arXiv:2602.05276v1 [math.AG] 5 Feb 2026

平面中由抛物线围成的区域，以及表示其形状并遵循其到直线的自然投影的树

北泽直树

Abstract. 作者一直对平面中由一度或二度实代数曲线围成的区域感兴趣。作者主要关注这些区域的形状与组合学。这是数学中一个基础而自然的问题，既初等，又与多个领域相关。通过图来理解这些形状：区域在典范投影到第一分量时发生收缩。

我们的主要结果如下：每棵树都可以由这里所说的两种类型的抛物线围成的区域实现。

相关研究既初等又有趣。令人惊讶的是，这一具体领域直到最近才由 Bodin、Popescu-Pampu 和 Sorea 于2020年代开创。此后，在作者的推动下，该领域不断发展。作者还受一项研究启发，探讨如何显式构造实代数映射，使其局部映至所谓的区域 $moment\ maps$：这一研究源自可微映射的奇点理论和实代数几何。

1. Introduction.

k 维欧几里得空间（实仿射空间） $\mathbb{R}^k$ （其中 $\mathbb{R}:=\mathbb{R}^1$）中的区域若由实代数超曲面围成，便是数学中的基本研究对象。我们关注由一阶或二阶实代数曲线围成的区域。作者主要关注它们的形状和组合学。

我们通过图来理解这些区域在典型投影$\pi_{2,\ 1}:\ \mathbb{R}^2\ \to\ \mathbb{R}$下所塌缩成的形态，其中 $\pi_{k_1,\ k_2}:\mathbb{R}^{k_1}\ \to\ \mathbb{R}^{k_2}$ 表示投影$\pi_{k_1+k_2,\ k_2}(x)\ =\ x_1\ \in\ \mathbb{R}^{k_1}(k_1,k_2\ >\ 0$和 $x:=(x_1,x_2)\ \in\ \mathbb{R}^{k_1}\ \times\ \mathbb{R}^{k_2})$。简言之，我们将该图表示为投影在区域闭包上的限制映射的所有水平集构成的集合，这些水平集取自 $\mathbb{R}^2$ ，并赋予闭包的商拓扑。

我们的主定理如下。树是没有圈的有限图。

主定理 0. 每棵树都可以由这里两种类型的抛物线所围成的区域实现。

上文展示的图最早见于 [2] （另见 [33, 34]）。该图称为 Poincar´e-Reeb 图，本质上与无边界流形上光滑函数的里布图相同。光滑函数的里布图是经典且基础的工具，也是理解流形的有力工具

Key words and phrases. （非奇异）实代数流形与实代数映射。光滑映射。抛物线。平面上的一阶或二阶实代数曲线。图。树。Reeb图。Poincar´e-Reeb图。2020 *Mathematics Subject Classification*: 05C05、05C10、14P05、14P10、14P25、57R45、58C05。

之一。借助莫尔斯函数等良好的光滑函数（[29]），可以理解流形。Bodin、Popescu-Pampu 和 Sorea 考虑了以一般方式嵌入平面的有限图，并证明存在一个由两两不相交的（非奇异）实代数曲线围成的区域。在逼近过程中保持导数是论证的关键。作者对这项研究深感兴趣，并一直在研究由特定显式类别的实代数超曲面围成的区域的显式实现，以及如何得到满足适当显式条件的上述自然图。这项研究也源于可微映射的奇点理论；作者一直致力于构造显式而良好的光滑函数或实代数（解析）函数与映射。作者尤其关注构造显式函数和映射，使其映到某些类别区域的闭包上，这些类别推广了 m 维单位球面 $S^m := \{x = (x_1, \cdots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \Sigma_{j=1}^{m+1} {x_j}^2 = 1\}$ 到 n 维单位圆盘 $D^n := \{x = (x_1, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \Sigma_{j=1}^{n} {x_j}^2 \leq 1\}$ 的典范投影（即将 $\pi_{m+1,n}$ 限制到 S^m 上）。请注意，映到这些区域闭包上的映射在局部是所谓的矩映射。矩映射的相关内容，例如参见 [1, 3] 。这里的实代数函数是通过复合 $\pi_{2,1}$ 得到的。关于这一点， [8] 是开创性研究， [14] 中对此有所提及。预印本 [10, 11, 12, 13, 18, 19, 20, 23, 25] 与此密切相关。作者受此前研究（如 [8, 10, 12, 13], ）的启发，开展了关于区域的研究，并首先在 [15] 中发表了相关预印本。 [16, 17, 21, 22, 24] 也对此有很好的后续研究，例如。与此相关，将有限图实现为良好的可微（光滑）函数的里布图，最早由 [32] 研究。在该文中，根据给定的满足某些附加条件的有限图，重构了一个定义在（适当的）闭曲面 X 上的光滑函数 $c : X \to \mathbb{R}$ ；该函数在每个临界点 p 处的形式为 $c(z) = \Re z^l + c(p)$ 或 $c(z) = z\bar{z} + c(p)$。其中， z 是复数， $\bar{z}$ 是它的共轭， $\Re z$ 是复数 z 的实部， $l > 1$ 是正整数，并且在适当的局部坐标下， p 与 $z = 0$ 等同。后来， [27] 将这一结果推广到任意有限图；随后， [28], 首次系统地研究了莫尔斯函数的重构，而作者则在 [6, 7, 9] 中对具有指定形状水平集的光滑函数重构作出了贡献。

本文组织如下。在第二节中，我们解释基本概念和记号。在第三节中，我们以自包含的方式，对我们的区域进行表述，并回顾作者的预印本 [22, 23, 24] ，例如。在第四节中，我们以修订后的方式重新表述主定理 0，将其称为主定理1。我们还将主定理 2作为另一项结果呈现。这与 [25, 定理 1]中所给出的一个显式里布图有关。

2. Preliminaries.

我们回顾或介绍一些基本概念和记号。令 $\mathbb{Z}$ 表示所有整数的集合。

对于映射 $c : X \to Y$，将 c 到子集 $Z \subset X$ 的限制映射记为 $c|_Z$。

对于拓扑空间 X 及其子空间 $Y \subset X$，我们用 $\overline{Y}^X$ 表示 Y 在 X中的闭包。

拓扑空间之间的映射 $c : X \to Y$ 若对任意紧集 $K \subset Y$，其原像 $c^{-1}(K)$ 都是紧的，则称该映射为适当映射。

拓扑空间之间一个（连续）映射 $c : X \to Y$ 的 Reeb 空间 R_c，是按以下方式定义的商空间 $R_c := X/\sim_c$。我们很容易

通过如下规则在 X 上定义了等价关系 $\sim_c$：当且仅当 p_1 和 p_2 属于同一个原像 $c^{-1}(q)$ 的同一个连通分支时，$p_1 \sim_c p_2$ 成立。在 Y 是一个有序集（例如 $\mathbb{R}$）的情况下——它被视为基本全序集之一——每个原像 $c^{-1}(q)$ 都称为 c 的水平集，而它的每个连通分支都是 c 的等高线。我们可以定义商映射 $q_c : X \to R_c$，并由唯一确定的连续映射 $\bar{c}$ 得出关系 $c = \bar{c} \circ q_c$。

对于微分流形 X，令 T_pX 表示 $p \in X$ 处的切向量空间。微分映射 $c : X \to Y$（定义在可微流形之间）的奇异点 p，是指微分 $dc_p : T_pX \to T_{c(p)}Y$ 不满秩的点。对于 c 的奇异点 p，$c(p)$ 是 c 的奇异值。映射 dc_p 是实向量空间之间的线性映射。

在 $Y := \mathbb{R}$ 的情况下，我们也使用“临界”而非“奇异”。可微函数 $c : X \to \mathbb{R}$ 的等高线若包含临界点，则称其为临界等高线；若不包含临界点，则称其为正则等高线。

令 $0 \in \mathbb{R}^k$ 表示原点。实代数流形是实多项式映射 $c : \mathbb{R}^{k_1} \to \mathbb{R}^{k_2}$ 的零点集 $c^{-1}(0)$ 的某些连通分支的并集 Z_c，且 $c|_{Z_c}$ 没有奇异点。换言之，假设它是非奇异的。

图是一个一维连通 CW复形，其 1-胞腔（边）的闭包与 D^1 同胚。图的顶点是其 0-胞腔。图中一个顶点的度是与之关联的所有边的数量。树是第一贝蒂数为 0 的有限图，或者等价地说，是不含圈的有限图。

闭连通流形上的光滑函数 $c : X \to \mathbb{R}$，若其临界值总数有限，则按如下规则定义的 Reeb 空间是一个图：当且仅当 ${q_c}^{-1}(v)$ 是 c 的临界等高线时，点 v 是该图的一个顶点。这就是 c 的里布图。

3. Reviewing RA-regions and their Poincaré-Reeb graphs.

定义 1. 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个非空、连通且开集。设 $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中维数为 $n-1$ 的实代数流形族，并满足以下条件。

- 其中每个 S_λ 都是某个实多项式 f_λ 的零点集的若干连通分支的并集，而 f_λ 用于赋予 S_λ 实代数流形的结构。

对于每个 $\lambda \in \Lambda$，交集 $S_\lambda \bigcap \overline{D}^{\mathbb{R}^n}$ 都非空。

如果还满足以下条件，则称有序对（D，$\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$）为 $\mathbb{R}^n$的实代数区域或 RA 区域。

(1) 存在一个连通开邻域 U_D，使得闭包$\overline{D}^{\mathbb{R}^k}$ 满足 $D = U_D \bigcap \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\{x \mid f_\lambda(x) > 0\}$ 和 $U_D \bigcap S_\lambda = U_D \bigcap \{f_\lambda(x) = 0\}$。(2) $p \in \overline{D}^{\mathbb{R}^k}$ 中的每个点至多属于 $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$中的 n 个不同流形。设 p为 $(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda) \bigcap \overline{D}^{\mathbb{R}^n}$中的任意一点。对于包含于这些流形中的 $p \in \bigcap_{j=1}^{n_p} S_{\lambda_j} \bigcap \overline{D}^{\mathbb{R}^n}$，恰好属于 $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$中的 $1 \le n_p \le n$ 个不同流形，有 $\dim \bigcap_{j=1}^{n_p} T_pS_{\lambda_j} = n - n_p$ 成立。

定义2. 点 $p \in \overline{D}^{\mathbb{R}^n}$ 称为 RA 区域 $(D, \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ 的奇异点，当且仅当以下两种情况之一成立。

- – 点 p 恰好位于 $n_p < n$ 个不同的流形 S_{λ_j} $(1 \le j \le n_p)$ 中。令 $S_{\lambda_j,\ 1\le j\le n_p}$ 表示包含在这些 n_p 个流形 S_{λ_j} 中、且不包含在任何其他超曲面S_λ 中的所有 $\overline{D}^{\mathbb{R}^n}$ 点的集合。该空间是一个无边界的 $(n-n_p)$ 维流形。– 点 p 也是限制映射 $\pi_{n,\ 1}|_{S_{\lambda_j},\ 1\le j\le n_p}$的临界点。

- 点 p 恰好位于 n 个不同的流形 S_{λ_j} $(1 \le j \le n)$ 中。

现在考虑商映射 $q_{\pi_{n,\ 1}|_{\overline{D}^{\mathbb{R}^n}}}$ 是适当映射且 Λ 的基数有限的情形。由于代数条件以及有限性，RA 区域的奇点处函数值的个数有限；此外，凭借文献 [30, 31], 中的基本且重要的论证，通过将顶点 v 定义为其原像$q_{\pi_{n,\ 1}}{}^{-1}(v)$包含 RA 区域奇异点的点，Reeb 空间具有图的结构。相关内容也可参阅分层莫尔斯理论的文章，例如文献 [5, 26], 。

定义3。这是 RA 区域的庞加莱-里布图，记作 $\mathrm{PR}_{(D,\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})}$。

对于某些不满足此有限性条件的情形，我们也可以用这种方式进行论证。为此，请参阅主定理 2。

4. Main Theorem 0 revisited as Main Theorem 1, and Main Theorem 2.

圆 $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2 = r_{1,2}\}$，其圆心为 $(p_1,p_2) \in\mathbb{R}^2$，半径为 $r_{1,2} > 0$，是一个重要的一维实代数流形（实代数曲线）。在本文中，抛物线 $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = a(x_1-p_1)^2+p_2\}$，其 $(p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$ 且 $a \neq 0$，也是一条重要的实代数曲线。双曲线 $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid r = a(x_1-p_1)^2 - b(x_1-p_1)^2\}$，其 $(p_1,p_2) \in\mathbb{R}^2$ 且 $a,b,r>0$，也是一条重要的实代数曲线。它恰好由两个连通分支组成。

我们也期望读者具备所谓欧几里得平面几何的基础知识。实仿射空间中的两个子集是全等的，如果其中一个子集可以通过有限次旋转、平行变换和反射的复合变换为另一个子集；此处我们假定读者具备欧几里得几何的基本术语、概念和论证。我们也可以说一个子集与另一个子集全等。

$\mathbb{R}^2$ 中与这样的度为2的实代数曲线全等的集合，例如也称为圆、抛物线或双曲线。

主定理1. 设 S_P 为一条抛物线。每棵树 G 都同构于某个实代数区域的Poincar´e-里布图，该区域由与 S_P 或另一条适当选取的抛物线全等的抛物线所围成。

证明。我们首先考虑顶点的度不为2的树（步骤 1-1）。然后，我们考虑一般的树（步骤 1-2）。

步骤 1-1 顶点度数均不为 2 的树的情形。步骤1-1-1 树与 D^1 同胚的情形。

我们选择一条抛物线 $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = a(x_1-p_1)^2+p_2\}$，其 $(p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$，并且

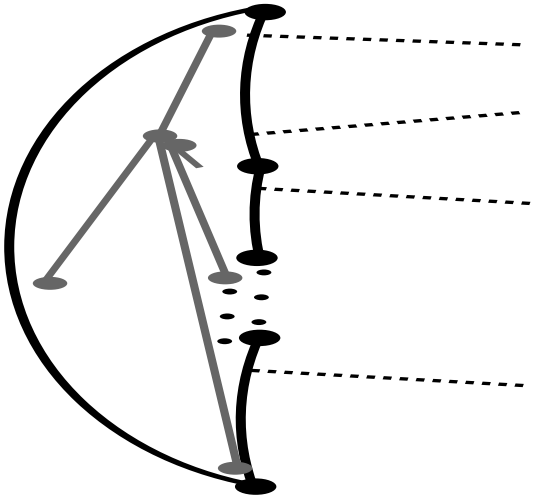


FIGURE 1. $(D, \{S_j\}_{j=1}^{l})$，对应于步骤 1-1-2。其庞加莱–里布图以灰色标出。点线段表示与各点处法向量平行的线段。下文中，图里的每个“...”均为特定对象的缩写。

$a > 0$，以及另一条抛物线 $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -a(x_1 - p_1)^2 + p_2\}$，它与前一条抛物线全等。考虑投影$\pi_{2,\ 1}$，我们可以看出这是一个符合要求的情形。

步骤 1-1-2 树 G 与 D^1不同胚的情形。
$S_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = a(x_2 - p_1)^2 + p_2\}$ 满足 $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ 且 $a > 0$。我们可以按以下方式选取与 S_1 全等且平行于此的抛物线 S_j。

- 对每个 S_j，指定一个正整数 $2 \leq j \leq l$。 $S_j := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = a(x_2 - p_{1,\ j})^2 + p_{2,\ j}\}$ 和 $p_{1,\ 1} := p_1 < p_{1,\ j}$ 对每个 $2 \leq j \leq l$。
- 两条不同的抛物线 S_{j_1} 和 S_{j_2} 在 $\{S_j\}_{j=1}^{l}$ 相交，当且仅当 $j_1 = j_2 \pm 1$ 或 $(j_1, j_2) = (1, l)$、$(l, 1)$。此外，这些交点总是形如 $\{(p_{1,0}, q)\}$，其中固定实数$p_{1,0}$ 满足$p_{1,0} > p_{1,j}(1 \leq j \leq l)$，且为单点集。
- 我们有一个 RA 区域 $(D, \{S_j\}_{j=1}^{l})$，其闭包$\overline{D}^{\mathbb{R}^2}$ 是紧且连通的，且其庞加莱－里布图同构于 G。
- 对于 $\overline{D}^{\mathbb{R}^2} \bigcap S_j$ 中恰好包含于一个 S_j的每个点 p_j，从 $\overline{D}^{\mathbb{R}^2}$ 出发、平行于 p_j 处法向量的线段不包含 $\overline{D}^{\mathbb{R}^2}$ 中除 p_j以外的任何点。

这种情形见图 1。

为便于回顾和理解，我们在步骤 1-1-2 中补充了关于图结构的说明。形如 $\{(b, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ 的直线与 $\overline{D}^{\mathbb{R}^n}$ 的交集的任意连通分支 $I_{b,q}$，都与单点集或 D^1 同胚。庞加莱-里布图 $\mathrm{PR}_{(D, \{S_j\}_{j=1}^{l})}$ 可按以下方式定义。

• 其顶点定义为 $q_{\pi_{n,1}|_{\overline{D}^{\mathbb{R}^n}}}$ 在形如 $\{(b,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ 的直线与 $\overline{D}^{\mathbb{R}^n}$ 的交集的连通分支 $I_{b,s}$ 上唯一确定的值，且该分支满足以下任一条件。– $b = p_{1,1} = p_{1}$。– $b = p_{1,0}$– $b = p_{1,j}$ 与 $I_{b,q}$ 以及某个 S_i 在该处相交于一点，且它们的切向量空间相同。

• 其边定义为上述所有$I_{b,\ s}$ 在$\overline{D}^{\mathbb{R}^n}$ 中由$q_{\pi_{n,\ 1}|_{\overline{D}^{\mathbb{R}^n}}}$的补集所构成的并集的一个连通分支的像。

步骤 1-2 顶点的度可能为 2 的树的情形。

我们首先得到步骤 1-1 的一种情形，以及与给定树G同胚的图。这里，抛物线的数量记作 $l := l_0$，区域 D记作 $D := D_0$。我们考虑另一条形式为$S_{a_{0,\ 0}} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = a_0(x_2 - p_{a_{0,\ 1}})^2 + p_{a_{0,\ 2}}\}$ 的抛物线，其中$(p_{a_{0,\ 1}}, p_{a_{0,\ 2}}) \in \mathbb{R}^2$，且 $a_0 > 0$为一个充分大的数。

在步骤 1-1 的情形中，对于 $\overline{D_0}^{\mathbb{R}^2} \bigcap S_j$ 中恰好包含在一个S_j内的每个点 p_j，从 $\overline{D_0}^{\mathbb{R}^2}$ 出发、平行于 p_j 处法向量的线段，除 p_j外不包含 $\overline{D_0}^{\mathbb{R}^2}$ 中的任何点。因此，我们可以添加一条与$S_{a_{0,\ 0}}$ 全等的抛物线，从而在步骤 1-1 中为树的每条边增加一个或两个顶点。通过适当选取 $\overline{D_0}^{\mathbb{R}^2} - D_0$ 中的有限多个点，并添加与这些点充分接近、与$S_{a,\ 0,\ 0}$ 全等且在 $\overline{D_0}^{\mathbb{R}^2}$中彼此不相交的抛物线，我们可以为树的每条边增加任意正整数个顶点。更具体地说，我们进行有限次如下操作。

• 通过选取一个形如（$p_{1,0}, q$）的点，并在适当位置放置一条与 $S_{a_{0,0}}$ 全等且充分靠近该点的抛物线，我们可以在 Poincar´e-Reeb 图 $\mathrm{PR}_{(D_0, \{S_j\}_{j=1}^{l_0})}$ 中与 $q_{\pi_{n,1}|_{\overline{D_0}^{\mathbb{R}^n}}}$ （$p_{1,0}, q$）相接的边上添加一个新顶点。另见图 2。

• 通过选取一个形如（$p_{1,j}, q_p$） $\in \overline{D_0}^{\mathbb{R}^2} - D_0$ （$2 \le j \le l$）的点，其中 q_p 是满足条件（$p_{1,j}, q_p$） $\in \overline{D_0}^{\mathbb{R}^2} - D_0$ 的任意点，并适当地放置一条与 S_{a_0},0 全等且充分靠近该点的抛物线，我们可以在 Poincar´e-Reeb 图 $\mathrm{PR}_{(D_0, \{S_j\}_{j=1}^{l_0})}$ 的唯一一条边 $e_{p_{1,j}, p_{2,j}}$ 上添加一个新顶点。该边与 $q_{\pi_n,1}|_{\overline{D_0}^{\mathbb{R}^n}}$ （$p_{1,j}, q$），$q_{\pi_n,1}|_{\overline{D_0}^{\mathbb{R}^n}}$ 相接，且其上满足关系 $\pi_{n,1}|_{\overline{D_0}^{\mathbb{R}^n}} = \pi_{n,1}|_{\overline{D_0}^{\mathbb{R}^n}} \circ q_{\pi_n,1}|_{\overline{D_0}^{\mathbb{R}^n}}$ 的 $\pi_{n,1}|_{\overline{D_0}^{\mathbb{R}^n}}$ 的值小于 $p_{1,j}$。另见图 3。

• 通过在 $\overline{D_0}^{\mathbb{R}^2} - D_0$ 中选取一个合适的点（不包括之前的点和（$p_{1,\ 1}$，$p_{2,\ 1}$）），并放置一条与 $S_{a_{0,\ 0}}$ 全等且充分靠近该点的抛物线，我们可以在 Poincar´e-里布图 $\mathrm{PR}_{(D_0,\ \{S_j\}_{j=1}^{l_0})}$ 的每条边上各放置两个新顶点。另请参见图4。

我们已经证明，通过这种方式可以得到任意的树（在同构意义下）。证明至此完成。□

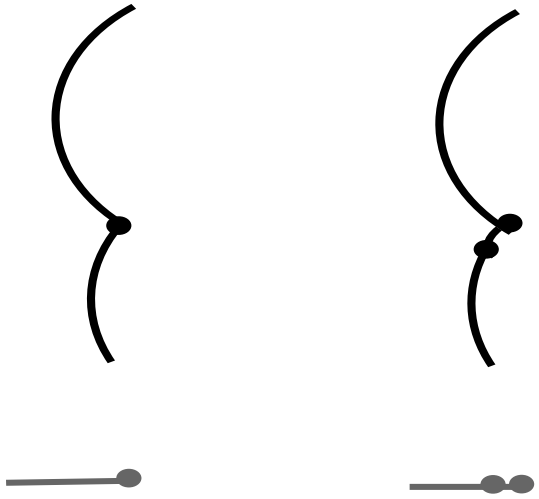


FIGURE 2. 选取一个形如（$p_{1,\ 0}$，q）的点，并适当地选取一条与$S_{a_0,\ 0}$全等且充分接近该点的抛物线。Poincar´e-里布图 PR$_{(D_0,\{S_j\}_{j=1}^{l_0})}$ 发生局部变化。

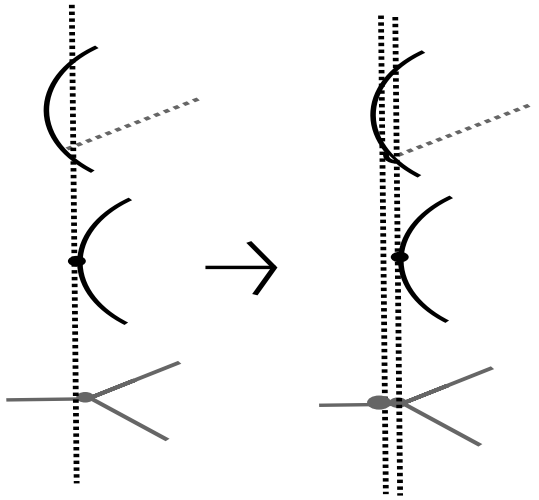


FIGURE 3. 选取一个形如（$p_{1,\ j}$，q_p）$\in \overline{D_0}^{\mathbb{R}^2} - D_0$ （$2 \leq j \leq l$）的点，并适当地选取一条与$S_{a_0,\ 0}$全等且充分接近该点的抛物线。Poincar´e-里布图 PR$_{(D_0,\{S_j\}_{j=1}^{l_0})}$ 发生局部变化。

请注意，借助一阶或二阶实代数曲线的基本论证和性质，我们可以在圆的情形下作出这一论证。

定理1. 将抛物线替换为圆时，同样的结论成立。

我们在此介绍相关历史。请注意，相关研究主要由作者发起。请记住，关于区域的研究是由作者

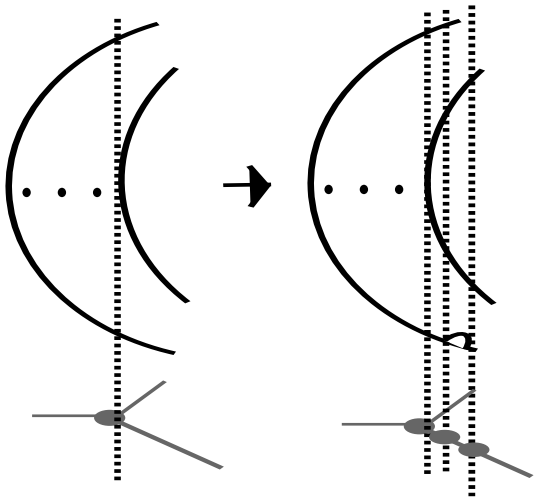


FIGURE 4. 选取一个位于（$S_1 -$（$S_2 \bigcup S_l$）$\bigcap \overline{D}^{\mathbb{R}^2}$ 中且不具有（$p_{1,\ j}$，q_p）$\in \overline{D}^{\mathbb{R}^2} - D$（$2 \leq j \leq l$）形式的点，并恰当地选取一条与$S_{a_0,\ 0}$ 全等且充分接近该点的抛物线。Poincar´é-Reeb 图 PR$_{(D,\{S_j\}_{j=1}^{l_0})}$ 发生局部变化。

本人开展的，其基础是作者在将实仿射空间上的实代数映射（重新）构造为映到区域的映射方面所进行的活跃研究。这些研究由作者本人在 [14] 中提及的文章 [8], 开创，并见于预印本 [10]。相关构造也再次明确地呈现在我们对主定理 2 的证明中。

作为我们在本文中目前不予考虑的一类，实仿射空间中的实代数流形的圆柱类十分重要。实代数流形的圆柱是 $\mathbb{R}^{k_1+K_2}$ 中的一个实代数流形，其中 k_1 和 k_2 为正整数，并且与形如 $C \times \mathbb{R}^{k_2} \subset \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$的实代数流形全等；其中，$C$ 是 $\mathbb{R}^{k_1}$ 中的一个实代数流形。在 [11, 13], , 受[10], 研究的启发，平面中由圆柱围成的区域十分重要。在[12], , 双曲线连通分支的圆柱十分重要。关于由圆围成的区域的系统研究首先在 [15, 16] 启动，并在 [20, 21, 23]具有重要意义。 [22] 也是一篇近期预印本，介绍了一个与圆柱形圆族相关的明确案例的发现。 [17, 24] 也是与平面中由实代数曲线围成的区域或实代数区域相关的预印本，涉及某些明确且一般的情形。

可以说，带有抛物线的情形首先在 [25, 定理 1]中提出。主定理 2 可视为略作修订的定理。在 [25, 定理 1],中，RA 区域由抛物线和两条直线 $\{(-a, t_1)$、(a, t_2) $\nmid_{t_1}$ 围成，$t_2 \in \mathbb{R}\}$ 其中 $a > 0$；对于无穷多个实代数流形而言，RA 区域的概念 S_λ 在 [25]中并未定义。在 $\mathbb{R}^2$ 中取到的从映射到该区域闭包的构造，与原定理证明中的构造略有不同。

主定理 2。（1）存在一个无限图 G 和一条抛物线 $S_P \subset \mathbb{R}^2$，并且存在一个 RA 区域（D, $\{S_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$），使得 $D \subset \mathbb{R}^2$，即 S_j 是

一条与 S_P 全等的抛物线，$q_{\pi_{2,\ 1}|_{\overline{D}^{\mathbb{R}^2}}}$ 是适当的，并且其 Poincar´e- 里布图 PR$_{(D,\{S_j\}_{j\in\mathbb{Z}})}$ 可以按照定义3并结合定义2定义，且同构于 G。

(2) 在 (1) 中，我们可以将 S_P 改为任意一条抛物线，同时保持 G 不变，结论仍然成立。(3) 对每个整数 $m \geq 3$，都存在一个光滑映射 $e_{S_P,\ m}$: $\mathbb{R}^{m+2} \to \mathbb{R}^2$ ，具有以下性质。(a) 该映射是在某个形如 $\{t \mid -a < t < a\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ 的区域上的实多项式映射，其中适当的正数 $a > 0$ 使该区域包含 $\overline{D}^{\mathbb{R}^2}$。(b) 零点集 ${e_{S_P,\ m}}^{-1}$ (0) 是 $\{t \mid -a < t < a\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ 中的一个 m 维光滑子流形，而 $\pi_{m+2,\ 2}$ 的限制映射是到 (1) 和 (2) 中区域 D 的闭包上的一个映射，取在 $\mathbb{R}^2$中。(c) 将 Reeb 空间视为 Reeb 图，它与 PR$_{(D,\{S_j\}}$同构

$_{j\in\mathbb{Z})}$。

证明。我们首先证明性质（1、2）成立。

- 设 $S_{4j} := \{\{(x_1, x_2) \mid x_1 - (x_2 - 8j)^2 + \frac{1}{2} = 0\}$，其中 j 是一个整数。
- 设 $S_{4j+1} := \{\{(x_1, x_2) \mid x_1 - (x_2 - 8j - 4)^2 + \frac{1}{2} = 0\}$，其中 j 是一个整数。
- 设 $S_{4j+2} := \{\{(x_1, x_2) \mid -x_1 + (x_2 - 8j - 2)^2 - \frac{1}{2} = 0\}$，其中 j 是一个整数。
- 设 $S_{4j+3} := \{\{(x_1, x_2) \mid -x_1 + (x_2 - 8j - 6)^2 - \frac{1}{2} = 0\}$，其中 j 是一个整数。

它们与一条抛物线全等。对于每个 S_i，将方程中的“=”分别改为“<”、“>”、“≤”和“≥”，我们分别得到 $S_{i,\ <}$、 $S_{i,\ >}$、 $S_{i,\ \leq}$ 以及 $S_{i,\ \geq}$。在 $k_1 \in \{0, 1\}$ 和 $k_2 \in \{2, 3\}$ 的情况下，对于任意一对整数（j_1，j_2），集合 $S_{4j_1+k_1} \bigcap S_{4j_2+k_2}$ 都是空集。令 $D := \bigcap_{j\in\mathbb{Z}}($ $S_{4j,\ <} \bigcap S_{4j+1,\ <} \bigcap S_{4j+2,\ >} \bigcap S_{4j+3,\ >})$，它是由这些曲线 S_i 围成的区域。其闭包

$$\overline{D}^{\mathbb{R}^2} := \bigcap\nolimits_{j\in\mathbb{Z}} (S_{4j,\leq} \bigcap S_{4j+1,\leq} \bigcap S_{4j+2,\geq} \bigcap S_{4j+3,\geq})$$

也很重要。对于任意整数 i，集合 $S_i \bigcap \overline{D}$ 都非空。

根据我们的构造，映射 $q_{\pi_{n,\ 1}|_{\overline{D}^{\mathbb{R}^n}}}$ 是适当的。我们还可以看出，形如 $\{(b,\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ 的直线与 $\overline{D}^{\mathbb{R}^n}$ 的交集的任意连通分支 $I_{b,\ q}$ 都同胚于单点集或 D^1。庞加莱-里布图 PR$_{(D,\{S_j\}_{j\in\mathbb{Z}})}$ 可以按如下方式定义。这与集合 Λ 为有限集时的情形相同。

- 其顶点定义为 $q_{\pi_{n,1}|_{\overline{D}^{\mathbb{R}^n}}}$ 上某个连通分支中唯一确定的值；该连通分支是形如 $\{(b, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ 的直线与 $\overline{D}^{\mathbb{R}^n}$ 以下任一对象的交集：$-b = \pm\frac{7}{2} = \pm($ $2^2 - \frac{1}{2})$。$-\ b = \pm\frac{1}{2}$ 与 $I_{b,q}$ ，并且某个 S_i 在某点相交，且它们在该点的切向量空间相同。

- 其边定义为 $\overline{D}^{\mathbb{R}^n}$ 中由 $q_{\pi_{n,1}|_{\overline{D}^{\mathbb{R}^n}}}$ 映射的、由上述所有 $I_{b,s}$ 的并集的补集中的一个连通分支的像。

通过使用将 (x_1, x_2) 映射到 (rx_1, x_2) 且满足 $r > 0$ 的仿射变换，我们得到一种类似情形，其中抛物线与任意给定的抛物线全等。

证明了性质（1、2）成立。

我们证明区域 D满足性质（3）。闭包 $\overline{D}^{\mathbb{R}^2} = \overline{D}^{\mathbb{R}^2}$ 也很重要。

我们定义一些光滑函数。类似的函数在 [25, 定理 2] 的原始证明中已有定义，而这两种情形之间存在一些差异。

- 设 $k = 0, 1, 2, 3$。设$c_{\mathcal{S},\,k}$ 为一个光滑函数，使得在 $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}\{x_2 \mid 8j + 2k - \frac{5}{2} < x_2 < 8j + 2k + \frac{5}{2}\}$上，对于上方的抛物线 S_{4j+k}，它是二次实多项式函数；而在 $\mathbb{R}$中的集合 $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}\{x_2 \mid 8j+2k-\frac{5}{2} < x_2 < 8j+2k+\frac{5}{2}\}$ 之外，$c_{\mathcal{S},\,k}$的值的绝对值始终大于 $(\frac{5}{2})^2 - \frac{1}{2} = \frac{23}{4}$。

- 设 $k = 0, 1, 2, 3$。以下条件等价。$-\frac{7}{2} \le c_{\mathcal{S},\,k}(x_2) \le \frac{7}{2}$。$8j + 2k - 2 \le x_2 \le 8j + 2k + 2, \quad j \in \mathbb{Z}$。

我们可以定义一个新的光滑映射 $e_{S_P,m}\colon\ \mathbb{R}^{m+2} \to \mathbb{R}^2$ 定义为 $e_{S_P,m}((x_1, x_2, (y_j)_{j=1}^m) := (c_{\mathcal{S}},1(x_2) - x_1)(x_1 - c_{\mathcal{S}},3(x_2)) - {y_1}^2, c_{\mathcal{S}},2(x_2) - x_1)(x_1 - c_{\mathcal{S}},4(x_2)) - \Sigma_{j=1}^{m-1}{y_{j+1}}^2)$。映射的零点集 ${e_{S_P,m}}^{-1}(0) = \{(x_1, x_2, (y_j)_{j=1}^m) \in \mathbb{R}^{m+2} \mid (c_{\mathcal{S}},1(x_2) - x_1)(x_1 - c_{\mathcal{S}},3(x_2)) - {y_1}^2 = 0, (c_{\mathcal{S}},2(x_2) - x_1)(x_1 - c_{\mathcal{S}},4(x_2)) - \Sigma_{j=1}^{m-1}{y_{j+1}}^2 = 0\}$ 也表示为 $e_{S_P,m}(0) = \{(x_1, x_2, (y_j)_{j=1}^m) \in \overline{D}^{\mathbb{R}^2} \times \mathbb{R}^m \mid e_{S_P,m}(x_1, x_2, (y_j)_{j=1}^m) = 0\}$。

我们证明，借助 $\frac{7}{2} < a \le \frac{23}{4}$，性质 (3a, 3b) 得以满足。条件 $\frac{7}{2} < a \le \frac{21}{4}$ 使映射 $e_{S_P,\,m}$ 成为区域$\{t \mid -a < t < a\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$上的实多项式映射，其中 $\overline{D}^{\mathbb{R}^2}$ 位于其内部，并将其视为 $\mathbb{R}^2$中的对象。我们按照 [25]中的方法，通过隐函数定理证明，${e_{S_P,\,m}}^{-1}(0) = \{(x_1, x_2, (y_j)_{j=1}^m) \in \overline{D}^{\mathbb{R}^2} \times \mathbb{R}^m \mid e_{S_P,\,m}(x_1, x_2, (y_j)_{j=1}^m) = 0\}$ 是 $\{t \mid -a < t < a\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ 的一个 m 维光滑子流形。相关方法最初发表于 [10]。我们不假设读者具备相关知识，也不预设相关论证。我们很容易看出，$\pi_{m+2,2}$ 的限制映射是一个映到 $\overline{D}^{\mathbb{R}^2}$的映射。

下文将曲线 $\{(c_{\mathcal{S},\,k}(x_2)\ x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}^2$ 记作 $S_{c_{\mathcal{S},\,k}}$。对于$k_1 \in \{1, 2\}$ 和 $k_2 \in \{3, 4\}$，$S_{c_{\mathcal{S},\,k_1}}$ 与 $S_{c_{\mathcal{S},\,k_2}}$ 的交集为空。

情形 2-1 在点 $(x_1, x_2, (y_j)_{j=1}^m) \in {e_{S_P,\,m}}^{-1}(0)$ 处，$(x_1, x_2) \in D$。
实多项式函数 $(c_{\mathcal{S},\,1}(x_2) - x_1)(x_1 - c_{\mathcal{S},\,3}(x_2)) - {y_1}^2$ 关于 y_j 在 $j \ge 2$ (y_1)处的偏导数值为（分别）0（或不为0）。实多项式函数 $(c_{\mathcal{S},\,2}(x_2) - x_1)(x_1 - c_{\mathcal{S},\,4}(x_2)) - \Sigma_{j=1}^{m-1}{y_{j+1}}^2$ 关于 y_1 （分别为 y_j，对于某个 $j \ge 2$）的偏导数值为（分别）0（或不为0）。映射 $e_{S_P,\,m}$ 在此处的秩为 2。

情形 2-2 在点 $(x_1, x_2, (y_j)_{j=1}^m) \in {e_{S_P,m}}^{-1}(0)$ 处，$(x_1, x_2) \in \overline{D}^{\mathbb{R}^2} - D$且两个实多项式函数中恰有一个在此处的值为 0。
实多项式函数 $(c_{\mathcal{S},\,1}(x_2) - x_1)(x_1 - c_{\mathcal{S},\,3}(x_2)) - {y_1}^2$ 对每个 y_j 的偏导数值在此处为 0；在这种情况下，实多项式函数 $(c_{\mathcal{S},\,1}(x_2) - x_1)(x_1 - c_{\mathcal{S},\,3}(x_2)) - {y_1}^2$ 在此处的值为 0。在这种情况下，在该点，实多项式函数的偏导数值

由于曲线 $S_{c_{\mathcal{S},\ k}}$ 在 $k = 1, 3$ 处的光滑性，实多项式函数 $(c_{\mathcal{S},\ 1}(x_2) - x_1)(x_1 - c_{\mathcal{S},\ 3}(x_2)) - {y_1}^2$ 对某个 x_j 的偏导数值不为 0。在该点，实多项式函数 $(c_{\mathcal{S},\ 2}(x_2) - x_1)(x_1 - c_{\mathcal{S},\ 4}(x_2)) - \Sigma_{j=1}^{m-1}{y_{j+1}}^2$ 对某个 $j \geq 2$ 的 y_j 偏导数值不为 0。映射 $e_{S_P,\ m}$ 在该点的秩为 2。

由对称性可知，只需证明实多项式函数 $(c_{\mathcal{S},\ 2}(x_2) - x_1)(x_1 - c_{\mathcal{S},\ 4}(x_2)) - \Sigma_{j=1}^{m-1}{y_{j+1}}^2$ 在该点的值为 0 的情形。

.

情形 2-3 在点 $(x_1, x_2, (y_j)_{j=1}^m) \in {e_{S_P,\ m}}^{-1}(0)$ 处，其中 $(x_1, x_2) \in \overline{D}^{\mathbb{R}^2} - D$，且这两个实多项式函数在该点的值均为 0。

两个实多项式函数对每个y_j 的偏导数值在该处均为 0。由曲线 $S_{c_{\mathcal{S},\ k}}$的光滑性可知，这两个实多项式函数对某个 x_j 的偏导数值均不为 0。由于抛物线的位置关系，在该点，曲线 $S_{c_{\mathcal{S},\ k_1}}$ 与 $S_{c_{\mathcal{S},\ k_2}}$ 相交，使得为这两条曲线选取的两个法向量线性无关。映射 $e_{S_P,\ m}$ 在该点的秩为 2。

根据隐函数定理，可证明性质（3a、3b）成立。下面讨论性质（3c）。根据 [4, 30, 31] 关于流形与映射结构的理论，可以立即证明性质（3c）成立。

证明完毕。 □

在主定理1中，如主定理 2（3）所述，我们可以在实代数情形下构造光滑映射和函数。这是一类练习。为此，也请参阅预印本 [10, 25], ，例如，其中涉及的论证并未作此假设。

5. Conflict of interest and Data availability.

利益冲突。

作者是大阪中央高级数学研究所的研究人员（OCAMI研究员）。该研究所得到文部科学省卓越联合研究中心计划 JPMXP0723833165 的支持。作者并未受雇于该研究所。作者对此表示感谢。

数据可用性。

除本文档外，基本上没有生成其他数据。本文的论证不依赖作者预印本中的非平凡论证。

References

[1] V. M. Buchstaber 和 T. E. Panov，《复形与凸多面体》，数学调查与专著丛书，第 204 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2015 年。[2] A. Bodin、P. Popescu-Pampu 和 M. S. Sorea，《平面中由抛物线围成的区域及表示其形状并尊重其到直线的自然投影的图》，《康普顿斯大学数学杂志》，https://link.springer.com/article/ . /s - 023-00469-y，2023 年，arXiv:2207.06871v2。[3] T. Delzant，《具有相同临界点集的光滑函数》，《法国数学学会通报》116（1988），第 3 期，315–339。[4] I. Gelbukh，《关于黎曼流形上的某类图》，《德布勒森数学出版物》104(3– 4)（2023），343–365。

[5] Helmut A. Hamm, 《 *On stratified Morse theory: from topology to constructible sheaves*》, 《奇异空间的几何与拓扑》会议论文集, CIRM, 2012年。[6] N. Kitazawa, 《 *On Reeb graphs induced from smooth functions on 3-dimensional closed orientable manifolds with finitely many singular values* 》, 《非线性分析中的拓扑方法》第 59 卷第 2B 期, 897–912, arXiv:1902.08841。[7] N. Kitazawa, 《 *On Reeb graphs induced from smooth functions on closed or open surfaces* 28 2 2022 127 143, 》, 《泛函分析与拓扑方法》第 卷第 期 (), arXiv:1908.04340。[8] N. Kitazawa, 《 *Real algebraic functions on closed manifolds whose Reeb graphs are given graphs* 28 4 2022 302 308, 》, 《泛函分析与拓扑方法》第 卷第 期 (), arXiv:2302.02339, 2023年。[9] N. Kitazawa, 《 *Realization problems on graphs as Reeb graphs of Morse functions with prescribed preimages* 2108 06913 》, 已投稿至同行评审期刊, arXiv:。[10] N. Kitazawa, 《 *Reconstructing real algebraic maps locally like moment maps with prescribed images and compositions with the canonical projections to the 1-dimensional real affine space*》, arXiv:2303.10723。[11] N. Kitazawa, 《*Explicit smooth real algebraic functions which may have both compact and non-compact preimages on smooth real algebraic manifolds* 2304 02372 》, arXiv:。[12] N. Kitazawa, 《 *On real algebraic maps whose images are domains surrounded by the products of hyperbolas and real affine spaces* 2304 07540 》, arXiv:。[13] N. Kitazawa, 《 *Notes on Reeb graphs of real algebraic functions which may not be planar*》, arXiv:2307.07122。[14] N. Kitazawa, 《 *Some remark on real algebraic maps which are topologically special generic maps and generalize the canonical projections of the unit spheres* 2312 10646 》, arXiv:。[15] N. Kitazawa, 《*Arrangements of small circles for Morse-Bott functions and regions surrounded by them* 2412 20626 3 》, arXiv:。v [16] N. Kitazawa, 《 *Arrangements of circles supported by small chords and compatible with natural real algebraic functions* 2501 11819 》, arXiv:。[17] N. Kitazawa, 《*Realizations of planar graphs as Poincaré-Reeb graphs of refined algebraic domains* 2501 17425, 2025 》, arXiv:。[18] N. Kitazawa, 《 *Moment-like maps and real algebraic functions with prescribed preimages*》, arXiv:2506.17791, 2025年。[19] N. Kitazawa, 《 *Graphs with trice decompositions of small graphs and realizing them as the Reeb graphs of real algebraic functions* 2508 00729 》, arXiv:。[20] N. Kitazawa, 《*Planar graphs embedded in generic ways and realizing them as Reeb graphs of real algebraic functions* 2508 09498, 2025 》, arXiv:。[21] N. Kitazawa, 《 *Regions surrounded by circles whose Poincaré-Reeb graphs are trees*》, arXiv:2511.06342, 2025年。[22] N. Kitazawa, 《 *Regions surrounded by cylinders of circles of fixed radii and exposition of their shapes by natural graphs* 2512 15438, 2025 》, arXiv:。[23] N. Kitazawa, 《*Reeb graphs of compositions of a real algebraic map locally moment maps with projections* 2442 2026 》, https://jxiv.jst.go.jp/index.php/jxiv/preprint/view/。[24] N. Kitazawa, 《 *Regions surrounded by cylinders of real algebraic manifolds and natural decompositions* 2601 06454, 2026 》, arXiv:。[25] N. Kitazawa, 《*Reeb spaces of functions being analytic on dense subsets and their graph structures* 2026 》, 已投稿至预印本服务器 https://arxiv.org/, 。[26] D B. Massey, 《 *Stratified Morse theory past and present* 2 4, 2, : 》, 《纯粹与应用数学季刊》. 第 2006, 1053 1084, –[27] Y. Masumoto 和 O. Saeki, 《 *A smooth function on a manifold with given Reeb graph*》, 《九州数学杂志》65（2011）, 75–84。[28] L. P. Michalak, 《 *Realization of a graph as the Reeb graph of a Morse function on a manifold*》。《非线性分析中的拓扑方法》52（2）（2018）, 749–762, arXiv:1805.06727。[29] G. Reeb, 《 *Sur les points singuliers d´une forme de Pfaff complétement intègrable ou d´unefonction numérique*》, 《法国科学院周报》222（1946）, 847–849。

[30]O. Saeki, *Reeb spaces of smooth functions on manifolds*, 《国际数学研究通知》, maa301, 2022年, 第11期, 2022年6月, 3740–3768, https://doi.org/10.1093/imrn/maa301, arXiv:2006.01689。[31] O. Saeki, *Reeb spaces of smooth functions on manifolds II*, 《数学科学研究》11, 文章编号24（2024）, 11–24。[32] V. Sharko,
About Kronrod-Reeb graph of a function on a manifold, 《泛函分析与拓扑方法》12（2006）, 389–396。[33] M. S. Sorea,
The shapes of level curves of real polynomials near strict local maxima, 博士论文, Universit´e de[34] M. S. Sorea, *Measuring the local non-convexity of real algebraic curves*, 《符号计算杂志》109（2022）, 482–509。

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University, 744 Motooka, Nishi-kuFukuoka 819-0395, Japan, TEL (Office): +81-92-802-4402,
FAX (Office): +81-92-802-4405,*Email address*: naokikitazawa.formath@gmail.com
Webpage: https://naokikitazawa.github.io/NaokiKitazawa.html