigma}_t^2} + \frac{\Delta_t^4}{2\widehat{\sigma}_t^4}$。因此，总的来说，我们知道前两项将化简为

$$\lambda_t\Delta_t - \frac{1}{2}\lambda_t^2(\widehat{\sigma}_t^2 + \Delta_t^2) = \frac{\Delta_t^2}{2\widehat{\sigma}_t^2} - \frac{\Delta_t^4}{2\widehat{\sigma}_t^4}.$$

最后，我们知道三次余项满足 $\frac{1}{3(1-r_t)^3}\lambda_t^3(b-a)^3 = \big(\frac{b-a}{1-r_t}\big)^3 \cdot \frac{\Delta_t^3}{\widehat{\sigma}_t^6}$ 的界。现在把我们已经证明的所有结果汇总起来。综合这些结果，我们得到下界

$$\int \log(1 + \lambda_t(\mu - x))\, d\widehat{P}_t(x) \ge \frac{\Delta_t^2}{2\widehat{\sigma}_t^2} - \frac{\Delta_t^4}{2\widehat{\sigma}_t^4} - \frac{(b-a)^3}{3(1-r_t)^3} \cdot \frac{\Delta_t^3}{\widehat{\sigma}_t^6}. \tag{7}$$

我们终于可以回到（5）。事实上，因此，对于所有 t 足够大使得

$$\mathrm{KL}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu) \ge \frac{\Delta_t^2}{2\widehat{\sigma}_t^2} - \frac{\Delta_t^4}{2\widehat{\sigma}_t^4} - \frac{(b-a)^3}{3(1-r_t)^3} \cdot \frac{\Delta_t^3}{\widehat{\sigma}_t^6}.$$

现在，$\Delta_t \to 0$。而且，$\widehat{\sigma}_t^2 \to \sigma^2 > 0$。此外，$r_t \to 0$ 几乎必然。由此可知，这两个误差项都$o\big(\Delta_t^2/\widehat{\sigma}_t^2\big)$ 几乎必然。具体而言，我们以概率一有 $\frac{\Delta_t^4/\widehat{\sigma}_t^4}{\Delta_t^2/\widehat{\sigma}_t^2} = \frac{\Delta_t^2}{\widehat{\sigma}_t^2} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, $\frac{\Delta_t^3/\widehat{\sigma}_t^6}{\Delta_t^2/\widehat{\sigma}_t^2} = \frac{\Delta_t}{\widehat{\sigma}_t^4} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$，并且$(1-r_t)^{-3} \to 1$。由此我们几乎必然得到这个优美的局部二次下界，即 $t \to \infty$,

$$\mathrm{KL}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu) \ge (1 - o(1))\,\frac{\Delta_t^2}{2\widehat{\sigma}_t^2}. \tag{8}$$

现在，我们将把(8)与我们得到的均值迭代对数律信息(3)结合起来。当然，由于$\widehat{\sigma}_t^2 \to \sigma^2$，我们得到：

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t}{\log\log t} \cdot \frac{\Delta_t^2}{2\widehat{\sigma}_t^2} = \limsup_{t\to\infty} \left(\frac{\sigma^2}{\widehat{\sigma}_t^2}\right)\left(\frac{\Delta_t^2}{(2\sigma^2 \log\log t)/t}\right) = 1,$$

几乎必然。现在，让我们取一个特定但任意的 $\varepsilon \in (0,1)$。显然，由（8）可知，在我们的几乎必然事件上，存在一个随机的 $T_\varepsilon < \infty$，使得对于所有 $t \geq T_\varepsilon$，

$$\mathrm{KL}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu) \geq (1-\varepsilon)\frac{\Delta_t^2}{2\widehat{\sigma}_t^2}.$$

现在让我们 乘以 $t/$ 对数函数 $\log\ t$，然后对 $t \to \infty$ 取上极限。这样便得到，

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t\ \mathrm{KL}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu)}{\log\log t} \geq (1-\varepsilon)\limsup_{t\to\infty} \frac{t}{\log\log t} \cdot \frac{\Delta_t^2}{2\widehat{\sigma}_t^2} = (1-\varepsilon)\cdot 1.$$

注意， ε 当然是任意的。这意味着几乎必然，

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t\,\mathrm{KL}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu)}{\log\log t} \geq 1.$$

再结合定理 1 已经证明的上界，我们确实得到等式。也就是说，

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t\,\mathrm{KL}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu)}{\log\log t} = 1.$$

至此，我们终于完成了。 ■

4. 超越有界情形：扩展至次高斯及其他尾部模式

正如我们已经详细说明的那样，我们施加的有界支撑条件实际上相当重要。原因很简单：即使在右尾任意远处放置质量，我们也能控制 $\mathrm{KL}_{\inf}$。因此，本节将首先形式化地展示 $\mathrm{KL}_{\inf}$ 的这种退化现象。随后，我们将给出一个一般定理，以恢复多种情形下的渐近尾部模式（例如次高斯尾部）。直观而言，我们所做的是对竞争模型类施加一个自然（当然也恰当）的约束。话虽如此，我们首先要严谨地展示这样一个观点：当不受约束时，$\mathrm{KL}_{\inf}$ 会在 $\mathbb{R}$ 上塌缩。设 ν 是 $\mathbb{R}$ 上的任意一个均值有限的概率测度，且 $\bar{\mu} := \int x\, d\nu(x)$。我们来考虑无约束的定义，

$$\mathrm{KL}_{\inf}^{\mathbb{R}}(\nu, m) := \inf\left\{ \mathrm{KL}(\nu\|Q) : Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \int x\, dQ(x) \geq m \right\}.$$

我们将在下一个命题中证明，在没有尾部约束的情况下它会退化。

命题5 假设 $m > \bar{\mu}$。那么，KL散度$_{\inf}^{\mathbb{R}}(\nu, m) = 0$。

这个特定命题所揭示的，正是允许将质量“撒”到远处所导致的结果。也就是说，即使均值有所增加，我们也很容易只付出极小（事实上可以任意小）的 KL代价。为什么？因为竞争类不受约束。因此，看到这个问题时，我们自然会问：如何才能规避它？换言之，我们能否将结果推广到有界随机变量之外？简单而自然的答案是，我们只需施加一个约束，来消除这种“撒质量”的做法。一个简单的推广方式是考虑尾部受控变量这一类。[2] 对于这一类，让我们利用一个不断增长的包络，使得几乎必然最终能将所有样本都包含在内。妙的是，这将为我们带来一个具有时间约束且非平凡的 KL散度$_{\inf}$。为此，我们可以轻松地将此前针对具有有界支撑集的随机变量所做的分析加以推广。这也正是本节的核心。首先，令 $(B_t)_{t\geq 1}$ 为一个确定性且单调不减的序列，其中 $B_t \to \infty$。然后定义时间t 约束版本如下：

$$\mathrm{KL}_{\inf}^{(t)}(\nu, m) := \inf\left\{ \mathrm{KL}(\nu\|Q) : Q \in \mathcal{P}([-B_t, B_t]),\ \int x dQ(x) \geq m \right\}.$$

有趣的是，假设 $\nu = P_t$。在这种情况下，可以这样理解：为了将经验分布扰动为另一个支撑集取值于 $[-B_t, B_t]$、均值至少为 m 的分布，我们需要多少 KL 散度“预算”？说了这么多，现在我们将给出主要定理。先来概述一下：直观而言，若 B_t 相对于对数迭代律尺度增长得足够慢，那么我们确实会再次得到精确的渐近迭代对数律常数 1。简言之，我们提出一个定理，给出具有增长包络的双侧迭代对数律。

定理 6 假设 $X_1, X_2, X_3, \ldots$ 是均值为 μ、方差为 $\sigma^2 \in (0, \infty)$ 的独立同分布实值随机变量。假设几乎必然存在一个有限的（可能是随机的） T_B，使得对所有 $t \geq T_B$ 和所有 $1 \leq i \leq t$，都有 $|X_i| \leq B_t$；其中 B_t 是某个确定性单调不减序列$(B_t)_{t\geq 1}$，且当 $t \to \infty$

$$B_t = o\left(\sqrt{\frac{t}{\log\log t}}\right).$$

那么，

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\limsup_{t\to\infty} \frac{t\,\mathrm{KL}_{\inf}^{(t)}(\widehat{P}_t, \mu)}{\log\log t} = 1\right) = 1.}$$

本定理的证明与有界情形的证明紧密相仿，仅作少量调整。因此，我们将其连同各引理及命题的证明一并推迟到附录中。但值得注意的是，其要点如下。如果我们能够以某种方式控制尾部，从而得到几乎必然包络 B_t =$o(\sqrt{t}$/对数函数 对数函数 $t)$，则我们关于有界支撑的 KL散度$_{\inf}$渐近迭代对数律论证便可推广。也就是说，在验证一致小量参数 $r_t := 2B_t\Delta_t/\hat{\sigma}_t^2$ 满足 $r_t \to 0$ 以概率 1 之后，迭代对数律论证便可推广到时变约束 KL散度$^{(t)}{}_{\inf}$。事实上，我们所得到的 上极限 常数仍为精确的 1。注意，在附录 B 中，我们给出定理 6成立的三类广泛实例：次高斯、次指数以及有限 $p > 2$ 阶矩。最后，在附录 C 中，我们证明该包络的紧性，并说明上述定理为何排除 $p = 2$ 的情形。鉴于附录 C 的重要性，我们如下阐述其主要思想。首先，引理10 给出一个

2. 例如包括次高斯、次指数、有限阶矩等情形。

可行竞争分布 Q，它通过在边界点 B处撒下一小块质量 ε 而得到。由此，我们得到上界 KL散度$^{(t)}$ inf(ν, m) $\leq$ KL散度$(\nu\|Q)$ $\leq -$ 对数函数$(1-\varepsilon)$，并且当 $\nu(\{B\}) = 0$ 时实际上取等，其中 $\varepsilon = (m-\bar{\mu})/(B-\bar{\mu})$，且当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时 $-$对数函数$(1-\varepsilon)$ $\sim \varepsilon$。命题 11 将此进一步推进，把这一所谓的 sprinkling 界与均值迭代对数律结合起来。具体而言，通过该命题我们证明：只要一个几乎必然有效的确定性包络满足 $B_t\sqrt{t}/$对数函数 对数函数 $t \to \infty$，则约束经验代价将在对数函数 对数函数 t 尺度上塌缩。危险的是，我们将有，

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t\,\mathrm{KL}_{\inf}^{(t)}(\widehat{P}_t, \mu)}{\log\log t} = 0.$$

接着，在引理 12 中，我们给出一个弱二阶矩假设下的 Borel–Cantelli 判据，以证明（首先）某个特定包络的有效性。换言之，如果确实有 $\sum_t 1/B_t^2 < \infty$，那么我们便有：对于所有 $i \leq t$， $|X_i| \leq B_t$ 最终几乎必然成立。也就是说： $B_t = \max_{s\leq t}\sqrt{s}(\log s)^\gamma$，其中 $\gamma > \frac{1}{2}$ 是一个几乎必然有效的确定性包络。我们在推论 13 中将这一思路与命题 11 结合起来。具体而言，在 $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ 条件下，这类包络会迫使 log log t 归一化发生同样的坍缩。最后，我们以命题 14 结束本节，在该命题中我们证明，仅凭 $p = 2$，一般无法验证定理 6 的关键假设：存在一个概率一包络，使得 $B_t = o(\sqrt{t}/\log\log t)$。请注意，我们通过构造一个有限方差分布来证明这一点，对于该分布，$|X_t| > \sqrt{t}/\log\log t$ 会无穷多次几乎必然成立。

总之，附录 C 中的所有结果表明， $\sqrt{t}/$对数对数函数 t 是确定性包络的一条精确边界。这意味着：如果我们低于这条边界（假设该包络可以验证），就会始终处于定理 6 的局部二次区域内，且精确常数为 1。然而，当随机稀疏化占主导地位并迫使归一化代价趋于 0时，若高于该包络，精确性便不再成立。

5. 结论

本文建立了经验 KL散度的首个精确迭代对数律。具体而言，我们证明了

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t\,\mathrm{KL}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu)}{\log\log t} = 1 \quad \text{almost surely.}$$

我们首先对取值落在紧支撑集上的随机变量证明了这一点。随后，我们通过增长缓慢的包络将其扩展到无界数据：包络为 $[-B_t, B_t]$ with $B_t = o(\sqrt{t}/\log\log t)$，最终几乎必然会包含这些数据。关键的是，我们得到了概率为一次的局部等价关系：$\mathrm{KL}_{\inf}(\hat{P}_t, \mu) = (1+o(1))(\mu - \widehat{\mu}_t)_+^2/(2\widehat{\sigma}_t^2)$。这一局部等价关系的好处在于，它使得迭代对数常数可以直接从经典均值迭代对数律中显而易见地得出。综上所述，未来仍有若干值得探索的方向。一个直接的方向是分析高维（或多重矩）约束。在这些情形下，曲率和可行性会变得微妙得多，尽管信息投影仍然十分自然。此外，我们的论文采用了标准的独立同分布数据设定。因此，将这些结果扩展到相关数据（例如鞅、混合过程或马尔可夫链）无疑很有价值，因为迭代对数律的行为很可能仍会持续。不过，分析这些情形需要采用不同的工具（Stout, 1970; de la Pe˜na et al., 2009; Howard et al., 2021; Dembo and Zeitouni, 1998）。

参考文献

Peter Auer、Nicol`o Cesa-Bianchi 和 Paul Fischer。多臂老虎机问题的有限时间分析。《机器学习》，47(2):235–256，2002。doi: 10.1023/A:1013689704352。Akshay Balsubramani。鞅集中中的尖锐有限时间迭代对数律，2015。URL https://arxiv.org/abs/1405.2639。Nicholas H. Bingham。迭代对数律的变体。《伦敦数学会通报》，18(5):433–467，1986。doi: 10.1112/blms/18.5.433。St´ephane Boucheron、G´abor Lugosi 和 Pascal Massart。《集中不等式：独立性的非渐近理论》。牛津大学出版社，2013。ISBN 978-0199535255。doi: 10.1093/acprof:oso/9780199535255.001.0001。S´ebastien Bubeck 和 Nicol`o Cesa-Bianchi。随机与非随机多臂老虎机问题的遗憾分析。《机器学习趋势与基础》，5(1):1–122，2012。doi: 10.1561/2200000024。Apostolos N. Burnetas 和 Michael N. Katehakis。序贯分配问题的最优自适应策略。《应用数学进展》，17(2):122–142，1996。doi: 10.1006/aama. 1996.0007。Olivier Capp´e、Aur´elien Garivier、Odalric-Ambrym Maillard、R´emi Munos 和 Gilles Stoltz。最优序贯分配的Kullback–Leibler上置信界。《统计年刊》，41(3):1516–1541，1924。doi: 10.1214/13-AOS1119。Kai Lai Chung。关于独立随机变量序列的最大部分和。《美国数学会汇刊》，64(2):205–233，1948。doi: 10. 1090/S0002-9947-1948-0026274-0。URL https://www.ams.org/journals/tran/ 1948-064-02/S0002-9947-1948-0026274-0/。Harald Cram´er。论概率论中的一个新极限定理。科学与工业新论丛，736:5–23，1938。Imre Csisz´ar。概率分布的 I-散度几何与最小化问题。《概率年刊》，3(1):146–158，1975。doi: 10.1214/aop/1176996454。Imre Csisz´ar。Sanov性质、广义 I-投影与条件极限定理。《概率年刊》，12(3):768–793，1984。doi: 10.1214/aop/1176993227。Imre Csisz´ar 和 Franti˘sek Mat´u˘s。信息投影再探。《IEEE信息论汇刊》，49(6):1474–1490，2003。doi: 10.1109/TIT.2003.810633。Donald A. Darling 和 Herbert Robbins。均值、方差与中位数的置信序列。《美国国家科学院院刊》，58(1):66–68，1967。doi: 10.1073/pnas.58.1.66。Alejandro de Acosta。Hartman–Wintner迭代对数律的新证明。《概率年刊》，11(2):270–276，1983。doi: 10.1214/aop/1176993596。

Victor H. de la Pe˜na、Tze Leung Lai 和 Qi-Man Shao。《自归一化过程：极限定理与统计应用》。Probability and Its Applications。Springer，2009年。ISBN 978-3-540-85635-1。doi：10.1007/978-3-540-85636-8。Paul Deheuvels 和 David M. Mason。以集合为指标的局部经验过程的迭代对数函数律。《概率年刊》，22(3):1619–1661，1994年。doi：10.1214/aop/ 1176988617。Amir Dembo 和 Ofer Zeitouni。《大偏差技术与应用》，随机建模与应用概率丛书第38卷。Springer，第2版，1998年。Monroe D. Donsker 和 S. R. Srinivasa Varadhan。某些马尔可夫过程期望在大时间下的渐近估值，I。《纯粹与应用数学通讯》，28(1):1–47，1975年。doi：10.1002/cpa.3160280102。Paul Dupuis 和 Richard S. Ellis。《大偏差理论的弱收敛方法》。威利概率与统计丛书。Wiley-Interscience，1997年。ISBN 978-0-471-07672-8。doi：10.1002/9781118165904。John H. J. Einmahl 和 Andrew Rosalsky。基于样本均值的经验过程的迭代对数函数律。《理论概率杂志》，14(2):577–597，2001年。doi：10.1023/A:1011128101094。Will Feller。所谓迭代对数律的一般形式。《美国数学会汇刊》，54(3):373–402，1943年。doi：10.1090/ S0002-9947-1943-0009263-7。Aur´elien Garivier 和 Olivier Capp´e。适用于有界随机多臂老虎机及更广泛情形的KL-UCB算法。载于《第24届学习理论年会论文集（COLT）》，机器学习研究论文集第19卷，第359–376页。PMLR，2011年。John C. Gittins。《多臂老虎机分配指标》。Wiley-Interscience系统与优化丛书。John Wiley & Sons，1989年。ISBN 978-0471920595。Philip Hartman 和 Aurel Wintner。关于迭代对数律。《美国数学杂志》，63(1):169–176，1941年。Junya Honda 和 Akimichi Takemura。适用于有界支撑模型的渐近最优老虎机算法。载于《第23届学习理论会议论文集（COLT）》，第67–79页，2010年。Junya Honda 和 Akimichi Takemura。针对半有界奖励的新型老虎机算法的非渐近分析。《机器学习研究杂志》，16(1):3721–3756，2015年。Steven R. Howard、Aaditya Ramdas、Jon McAuliffe 和 Jasjeet Sekhon。通过非负超鞅得到时间一致的切尔诺夫界。《概率调查》，17:257–317，2020年。doi：10.1214/ 18-PS321。Steven R. Howard、Aaditya Ramdas、Jon McAuliffe 和 Jasjeet S. Sekhon。时间一致、非参数、非渐近置信序列。《统计年刊》，49(2):1055–1080，2021年。doi：10.1214/20-AOS1991。

Emilie Kaufmann、Olivier Capp´e 和 Aur´elien Garivier。关于多臂老虎机问题的贝叶斯上置信界。载于《第十五届人工智能与统计国际会议（AISTATS）论文集》，机器学习研究论文集第22卷，第592–600页。PMLR，2012年。¨A. Khinchin。关于概率论中的一个定理。Fundamenta Mathematicae，6(1):9–20，1924年。网址：http://eudml.org/doc/214283。¨A. Kolmogoroff。关于迭代对数律。Mathematische Annalen，101(1):126–135，1929年。doi：10.1007/BF01454828。网址：http://eudml.org/doc/159322。Solomon Kullback 和 Richard A. Leibler。关于信息与充分性。The Annals of Mathematical Statistics，22(1):79–86，1951年。doi：10.1214/aoms/1177729694。Tze Leung Lai 和 Herbert Robbins。渐近有效的自适应分配规则。Advances in Applied Mathematics，6(1):4–22，1985年。doi：10.1016/0196-8858(85)90002-8。Tor Lattimore 和 Csaba Szepesv´ari。《多臂老虎机算法》。剑桥大学出版社，2020年。ISBN 978-1108486828。doi：10.1017/9781108571401。David M. Mason。局部经验过程的一致函数对数律。《概率年刊》，32(2):1391–1418，2004年。doi：10.1214/009117904000000243。Art B. Owen。单个泛函的经验似然比置信区间。Biometrika，75(2):237–249，1988年。doi：10.1093/biomet/75.2.237。Art B. Owen。《经验似然》，统计学与应用概率专著第92卷。Chapman & Hall/CRC，2001年。ISBN 978-1584880714。doi：10.1201/9781420036152。Herbert Robbins。序贯实验设计的若干方面。Bulletin of the American Mathematical Society，58(5):527–535，1952年。doi：10.1090/S0002-9904-1952-09620-8。Igor Nikolaevich Sanov。关于随机量大偏差的概率。Matematicheskii Sbornik (N.S.)，42(84)(1):11–44，1957年。Galen R. Shorack 和 Jon A. Wellner。《经验过程及其在统计学中的应用》。Wiley 概率与数理统计丛书。John Wiley & Sons，1986年。William F. Stout。鞅的Hartman–Wintner迭代对数律。The Annals of Mathematical Statistics，41(6):2158–2160，1970年。doi：10.1214/aoms/1177696716。William F. Stout。《几乎必然收敛》。Academic Press，1974年。ISBN 978-0126727500。Volker Strassen。迭代对数律的不变性原理。Zeitschrift f¨ur Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete，3(3):211–226，1964年。doi：10.1007/ BF00534910。Henry Teicher。关于迭代对数律。《概率年刊》，2(4):714–728，1974年。doi：10.1214/aop/1176996614。

Aad W. van der Vaart 和 Jon A. Wellner。弱收敛与经验过程：及其在统计学中的应用。Springer统计学丛书。Springer，1996年。ISBN 978-0-387-94640- 5。doi: 10.1007/978-1-4757-2545-2。

Abraham Wald。序贯分析。John Wiley & Sons，1947年。

附录 A. 省略的证明

证明 [引理的证明 2] 这个证明很容易看出。我们先固定 $r \in (0,1)$，当然还有$u \in [-r, r]$。我们将使用带余项的泰勒定理来近似 $f(u)$ 在 $u = 0$附近的取值。我们知道 $f(u) = -$ 对数函数$(1+u)$是三次可微的（即，在 C^3 中），且定义在区间 $[-r, r]$ 上。因此，我们可以写出三阶展开式：

$$f(u) = f(0) + f'(0)u + \frac{f''(0)}{2}u^2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}u^3,$$

其中 ξ 是介于 0 和 u 之间的某个中间值。现在来计算 $f(u)$ 的前三阶导数，并在 $u = 0$ 处求值。显然，$f(0) = -$对数函数$(1+0) = 0.$接着，$f'(u) = -\frac{1}{1+u}$，因此 $f'(0) = -1$，且 $f''(u) = \frac{-1}{(1+u)^2}$，所以 $f''(0) = 1$。最后，$f(3)(v) = -\frac{2}{(1+v)^3}$。显然，由于 $\xi \in [-r, r]$，我们有 $(1+\xi) \geq (1-r)$。因此，我们可以轻松地对余项进行界定，使其不依赖于 ξ 的确切取值：$|f^{(3)}(\xi)| \leq \frac{2}{(1-r)^3}$。因此，我们得到，

$$f(u) \leq -u + \frac{u^2}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{(1-r)^3} |u|^3 = -u + \frac{u^2}{2} + \frac{|u|^3}{3(1-r)^3},$$

这正是我们要证明的结论，因此证明完毕！ ■

证明 [引理 4] 的证明假设 $\int e^{\varphi} dQ = +\infty$。如果确实如此，那么我们就知道引理中的右侧变为 $-\infty$。因此，不等式显然成立。所以，不失一般性，假设 $\int e^{\varphi} dQ \in (0, \infty)$，并令 $Z := \int e^{\varphi} dQ$。接着，我们通过指数倾斜定义一个概率测度 Q^{φ}。也就是说，$\frac{dQ^{\varphi}}{dQ} := \frac{e^{\varphi}}{Z}$。我们知道 φ 是实值的，因此 $e^{\varphi} > 0$ 处处成立，进而可知 Q^{φ} 和 Q 具有相同的零测集。具体而言，$\nu \ll Q$蕴含 $\nu \ll Q^{\varphi}$。考察 $\frac{d\nu}{dQ^{\varphi}}$ 有定义的集合，即几乎必然成立的 ν，将拉东-尼科迪姆链式法则写为：$\frac{d\nu}{dQ} = \frac{d\nu}{dQ^{\varphi}} \cdot \frac{dQ^{\varphi}}{dQ}$。因此，我们得到$\log\left(\frac{d\nu}{dQ}\right) = \log\left(\frac{d\nu}{dQ^{\varphi}}\right) + \log\left(\frac{dQ^{\varphi}}{dQ}\right) = \log\left(\frac{d\nu}{dQ^{\varphi}}\right) + \varphi - \log Z$。现在对两边关于 ν积分。这样就得到：

$$\begin{aligned}
\mathrm{KL}(\nu \| Q) &= \int \log\left(\frac{d\nu}{dQ}\right) d\nu \\
&= \int \log\left(\frac{d\nu}{dQ^{\varphi}}\right) d\nu + \int \varphi \, d\nu - \log Z \\
&= \mathrm{KL}(\nu \| Q^{\varphi}) + \int \varphi \, d\nu - \log\left(\int e^{\varphi} \, dQ\right).
\end{aligned}$$

显然， $\mathrm{KL}(\nu\|Q^{\varphi}) \geq 0$，而且它也可能是 $+\infty$。但无论如何，利用这一事实，我们得到：

$$\mathrm{KL}(\nu\|Q) \geq \int \varphi d\nu - \log\left(\int e^{\varphi} dQ\right),$$

这正是要证明的结论，因此证明到此结束。 ■

证明 [命题 5] 的证明 我们已在第一节开头直观地解释过这个证明，因此证明思路非常显然。首先，取一个 $\varepsilon \in (0,1)$，并选取足够大的 $M \in \mathbb{R}$，使得我们有 $(1-\varepsilon)\bar{\mu} + \varepsilon M \geq m$。然后，定义混合测度 $Q_{\varepsilon,M} := (1-\varepsilon)\nu + \varepsilon\delta_M$。由此可得两点。首先，我们知道$Q_{\varepsilon,M}$ 必须是 $\mathbb{R}$ 上的概率测度。其次，它也必然满足均值约束。原因很容易看出。根据定义，它满足 $\int x dQ_{\varepsilon,M}(x) = (1-\varepsilon)\int x d\nu(x) + \varepsilon M = (1-\varepsilon)\bar{\mu} + \varepsilon M \geq m$，这是由我们对 M 的构造得到的。此外，对于任意可测集 A，都有关系 $Q_{\varepsilon,M}(A) \geq (1-\varepsilon)\nu(A)$，因此必有$Q_{\varepsilon,M}$ 支配 ν。这一点对我们尤其重要，因为由此可得，若$Q_{\varepsilon,M}(A)$ 为 0，则 $\nu(A) = 0$随之成立。因此，$\nu \ll Q_{\varepsilon,M}$，且 $\mathrm{KL}(\nu\|Q_{\varepsilon,M})$ 有限。现在我们将给出 $\mathrm{KL}(\nu\|Q_{\varepsilon,M})$ 的上界。接下来，令 $L := \frac{d\nu}{dQ_{\varepsilon,M}}$。我们将证明， ν-几乎处处有$L \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$。原因很容易看出。事实上，任取一个 $\delta > 0$，并令 $A_\delta := \{L > \frac{1}{1-\varepsilon} + \delta\}$。于是可得，

$$\nu(A_\delta) = \int_{A_\delta} L\, dQ_{\varepsilon,M} > \Big(\frac{1}{1-\varepsilon}+\delta\Big) Q_{\varepsilon,M}(A_\delta) \geq \Big(\frac{1}{1-\varepsilon}+\delta\Big)(1-\varepsilon)\nu(A_\delta) = \big(1+\delta(1-\varepsilon)\big)\nu(A_\delta).$$

由此可见，在这种情况下， $\nu(A_\delta)$ 必须为 0（否则就会与它是非负概率测度这一事实矛盾）。现在，我们知道 $\delta > 0$是任意的。因此，鉴于 $\nu(A_\delta)$ 是一个测度为 0 的事件，在 ν 下几乎必然有 $L \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$。由此，我们可以得出结论：

$$\mathrm{KL}(\nu\|Q_{\varepsilon,M}) = \int \log\left(\frac{d\nu}{dQ_{\varepsilon,M}}\right) d\nu = \int \log(L)\, d\nu \leq \log\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right) = -\log(1-\varepsilon).$$

注意，我们也任意选取了 $\varepsilon \in (0,1)$。并且， $-\log(1-\varepsilon) \downarrow 0 \text{ as } \varepsilon \downarrow 0$。因此我们得到$0 \leq \mathrm{KL}$散度$^{\mathbb{R}}_{\inf}(\nu, m) \leq \inf^{\varepsilon\in(0,1)}(-\log(1-\varepsilon)) = 0$。于是，KL散度$^{\mathbb{R}}_{\inf}(\nu, m)$ 为 0，证明完毕。 ■

证明 [定理 6] 的证明。在开始证明之前，我们先说明，在全文中，我们都在一个概率为一事件上进行讨论，在该事件上以下三点成立：均值迭代对数律、 $\widehat{\sigma}_t^2 \to \sigma^2$这一事实，以及包络性质对所有足够大的 t 均成立。现在开始，考虑一个特定但任意选取的结果 ω t $|X_i\ \omega\ | \leq B_t$，并将其限制为足够大，使得 ( ) 对所有 $i \leq t$ 均成立。那么， P_t 确实支撑在 $[-B_t, B_t]$ 上。此时，我们知道，只需将 $[a,b] = [-B_t, B_t]$、 $b-a = 2B_t$ 替换为.....，并将 $\mathrm{KL}_{\inf}$ 替换为 $\mathrm{KL}^{(t)}$ inf，有界支撑情形下的证明便可直接适用。当 $m > B_t$ 时，我们知道约束集为空，因此 $\mathrm{KL}^{(t)}$ inf $(\nu, m) = +\infty$。但在我们的应用中， $m = \mu$ 且 $B_t \to \infty$。因此，对于所有足够大的 t，我们的约束当然确实可行。我们知道，定理1的上界构造使用仿射倾斜 $\frac{dQ_t}{d\widehat{P}_t}(x) = 1 + \theta_t(x - \widehat{\mu}_t)$ 以及 $\theta_t = \frac{\Delta_t}{\widehat{\sigma}_t^2}$和 $\Delta_t = (\mu - \widehat{\mu}_t)_+$。请注意,一实际上我们唯一需要有界性的地方,—是为了保证 $1 + \theta_t(x - \widehat{\mu}_t)$

在整个支撑集上始终为正。在这里，我们知道 $x \in [-B_t, B_t]$ 且$\widehat{\mu}_t \in [-B_t, B_t]$，因此得到 $|x - \widehat{\mu}_t| \leq 2B_t$。由此可得，

$$\inf_{x \in [-B_t, B_t]} (1 + \theta_t(x - \widehat{\mu}_t)) \geq 1 - 2B_t\theta_t.$$

因此，只需 $2B_t\theta_t \to 0$ 几乎必然成立即可。我们知道 $\theta_t = \Delta_t/\widehat{\sigma}_t^2$，并且$\widehat{\sigma}_t^2 \to \sigma^2 > 0$。均值迭代对数律告诉我们，事实上，沿着完整序列（即通过上极限），Δ_t几乎必然为 $O(\sqrt{}$(对数函数 对数函数 t) $/t)$。因此，我们可以看到，几乎必然地，

$$2B_t\theta_t \;=\; 2B_t\frac{\Delta_t}{\widehat{\sigma}_t^2} \;=\; o\left(\sqrt{\frac{t}{\log\log t}}\right) \cdot O\left(\sqrt{\frac{\log\log t}{t}}\right) \;\xrightarrow[t\to\infty]{}\; 0.$$

这说明，对于所有足够大的 t，倾斜将是可行的（并且当然支撑于$[-B_t, B_t]$上）。因此，它将适用于 $\mathrm{KL}^{(t)}{}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu)$。在这个上界中，我们还需要考虑的一点是泰勒余项。然而，在有界证明中，我们知道这些泰勒项随一致半径 r_t 的幂次缩放：$= \theta_t(b - a) = \theta_t(2B_t) = 2B_t\theta_t$。我们刚刚证明了 $r_t \to 0$ wp 1。因此，同样的论证给出了上渐近界：几乎必然地，

$$\mathrm{KL}^{(t)}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu) \leq (1 + o(1))\frac{\Delta_t^2}{2\widehat{\sigma}_t^2}.$$

现在让我们着手证明下界，从而完成证明。我们将采用之前使用过的相同下界变分论证。不过，在此过程中，我们会以一种仅依赖于一致小量参数的方式追踪余项。取一个特定的 t，使其足够大，从而 P_t 支撑在 $[-B_t, B_t]$ 上，且 $B_t \geq |\mu|$（我们知道这最终必然成立，因为 B_t 被送至 ∞）。现在考虑某个可行的 $Q \in \mathcal{P}([-B_t, B_t])$，其中$\int x dQ(x) \geq \mu$，以及任意一个 $\lambda \in [0, 1/(B_t - \mu))$。那么，恰如式 (4) 中所示，我们知道，选取相同的 $\varphi_\lambda(x) := \log(1 + \lambda(\mu - x))$，便有：

$$\mathrm{KL}^{(t)}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu) \;\geq\; \int \log\left(1 + \lambda(\mu - x)\right) d\widehat{P}_t(x).$$

现在选取一个 $\lambda = \lambda_t := \Delta_t/\widehat{\sigma}_t^2$。注意，当 t 足够大时，我们知道它属于 $[0, 1/(B_t - \mu))$。（因为我们知道，最终 $B_t \geq |\mu|$，且 wp 1，$r_t := 2B_t\lambda_t \to 0$。因此显然，对于所有足够大的 t，都有 $\lambda_t(B_t - \mu) \leq \lambda_t(B_t + |\mu|) \leq 2B_t\lambda_t = r_t < 1$。）现在，令 $X \sim P_t$，并设 $U_t := \lambda_t(\mu - X)$。于是，对于所有 $x \in [-B_t, B_t]$，$|\mu - x| \leq |\mu| + B_t \leq 2B_t$。因此，$|U_t| \leq \lambda_t \cdot 2B_t =: r_t$。现在，在我们的几乎必然事件上，$\Delta_t = O(\sqrt{}$(对数函数 对数函数 t) $/t)$ 且$\widehat{\sigma}_t^2 \to \sigma^2 > 0$。由此可知，以概率一，

$$r_t = 2B_t\lambda_t = 2B_t\frac{\Delta_t}{\widehat{\sigma}_t^2} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

也就是说，对于所有 t 足够大的值，我们有 $r_t < 1$。当 $r_t = 0$ 时，我们有$U_t \equiv 0$，因此该不等式显然成立。因此，应用引理 2 时，我们可以只考虑 $r_t \in (0,1)$ 这一情形。现在就这样做，即应用引理 2，取 $r = r_t$。这样得到：

$$\log(1 + U_t) \;\geq\; U_t - \frac{U_t^2}{2} - \frac{|U_t|^3}{3(1 - r_t)^3}.$$

此外，我们知道，由于 $|U_t| \le r_t$ 正如上文所示，因此可得 $|U_t|^3 \le r_t U_t^2$。现在来取期望。这样做并利用上述所有结果，可得：

$$\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[\log(1+U_t)] \ge \mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[U_t] - \left(\frac{1}{2} + \frac{r_t}{3(1-r_t)^3}\right)\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[U_t^2].$$

我们来看与我们相关的情形，具体而言，即 $\Delta_t > 0$ 的情形，因此必有 $\lambda_t > 0$。在这种情况下，我们有 $\mu - \widehat{\mu}_t = \Delta_t$。此外，我们知道 $\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[U_t] = \lambda_t(\mu - \widehat{\mu}_t) = \lambda_t \Delta_t$。并且，$\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[U_t^2] = \lambda_t^2 \mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[(\mu - X)^2] = \lambda_t^2(\widehat{\sigma}_t^2 + \Delta_t^2)$。请注意，前一步的最后一步成立，理由与之前相同，即利用了 $(\mu - X) = (\mu - \widehat{\mu}_t) + (\widehat{\mu}_t - X)$ 以及 $\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[\widehat{\mu}_t - X] = 0$ 这一事实。现在我们代入 $\lambda_t = \Delta_t/\widehat{\sigma}_t^2$。这样可得 $\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[U_t] = \frac{\Delta_t^2}{\widehat{\sigma}_t^2}$和 $\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[U_t^2] = \frac{\Delta_t^2}{\widehat{\sigma}_t^2} + \frac{\Delta_t^4}{\widehat{\sigma}_t^4}$。因此我们得到，

$$\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[\log(1+U_t)] \;\ge\; \frac{\Delta_t^2}{\widehat{\sigma}_t^2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{r_t}{3(1-r_t)^3}\right)\left(\frac{\Delta_t^2}{\widehat{\sigma}_t^2} + \frac{\Delta_t^4}{\widehat{\sigma}_t^4}\right).$$

注意到，如我们所知，$r_t \to 0$ and $\Delta_t \to 0$ 以概率一成立。因此，由此可知，项 $\frac{1}{2} + \frac{r_t}{3(1-r_t)^3}$不过就是 $\frac{1}{2} + o(1)$，而包含 Δ_t^4 的最后一项当然可简化为 $o(\Delta_t^2)$。因此我们得到，以概率一，

$$\mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[\log(1+U_t)] \ge (1 - o(1))\frac{\Delta_t^2}{2\widehat{\sigma}_t^2}.$$

现在回忆一下，对于我们所选的 λ_t，有 $\mathrm{KL}^{(t)}{}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu) \ge \mathbb{E}_{\widehat{P}_t}[\log(1+U_t)]$。因此我们几乎必然得到，

$$\mathrm{KL}_{\inf}^{(t)}(\widehat{P}_t, \mu) \ge (1 - o(1))\frac{\Delta_t^2}{2\widehat{\sigma}_t^2}.$$

现在，我们已经证明了上界 $\mathrm{KL}^{(t)}{}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu) \le (1 + o(1))\frac{\Delta_t^2}{2\widehat{\sigma}_t^2}$。因此，上下界我们都有了！由此可知，几乎必然地，当 $t \to \infty$ 时，

$$\mathrm{KL}_{\inf}^{(t)}(\widehat{P}_t, \mu) = \big(1 + o(1)\big)\frac{\Delta_t^2}{2\widehat{\sigma}_t^2}.$$

我们知道，经典均值迭代对数律意味着，如式（3）中所示，几乎必然有 $\limsup_{t\to\infty} \frac{\Delta_t^2}{(2\sigma^2 \text{对数对数} t)/t} = 1$。现在，我们也有 $\widehat{\sigma}_t^2 \to \sigma^2$ 的几乎必然收敛。这告诉我们，

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t}{\log\log t} \cdot \frac{\Delta_t^2}{2\widehat{\sigma}_t^2} = 1,$$

和 s o 因此，利用我们已证明的渐近等价性，我们得到以概率一，

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t\ \mathrm{KL}_{\inf}^{(t)}(\widehat{P}_t, \mu)}{\log\log t} = 1,$$

这就完成了我们的证明！ ■

附录 B. 定理 6 的应用

现在，我们之所以知道定理6 如此强大，是因为它将问题简化为只需验证几乎必然包络 $|X_i| \le B_t$ 对所有 $i \le t$ 最终成立，其中 $B_t = o(\sqrt{t}/$对数函数 对数函数 $t)$。这样的定理只有在我们知道它对各种尾部情形都成立时才有用。因此，这正是我们将要证明的。第一个是针对次高斯尾部。也就是说，假设存在 $v > 0$使得对所有 $x \ge 0$,

$$\mathbb{P}(|X_1 - \mu| > x) \le 2\exp\left(-\frac{x^2}{2v}\right). \tag{9}$$

根据次高斯尾部的这一定义，我们将给出以下引理，描述次高斯随机变量的几乎必然包络。

引理 7 假设 (9) 成立。考虑任意一个 $\varepsilon > 0$ 并定义：

$$u_t := \sqrt{2(v+\varepsilon)\log t}, \qquad B_t := |\mu| + u_t.$$

那么，几乎必然存在 $T < \infty$，使得对于所有 $t \ge T$ 和所有 $1 \le i \le t$，都有$|X_i| \le B_t$。此外， $B_t = o(\sqrt{t}/$对数函数 对数函数 $t)$。

证明 根据平稳性，对于每个整数 $t \ge 3$，我们有：

$$\mathbb{P}(|X_t - \mu| > u_t) = \mathbb{P}(|X_1 - \mu| > u_t) \le 2\exp\left(-\frac{u_t^2}{2v}\right) = 2\exp\left(-\frac{v+\varepsilon}{v}\log t\right) = 2t^{(-1+\varepsilon/v)}.$$

注意 $1+\varepsilon/v > 1$，因此级数 $\sum_{t\ge 3} t^{-(1+\varepsilon/v)}$ 确实收敛。也就是说，$\sum_{t=3}^{\infty}\mathbb{P}(|X_t-\mu| > u_t) < \infty$。于是由博雷尔-坎泰利引理 1，我们可以断定 $\mathbb{P}(|X_t-\mu| > u_t$无穷多次) 确实必为 0。换言之，以概率 1 存在一个随机的 T_0，使得对所有$t \ge T_0$，我们有 $|X_t - \mu| \le u_t$。现在，我们知道 u_t 关于 t单调不减，因此对任意 $t \ge T_0$，$\max_{T_0\le i\le t}|X_i - \mu| \le u_t$。现在我们定义（有限的）随机常数$M_0 := \max_{1\le i\le T_0}|X_i - \mu|$。我们知道 $u_t \to \infty$。由此可知，存在T_1，使得对所有 $t \ge T_1$，$u_t \ge M_0$。于是，对所有 $t \ge \max\{T_0, T_1\}$，我们有，

$$\max_{1\le i\le t}|X_i - \mu| = \max\left\{\max_{1\le i\le T_0}|X_i - \mu|, \max_{T_0\le i\le t}|X_i - \mu|\right\} \le \max\{M_0, u_t\} = u_t.$$

因此，对于所有这样的 t 以及所有 $1 \le i \le t$，都有 $|X_i| \le |\mu| + |X_i - \mu| \le |\mu| + u_t = B_t$。这证明了我们的包络性质。最后，注意我们的$B_t = |\mu| + \sqrt{2(v+\varepsilon)}$ 对数函数 t 满足：

$$\frac{B_t}{\sqrt{t/\log\log t}} = \frac{|\mu|}{\sqrt{t/\log\log t}} + \sqrt{2(v+\varepsilon)}\frac{\sqrt{\log t}\sqrt{\log\log t}}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

因此，结论是确实有 $B_t = o(\sqrt{t}/$对数函数 对数函数 $t)$。至此，我们已经证明次高斯尾部满足这两个性质。至此，我们的证明完成。 ■

请注意，若我们采用引理 7 和定理 6的结果，就能得到关于次高斯随机变量的所需“相同”迭代对数律陈述。也就是说，将另一类数据限制在一个增长缓慢、最终几乎必然包含数据的包络内，会带来一个美妙的结果：经验 KL散度$_{\inf}$ 再次满足具有精确常数的精确迭代对数律1。当然，除了次高斯随机变量之外，我们也可以为次指数随机变量选取这样的序列。具体而言，我们也可以为次指数随机变量精心构造一个几乎必然包络。

引理 8 假设存在常数 $K, c > 0$，使得对所有 $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}(|X_1 - \mu| > x) \leq Ke^{-cx}.$$

然后，考虑任意一个 $\varepsilon > 0$，并定义 $t \geq 3$,

$$u_t := \frac{1+\varepsilon}{c} \log t, \qquad B_t := |\mu| + u_t,$$

并以某种方式定义 $B_1 := B_2 := B_3$，使得 $(B_t)_{t\geq 1}$ 单调不减。那么，几乎必然存在 $T < \infty$, 使得对所有 $t \geq T$ 和所有 $1 \leq i \leq t$，都有 $|X_i| \leq B_t$。此外， $B_t = o(\sqrt{t}/\text{对数对数 } t)$。

证明 在开始证明之前，我们先指出，次指数证明与次高斯情形的证明思路非常相似。具体而言，首先，对每个整数 $t \geq 3$，我们结合平稳性和假设的尾界。由此可得,

$$\mathbb{P}(|X_t - \mu| > u_t) = \mathbb{P}(|X_1 - \mu| > u_t) \leq Ke^{-cu_t} = Ke^{-(1+\varepsilon)\log t} = Kt^{-(1+\varepsilon)}.$$

现在，级数 $\sum_{t\geq 3} Kt^{-(1+\varepsilon)} < \infty$。因此，根据博雷尔-坎特利引理 1，我们再次得到 $\mathbb{P}(|X_t - \mu| > u_t)$ 无穷多次发生的概率为 0。因此，几乎必然存在有限的 T_0，使得对所有 $t \geq T_0$，都有 $|X_t - \mu| \leq u_t$。注意，(u_t) 单调不减。因此，对于任意 $t \geq T_0$ 和任意 $T_0 \leq i \leq t$，都有 $|X_i - \mu| \leq u_i \leq u_t$。由此可得 $\max_{T_0 \leq i \leq t} |X_i - \mu| \leq u_t$。现在令 $M_0 := \max_{1\leq i\leq T_0} |X_i - \mu| < \infty$。再次令 $u_t \to \infty$ 趋于无穷。因此，存在 T_1，使得对所有 $t \geq T_1$，都有 $u_t \geq M_0$。于是，对所有 $t \geq \max\{T_0, T_1\}$，都有 $\max_{1\leq i\leq t} |X_i - \mu| \leq u_t$。因此，对所有 $1 \leq i \leq t$，$|X_i| \leq |\mu| + |X_i - \mu| \leq |\mu| + u_t = B_t$，这就证明了包络性质。剩下要证明的是 $B_t = o(\sqrt{t}/\text{对数对数 } t)$。容易看出,

$$\frac{B_t}{\sqrt{t/\log\log t}} = \frac{|\mu|}{\sqrt{t/\log\log t}} + \frac{1+\varepsilon}{c} \cdot \frac{\log t \cdot \sqrt{\log\log t}}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0,$$

因此，证明到此结束；我们再次证明了这两个性质均得到满足，这次针对的是次指数随机变量。 ■

最后，我们为任意具有有限 p 阶矩的随机变量给出一个几乎必然包络 .

引理 9 假设 $\mathbb{E}[|X_1|^p] < \infty$ 对某个 $p > 2$ 成立。任取 $\gamma > 1/p$，并对 $t \geq 3$ 定义,

$$u_t := t^{1/p}(\log t)^{\gamma}, \qquad B_t := \max_{3\leq s\leq t} u_s,$$

并定义 $B_1 := B_2 := B_3$。于是，$(B_t)_{t\geq 1}$ 是确定性的、单调不减的，并且 $B_t \to \infty$。此外，显然存在一个 $T < \infty$，使得对所有 $t \geq T$ 和所有 $1 \leq i \leq t$，都有 $|X_i| \leq B_t$，且 $B_t = o(\sqrt{t}/\text{对数函数对数函数 } t)$。

证明 再一次，对于每个整数 $t \geq 3$，我们应用马尔可夫不等式以及相同的平稳性。由此可得,

$$\mathbb{P}(|X_t| > u_t) = \mathbb{P}(|X_1| > u_t) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_1|^p]}{u_t^p} = \frac{\mathbb{E}[|X_1|^p]}{t(\log t)^{p\gamma}}.$$

我们知道 $p\gamma > 1$。因此，级数 $\sum_{t\geq 3} t \quad {}^{1}{}_{t(\text{对数函数})^{p\gamma}}$ 收敛。所以，$\sum_{t=3}^{\infty} \mathbb{P}(|X_t| > u_t) < \infty$。因此，同一个博雷尔-坎特利引理 1 告诉我们，$\mathbb{P}(|X_t| > u_t)$ 无穷多次确实必定为零。换句话说，以概率 1，存在有限的 T_0，使得对所有 $t \geq T_0$，$|X_t| \leq u_t$。根据我们的构造，$B_t \geq u_t$ 和 B_t 是单调不减的。因此，对于任意 $t \geq T_0$ 和任意 $T_0 \leq i \leq t$，都有 $|X_i| \leq u_i \leq B_i \leq B_t$。从而 $\max_{T_0 \leq i \leq t} |X_i| \leq B_t$。令 $M_0 := \max_{1 \leq i \leq T_0} |X_i| < \infty$。我们知道 $B_t \to \infty$。因此，存在 T_1，使得对所有 $t \geq T_1$，$B_t \geq M_0$。因此，对所有满足 $t \geq \max\{T_0, T_1\}$ 的情形，都有 ~~$\max_{1 \leq i \leq t}$~~ $|X_i| \leq B_t$。这就是包络性质！现在还需证明 $B_t = o(\sqrt{t}/\log\log t)$。对于运行最大值，显然有 $B_t \sim t^{1/p}(\log t)^{\gamma}$，且 $p > 2$。因此，

$$\frac{B_t}{\sqrt{t/\log\log t}} \leq t^{1/p-1/2}(\log t)^{\gamma}\sqrt{\log\log t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

因此，我们再次证明这两项性质都成立；在本例中，随机变量具有有限的 p 矩。无论如何，证明到此结束。 ■

附录 C. 在 $p = 2$=2的情形下会发生什么，包络是否紧?

本节将说明，如果我们仅对尾部假设弱二阶矩条件（即 $p = 2$），实际上会发生什么。我们将在此详细阐述两点，它们相辅相成。首先，假设某个确定性包络 $(B_t)_{t\geq 1}$ 的增长速度严格快于 ~~$\sqrt{t/\log}$~~$\log t$，并且最终几乎必然包含所有数据。如果确实如此，那么时变投影代价 $\mathrm{KL}^{(t)}{}_{\inf}(\widehat{P}_t, \mu)$ 将被迫处于一个实际上严格小于 $\log\log t$的尺度上。其次，遗憾的是，如果只有 $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$，那么我们通常无法验证定理 6所需的关键假设：也就是说，我们无法验证存在一个几乎必然有效的确定性包络，其具有 $B_t = o(\sqrt{t}/\log\log t)$。换言之，确实存在一些有限方差分布，使得几乎必然地，任何包络都会失效。本节将对这些内容进行形式化阐述。首先，回顾我们定义的时变约束泛函：t其定义如下：

$$\mathrm{KL}_{\inf}^{(t)}(\nu, m) := \inf\left\{ \mathrm{KL}(\nu\|Q) : Q \in \mathcal{P}([-B_t, B_t]),\ \int x\, dQ(x) \geq m \right\}.$$

并且，在这个问题的经验特化版本中，如果 $\nu = \widehat{P}_t$，我们令 $\widehat{\mu}_t = \int x\, d\widehat{P}_t(x)$ 和$\Delta_t := (\mu - \widehat{\mu}_t)_+$。有了这一设定，让我们来陈述第一个引理，它将帮助我们直观理解在边界处“撒入”质量时会发生什么。

引理*10* 取一个 $B > 0$，并令 $\nu \in \mathcal{P}([-B, B])$ 的均值为 $\bar{\mu} := \int x d\nu(x)$。现在，对于任意 $m \in (\bar{\mu}, B)$，定义 $\varepsilon := \frac{m-\bar{\mu}}{B-\bar{\mu}} \in (0, 1)$。此外，定义 $Q := (1-\varepsilon)\nu + \varepsilon\delta_B$。于是，对于 $Q \in \mathcal{P}([-B, B])$，可得 $\int x dQ(x) = m$，且 *KL*散度$(\nu\|Q) \leq -$对数函数$(1-\varepsilon)$。实际上，如果我们有 $\nu(\{B\}) = 0$，那么恰好可得 *KL*散度$(\nu\|Q) = -$对数函数$(1-\varepsilon)$。最后，当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时，$-$对数函数$(1-\varepsilon) = (1 + o(1))\varepsilon$；特别地，如果 $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$，那么 $-$对数函数$(1-\varepsilon) \leq 2\varepsilon$。

证明 我们首先需要证明 Q 支撑在 $[-B, B]$ 上，且均值为 m。根据我们自己的构造，我们知道 ν 支撑在 $[-B, B]$ 上，而 δ_B 支撑在 $B \in [-B, B]$处。

As a 因此，它们的凸组合 Q也必然如此。现在来计算均值：

$$\begin{aligned}\int x\,dQ(x) &= \int x\,d\big((1-\varepsilon)\nu+\varepsilon\delta_B\big)(x) = (1-\varepsilon)\int x\,d\nu(x)+\varepsilon\int x\,d\delta_B(x)\\ &= (1-\varepsilon)\bar{\mu}+\varepsilon B = \bar{\mu}+\varepsilon(B-\bar{\mu})\\ &= \bar{\mu}+(m-\bar{\mu}) = m.\end{aligned}$$

既已证明这一点，现在我们继续证明绝对连续性，即 $\nu \ll Q$，并推导出拉东–尼科迪姆界。容易看出，对于任意可测集 A，都有 $Q(A) = (1-\varepsilon)\nu(A) + \varepsilon\delta_B(A) \geq (1-\varepsilon)\nu(A)$。显然，如果 $Q(A)$ 为 0，这意味着 $(1-\varepsilon)\nu(A) \leq Q(A) = 0$。因此，我们便有 $\nu(A) = 0$，从而证明了 $\nu \ll Q$ 确实成立。现在令$L := \frac{d\nu}{dQ}$ 为拉东-尼科迪姆导数。我们将证明 $L \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$ ν几乎必然成立。首先，只需取一个 $\eta > 0$，并定义可测的 $A_\eta := \left\{L > \frac{1}{1-\varepsilon} + \eta\right\}$。现在利用$\nu(A_\eta) = \int_{A_\eta} L dQ$ 这一事实以及 A_η 的定义，我们得到：

$$\begin{aligned}\nu(A_\eta) = \int_{A_\eta} L\,dQ > \left(\frac{1}{1-\varepsilon}+\eta\right)Q(A_\eta) &\geq \left(\frac{1}{1-\varepsilon}+\eta\right)(1-\varepsilon)\nu(A_\eta)\\ &= \big(1+\eta(1-\varepsilon)\big)\nu(A_\eta).\end{aligned}$$

我们知道，非负数严格大于自身乘以 $1+\eta(1-\varepsilon) > 1$ 的唯一情形当然是该数为 0。因此，对于每个 $\eta > 0$，必有 $\nu(A_\eta) = 0$。我们知道 $\eta > 0$ 是任意选取的，由此可见，在 ν下，$\frac{d\nu}{dQ} = L \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$ 几乎必然成立。KL界由此立即可得。也就是说，我们可以利用关于 L 的界，直接应用定义。具体而言，$\mathrm{KL}(\nu\|Q) = \int \log\left(\frac{d\nu}{dQ}\right)d\nu \leq \int \log\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right) = -\log(1-\varepsilon)$ $\int 1 d\nu = -\log(1-\varepsilon)$。至于何时取等号，注意到如果 $\nu(\{B\}) = 0$，那就意味着δ_B 会在 ν 的支撑集之外赋予正质量。因此，在 ν 的支撑集上，我们有$Q = (1-\varepsilon)\nu$。于是，在 ν 下，$\frac{d\nu}{dQ} = \frac{1}{1-\varepsilon}$ 将以概率 1 成立。将其代回 KL 定义，便得到 $\mathrm{KL}(\nu\|Q) = \int \log\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)d\nu = -\log(1-\varepsilon)$。我们知道，当 $\varepsilon \downarrow 0$时，$-\log(1-\varepsilon) \to 0$且$\varepsilon \to 0$，因此 $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{-\log(1-\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$。显然，由此可得，当 $\varepsilon \downarrow 0$时，$-\log(1-\varepsilon) = (1+o(1))\varepsilon$。接下来还需证明 $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$时得到的界。先注意，对于 $0 \leq u \leq \varepsilon$，有 $1-u \geq 1-\varepsilon$，因此 $\frac{1}{1-u} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$。由此，

$$-\log(1-\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \frac{1}{1-u}\,du \leq \int_0^\varepsilon \frac{1}{1-\varepsilon}\,du = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq 2\varepsilon,$$

至此，我们的证明完成。 ■

现在我们可以正式说明，大包络会压缩对数对数 t/t 尺度。我们将通过以下命题来阐述这一点。

命题 11 假设 $X_1, X_2, X_3, \ldots$ 均为独立同分布，均值为 μ，方差为 $\sigma^2 \in (0,\infty)$。设 $(B_t)_{t\geq 1}$ 是确定性且单调不减的，并且满足 $B_t \to \infty$，同时假设包络事件成立。也就是说，

$$\mathcal{E}_B := \left\{\exists T_B < \infty :\ \forall t \geq T_B,\ \max_{1\leq i\leq t}|X_i| \leq B_t\right\}.$$

此外，若有 $\sqrt{t/\log\log t}^{B_t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ 那么在 $\mathcal{E}_B$和经典均值迭代对数律均成立的概率为一事件上，实际上有

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t\mathrm{KL}_{\inf}^{(t)}(\widehat{P}_t, \mu)}{\log\log t} = 0.$$

证明 我们首先选取一个特定的结果 ω，它属于这两个概率为一事件的交集，即包络事件 $\mathcal{E}_B$ 和经典均值迭代对数律。为简化记号，我们稍微滥用一下记号，省略 ω。首先要证明的是，当 t 足够大时，$B_t - \widehat{\mu}_t$ 的下界。根据均值迭代对数律，我们知道 $\widehat{\mu}_t \to \mu$，因此必定存在一个 $T_\mu < \infty$，使得对所有 $t \geq T_\mu$，都有 $|\widehat{\mu}_t| \leq |\mu| + |\widehat{\mu}_t - \mu| \leq |\mu| + 1$。此外，注意到 $B_t \to \infty$，并且根据定义，(B_t) 是单调不减的。因此，也必定存在一个 $T'_B < \infty$，使得对所有 $t \geq T'_B$，都有 $B_t \geq 2(|\mu| + 1)$。所以！这意味着，对于所有 $t \geq T_0 := \max\{T_\mu, T'_B\}$，都有 $B_t - \widehat{\mu}_t \geq B_t - |\widehat{\mu}_t| \geq B_t - (|\mu| + 1) \geq \frac{B_t}{2}$。现在我们来推导 $\mathrm{KL}^{(t)}\inf(\widehat{P}_t, \mu)$ 的一个 sprinkling 界。取一个 $t \geq T_0$，使得我们还有 $t \geq T_B$，因此 $\widehat{P}_t$ 显然支撑于 $[-B_t, B_t]$。若 $\Delta_t = 0$，则必有 $\widehat{\mu}_t \geq \mu$，进而 $\mathrm{KL}^{(t)}\inf(\widehat{P}_t, \mu) = 0$。因此，假设 $\Delta_t > 0$，或者说 $\widehat{\mu}_t < \mu$。同样，由于 $B_t \to \infty$，存在 $T_1 < \infty$，使得对所有 $t \geq T_1$，都有 $\mu < B_t$。综合以上各点，对于一个 $t \geq \max\{T_0, T_B, T_1\}$，$\varepsilon_t := \frac{\mu - \widehat{\mu}_t}{B_t - \widehat{\mu}_t} = \frac{\Delta_t}{B_t - \widehat{\mu}_t} \in (0, 1)$。利用 $B_t - \widehat{\mu}_t \geq B_t/2$，我们得到，

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta_t}{B_t - \widehat{\mu}_t} \leq \frac{\Delta_t}{B_t/2} = \frac{2\Delta_t}{B_t}.$$

现在应用引理 10 以及 $B = B_t$、$\nu = P_t$ 和 $m = \mu$。完成上述步骤后可得，$\mathrm{KL}^{(t)}\inf(\widehat{P}_t, \mu) \leq -\log(1-\varepsilon_t)$。现在，根据均值迭代对数律，我们知道 $\limsup_{t\to\infty} \frac{|\widehat{\mu}_t - \mu|}{\sqrt{(2\sigma^2 \log\log t)/t}} = 1$。这意味着我们可以得出，对于某个常数 $c := \sqrt{2\sigma^2 + 1} > \sqrt{2\sigma^2}$，存在 $T_{\mathrm{LIL}} < \infty$，使得对于所有 $t \geq T_{\mathrm{LIL}}$，$|\widehat{\mu}_t - \mu| \leq c\sqrt{\log\log t / t}$。因此，对于所有 $t \geq T_{\mathrm{LIL}}$，$\Delta_t \leq c\sqrt{\log\log t / t}$。因此，利用 $\varepsilon_t \leq 2\Delta_t/B_t$ 这一事实以及 Δ_t 的界，很容易看出 $\varepsilon_t \leq \frac{2c}{B_t}\sqrt{\log\log t / t}$。又因为 $B_t/\sqrt{t/\log\log t} \to \infty$，所以我们有，

$$\frac{1}{B_t}\sqrt{\frac{\log\log t}{t}} = \frac{1}{B_t} \cdot \frac{1}{\sqrt{t/\log\log t}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

因此，$\varepsilon_t \to 0$。于是存在 $T_\varepsilon < \infty$，使得对于所有 $T \geq T_\varepsilon$，$\varepsilon_t \leq \frac{1}{2}$，所以引理 10 确实给出 $-\log(1 - \varepsilon_t) \leq 2\varepsilon_t$。特别地，对于所有充分大的 t，若 $\Delta_t > 0$，则有 $\mathrm{KL}^{(t)}\inf(\widehat{P}_t, \mu) \leq -\log(1-\varepsilon_t) \leq 2\varepsilon_t \leq 2 \cdot \frac{2\Delta_t}{B_t} = \frac{4\Delta_t}{B_t}$。现在将其整体乘以 $t/\log\log t$ 并利用 $\Delta_t \leq c\sqrt{\log\log t / t}$ 这一事实。因此，

$$\begin{aligned}
\frac{t}{\log\log t}\mathrm{KL}_{\inf}^{(t)}(\widehat{P}_t, \mu) &\leq \frac{t}{\log\log t} \cdot \frac{4\Delta_t}{B_t} \\
&\leq \frac{t}{\log\log t} \cdot \frac{4c}{B_t}\sqrt{\frac{\log\log t}{t}} \\
&= \frac{4c}{B_t}\sqrt{\frac{t}{\log\log t}}.
\end{aligned}$$

现在！我们知道 $B_t/\sqrt{t}$/对数函数 对数函数 $t \to \infty$。因此，上式右端将收敛到 0。这确实证明了，

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t\,\mathrm{KL}_{\inf}^{(t)}(\widehat{P}_t, \mu)}{\log\log t} = 0.$$

因此，证明完毕。 ■

现在这一点已经得到证明，值得注意的是，即使只有二阶矩，我们仍然可以得到一个确定性几乎必然包络。我们将这一想法形式化为下面的引理。

引理 12 假设 $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$。令 $(B_t)_{t\geq 1}$ 为确定性且单调不减的，其中$B_t \to \infty$。事实上，如果我们有 $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{B_t^2} < \infty$，那么几乎必然存在一个 $T < \infty$，使得对所有 $t \geq T$ 及所有 $1 \leq i \leq t$，都有 $|X_i| \leq B_t$。特别地，我们知道，对于任意给定的 $\gamma > \frac{1}{2}$ 以及 $t \geq 3$，取 –

$$u_t := \sqrt{t}(\log t)^{\gamma}, \quad B_t := \max_{3\leq s\leq t} u_s, \quad B_1 := B_2 := B_3,$$

满足可和性条件，因此是一个几乎必然有效的确定性包络。

证明 首先，我们定义事件 $A_t := \{|X_t| > B_t\}$，对每个 $t \geq 1$均如此。根据假设，我们知道该序列是独立同分布的。因此，当然有 $\mathbb{P}(A_t) = \mathbb{P}(|X_1| > B_t)$。对 X_1^2 应用马尔可夫不等式可得，

$$\mathbb{P}(A_t) = \mathbb{P}(|X_1| > B_t) = \mathbb{P}(|X_1|^2 > B_t^2) \leq \frac{\mathbb{E}[X_1^2]}{B_t^2}.$$

现在让我们对所有 t 求和，并利用 $\sum 1/B_t^2 < \infty$ 这一事实。这样可得，

$$\sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_t) \leq \mathbb{E}[X_1^2] \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{B_t^2} < \infty.$$

因此，根据博雷尔-坎泰利引理 1，我们可以看到 $\mathbb{P}(A_t \text{ i.o.}) = 0$，所以以概率 1，存在一个有限的（可能是随机的） $T_0 < \infty$，使得对所有 $t \geq T_0$ 都有 $|X_t| \leq B_t$。此时，我们要将包络“提升”为关于 $i \leq t$ 一致的包络。首先，考虑一个特定的结果，在该结果下，对所有 $t \geq T_0$ 都有 $|X_t| \leq B_t$。我们知道 (B_t) 是单调不减的；还知道，对于任意 $t \geq T_0$ 以及任何满足 $T_0 \leq i \leq t$ 的指标 i，都有 $|X_i| \leq B_i \leq B_t$。现在，对于有限多个指标 $1 \leq i \leq T_0$，令 M_0 为 $\max_{1\leq i\leq T_0} |X_i| < \infty$。我们知道 $B_t \to \infty$，因此必定再次存在一个有限的（且可能是随机的） T_1，使得对所有 $t \geq T_1$ 都有 $B_t \geq M_0$。因此，对所有 $t \geq T := \max\{T_0, T_1\}$ 以及所有 $1 \leq i \leq t$，都有 $|X_i| \leq B_t$。接下来只需验证我们选择的 $B_t = \max_{3\leq s\leq t} u_s$。注意，对于 $\gamma > \frac{1}{2}$ 和 $t \geq 3$，有 $\frac{1}{u_t^2} = \frac{1}{t(\log t)^{2\gamma}}$。根据积分判别法，我们知道级数 $\sum_{t\geq 3} \frac{1}{t(\log t)^{2\gamma}}$ 收敛，当且仅当 $\int_3^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^{2\gamma}}\,dx < \infty$。令 $u = \log x$（因此 $du = dx/x$）。于是，

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^{2\gamma}}\,dx = \int_{\log 3}^{\infty} \frac{1}{u^{2\gamma}}\,du = \left[\frac{u^{1-2\gamma}}{1-2\gamma}\right]_{\log 3}^{\infty}.$$

当且仅当 $2\gamma > 1$ 或 $\gamma > \frac{1}{2}$ 时，这个量才是有限的。现在，对每个 t，由于 $B_t \geq u_t$，可知 $\frac{1}{B_t^2} \leq \frac{1}{u_t^2}$。因此，$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{B_t^2} \prec \infty$,一我们的证明终于完成。

■

引理 12 真正重要之处在于它对下一个推论的作用。也就是说，$p = 2$包络会迫使归一化后的上极限等于0。

推论 13 假设 $\sigma^2 \in (0, \infty)$ 且 $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$。令 $\gamma > \frac{1}{2}$ 并取(B_t) 与引理 *12*中完全相同。那么，在包络和均值迭代对数律均成立的概率为一事件上，我们有

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{t \, \mathrm{KL}_{\inf}^{(t)}(\widehat{P}_t, \mu)}{\log \log t} = 0.$$

证明 这个证明其实很容易看出来。因为，根据引理 12我们知道，对于这个特定的 $\mathcal{E}_B$ 取值，包络事件(B_t)几乎必然成立。此外，对于 $t \geq 3$我们有 $B_t \geq u_t = \sqrt{t}$(对数函数 $t)^{\gamma}$。因此，我们得到

$$\frac{B_t}{\sqrt{t/\log \log t}} \geq \frac{\sqrt{t}(\log t)^{\gamma}}{\sqrt{t/\log \log t}} = (\log t)^{\gamma} \sqrt{\log \log t} \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty.$$

因此，很明显，命题 11所要求的条件均已满足，所以推论的结论确实成立，我们也就完成了。

■

我们将在这里正式说明的最后一点是，有限方差并不意味着存在对数迭代律尺度下的包络，因此这就否定了定理 $p = 2$ 所述所有6种 $p > 2$都成立的可能性，这正是该定理中我们只考虑 $p > 2$的原因。

命题 14 确实存在一个有限方差的零均值分布，使得对于确定性序列 $b_t := \sqrt{t \text{ 对数函数 对数函数 } t}$ （其中 $t \geq 3$），有，$\mathbb{P}(|X_t| > b_t$ 无穷多次发生。由此，对于任意单调不减的确定性序列(B_t)，若满足 $B_t = o\left(\sqrt{t/\text{ 对数函数 对数函数 } t}\right)$，我们也有，

$$\mathbb{P}\big(|X_t| > B_t \text{ } i.o.\big) = 1.$$

因此，很遗憾，定理 $\mathcal{E}_B$ 中的包络事件*6* 对该分布不成立。

证明 证明中我们必须做的第一件事，是构造一个有限方差分布。为此，令 S 为一个拉德马赫随机变量，即 $\mathbb{P}(S = \pm 1) = \frac{1}{2}$。基于此，我们将通过明确指定其在 $y \geq 0$ 下的生存函数，来定义一个非负随机变量 Y。也就是说，

$$\mathbb{P}(Y > y) = \begin{cases} A, & 0 \leq y < e^e, \\ \dfrac{1}{y^2 \log y \, (\log \log y)^2}, & y \geq e^e. \end{cases}$$

Note 当然，我们选择 A，使得生存函数在 $y = e$ 处连续。也就是说，　　s,

$$A := \frac{1}{(e^e)^2 \log(e^e) \, (\log \log(e^e))^2} = \frac{1}{e^{2e} \cdot e \cdot 1^2} = e^{-(2e+1)} \in (0, 1).$$

显然，该函数单调不增、右连续，并且当 $y \to \infty$ 时趋于 0。因此，它确实定义了 $[0,\infty)$ 上的一个合法概率分布，在 0 处有一个大小为 $1-A$ 的原子。现在，令 Y 相互独立，并定义随机变量 $X := SY$。显然， X 关于 0 对称。~~此外~~，由柯西-施瓦茨不等式可知 $\mathbb{E}[|X|] \le \sqrt{\mathbb{E}[X^2]} < \infty$，因此均值必然存在，且由对称性可得 $\mathbb{E}[X]=0$。话虽如此，我们现在要验证 $\mathbb{E}[X^2]<\infty$ 确实成立。我们知道 $|X|=Y$，因此必然有 $\mathbb{E}[X^2]=\mathbb{E}[Y^2]$。注意，对于非负随机变量，根据尾积分的基本性质，我们有：

$$\mathbb{E}[Y^2]=\int_0^\infty \mathbb{P}(Y^2>s)ds=\int_0^\infty \mathbb{P}(Y>\sqrt{s})ds.$$

现在代入 $s=y^2$，显然 $ds=2y\,dy$。因此我们得到，

$$\mathbb{E}[Y^2]=2\int_0^\infty y\mathbb{P}(Y>y)dy.$$

现在来计算这个式子，也就是说，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y^2] &= 2\int_0^{e^e} y\,\mathbb{P}(Y>y)\,dy + 2\int_{e^e}^\infty y\,\mathbb{P}(Y>y)\,dy \\
&= 2\int_0^{e^e} y\cdot A\,dy + 2\int_{e^e}^\infty y\cdot \frac{1}{y^2\log y(\log\log y)^2}\,dy \\
&= 2A\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{e^e} + 2\int_{e^e}^\infty \frac{1}{y\log y(\log\log y)^2}\,dy \\
&= A(e^e)^2 + 2\int_{e^e}^\infty \frac{1}{y\log y(\log\log y)^2}\,dy.
\end{aligned}$$

现在需要求出剩余的积分。为此，我们令$u=\log y$，这意味着 $du=dy/y$。如此代入后可得，

$$\int_{e^e}^\infty \frac{1}{y\log y(\log\log y)^2}\,dy=\int_{u=e}^\infty \frac{1}{u(\log u)^2}\,du.$$

现在再次在这里进行代换，这次令 $v=\log u$，因此 $dv=du/u$。这样可得，

$$\int_e^\infty \frac{1}{u(\log u)^2}\,du=\int_{v=1}^\infty \frac{1}{v^2}\,dv=\left[-\frac{1}{v}\right]_1^\infty=1.$$

由此可得 $\mathbb{E}[Y^2]=A(e^e)^2+2<\infty$，所以显然必有 $E[X^2]<\infty$。证明这一点后，我们还需要证明 $\mathbb{P}(|X_t|>b_t$无穷多次$)=1$。首先，令 X_1， X_2， X_3，.....为 X 的独立同分布副本，并定义 E_t：$=\{|X_t|>b_t\}$。当然， $b_t\to\infty$，因为 $t/\log\log\, t\to\infty$。因此，存在 $T_0<\infty$，使得对所有 $t\ge T_0$，均有 $b_t\ge e^e$。对于这样的 t，我们可以使用尾公式：

$$\mathbb{P}(E_t)=\mathbb{P}(|X_1|>b_t)=\frac{1}{b_t^2\log b_t(\log\log b_t)^2}.$$

此外，由于对数函数对数函数 $t\to\infty$，存在 $T_1<\infty$，使得对于所有 $t\ge T_1$，对数函数对数函数 $t\ge 1$，因此对于所有 $t\ge T_1$， $b_t^2=$ t 对数函数对数函数~~t~~ $\le t$。因此， $b_t\le\sqrt{t}\le \bar{t}$。定义

$T_2 := \max\{T_0, T_1\}$。那么对于所有 $t \geq T_2$，我们有对数函数 $b_t \leq$ 对数函数 t，且对数函数对数函数 $b_t \leq$ 对数函数对数函数 t。因此我们得到，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_t) &= \frac{1}{b_t^2 \log b_t (\log\log b_t)^2} \\ &= \left(\frac{\log\log t}{t}\right) \cdot \frac{1}{\log b_t} \cdot \frac{1}{(\log\log b_t)^2} \\ &\geq \left(\frac{\log\log t}{t}\right) \cdot \frac{1}{\log t} \cdot \frac{1}{(\log\log t)^2} \\ &= \frac{1}{t \log t \log\log t}.\end{aligned}$$

我们知道级数$\sum_{t\geq 3} t \quad t^{1}$ 对数函数 对数函数 对数函数 t发散。这由积分判别法显然可知。我们通过两次代换来进行，先作 $u = \overline{\text{对数函数}}\, x$，然后再作 $v =$ 对数函数 u。也就是说，

$$\int_3^\infty \frac{1}{x \log x \log\log x}\, dx = \int_{\log 3}^\infty \frac{1}{u \log u}\, du = \int_{\log\log 3}^\infty \frac{1}{v}\, dv = \infty.$$

因此，$\sum_{t\geq T_2} \mathbb{P}(E_t) = \infty$。我们知道事件 E_t 是独立的。于是由Borel–Cantelli 引理 2，我们有 $\mathbb{P}($ E_t 无穷多次$) = 1$。从 b_t 推广到任意 $B_t = o(b_t)$是容易的。我们如下进行。设(B_t)如通常那样是确定性的且单调不减，并满足 $B_t = o(b_t)$。于是显然有 $B_t/b_t \to 0$，因此存在 $T < \infty$，使得对所有 $t \geq T$ 都有 $B_t \leq b_t$。由此，对所有 $t \geq T$都成立 $\{|X_t| > b_t\} \subseteq \{|X_t| > B_t\}$。重要的是，若 $|X_t| > b_t$ 无穷多次发生，则必然意味着 $|X_t| > B_t$ 也无穷多次发生。因此，由于 $\mathbb{P}(|X_t| > b_t$无穷多次$) = 1$，故它$\mathbb{P}($ $|X_t| > B_t$ 无穷多次$) = 1$。这样就证明了该断言，因而我们最终完成了证明。

■

总而言之，关键在于，我们在 $\sqrt{t/\log\log t}$ 这一尺度上具有紧性。当 $\widehat{\mu}_t < \mu < B_t$ 时，对于经验实例 $\nu = P_t$ 和目标 $m = \mu$，引理10中的撒点构造给出 $\mathrm{KL}^{(t)}\inf(\widehat{P}_t, \mu) \lesssim \frac{\Delta_t}{B_t}$。然而，我们在定理 6 中分析的局部二次区域表明，$\mathrm{KL}^{(t)}\inf(\widehat{P}_t, \mu) \asymp \Delta_t^2$。我们知道，$\Delta_t$ 会在 $\Delta_t \asymp \sqrt{(\log\log t)/t}$这一迭代对数律尺度上波动。因此，$\Delta_t^2$ 与 Δ_t/B_t 恰好匹配时的边界很容易计算如下。也就是说，$\Delta_t^2 \asymp \frac{\Delta_t}{B_t}$意味着 $B_t \asymp \frac{1}{\Delta_t} \asymp \sqrt{\quad t}\log\log t$。这意味着什么？显然，所有严格小于 $\sqrt{t/\log\log t}$ 的包络都会使问题保持在二次区域内，并且也会给出与定理 6 中相同的精确常数 1。然而，严格大于 $\sqrt{t/\log\log t}$ 的包络则会使撒点效应占据主导地位。根据命题 11，这会使 $\log\log t/t$ 归一化为 0。