arXiv:2602.05290v1 [math.OA] 5 Feb 2026

# 非可和的 C*-超刚性群，但并非 W*-超刚性

Juan Felipe Ariza Mej´ıa，Ionut¸Chifan，Adriana Fern´andez Quero

**摘要**

我们运用变形/刚性理论、几何群论与 $C^*$-代数理论交汇处的技术，构造出连续统多个非平均群 $G$。这些群可以从其约化 $C^*$-代数 $C_r^*(G)$中完全重构，却无法从其群冯·诺依曼代数 $\mathrm{L}(G)$中重构。这些群是合并自由积群的无限直和，构成了首批已知具有这一现象的非 amenable 群例子。

此外，我们给出了合并自由积群的有限直和直积例子，它们同时是 $C^*$-超刚性和 $W^*$-超刚性的。最后，对于这类合并自由积群 $G$中一个相当大的子类，我们证明所有 $C_r^*(G)$ 的 $*$-端同态都是弱内的。

## 1 引言

设 $G$ 是一个可数离散群，并用 $\mathbb{C}[G]$ 表示其群环。具体而言，$\mathbb{C}[G]$ 由 $G$ 中元素的有限线性组合构成，并通过左正则表示 $u$ 作用于平方可和序列构成的希尔伯特空间 $\ell^2 G$ 上：$G \to \mathcal{B}(\ell^2 G)$，其定义为对每个 $g,\ h \in G,\ \xi \in \ell^2 G,\ (u_g \xi)(h) = \xi(g^{-1}h)$。因此，群环 $\mathbb{C}[G]$ 可视为由 $\{u_g \mid g \in G\}$ 生成的 $*$-$\mathcal{B}(\ell^2 G)$ 子代数。由此表示可得到 $\mathbb{C}[G]$ 的两种自然的算子代数完备化，分别为约化群 $C^*$-代数 $C_r^*(G)$，以及 $G$ 的群冯·诺依曼代数 $\mathrm{L}(G)$。它们之间的关系可表示为 $\mathbb{C}[G] \subseteq C_r^*(G) \subseteq \mathrm{L}(G)$，其中 $C_r^*(G)$ 是 $\mathbb{C}[G]$ 在 $\mathcal{B}(\ell^2 G)$ 上关于算子范数的闭包，而 $\mathrm{L}(G)$ 是 $\mathbb{C}[G]$ 在 $\mathcal{B}(\ell^2 G)$上的弱算子拓扑闭包。

正如 Murray 和 von Neumann 在 [MvN43], 群冯·诺伊曼代数 $\mathrm{L}(G)$具有平凡中心（因此是一个 $\mathrm{II}_1$ 因子）当且仅当$G$ 的所有非平凡共轭类都是无限的。在这种情况下，$G$ 称为无限共轭类（infinite conjugacy class，简称 icc）群。此时，$\mathrm{L}(G)$表现得像一个“简单”对象，这是最值得研究的情形，也是本文主要讨论的情形。

一个根本性问题是，能在多大程度上从自然关联于原群 $G$ 的代数范畴中完全重构该群，这些范畴包括群环$\mathbb{C}[G]$、约化群 $C^*$-代数 $C_r^*(G)$以及群冯·诺伊曼代数 $\mathrm{L}(G)$。更确切地说，我们回顾以下刚性概念。若对任意群 $H$ 和任意 $*$-同构 $\mathbb{C}[G] \cong \mathbb{C}[H]$，必有 $G \cong H$，则称群 $G$为环超刚性；若对任意群 $H$ 和任意 $*$-同构 $C_r^*(G) \cong C_r^*(H)$，必有 $G \cong H$，则称其为-超刚性；并且

$W^*$-超刚性，若对任意群 $H$ 和任意 $*$-同构 $\mathrm{L}(G) \cong \mathrm{L}(H)$，必有$G \cong H$。

即使在群环这一纯代数环境中，识别超刚性群也是一个极其复杂的问题。例如，若 $G_1$ 和 $G_2$ 是有限阿贝尔群，且 $|G_1| = |G_2| = k$，那么存在典范同构 $\mathbb{C}[G_1] \cong \mathbb{C}[G_2] \cong \mathbb{C}^k$。特别地，没有任何合数阶的有限阿贝尔群是环超刚性的。另一方面，很容易看出，只要群 $G$ 满足 $\mathbb{C}[G]$ Kaplansky单位猜想，它就是环超刚性的。然而，环超刚性的完整范围仍然未知，尤其是近年来出现的那些针对Kaplansky猜想的复杂反例，更凸显了这一点， [Ga21，Mu21]。

由于完备化 $C_r^*(G)$ 和 $\mathrm{L}(G)$ 是相对于逐渐变弱的拓扑而言的（其中，弱算子拓扑在某种意义上是施加于算子上的最弱自然拓扑），相应的重构问题也变得愈发微妙。随着由此得到的代数变得越来越大，它们往往保留的原始群结构信息越来越少，使得刚性现象变得格外难以识别。

当 $G$ 是可和群时，群冯·诺伊曼代数 $\mathrm{L}(G)$ 通常几乎不会保留关于底层群结构的信息。以下经典例子很好地说明了这一现象。首先，若 $G$ 是无限阿贝尔群，那么冯·诺伊曼代数理论中的标准结果表明，$\mathrm{L}(G)$ 总是同构于阿贝尔冯·诺伊曼代数$L^\infty([0,\ 1],\ \lambda)$其中 $\lambda$ 表示勒贝格测度。特别地，在这种情况下，$\mathrm{L}(G)$ 仅取决于 $G$ 是无限阿贝尔群这一事实，而不取决于 $G$的任何更精细的代数性质。更引人注目的是，Connes著名定理断言，对于任意 ICC可和群 $G$，其对应的群冯·诺伊曼代数 $\mathrm{L}(G)$ 同构于 $\mathcal{R}$，即 Murray和von Neumann 意义下唯一的超有限 $\mathrm{II}_1$ 因子 [MvN43]。因此，除了可和性（以及无限共轭类条件）之外，$\mathrm{L}(G)$ 不编码关于 $G$的任何其他代数信息。由此可见，无论在阿贝尔情形还是在 ICC 可和情形中，从群到其冯·诺伊曼代数的转化都会导致群论信息的巨大损失。

在 C*-代数的情形下，情况截然不同。关于齐次 C [Sc74] -代数的一个经典分类结果表明，每个无挠无限阿贝尔群 $G$ 都是 C*-超刚性的；这与前文讨论的阿贝尔群冯·诺依曼代数形成鲜明对比。此外，近年来还发现了其他一些可和 C*-超刚性群的例子。这些群包括 [CKRTW] 和[CLMW25]，中的某些无挠几乎阿贝尔群，以及结构上更复杂的类别，如 [ER18]中的二步幂零群和 [Om18]中的自由幂零群。这些结果表明，尽管可和性往往会削弱刚性性质，但在多种可和情形下，约化群 C*-代数仍能保留足够的信息，从而恢复底层群。值得一提的是，目前我们尚不清楚是否存在无限共轭类的可和 $C^*$-超刚性群。

在非可和情形下，无论是在 $C^*$-代数还是冯·诺依曼代数层面，情况都要复杂得多。寻找 $W^*$-超刚性非平均群的例子，过去几十年来一直是一个活跃的研究方向，且几乎完全通过变形/刚性理论的方法进行研究。第一类 $W^*$-超刚性群由 Ioana、Popa 和 Vaes 发现 [IPV10], ，他们证明一大类广义花环积群具有这一性质。随后，人们又发现了其他一些 $W^*$-超刚性群的例子，它们源自余诱导群、合并自由积、树群以及半直

积，其核为非顺从核；相关例子见 [BV13、Ber14、CI17、CD-AD20、CD-AD21]。其中一些例子也具有 $C^*$-超刚性 [CI17、CD-AD20、CD-AD21]。

尽管人们自然会预期，非平均 $C^*$-超刚性群应当比 $W^*$-超刚性群具有更为丰富的多样性，但在这一方向上所知甚少。特别是，此前尚不清楚是否存在非平均群，它们是 $C^*$-超刚性的，却不是 $W^*$-超刚性的。本文的主要目标之一便是通过提供一大类此类例子来回答这一问题。

**定理 1.1**。 存在一族可数群 $\{G_i\}_{i\in I}$ 满足 $|I| = 2^{\aleph_0}$，使得 $G_i \ncong G_j$只要 $i \neq j$，且每个群 $G_i$ 都是 $C^*$-超刚性的，但不是 $W^*$-超刚性的。

这些群 $G_i$ 是如下形式的无限直和： $G_i = \bigoplus_n K_n$其中每个直和项 $K_n$ 都是具有 (T) 性质的类 wreath 乘积群的合并自由积，构造见[CIOS21、CIOS26]。定理1.1 的证明建立在并扩展了早期工作中发展的若干技术之上，包括 [CdSS15、CI17、CU18、CIOS21、AMCOS25，以及 CIOS26]。

## 1.1 主要结果

在陈述主要结果之前，我们先考虑以下这类群。

**定义 1.2**。 记 $\mathcal{AT}$为满足以下条件的所有合并自由积群 $G = G_1 *_C G_2$的集合：

(i) 对于 $j = 1, 2$，群 $G_j \in \mathcal{WR}(A_j, B_j \curvearrowright I_j)$ 是具有 (T) 性质的类 wreath 乘积；参见定义 2.1。(ii) 每个 $A_j$ 都是非平凡阿贝尔群，且每个 $B_j$ 都是双曲群的非平凡 ICC 子群。(iii) 作用 $B_j \curvearrowright I_j$ 满足：对每个 $i \in I_j$，稳定子 $\mathrm{Stab}_{B_j}(i)$ 都是可和的。(iv) 对每个非平凡元素 $b \in B_j$，其中心化子 $C_{B_j}(b)$ 都是可和的。(v) 公共子群 $C < G_1, G_2$ 是无限共轭类、非平均且具有 Haagerup 性质，并且它在 $G_1$ 和 $G_2$中都是几乎自正规的。

已有许多满足上述条件的群例子，都是运用深刻的群论方法构造出来的，例如 Dehn填充 [Osi06、DGO11] 以及 Cohen–Lyndon性质[Sun20]；例如可参见 [CIOS21、CIOS22、CIOS24]。这些群中有许多自然包含满足条件 (v) 所要求的错正规自由子群。事实上， $\mathcal{AT}$ 这一类群相当庞大，包含连续统多个元素。

我们的 $C^*$超刚性结果在很大程度上依赖于由属于类 $\mathcal{AT}$ 的群产生的合并自由积所对应的 $W^*$超刚性现象。因此，我们首先在冯·诺依曼代数框架下介绍我们的刚性结果。

最早的 $W^*$-超刚性合并自由积例子由 [CI17], 给出，他们研究了沿可和子群合并的乘积群的自由积。随后，这一框架得到进一步拓展；特别是， [CD-AD20、CD26] 构造了允许沿非 amenable 子群进行合并的新例子。

在本文中，我们进一步拓展了这项研究，将属于类 $\mathcal{AT}$的群加入已知的 W*-超刚性合并自由积群之列。这些例子产生了不具有 (T) 性质的 solid $\mathrm{II}_1$ 因子，从而丰富了已知 $W^*$-超刚性冯·诺依曼代数的类别，并为此前研究范围之外的刚性现象提供了新的来源。

**定理 1.3.** 设 $G \in \mathcal{AT}$。令 $H$ 为任意群，并假设 $\theta\colon \mathrm{L}(G)^t \to \mathrm{L}(H)$ 是一个 $*$-同构，其中某个 $0 < t \leqslant 1$成立。那么 $t = 1$ 且 $G \cong H$。此外，存在群同构 $\delta\colon G \to H$、特征 $\eta\colon G \to \mathbb{T}$以及酉元 $w \in \mathrm{L}(H)$，使得

$$\theta(u_g) = \eta(g) w v_{\delta(g)} w^*, \ \textit{for all } g \in G.$$

借助 [CdSS15、CdSS17、CU18], 中关于乘积刚性所发展的早期技巧，我们还证明，类 $\mathcal{AT}$ 中的群满足这一刚性现象。更确切地说，给定群 $G_1$、.....、$G_n \in \mathcal{AT}$，它们的直积 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ 在冯·诺依曼代数框架中保留了乘积性质：任何满足条件的群 $H$ ，若$\mathrm{L}(G) \cong \mathrm{L}(H)$，则在放大意义下必有直积分解 $H = H_1 \times \cdots \times H_n$，并且在放大意义下还满足$\mathrm{L}(H_i) \cong \mathrm{L}(G_i)$ 对每个 $1 \leqslant i \leqslant n$均成立。

将这一乘积刚性结果与上文确立的刚性结合起来，我们得到了关于类 $\mathcal{AT}$ 中群的直积的新 $W^*$-超刚性结果。

**定理 1.4.** 对于每个 $1 \leqslant i \leqslant n$，令 $G_i \in \mathcal{AT}$，设 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$。令 $H$ 为任意群，并假设 $\theta\colon \mathrm{L}(G)^t \to \mathrm{L}(H)$ 是一个 $*$-同构，其中某个 $0 < t \leqslant 1$。那么 $t = 1$ 且 $G \cong H$。此外，存在群同构 $\delta\colon G \to H$、特征 $\eta\colon G \to \mathbb{T}$ 以及酉元 $w \in \mathrm{L}(H)$，使得

$$\theta(u_g) = \eta(g) w v_{\delta(g)} w^*, \ \textit{for all } g \in G.$$

然而，若考虑满足 $G = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n$ 且 $G_n \in \mathcal{AT}$ 的无限直和，便会立刻发现这类群绝非 $W^*$-超刚性。事实上，在这种情况下有 $\mathrm{L}(G) \cong \bar{\otimes}_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n$，其中 $\mathcal{M}_n = \mathrm{L}(G_n)$；众所周知，$\mathrm{II}_1$ 因子的无限张量积总是麦克达夫因子 [McD69]。为说明这一点，首先注意到，利用矩阵单位和放大，总有 $\mathcal{M}_n \cong \mathcal{M}_n^{1/2} \bar{\otimes} \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$。此外，若 $\mathcal{R}$ 表示 Murray–von Neumann 超有限 $\mathrm{II}_1$因子 [MvN43], ，则 $\mathcal{R}\bar{\otimes}\mathcal{R} \cong \mathcal{R}$。结合这些观察，我们得到

$$\begin{aligned} \bar{\otimes}_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n &\cong \bar{\otimes}_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{M}_n^{1/2} \otimes \mathbb{M}_2(\mathbb{C})) \cong (\bar{\otimes}_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n^{1/2}) \bar{\otimes} (\bar{\otimes}_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{M}_2(\mathbb{C})) \\ &\cong (\bar{\otimes}_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n^{1/2}) \bar{\otimes} \mathcal{R} \cong (\bar{\otimes}_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n^{1/2}) \bar{\otimes} (\mathcal{R}\bar{\otimes}\mathcal{R}) \\ &\cong ((\bar{\otimes}_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n^{1/2}) \bar{\otimes} \mathcal{R}) \bar{\otimes} \mathcal{R} \cong (\bar{\otimes}_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n) \bar{\otimes} \mathcal{R}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

因此，我们得出$(G) \cong$ 是$(G)\bar{\otimes}\mathcal{R}$。由于根据 [Co76], 超有限因子 $\mathcal{R} \cong$ 是$(A)$，对于任意 ICC可和群 $A$，可知$(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n) \cong$ 是 $((\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n) \times A)$。另一方面，

容易验证，对于每个无限共轭类群 $A$，群 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n$ 和 $(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n)\times A$ 永不同构，因为每个 $G_n$ 的可和根都是平凡的。

尽管如此，值得注意的是，类 $\mathcal{AT}$ 中的无挠群在其约化 $C^*$ 代数层面仍表现出强烈的刚性现象。更准确地说，将冯·诺依曼代数形变/刚性技术与若干 $C^*$ 代数性质相结合——例如迹的唯一性以及不存在非平凡投影，而满足 Baum-Connes猜想的群确保了这些性质——我们便得到以下 $C^*$-超刚性结果。

**定理 1.5.** 对于任意 $n\in\mathbb{N}$，设 $G_n\in\mathcal{AT}$ 是任意无挠群，并考虑无限直和 $G=\bigoplus_n G_n$。设 $H$ 是任意可数群，且 $\theta:\mathrm{C}_r^*(G)\to\mathrm{C}_r^*(H)$ 是一个 $*$-同构。那么，$G\cong H$。此外，存在群同构 $\delta:G\to H$、一个特征$\eta:G\to\mathbb{T}$以及一个自同构 $\psi\in Aut(\mathrm{C}_r^*(H))$，满足

$$\theta(u_g)=\psi(\eta(g)v_{\delta(g)}),\ for\ all\ g\in G.$$

在某些情况下，可以选择自同构 $\psi\in$ 自同构群$(C_r^*(H))$ 使其近似弱内——存在一列酉元 $(w_n)_n\subset \mathrm{L}(H)$，满足 $\|\psi(x)w_n-w_nx\|_\infty\to 0$ 对所有 $x\in C_r^*(H)$ 均成立。

请注意，定理 1.5再次凸显了群的 C*-代数与其冯·诺依曼代数对应物相比“小”了多少。近期在 [AMCOS25] 中发现的 McDuff刚性现象，是否也适用于前一定理中的群，值得探究。如果确实如此，那么 $W^*$-超刚性仅会因无限张量积“尾部”中的一个“可和房间”而无法实现。

我们指出，这些群以及 Curda 和 Drimbe 独立研究的那些群，提供了首批已知的非顺从乘积群例子，它们是 C*-超刚性的 [CD26]。在他们的工作中，作者只处理有限直积；然而，与我们的定理 1.4 不同，在 [CD26，定理 A] 中，作者成功证明了在相应冯·诺依曼代数层面上，*-超刚性适用于任意放大。

用于证明定理 1.3 中超刚性结果的方法，也可以与 $C^*$-代数中关于迹唯一性的技术相结合，从而描述类 $C^*$ 群的 $\mathcal{AT}$-代数的所有端同态。这些结果补充了此前关于约化群 $C^*$-代数对称性的研究 [CI17、CD-AD20、CD-AD21]。

**定理 1.6。** 设 $G\in\mathcal{AT}$，且令 $\theta:\ C_r^*(G)\to C_r^*(G)$ 为任意一个 $*$-端同态。则存在一个群单态 $\delta:G\to G$、一个特征 $\eta:\ G\to\mathbb{T}$以及一个酉元 $w\in\mathrm{L}(G)$，使得

$$\theta(u_g)=\eta(g)wv_{\delta(g)}w^*,\quad for\ all\ g\in G.$$

群 $G=G_1*_C G_2\in\mathcal{AT}$称为属于子类 $\mathcal{AT}_0$，如果此外它还满足 End$(G)$ =Inn$(G)$ 且其阿贝尔化平凡。具体例子可通过取自由因子 $G_1$ 和 $G_2$ 为 [CIOS24],中构造的性质 (T) 花环式乘积群得到,如定理 2.8所示。特别地，将前述结果应用于子类 $\mathcal{AT}_0$中的群，我们得到了首批约化 $C^*$-代数例子，其对应的非平均群的自同构群完全由弱内自同构构成。

**推论 1.7**。 设 $G \in \mathcal{AT}_0$。对于每个 $\theta \in$ 自同构群$(C_r^*(G))$，存在一个酉元 $w \in \mathrm{L}(G)$，使得 $\theta = \mathrm{Ad}(w)$。

对于 $\mathcal{AT}$ 中的某些融合积，我们还得到了一个与近期 [CIOS24] 在冯·诺伊曼代数背景下的结果精神相同的不可嵌入性结果。具体而言，考虑由所有满足定义 1.2 中条件 (i)-(iv) 的具有 (T) 性质的类 wreath 群 $G_i \subset \mathcal{WR}(A_i, B_i \curvearrowright I_i)$ 构成的连续统族 $\mathcal{C}_1$，并且对每个 $i \neq j$，都有 $G_i \not\hookrightarrow G_j$。这些群构造于 [CIOS21，推论 1.7] 以及 [CIOS24，推论 1.5]。考虑子类 $\mathcal{AT}_1 \subset \mathcal{AT}$，它由满足条件 (v) 的所有融合积 $G = G_1 *_C G_2$ 构成，其中两个不同的群 $G_1, G_2 \in \mathcal{C}_1$ 都含有一个自正规化自由群 $C$ 的副本。注意，$\mathcal{AT}_1$ 也包含连续统多个元素。

**推论 1.8**。 对于任意两个不同的群 $H_1, H_2 \in \mathcal{AT}_1$，我们有 $C_r^*(H_1) \not\hookrightarrow C_r^*(H_2)$。

**论文结构**。 除引言外，本文还分为四节。第2节构造了以下类别中的例子：$\mathcal{AT}$、$\mathcal{AT}_0$和 $\mathcal{AT}_1$。第3 节汇集了冯·诺依曼代数的预备知识，这些知识将在第4 节中用于证明定理1.4。第5节基于 [CU18、CdSS15、CdSS17], 建立了一般的乘积超刚性结果，并证明定理1.5。本节还证明了关于C*-代数的嵌入结果，包括定理1.6 和推论1.7及1.8。

**致谢**。 第一作者获得了美国国家科学基金会项目 FRG-DMS-1854194 和 DMS-2154637、研究生院综合考试后研究奖学金以及欧文与佩吉·克莱因菲尔德学者奖学金的资助。第二作者获得了美国国家科学基金会项目 DMS-2154637 和 DMS-2452247 的资助。第三作者获得了佛兰德研究基金会的 FWO 研究项目 G016325N 的资助。

## 2 类 wreath 乘积群预备知识

我们回顾 [CIOS21]中构造的群的定义。

**定义 2.1**。 设 $A, B$ 为任意群，$I$ 为抽象集合，$B \curvearrowright I$ 为 $B$ 在 $I$ 上的一个（左）作用。若群 $W$ 是群 $A$ 和 $B$ 关于作用 $B \curvearrowright I$ 的一种扩张，形式如下，则称其为一个类 *wreath* 乘积：$W$

$$1 \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i \longrightarrow W \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 1, \tag{2.1}$$

其中满足以下条件：

(a) $A_i \cong A$，对每个 $i \in I$ 均成立，且

(b) $W$ 在 $A^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} A_i$ 上的共轭作用满足规则 $wA_iw^{-1} = A_{\pi(w)\cdot i}$，对所有 $i \in I$均成立。

若作用 $B \curvearrowright I$ 是正则的（即自由且传递），则称 $W$ 为 $A$ 和 $B$的正则类花环积。与作用 $B \curvearrowright I$ 对应的群 $A$ 和 $B$ 的所有类花环积（分别为所有正则类花环积）的集合记作 $\mathcal{WR}(A, B \curvearrowright I)$（分别为 $\mathcal{WR}(A, B)$）。

类 wreath 乘积的概念推广了群的普通（受限）花环积。事实上，对于任意群 $A$ 和 $B$，都有 $A\mathrm{wr}B \in \mathcal{WR}(A, B)$。反过来，不难证明，只要扩张（2.1）分裂，就有 $W \cong A\mathrm{wr}B$

为了更深入地分析由类 wreath 乘积群 $_1$ 产生的 II $W$因子，将特定群嵌入商群 $B$ （2.1）中，使这些子群也自然地出现在类 wreath 乘积群 $W$ 本身之中，是很有用的。受此观点启发，文献 [CIOS26] 引入了类 wreath 乘积群的外围版本。设 $A$ 和 $B$ 为群，且 $C < B$为一个子群。本文中，我们用 $\mathcal{WR}(A, B, C < B)$表示所有满足以下分裂条件的类花环群 $W \in \mathcal{WR}(A, B)$：

（c）子群 $\pi^{-1}(C) < W$ 是一个分裂的广义花环积群 $\pi^{-1}(C) = A\mathrm{wr}_B C$；换言之，与扩张（2.1）相关联的自然 2-余循环在 $C \times C$上是平凡的。

注意 到 $\mathcal{WR}(A, B, C < B) \subseteq \mathcal{WR}(A, B)$，且当 $C = 1$ 这两类相同时。

在 [CIOS26], 中，作者证明了存在大量具有 (T) 性质的类花环积，它们满足商群的指定子群上的这一分裂条件。

**定理 2.2** ([CIOS26，推论 3。4])。对于任意有限生成群 $A$ 和 $C$，存在一个群 $B$，包含 $C$，以及一个类 *wreath* 乘积群 $W \in \mathcal{WR}(A, B, C < B)$ 满足：

*(1)* $W$ 具有 *(T)* 性质；

*(2)* $B$ 相对 $C$双曲；且

*(3)* 当 $A$ 和 $C$ 均为无挠群时，则 $B$以及由此得到的 $W$也可以选为无挠群。

**推论 2.3.** 对于任意有限生成群 $A$ 和 $C$，存在一个具有 *(T)* 性质的类 *wreath* 乘积群 $W \in \mathcal{WR}(A, B, C \leqslant B)$，使得 $B$ 相对 $C$双曲。此外，如果 $A$ 和 $C$ 均为无挠群，则 $W$ 也可以选为无挠群。而且，在这种情况下，若假设 $C$ 中每个非平凡元素的中心化子都是可和的，则 $B$ 也可以选为具有相同性质。

证明。利用定理 2.2，我们只需证明此外的部分。假设 $B$ 无挠且相对 $C < B$ 双曲。固定一个元素 $b \in B$。如果 $b$ 不能共轭到 $C$ 中，那么它是双曲的，并且根据 [DGO11，引理 6.5], ，其中心化子 $C_B(b)$ 几乎循环，因此是可和的。现在假设存在 $k \in B$ 使得 $t := kbk^{-1} \in C$。由于 $t$ 有无限阶且 $C$ 在 $B$ 中自正规，中心化子满足 $C_B(t) = C_C(t)$。根据关于 $C$ 的附加假设，我们得到 $C_B(t)$ 是可和的，因此 $C_B(b) = k^{-1}C_B(t)k$ 也是可和的。 □

给定群 $C < G$ 的一个包含关系，如果对每个 $g \in G\backslash C$，交集 $C \cap gCg^{-1}$ 都是有限的，我们就称 $C$ 是几乎自正规的；或者等价地，如果对每个 $g$，$h \in G\backslash C$，交集 $C \cap gCh$ 都是有限的。

**引理 2.4** ([CIOS26])。若 $C < B$ 几乎自正规，则对于任意 $W \in \mathcal{WR}(A, B, C < B)$，子群 $C < W$ 也几乎自正规。

接下来，我们给出前一个推论在 $W$ 无挠且 $C$ 为任意自由群 $C = \mathbb{F}_n$ 的情形下的证明，该证明不依赖 [CIOS26]中的结果。

**定理 2.5.** 对于 每个 $n$、$k \in \mathbb{N}$，都存在一个性质 *(T)* 群 $W \in \mathcal{WR}(A、B、C < B)$，使得 $t$

*(i)* $A \cong \mathbb{Z}^k$ 和 $C \cong \mathbb{F}_n$；

*(ii)* $B$ 是无限共轭类、无挠的，且相对 $C < B$ 双曲；

*(iii)* $C$ 在 $W$中是自正规子群；并且

*(iv)* 对每个 $1 \neq b \in B$，中心化子 $C_B(b)$ 都是几乎循环的。

证明。固定 $n \in \mathbb{N}$，并令 $G$ 为一个无挠的性质 (T) 群，它相对于$C < G$ 是双曲的，其中 $C \cong \mathbb{F}_n$ （例如参见 [BO08，定理 1]）。利用 [CIOS22，命题 4.21]和 [CIOS22，推论 4.18]，存在 $G$ 的一个商群 $U$，使得 $U \in \mathcal{WR}(\mathbb{F}_k, B)$，其中 $B$ 是无挠的，并相对于 $C < B$的一个副本双曲。注意，由于 $C$ 是自由的，根据[DS05，推论 1.14] 可知 $B$ 是双曲的。由于 $B$ 无挠，因此它是无限共轭类的。此外，根据 [CIOS24，推论 2.6]， $B$ 也满足关于中心化子的条件 (iv)。

记 $A = \mathbb{Z}_k = \mathbb{F}_k/N$ 为某个正规子群 $N \lhd \mathbb{F}_k$。应用 [CIOS22，引理 4。3] 对于 $U$ 和 $N$，我们进一步得到一个具有 (T) 性质的商群 $W \in \mathcal{WR}(A, B)$。接下来，令 $\pi:\ W \to B$为典范同态。由于 $C$ 是自由群，因此子群 $\pi^{-1}(C)$是一个可分裂的扩张 $1 \to A^{(B)} \hookrightarrow \pi^{-1}(C) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} C \to 1$，这意味着 $W \in \mathcal{WR}(A, B, C < B)$。由引理 $C$ 可知， $W$ 在 2.4 中几乎自正规。 □

**引理 2.6**。设 $G_1$ 和 $G_2$ 为具有公共子群 $C < G_1$的群，$G_2$。若对于每个 $1 \leqslant i \leqslant 2$， $C < G_i$ 都几乎自正规，则 $C < G_1 *_C G_2$ 也几乎自正规。

证明。令 $g \in G\backslash C$ 及其约化形式为 $n \geqslant 1$ 个整数， $j(k) \in \{1, 2\}$ 且$g_k \in G_{j(k)}\backslash C$，对每个 $1 \leqslant k \leqslant n$，以及 $j(1) \neq j(2) \neq \cdots \neq j(k)$。注意，对于 $x \in C \cap gCg^{-1}$，$g^{-1}xg = g_n^{-1} \cdots g_1^{-1} x g_1 \cdots g_n \in C$，这迫使 $g_1^{-1} x g_1 \in C$。因此， $C \cap gCg^{-1} \subset C \cap g_1 C g_1^{-1}$，它是有限的，因为 $g_1 \in G_{j(1)}\backslash C$ 且 $C$ 在 $G_{j(1)}$中是自正规的。 □

我们接下来给出一个结果，说明定理 2.5 可以有效地用于构造大量满足定理 1.3中主要刚性结果假设的类花环群的合并自由积例子。

**定理 2.7**。存在无穷多个无挠的合并自由积群 $G = G_1 *_C G_2$，满足以下性质：

*(i)* 每个 $G_i \in \mathcal{WR}(A_i, B_i, C < B_i)$ 都是性质 *(T)* 花环式乘积群，其中 $A_i$ 是任意给定有限秩的自由阿贝尔群，而 $B_i$ 是一个特定的无挠 *icc* 双曲群，满足对于每个 $1 \neq b \in B_i$，其中心化子 $C_{B_i}(b)$ 都是几乎循环群。

*(ii)* $C$ 同构于任意给定有限秩的自由群，并且它在 $G$ 中是自正规的。特别地，当 $C$ 是无限共轭类时，它在 $G$ 中的虚中心化子满足 $\mathrm{vC}_G(C) = \{1\}$。

*(iii)* 对每个 $h \neq 1$，其中心化子 $C_G(h)$ 都是可和的。

证明。固定满足 $n \geqslant 2$ 的 $n$、$k \in \mathbb{N}$，并令 $C = \mathbb{F}_n$ 和 $A_i = \mathbb{Z}^k$。由定理 2.5，对每个 $1 \leqslant i \leqslant 2$，都存在一个无挠的性质 (T) 类 wreath 乘积群 $G_i \in \mathcal{WR}(A_i、B_i、C < B_i)$，满足 (i) 中列出的所有条件。由于 $C$ 在每个 $G_i$ 中都是自正规的，引理 2.6 蕴含 $C$ 在合并自由积 $G = G_1 *_C G_2$ 中是自正规的。特别地，这意味着 $\mathrm{vC}_G(C) \leqslant \mathrm{vC}_C(C)$。由于 $C$ 是无限共轭类，我们有 $\mathrm{vC}_C(C) = \{1\}$，进而得到 $\mathrm{vC}_G(C) = \{1\}$。注意，根据 KS07 的定理 1]，$G$ 中的每个非平凡元素都有可和的稳定子。此外，由于每个 $G_i$ 都是无挠的，因此 $G$ 也是无挠的。

最后可以看出，通过改变 $n \in \mathbb{N}$ 或 $k \in \mathbb{N}$，存在无穷多个这样的群。 □

回顾，在 [CIOS24], 中构造了性质 (T) 类花环积群，并具有如下附加性质：它们的阿贝尔化是平凡的，且其所有单射自同态都自动是内自同构。事实上，[CIOS24，定理 2.10] 表明存在无穷多个这样的群。我们将这些群的范畴记为 $\mathcal{C}_0$。在下面的定理中，我们证明，$\mathcal{C}_0$ 中任意两个群沿如 [CIOS24] 中那样的自由自正规化子群所作的合并自由积都属于类 $\mathcal{AT}_0$。我们使用 $\prec$ 中 Popa 意义下的交织概念（回顾于定理 3.1），以及冯·诺伊曼代数的融合自由积（回顾于第 3.2 节）。我们将该定理收录于此，因为它是一个群论结果，并且与本节主题自然契合。

**定理 2.8.** 若 $G_1, G_2 \in \mathcal{C}_0$ 满足 $G_1 \not\cong G_2$，则对每个 $G = G_1 *_C G_2 \in \mathcal{AT}$，都有 $G \in \mathcal{AT}_0$。

证明. 为了得到结论，只需证明 $G$的单射自同态是内自同构，并且 $G$的阿贝尔化是平凡的。

为证明第二个断言，固定 $A$ 这个阿贝尔群，并设 $\delta : G \to A$ 是任意群同态。由于限制 $\delta_{|G_i} : G_i \to A$ 也是群同态，且 $G_i$ 的阿贝尔化是平凡的，因此对所有 $i = 1, 2$，都有 $G_i = \ker(\delta_{|G_i}) \leqslant \ker(\delta)$。这进一步推出$G = G_1 *_C G_2 = G_1 \vee G_2 \subset \ker(\delta)$。因此，$G$ 的阿贝尔化是平凡的。

现在设 $\delta : G \to G$ 为任意单射群自同态。由于 $\delta(G_i) < G = G_1 *_C G_2$ 是具有 (T) 性质的子群，[IPP05，定理 5.1] 表明，对某些 $j_i \in \{1、2\}$，有 $\mathrm{L}(\delta(G_i)) \prec_{\mathrm{L}(G)} \mathrm{L}(G_{j_i})$。利用 [CI17，引理 2.2],，存在 $g_i \in G$使得 $[\delta(G_i) : \delta(G_i) \cap g_i G_{j_i} g_i^{-1}] < \infty$。这意味着$[g_i^{-1}\delta(G_i)g_i : g_i^{-1}\delta(G_i)g_i \cap G_{j_i}] < \infty$。由于 $G_i$具有 (T) 性质，$g_i^{-1}\delta(G_i)g_i \cap G_{j_i}$亦然，从而 $\mathrm{L}(g_i^{-1}\delta(G_i)g_i \cap G_{j_i}) \not\prec_{\mathrm{L}(G_{j_i})} \mathrm{L}(C)$。因此，由 [IPP05，定理 1.1] 可知 $\mathrm{L}(g_i^{-1}\delta(G_i)g_i) \subseteq \mathrm{L}(G_{j_i})$，从而

$$g_i^{-1}\delta(G_i)g_i \leqslant G_{j_i}, \text{ for all } i = 1, 2. \tag{2.2}$$

接下来我们证明 $\{j_1、\ j_2\}$ 是 $\{1、\ 2\}$的一个排列。用反证法假设 $j_1 = j_2 = 1$。由关系 (2.2)，Ad $(g_1) \circ \delta\colon G_1 \to G_1$ 是一个单射自同态。由关于$G_1$的假设可知，存在 $h \in G$ 使得限制 $\delta|_{G_1}$ 是一个同构 $\delta\colon G_1 \to hG_1h^{-1}$，由 $\delta(g) = hgh^{-1}$给出，对所有 $g \in G_1$成立。由 (2.2) 我们还有 $g_2^{-1}\delta(G_2)g_2 \leqslant G_1$。综合这些关系可知 $g_2^{-1}hCh^{-1}g_2 = g_2^{-1}\delta|_{G_1}(C)g_2 = g_2^{-1}\delta|_{G_2}(C)g_2 \leqslant G_1$，从而 $g_2^{-1}h \in G_1$。这蕴含 $\delta(G_2) \leqslant hG_1h^{-1}$。由于 $G_2$ 具有 (T) 性质且 $C$ 是 Haagerup 的，存在 $t \in G_1\backslash C$和 $k_2 \in G_2\backslash C$ 使得 $\delta(k_2) = hth^{-1}$。另一方面，由于 $\delta|_{G_1}$ 满射到 $hG_1h^{-1}$，存在 $k_1 \in G_1$ 使得 $\delta(k_1) = hth^{-1}$。综合这些可知 $\delta(k_1) = \delta(k_2)$，从而$k_1^{-1}k_2 \in$ker$(\delta)$。另一方面，由构造 $k_1^{-1}k_2 \neq 1$，这与 $\delta$ 是单射相矛盾。

现在反设 $j_1 = 2$ 且 $j_2 = 1$。令 $\delta_i = \mathrm{Ad}(g_i^{-1}) \circ \delta$，关系式（2.2）表明 $\delta_1\colon\ G_1 \to G_2$ 和 $\delta_2\colon$ $G_2 \to G_1$ 是单射群同态。这意味着$\delta_2 \circ \delta_1\colon\ G_1 \to G_1$ 和 $\delta_1 \circ \delta_2\colon\ G_2 \to G_2$ 是单射端自同态；根据假设，它们必定是内自同构。特别地，这表明 $G_1 \cong G_2$，矛盾。

因此，必有 $j_i = i$。此时，关系式（2.2）和假设意味着存在 $g_1,\ g_2 \in G$ 使得限制满足 $\delta\colon$ $G_1 \to g_1G_1g_1^{-1}$和 $\delta\colon\ G_2 \to g_2G_2g_2^{-1}$，且对每个 $\delta(g) = \mathrm{Ad}(g_i)(g)$ 都有 $g \in G_i$。特别地，对所有 $g_1cg_1^{-1} = g_2cg_2^{-1}$都有 $c \in C$。由于 $C$ 在 $G$ 中的中心化子是平凡的，因此可得 $g_1 = g_2$。由此可得 $\delta =$Ad$(g_1)$，证毕。 □

考虑由 $\mathcal{C}_1$ 在 [CIOS24，推论 1 中引入的连续统族。5] 该族由所有满足定义 $G \in \mathcal{WR}(A$中的条件 *(i)-(iv)* $B \curvearrowright I)$ 的类 wreath 乘积群组成，$G \in \mathcal{WR}(A,\ B \curvearrowright I)$ 并且还具有以下性质：$G_1 \not\hookrightarrow G_2$ 任意两个不同的群 $G_1,\ G_2 \in \mathcal{C}_1$。考虑子类 $\mathcal{AT}_1 \subset \mathcal{AT}$，其由所有不同群 $G = G_1 *_C G_2$ 的 amalgamated free product 群组成，$G_1,\ G_2 \in \mathcal{C}_1$ 且包含一个自正规化自由群的副本。$C$。

**定理 2.9**。我们有 $|\mathcal{AT}| = 2^{\aleph_0}$，并且对于每一对不同的群 $H_1, H_2 \in \mathcal{AT}_1$，都有$H_1 \not\hookrightarrow H_2$。

证明。对于 $i = 1,\ 2$，令 $H_i = G_1^i *_{C_i} G_2^i$，并假设 $H_1 \ncong H_2$。根据这些群的选取，这意味着 $G_1^1 \ncong G_1^2$ 或 $G_2^1 \ncong G_2^2$。反设存在群单态 $\theta\colon\ H_1 \to H_2$。定理 2.8 证明开头所用的相同论证表明，存在元素 $g_j \in H_2$满足 $g_j\theta(G_j^1)g_j^{-1} \leqslant G_{k_j}^2$，其中某个$k_j \in \{1,\ 2\}$。由于这些群属于类 $\mathcal{C}_1$，可知 $k_j = j$ 对两者均成立 $j = 1,\ 2$。此外，我们得到 $G_1^1 \cong G_1^2$ 以及 $G_2^1 \cong G_2^2$，这与最初的假设矛盾。 □

## 3 冯·诺依曼代数的预备知识

我们首先回顾一些涉及带迹冯·诺依曼代数的术语和构造，以及若干主要出自 [CIOS21]的结果。

一个带迹冯·诺依曼代数是由 $(\mathcal{M}, \tau)$ 构成的一对，其中包含一个冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$和一个正规忠实迹态 $\tau\colon \mathcal{M} \to \mathbb{C}$。对于 $x \in \mathcal{M}$，我们用 $\|x\|$ 表示 $x$ 的算子范数，用 $\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{1/2}$ 表示其 2-范数。我们用 $L^2(\mathcal{M})$ 表示以 2-范数为度量将 $\mathcal{M}$ 取闭包所得的希尔伯特空间，用 $\mathscr{U}(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{M}$ 的酉元群，并用$(\mathcal{M})_1 = \{x \in \mathcal{M}\colon\ \|x\| \leqslant 1\}$ 表示 $\mathcal{M}$的单位球。我们总是假设 $\mathcal{M}$ 是可分的

或者等价地， $L^2(\mathcal{M})$ 是一个可分希尔伯特空间。我们用 $Aut(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{M}$的保$\tau$自同构群。对于 $u \in \mathscr{U}(\mathcal{M})$， $\mathcal{M}$ 的内自同构 $\mathrm{Ad}(u)$ 由 $\mathrm{Ad}(u)(x) = uxu^*$ 给出。根据冯 · 诺依曼双交换子定理，对于任意一个关于取伴随运算封闭的集合 $X \subset \mathcal{M}$， $X'' \subset \mathcal{M}$ 是包含 $X$的最小冯·诺依曼子代数。

设 $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}$ 为一个冯·诺依曼子代数，我们始终假设其含单位元。对于所有 $y \in \mathcal{Q}\}$，我们将 $\mathcal{Q}' \cap \mathcal{M} = \{x \in \mathcal{M} \mid xy = yx$记作 $\mathcal{Q}$ 在 $\mathcal{M}$中的相对交换子；并将 $\mathscr{N}_{\mathcal{M}}(\mathcal{Q}) =\{u \in \mathscr{U}(\mathcal{M}) : u\mathcal{Q}u^* = \mathcal{Q}\}$ 记作 $\mathcal{Q}$ 在 $\mathcal{M}$中的正规化子。 $\mathcal{M}$ 的中心记作 $\mathscr{Z}(\mathcal{M}) =\mathcal{M}' \cap \mathcal{M}$。如果 $\mathscr{Z}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}1$，则称 $\mathcal{M}$ 为一个因子；如果$\mathcal{Q}' \cap \mathcal{M} = \mathbb{C}1$，则称 $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}$ 为一个不可约子因子。如果 $\mathscr{N}_{\mathcal{M}}(\mathcal{Q})'' = \mathcal{M}$，则称 $\mathcal{Q}$ 在 $\mathcal{M}$ 中正则。如果 $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}$ 是正则的且为极大阿贝尔的，则称其为*Cartan* 子代数。

*Jones*基本构造 $\langle \mathcal{M}, e_{\mathcal{Q}} \rangle$ 定义为由 $\mathcal{M}$ 和从 $L^2(\mathcal{M})$ 到 $L^2(\mathcal{Q})$的正交投影 $e_{\mathcal{Q}}$ 在 $\mathbb{B}(L^2(\mathcal{M}))$中生成的冯·诺依曼子代数。基本构造$\langle \mathcal{M}, e_{\mathcal{Q}} \rangle$具有忠实半有限迹 $\mathrm{Tr}(xe_{\mathcal{Q}}y) = \tau(xy)$，对每个 $x$，$y \in \mathcal{M}$均成立。我们将相关的希尔伯特空间记作 $L^2(\langle \mathcal{M}, e_{\mathcal{Q}} \rangle)$，并赋予其自然的 $\mathcal{M}$-双模结构。我们还将唯一的 $\tau$-保持条件期望到 $\mathcal{Q}$记作 $E_{\mathcal{Q}}$：$\mathcal{M} \to \mathcal{Q}$。

带迹冯·诺依曼代数 $(\mathcal{M}, \tau)$ 称为可和，如果存在序列 $\xi_n \in L^2(\mathcal{M}) \otimes L^2(\mathcal{M})$ 使得 $\langle x\xi_n, \xi_n \rangle \to \tau(x)$ 且 $\|x\xi_n - \xi_n x\|_2 \to 0$，对每个 $x \in \mathcal{M}$。设$\mathcal{P} \subset p\mathcal{M}p$ 为冯·诺依曼子代数。按照 Ozawa 与 Popa [OP07，第 2 节。2] 我们称 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{M}$ 内相对 amenable 于 $\mathcal{Q}$，如果存在序列 $\xi_n \in L^2(\langle \mathcal{M}, e_{\mathcal{Q}} \rangle)$ 使得$\langle x\xi_n, \xi_n \rangle \to \tau(x)$，对每个 $x \in p\mathcal{M}p$，且 $\|y\xi_n - \xi_n y\|_2 \to 0$，对每个 $y \in \mathcal{P}$。我们称 $\mathcal{P}$在 $\mathcal{M}$ 内相对于 $\mathcal{Q}$ 为强非平均，如果不存在非零投影 $p' \in \mathcal{P}' \cap p\mathcal{M}p$使得 $\mathcal{P}p'$ 在 $\mathcal{M}$ 内相对 amenable 于 $\mathcal{Q}$ 。

### 3.1 双模交织

我们回顾 m [Pop03，定理 2.1，推论 2。3]Popa 的双模交织理论 .

**定理 3.1** ([Pop03])。设 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是带迹冯·诺依曼代数，且 $\mathcal{P} \subset p\mathcal{M}p$， $\mathcal{Q} \subset q\mathcal{M}q$是冯·诺伊曼子代数。则以下条件等价:

*(a)* 存在投影 $p_0 \in \mathcal{P}, q_0 \in \mathcal{Q}$、一个 $*$-同态 $\theta$: $p_0\mathcal{P}p_0 \to q_0\mathcal{Q}q_0$ 以及一个非零偏等距 $v \in q_0\mathcal{M}p_0$，使得 $\theta(x)v = vx$ 对所有 $x \in p_0\mathcal{P}p_0$ 均成立。

*(b)* 则 不存在满足 $\|E_{\mathcal{Q}}(x^*u_ny)\|_2 \to 0$ 的序列 $u_n \in \mathscr{U}(\mathcal{P})$，对所有 $x$、 $y \in p\mathcal{M}$ 均成立 .

若这些条件成立，我们记作 $\mathcal{P} \prec_{\mathcal{M}} \mathcal{Q}$，并称 $\mathcal{P}$ 的一个角在 $\mathcal{M}$ 内嵌入 $\mathcal{Q}$ 。若对于任意非零投影 $p' \in \mathcal{P}' \cap p\mathcal{M}p$ 都有 $\mathcal{P}p' \prec_{\mathcal{M}} \mathcal{Q}$，我们记作 $\mathcal{P} \prec^s_{\mathcal{M}} \mathcal{Q}$。

以下两个结果取自 [CIOS21]，并将用于证明我们的一个主要刚性结果。第一个结果讨论基于 [PV12]并在 [CIOS21定理 3 中证明的、由双曲群的作用产生的交叉积中的正规化子结构，10], 而第二个是 [CIOS21推论 4 中建立的实心性结果。7]。

**定理 3.2.** 设 $G$、 $H$ 为可数群，其中 $H$ 为一个双曲群的非初等子群。设 $\delta$: $G \to H$ 为一个同态，且 $G \curvearrowright (\mathcal{Q}$、 $\tau)$ 为一个保迹作用，作用在带迹

冯·诺依曼代数 $(\mathcal{Q}、\tau)$ 上。设 $\mathcal{M}=\mathcal{Q}\rtimes G$ 与 $\mathcal{P}\subset p\mathcal{M}p$ 为一个可和冯·诺依曼子代数。假设存在一个具有 *(T)* 性质的冯·诺依曼子代数 $\mathcal{R}\subset\mathscr{N}_{p\mathcal{M}p}(\mathcal{P})''$，使得 $\mathcal{R}\nprec_{\mathcal{M}}\mathcal{Q}\rtimes$ 核$(\delta)$。则 $\mathcal{P}\prec^{s}_{\mathcal{M}}\mathcal{Q}\rtimes$ 核$(\delta)$。

**定理 3.3**。对于 $i=1,2$，设 $G_i\in\mathcal{WR}(A_i,B_i\curvearrowright I_i)$，其中 $A_i$ 是阿贝尔群，$B_i\curvearrowright I_i$ 是一个作用，且对每个 $j\in I_i$，$Stab_B(j)$ 都是可和的，并且 $\{j\in I:$ 对每个 $g\in B\backslash\{1\},\ g\cdot j\neq j\}$ 都是无限的。设 $\mathcal{Q}\subset p(L(G_1)\bar{\otimes}L(G_2)\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))p$ 是一个冯·诺依曼子代数，使得$\mathcal{Q}\prec^{s}L(A_1)\bar{\otimes}L(A_2)\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 且 $\mathcal{Q}\nprec L(A_1)\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，$L(A_2)\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。那么 $\mathcal{Q}'\cap p\mathcal{M}p$ 是可和的。

## 3.2 冯·诺依曼代数的合并自由积

本节简要回顾带迹冯·诺依曼代数的合并自由积构造。设 $(\mathcal{M}_1,\tau_1)$ 和 $(\mathcal{M}_2,\tau_2)$ 是带有公共冯·诺依曼子代数 $B$ 的带迹冯·诺依曼代数，且满足 $\tau_1|_B=\tau_2|_B$。设 $\mathbb{E}_i:\mathcal{M}_i\to B$ 是到 $B$上的保迹条件期望，其中 $i=1,2$。合并自由积 $(\mathcal{M},\mathbb{E}_B)=(\mathcal{M}_1,\mathbb{E}_1)*_B(\mathcal{M}_2,\mathbb{E}_2)$ 是一个二元组，由冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$（由 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 生成）以及保迹条件期望 $\mathbb{E}_B:\mathcal{M}\to B$（关于其典范迹 $\tau$）组成，并满足 $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$关于 $\mathbb{E}_B$自由独立；也就是说，当 $x_j\in\mathcal{M}_{i_j}\ominus B$ 且$i_1\neq\cdots\neq i_n$时，$\mathbb{E}_B(x_1\cdots x_n)=0$。我们将乘积 $x_1\cdots x_n$称为约化词，其中 $x_j\in\mathcal{M}_{i_j}\ominus B$ 且 $i_1\neq\ldots\neq i_n$。$B$ 和所有约化词的线性张成构成了 $\mathcal{M}$中的一个强稠密 $*$子代数。我们将由此得到的 $\mathcal{M}$ 称为 $(\mathcal{M}_1,\tau_1)$ 和 $(\mathcal{M}_2,\tau_2)$的合并自由积冯·诺依曼代数。

在本文中，我们主要研究与合并自由积群相关联的冯·诺依曼代数 $G=G_1*_CG_2$。在此设定下，有 $\mathrm{L}(G)=\mathrm{L}(G_1)*_{\mathrm{L}(C)}\mathrm{L}(G_2)$，如上所定义。对于一般的自由积合成冯诺依曼代数，我们所需的唯一结果是下述陈述，它是 [Io12]与 [Va13]的推论。

**定理 3.4.** 设 $\mathcal{M}=\mathcal{M}_1*_{\mathcal{B}}\mathcal{M}_2$ 为带迹冯·诺依曼代数的合并自由积，并设 $p\in\mathcal{M}$ 为非零投影。设 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2\subset p\mathcal{M}p$ 为任意两个非 *amenable* 的交换 *von Neumann* 子代数。则下列情形之一必成立：

*1.* $\mathcal{C}_i\prec_{\mathcal{M}}\mathcal{B}$ 对某个 $1\leqslant i\leqslant 2$；*2.*
$\mathcal{C}_1\vee\mathcal{C}_2\prec_{\mathcal{M}}\mathcal{M}_i$ 对某个 $1\leqslant i\leqslant 2$；*3.*
$\mathcal{C}_1\vee\mathcal{C}_2$ 在 $\mathcal{M}$内相对于 $\mathcal{B}$ 是相对 *amenable*。

证明。假设 $\mathcal{C}_2\nprec_{\mathcal{M}}\mathcal{B}$，并固定 $\mathcal{A}\subset\mathcal{C}_1$ 一个 amenable 子代数。根据 [Va13，定理 A] 我们有以下两种情况之一：

(i) $\mathcal{A}\prec_{\mathcal{M}}\mathcal{B}$，(ii) $\mathscr{N}_{p\mathcal{M}p}(\mathcal{A})''\prec_{\mathcal{M}}\mathcal{M}_i$，对于某个 $i$，或者 (iii) $\mathscr{N}_{p\mathcal{M}p}(\mathcal{A})''$ 在 $\mathcal{M}$内相对于 $\mathcal{B}$ 是 amenable 的。

如果 (i) 对所有 amenable 子代数 $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_1$，$\mathcal{C}_1 \prec_{\mathcal{M}} \mathcal{B}$ 根据 [BO08，推论 F。14], 成立，则可得 (1)。假设 (i) 对某个 amenable $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_1$不成立，而 (ii) 成立。在这种情况下，由于 $\mathcal{C}_2 \prec \mathcal{M}_i$ 和 $\mathcal{C}_2 \not\prec \mathcal{B}$，利用 [IPP05，定理 1。1] 可得 $\mathscr{N}_{p\mathcal{M}p}(\mathcal{C}_2)'' \prec_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_i$。这意味着 $\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2 \prec_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_i$，从而得到 (2)。现在，假设 (i) 和 (ii) 对某个 amenable 子代数 $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_1$均不成立。由 (iii) 可知 $\mathcal{C}_2$ 相对于 $\mathcal{B}$ 内部的 $\mathcal{M}$是 amenable 的。再次应用 [Va13，定理 A],可知以下情况必有一种成立：

(iv) $\mathcal{C}_2 \prec \mathcal{B}$，(v) $\mathscr{N}_{p\mathcal{M}p}(\mathcal{C}_2)'' \prec_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_i$，对于某个 $i$，
或 (vi) $\mathscr{N}_{p\mathcal{M}p}(\mathcal{C}_2)''$ 在 $\mathcal{M}$ 内相对于 $\mathcal{B}$ 可和。

根据假设，(iv) 不成立；如果 (v) 成立，[IPP05，定理 1。1] 给出 $\mathscr{N}_{p\mathcal{M}p}(\mathcal{A})'' \prec \mathcal{M}_i$，这就产生了矛盾。因此，(vi) 必须成立，因而 $\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2$ 在 $\mathcal{B}$内相对于 $\mathcal{M}$ 可和，从而得到 (3)。

□

### 3.3 Cartan 子代数与等价关系

为便于后续使用，我们回顾 [Ioa10], 中关于 Cartan 子代数的两个共轭结果，这些结果在 [CIOS21 的引理 3.7 和 3.8] 中得到了证明。

**引理 3.5** ([Ioa10])。设 $\mathcal{M}$ 是一个 $II_1$ 因子，$\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ 是一个 *Cartan* 子代数，且 $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ 是一个阿贝尔冯·诺依曼子代数。设 $\mathcal{C} = \mathcal{D}' \cap \mathcal{M}$ 并假设 $\mathcal{C} \prec^s_{\mathcal{M}} \mathcal{A}$。那么存在$u \in \mathscr{U}(\mathcal{M})$ 使得 $\mathcal{D} \subset u\mathcal{A}u^* \subset \mathcal{C}$。

引理 *3.6*（[*Ioa*10]）。设 $\mathcal{M}$ 为 $II_1$ 因子，$\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ 为 *Cartan* 子代数，$\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ 为交换 *von Neumann* 子代数，并设 $\mathcal{C} = \mathcal{D}' \cap \mathcal{M}$。假设 $\mathcal{C} \prec^s_{\mathcal{M}} \mathcal{A}$ 与 $\mathcal{D} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{C}$。设 $(\alpha_g)_{g\in G}$为群 $G$ 在 $\mathcal{C}$ 上的作用，使得对每个 $g \in G$，存在某个 $u_g \in \mathscr{N}_{\mathcal{M}}(\mathcal{D})$，有 $\alpha_g = Ad(u_g)$。假设作用 $(\alpha_g)_{g\in G}$ 到 $\mathcal{D}$ 的限制是自由的。则存在 $G$ 在 $\mathcal{C}$ 上的作用 $(\beta_g)_{g\in G}$，使得

1. 对每个 $g \in G$，我们有 $\beta_g = \alpha_g \circ \mathrm{Ad}(\omega_g) = \mathrm{Ad}(u_g\omega_g)$，对某个 $\omega_g \in \mathscr{U}(\mathcal{C})$，并且
2. $\mathcal{A}$ 是 $(\beta_g)_{g\in G}$-不变的，且 $(\beta_g)_{g\in G}$ 到 $\mathcal{A}$ 的限制是自由的。

### 3.4 轨道等价嵌入的强刚性

以下这个将 [Pop04, 定理 0.5] 推广到一大类构造于其上的作用的结果，见 [CIOS21, 定理 4.1]。如果 $\mathscr{R}$ 是在标准概率空间 $(X$上的可数保概率测度等价关系 $\mu)$，那么全群 $[\mathscr{R}]$ 由 $(X$上的所有自同构 $\theta$ 组成，且对于几乎每个 $x \in X$，都有 $(\theta(x), x) \in \mathscr{R}$。如果 $G \curvearrowright (X, \mu)$ 是一个保概率测度作用，那么 $\mathscr{R}(G \curvearrowright X) = \{(x_1, x_2) \in X \times X : G \cdot x_1 = G \cdot x_2\}$ 是它的轨道等价关系。

**定理 3.7**。 设 $B$ 是一个无限共轭类群， $B \curvearrowright^{\alpha} (X,\mu) = (Y^I,\nu^I)$ 是构造于作用 $B \curvearrowright I$ 之上的保测度 $\tilde{}$ 作用，其中 $(Y,\nu)$ 是一个概率空间。设 $B = B \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 且 $\curvearrowright(X,\tilde{\mu}) = (X \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mu \times c),$ ，其中 $n \in \mathbb{N}$ ，而 $c$ 是 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上的计数测度。考虑由 $(g,a)\cdot(x,b) = (g\cdot x, a+b)$ 给出的作用 $\widetilde{B} \curvearrowright^{\tilde{\alpha}} (\widetilde{X},\tilde{\mu})$ 。

设 $D$ 是一个可数群，其正规子群为 $D_0$ ，且数对 $(D,D_0)$ 具有相对性质 (T)。设 $X_0 \subset \widetilde{X}$ 为一个可测集，且 $D \curvearrowright^{\beta} (X_0, \tilde{\mu}_{|X_0})$ 为弱混合 $\tilde{}$ 自由保测作用，使得对几乎所有 $x \in X_0$， $D\cdot x \subset B\cdot x$。假设对于 $\tilde{}$ 每个 $i \in I$ 和 $g \in B\backslash\{1\}$，都存在一个序列 $(h_m) \subset D_0$ ，使得对于每个 $s,t \in B$ ，我们有

$$\lim_{m\to\infty} \tilde{\mu}(\{x \in X_0 \mid h_m \cdot x \in s(Stab_B(i) \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})t \cdot x\}) = 0, \text{ and}$$
$$\lim_{m\to\infty} \tilde{\mu}(\{x \in X_0 \mid h_m \cdot x \in s(C_B(g) \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})t \cdot x\}) = 0.$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$ 那么存在一个子群 $B_1 < B$、一个群同构 $\delta\colon D \to B_1$，以及 $\theta \in [\mathscr{R}(B \curvearrowright X)]$ ，使得 $\theta(X_0) = X \equiv X \times \{0\}$ 且对每个 $h \in D$ 都有 $\theta \circ \beta(h) = \alpha(\delta(h)) \circ \theta$。

以下归功于 Popa 的结果 [Pop04] (另见 [CIOS21，引理 4。4]) 表明，在转而考虑有限指数子群的一个遍历分量后，前述定理中的弱混合条件会自动满足。

**引理 3.8** ([Pop04])。 假设满足定理3.7的条件。则存在一个有限指数子群 $S < D$ 以及一个 $\beta(S)$-不变的非零可测集 $Y \subset X_0$ ，使得 $\tilde{\mu}(\beta(h)(Y) \cap Y) = 0$对每个 $h \in D\backslash S$都成立，并且 $\beta_{|S}$ 在 $Y$ 上的限制是弱混合的。

# 4 W*-超刚性结果：属于 class $\mathcal{AT}$ 的群

本节证明，定义 1.2 中定义的类 $\mathcal{AT}$ 由 W*-超刚性群组成（定理 1.3）。这一结果将用于证明，这类群的有限直和也是 W*-超刚性的（定理1.4）。在证明之前，我们先引入一些记号，并记录若干有用的事实。

设 $A$ 是一个非平凡阿贝尔群， $B$ 是双曲群的一个非平凡无限共轭类子群，且 $B \curvearrowright I$ 是一个作用，其稳定子 $\mathrm{Stab}_B(i)$ 对每个 $i \in I$ 都是可和的。设 $G \in \mathcal{WR}(A, B \curvearrowright I)$ 是一个性质 (T) 群。记 $\mathcal{M} = \mathrm{L}(G)$ ，并假设 $\mathcal{M}^t = \mathrm{L}(H)$，其中 $H$ 是一个可数群，且 $t > 0$。

令 $\Delta_0\colon \mathrm{L}(H) \to \mathrm{L}(H)\bar{\otimes}\mathrm{L}(H)$ 为余乘法，其定义为 $\Delta_0(v_h) = v_h \otimes v_h$，对每个 $h \in H$ 均成立。令 $n$ 为满足 $n \geqslant t$ 的最小整数。记 $\mathscr{M} = \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。则 $\Delta_0$ 可以扩张为一个保幺 $*$-同态 $\Delta\colon \mathcal{M} \to p\mathscr{M}p$，其中 $p \in \mathscr{M}$ 是一个投影，且 $(\tau\otimes\tau\otimes\mathrm{Tr})(p) = t$。

注记 4.1. 假设 $t \in \mathbb{N}$，因此 $n = t$、 $p = 1$ 和 $\mathrm{L}(H) = \mathcal{M}^n = \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。为便于后续参考，我们明确写出以 $\Delta_0$ 表示的 $\Delta$ 的构造。为此，令 $\psi\colon \mathscr{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})\bar{\otimes}\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{L}(H)\bar{\otimes}\mathrm{L}(H)$ 为由 $\psi(a\otimes b\otimes c\otimes d) = a\otimes c\otimes b\otimes d$ 给出的 $*$-同构，其中对每个 $a$， $b \in \mathcal{M}$ 以及 $c$， $d \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。令 $U \in \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})\bar{\otimes}\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 为一个酉元，使得

$\Delta_0(1_{\mathcal{M}} \otimes x) = U\psi(1_{\mathscr{M}} \otimes x)U^*$，对每个 $x \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 均成立。于是 $\psi^{-1} \circ \mathrm{Ad}(U^*) \circ \Delta_0$：$\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 是一个保幺的 $*$-同态，并且保持 $1\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 不变，因此可写成 $\Delta\bar{\otimes}\mathrm{Id}$，其中 $\Delta$: $\mathcal{M} \to \mathscr{M}$ 是所需的保幺 $*$-同态，它将 $\Delta_0$ 放大。因此，我们得出

$$\Delta_0 = \mathrm{Ad}(U) \circ \psi \circ (\Delta \otimes \mathrm{Id}). \tag{4.1}$$

在定理 1.4 的证明中，我们将结合（4.1）以及 $\Delta_0$ 的对称性和结合性：$\zeta \circ \Delta_0 = \Delta_0$ 以及 $(\Delta_0 \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_0 = (\mathrm{Id} \otimes \Delta_0) \circ \Delta_0$，其中 $\zeta$ 是 $\mathrm{L}(H)\bar{\otimes}\mathrm{L}(H)$ 的翻转自同构，由 $\zeta(x \otimes y) = y \otimes x$给出，对每个 $x, y \in \mathrm{L}(H)$。

**引理 4.2** ([IPV10])。 设 $\Delta$: $\mathcal{M} \to p\mathscr{M}p$ 如上所定义。则有以下结论：

*(a)* 对任意弥散冯·诺依曼子代数 $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}$，$\Delta(\mathcal{Q}) \nprec_{\mathscr{M}} \mathcal{M}\bar{\otimes}1\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 和 $\Delta(\mathcal{Q}) \nprec_{\mathscr{M}} 1\bar{\otimes}\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。 *(b)* 对任意无限指数子群 $G_0 < G$，$\Delta(\mathcal{M}) \nprec_{\mathscr{M}} \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_0)\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 和 $\Delta(\mathcal{M}) \nprec_{\mathscr{M}} \mathrm{L}(G_0)\bar{\otimes}\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。 *(c)* 若 $\mathcal{H} \subset \mathrm{L}^2(p\mathscr{M}p)$ 是一个右有限生成的 $\Delta(\mathcal{M})$-子双模，则有$\mathcal{H} \subset \mathrm{L}^2(\Delta(\mathcal{M}))$。 *(d)* 假设 $p = 1$。再设 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$ 是任意一个冯·诺依曼代数，使得对每个 $1 \neq h$，都有$\mathcal{P} \nprec_{\mathcal{M}} \mathrm{L}(C_H(h))$。则 $\Delta(\mathcal{P})' \cap \mathscr{M} = \Delta(\mathcal{P}' \cap \mathcal{M})$ 和 $\mathscr{QN}_{\mathscr{M}}(\Delta(\mathcal{P}))'' = \Delta(\mathscr{QN}_{\mathcal{M}}(\mathcal{P})'')$。

证明。 我们只证明 (d) 部分。根据 [IPV10，命题 7.2(3)]，可得 $\Delta_0(\mathcal{P})' \cap (\mathscr{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) = \Delta_0(\mathcal{P}' \cap (\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))) = \Delta_0((\mathcal{P}' \cap \mathcal{M})\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$。结合关系（4.1），我们得到

$$\begin{aligned} U\psi(\Delta(\mathcal{P}' \cap \mathcal{M}) \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))U^* &= U(\psi(\Delta(\mathcal{P}) \otimes 1)' \cap (\mathscr{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})))U^* \\ &= U\psi((\Delta(\mathcal{P})' \cap \mathscr{M})\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))U^*. \end{aligned} \tag{4.2}$$

因此，$\Delta(\mathcal{P}' \cap \mathcal{M}) \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) = (\Delta(\mathcal{P})' \cap \mathscr{M})\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 并且由于 $\Delta(\mathcal{P}' \cap \mathcal{M}) \subseteq \Delta(\mathcal{P})' \cap \mathscr{M}$，我们必有 $\Delta(\mathcal{P}' \cap \mathcal{M}) = \Delta(\mathcal{P})' \cap \mathscr{M}$，如所求。另一个断言可类似证明。 □

在定理 1.4 的证明中，我们还需要用到以下事实：对于任意 $\{i \in I \mid b \cdot i \neq i\}$，集合 $b \in B\backslash\{1\}$都是无限的。更一般地，若 $B$ 是双曲的：

**引理 4.3**。 设 $B$ 是一个无限共轭类 群，在集合 $I$上作用。那么以下结论成立 ：

*(a)* 假设 $B$ 是双曲的，且对每个 $i \in I$，稳定子$_B(i)$ 都是可和的。那么，对于每个非平凡的 $b \in B$，集合 $\{i \in I \mid b \cdot i \neq i\}$ 都是无限的。

*(b)* 假设对于每个 $\in I$，$B \cdot i$ 都是无限集。设 $A$ 为一个群。那么每个 $G \in \mathcal{WR}(A、B \curvearrowright I)$ 都是 无限共轭类。

在进行主要证明之前，我们先确立以下结果，该结果将在定理的证明中反复使用 4.5。

**命题 4.4**。 设 $G$ 和 $K$ 是群， $\mathcal{T}$ 是冯·诺依曼代数。假设$G \curvearrowright^{\sigma} \mathcal{T}$是保迹作用，并记为 $\mathcal{M} = \mathcal{T} \rtimes_{\sigma} G$。设 $\delta_1, \delta_2 \colon K \to G$ 是群同态， $\rho_1, \rho_2 \colon K \to \mathscr{U}(\mathcal{T})$ 是群表示。假设对于每个有限指数 $K_0 \leqslant K$ 子群，都有 $C_G(\delta_1(K_0)) = \{1\}$。若 $y \in \mathcal{M}$ 满足

$$yu_{\delta_1(k)}\rho_1(k) = u_{\delta_2(g)}\rho_2(k)y, \text{ for all } k \in K, \tag{4.3}$$

那么存在 $c \in \mathscr{U}(\mathcal{T})$ 和 $l \in G$ ，使得 $y = cu_l$, $\delta_2 = \mathrm{Ad}(l) \circ \delta_1$ 且 $\rho_2(k) = \sigma_{\delta_2(k)^{-1}}(c)\sigma_l(\rho_1(k))c^*$。

证明。 考虑傅里叶展开 $y = \sum_g y_g u_g$ ，并利用关系（4.3），可得

$$\sum_g y_g \sigma_{g\delta_1(k)}(\rho_1(k))u_{g\delta_1(k)} = yu_{\delta_1(k)}\rho_1(k) = u_{\delta_2(g)}\rho_2(k)y = \sum_g \sigma_{\delta_2(k)}(\rho_2(k)y_g)u_{\delta_2(k)g}. \tag{4.4}$$

固定 $\epsilon > 0$ 使得 $F = \{k \in K \colon \|y_k\|_2 \geqslant \epsilon\}$ 非空。由于 $\rho_1, \rho_2$ 是酉表示，关系（4.4）蕴含 $F$是有限的，且 $F\delta_1(g) = \delta_2(g)F$。因此，

$$\delta_1(g)^{-1}F^{-1}F\delta_1(g) = F^{-1}F, \text{ for every } g \in K. \tag{4.5}$$

注意，对于任意 $g \in F^{-1}F$ 关系（4.5）都蕴含存在一个有限指数子群 $K_0 \leqslant K$使得 $h \in C_G(\delta_1(K_0))$。由于后者是平凡的，我们得到 $g = 1$。然而， $F^{-1}F = \{1\}$ 意味着 $F$只含一个元素。由于这对所有 $\epsilon > 0$都成立，我们得到 $y = cu_l$ 对于某个 $c \in \mathscr{U}(\mathcal{T})$ 和$l \in G$。关系（4.3）还蕴含 $\delta_2 = \mathrm{Ad}(l) \circ \delta_1$ 以及 $\rho_2(k) = \sigma_{\delta_2(k)^{-1}}(c)\sigma_l(\rho_1(k))c^*$。 □

接下来，我们介绍本节的主要结果。其证明的某些方面建立在 [CIOS21、CIOS24]中提出的思想和技术之上。不过，为方便读者，我们在此给出全部细节。

**定理 4.5**。 对于每个 $j = 1,2$ 令 $A_j$ 为非平凡阿贝尔群， $B_j$ 为双曲群的非平凡无限共轭类子群。令 $B_j \curvearrowright I_j$ 为一个作用，使得对于每个 $i \in I_j$，稳定子$_{B_j}(i)$ 都是可和的。设 $G_j \in \mathcal{WR}(A_j, B_j \curvearrowright I_j)$ 是一个具有 ***(T)*** 性质的群。假设 $C < G_1, G_2$ 是一个具有 ***Haagerup*** 性质的公共自正规子群。考虑相应的合并自由积 $G = G_1 *_C G_2$。令 $H$ 为任意群，并令 $\theta \colon \mathrm{L}(G)^t \to \mathrm{L}(H)$ 为某个 $t > 0$ 的 $*$-同构。若满足以下任一条件

***(a)*** $0 < t \leqslant 1$，或

***(b)*** $H$ 是无挠的

则 $G \cong H$ 和 $t = 1$。此外，存在一个群同构 $\delta \colon G \to H$、一个特征$\eta \colon G \to \mathbb{T}$ 以及一个酉元 $w \in \mathrm{L}(H)$ ，使得对于每个 $g \in G$，都有 $\theta(u_g) = \eta(g)wv_{\delta(g)}w^*$ ，其中 $(u_g)_{g\in G}$和 $(v_h)_{h\in H}$ 分别表示L$(G)$ 和L$(H)$ 的规范生成酉元。

证明。我们先固定一些将在整个证明过程中统一使用的记号。对于$i=1,2$，令 $\mathcal{M}_i=\mathcal{L}(G_i)$，并令 $\mathcal{C}=\mathcal{L}(C)$。有了这些记号，我们可以证明如下结论：

**断言 4.6**。对于 $i,j,k=1,2$ 存在投影 $p^j_{,i}{}^k\in\Delta(\mathcal{M}_i)'\cap p\mathscr{M}p$ 满足 $\sum_{j,k=1}^2 p^j_{,i}{}^k=p$ 以及酉元 $u^j_{,i}{}^k\in\mathscr{M}$ 满足 $u^j_{,i}{}^k\Delta(\mathcal{M}_i)p^j_{,i}{}^k(u^j_{,i}{}^k)^*\subseteq\mathcal{M}_j\bar{\otimes}\mathcal{M}_k\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

断言的证明 4.6。由于 $\mathscr{M}$ 在 $\mathscr{M}$ 中经过酉元共轭后是一个 $\mathrm{II}_1$ 因子，我们可以假设 $p\in\mathcal{C}\bar{\otimes}\mathcal{C}\bar{\otimes}\mathbb{D}_n$。取定 $i\in\{1,2\}$。接下来我们论证 $\Delta(\mathcal{M}_i)\not\prec\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{C}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。由于 $\mathcal{M}_i$ 具有 (T) 性质，且 $\mathcal{C}$ 具有 Haagerup 性质，若 $\Delta(\mathcal{M}_i)\prec\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{C}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 由 [HPV11引理 1]，则必有 $\Delta(\mathcal{M}_i)\prec\mathcal{M}\bar{\otimes}1\bar{\otimes}1$，这与 $\mathcal{M}_i$ 是弥散的以及引理 4.2相矛盾。

现在注意到 $\Delta(\mathcal{M}_i)\subseteq p\mathscr{M}p=p(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}_1\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))*_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{C}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})}(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}_2\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ 是具有性质（T）的冯·诺依曼代数，而 $\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}_l\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 是一个 $\mathrm{II}_1$ 因子，对于 $l=1,2$。利用 [IPP05，定理 5。1] 可以找到投影 $p_i^j\in\mathscr{Z}(\Delta(\mathcal{M}_i)'\cap p\mathscr{M}p)$ 和酉元 $u_i^j\in\mathscr{M}$ 使得 $p_i^1+p_i^2=p$ 以及 $u_i^j\Delta(\mathcal{M}_i)p_i^j(u_i^j)^*\subseteq\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}_j\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. 在左侧张量上重复相同的论证，即可得到所需结论。■

取定 $i,j,k$ 使得 $p^j_{,i}{}^k\neq 0$。为简化记号，令 $f=u^j_{,i}{}^kp^j_{,i}{}^k(u^j_{,i}{}^k)^*$。注意，将 $\Delta$ 替换为 $\mathrm{Ad}(u^j_{,i}{}^k)\circ\Delta$后，断言 4.6 意味着

$$\Delta(\mathcal{M}_i)f\subseteq\mathcal{M}_j\bar{\otimes}\mathcal{M}_k\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})=\mathcal{N}. \tag{4.6}$$

现在我们紧接着沿用 [CIOS22，定理 41], 的证明，因为映射 $\Delta$ 可视为从 $\mathcal{M}_i$ 到 $\mathcal{M}_j\otimes\mathcal{M}_k$ 的一个放大上的嵌入，这由关系（4.6）可知。

令 $\pi_i\colon\ G_i\to B_i$ 为商同态。对于 $g\in B_i$，取定 $\hat{g}\in G_i$，使得 $\pi_i(\hat{g})=g$。令 $\mathbb{D}_n(\mathbb{C})\subset\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 为对角矩阵子代数。对于 $1\leqslant i\leqslant n$，令 $e_i=\mathbf{1}_{\{i\}}\in\mathbb{D}_n(\mathbb{C})$。记

$$\mathcal{P}_i=\mathrm{L}(A_i^{(I_i)}),\quad \mathscr{P}=\mathrm{L}(A_j^{(I_j)})\bar{\otimes}\mathrm{L}(A_k^{(I_k)})\bar{\otimes}\mathbb{D}_n(\mathbb{C})\quad\text{and}\quad \mathcal{Q}=(\Delta(\mathcal{P}_i)f)'\cap f\mathcal{N}f.$$

现在继续讨论以下断言。

**断言 4.7.** $\mathcal{Q}\prec^{\mathrm{s}}_{\mathcal{N}}\mathscr{P}$.

证明断言 4.7。我们首先证明 $\Delta(\mathcal{P}_i)f\prec^{\mathrm{s}}_{\mathcal{N}}\mathscr{P}$。利用 $G_k$ 的平凡作用，记 $\mathcal{N}=(\mathcal{M}_j\bar{\otimes}1\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))\rtimes G_k$。由于 $\ker(\pi_k)=A_k^{(I_k)}$，我们有 $(\mathcal{M}_j\bar{\otimes}1\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))\rtimes\ker(\pi_k)=\mathcal{M}_j\bar{\otimes}\mathcal{P}_k\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。由于 $\Delta(\mathcal{M}_i)f$ 具有 (T) 性质且 $\mathcal{P}_k$ 是可和的，根据 [HPV11、引理 1]以及引理 4.2(a)，我们必有 $\Delta(\mathcal{M}_i)f\not\prec_{\mathcal{N}}\mathcal{M}_j\bar{\otimes}\mathcal{P}_k\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。因此，由于 $\Delta(\mathcal{P}_i)f$ 是可和的且 $\Delta(\mathcal{M}_i)f\subset\mathcal{N}_{f\mathcal{N}f}(\Delta(\mathcal{P}_i)f)''$ 具有 (T) 性质，由定理 3.2 我们推出 $\Delta(\mathcal{P}_i)\prec^{\mathrm{s}}_{\mathcal{N}}\mathcal{M}_j\bar{\otimes}\mathcal{P}_k\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。类似地，$\Delta(\mathcal{P}_i)f\prec^{\mathrm{s}}_{\mathcal{N}}\mathcal{P}_j\bar{\otimes}\mathcal{M}_k\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。将这些事实与 [DHI16，引理 2.8(2)] 结合起来，可得 $\Delta(\mathcal{P}_i)f\prec^{\mathrm{s}}_{\mathcal{N}}\mathcal{P}_j\bar{\otimes}\mathcal{P}_k\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，从而证明了我们的断言。

接下来，我们有 $\Delta(\mathcal{P})f\not\prec_{\mathscr{M}}\mathcal{P}_j\bar{\otimes}1\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 和 $\Delta(\mathcal{P})f\not\prec_{\mathscr{M}}1\bar{\otimes}\mathcal{P}_k\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 由引理 4.2(a) 得出。由于作用 $B\curvearrowright I$ 具有可和稳定子，$\{i\in I\mid b\cdot i\neq i\}$ 对每个 $b\in B\backslash\{1\}$都是无限的，由引理 4.3(a) 得出。因此，利用 $\Delta(\mathcal{P}_i)f\prec^{\mathrm{s}}_{\mathcal{N}}\mathscr{P}$，推论3.3 可得 $\mathcal{Q}$ 是可和的。最后，由于 $\mathcal{Q}$是可和的且 $\Delta(\mathcal{M}_i)f\subset\mathcal{N}_{f\mathcal{N}f}(\mathcal{Q})''$，用 $\mathcal{Q}$替换 $\Delta(\mathcal{P}_i)f$，并重复证明的第一段，即可完成这一步的证明。■

由于 $\mathscr{P} \subset \mathcal{N}$ 是 Cartan 子代数，存在酉元 $w \in \mathcal{N}$ 使得 $f \in w\mathscr{P}w^*$ 且 $w\mathscr{P}w^*f \subset f\mathcal{N}f$ 也是 Cartan 子代数。此外，可以看出，断言 4.7 进一步推出 $\mathcal{Q} \prec^{\mathrm{s}}_{f\mathcal{N}f} w\mathscr{P}w^*f$。结合引理 3.5，可以找到一个新的酉元 $u \in \mathcal{N}$ 使得 $\Delta(\mathcal{P}_i)f \subset u\mathscr{P}u^*f \subset \mathcal{Q}$。因此，将 $\Delta$ 替换为 $\mathrm{Ad}(u^*) \circ \Delta$，并将 $f$ 替换为 $u^*fu$，我们可以假设 $f \in \mathscr{P}$ 并且

$$\Delta(\mathcal{P}_i)f \subset \mathscr{P}f \subset \mathcal{Q}. \tag{4.7}$$

若 $g \in B_i$，则 $\Delta(u_{\hat{g}})f$ 正规化 $\Delta(\mathcal{P}_i)f$，因此 $\mathcal{Q}$。记 $\sigma_g = \mathrm{Ad}(\Delta(u_{\hat{g}})f) \in$ 自同构群$(\mathcal{Q})$。由 $\widehat{\hat{g}\hat{h}(gh)}^{-1} \in \ker(\pi) = A_i^{(I_i)}$，我们有 $\Delta(u_{\hat{g}})\Delta(u_{\hat{h}})\Delta(u_{\widehat{gh}})^* \in \Delta(\mathcal{P}_i)$，对每个 $g$、$h \in B_i$ 均成立。由于 $\Delta(\mathcal{P}_i)f \subset \mathscr{Z}(\mathcal{Q})$，$\sigma = (\sigma_g)_{g\in B_i}$ 定义了 $B_i$ 在 $\mathcal{Q}$ 上的一个作用，并保持 $\Delta(\mathcal{P}_i)f$ 不变。注意，$\sigma$ 在 $\Delta(\mathcal{P}_i)f$ 上的限制与一个构造在 $B_i \curvearrowright I_i$ 之上的作用 $B_i \curvearrowright \mathrm{L}(A_i)^{I_i}$ 共轭，因此它是自由的。于是，引理 3.6 给出了 $B_i$ 在 $\mathcal{Q}$ 上的一个作用 $\beta = (\beta_g)_{g\in B_i}$，满足：

(i) 对每个 y $g \in B_i$ 我们有 $\beta_g = \sigma_g \circ \mathrm{Ad}(\omega_g) = \mathrm{Ad}(\Delta(u_{\hat{g}})f\omega_g)$，其中某个 $\omega_g \in \mathscr{U}(\mathcal{Q})$ ，

(ii) $\mathscr{P}f$ 是 $\beta(B_i)$-不变的，并且 $\beta$ 在 $\mathscr{P}f$ 上的限制是自由的。

我们的下一个目标是应用定理 3.7。设 $(Y_j, \nu_j)$ 为带有 Haar 测度的 $A_j$ 的对偶。设$(X, \mu) = (Y_j^{I_j} \times Y_k^{I_k}, \nu_j^{I_j} \times \nu_k^{I_k})$ 以及 $(\widetilde{X}, \tilde{\mu}) = (X \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mu \times c),$，其中 $c$ 是 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的计数测度。将 $\mathcal{P}_i = \mathrm{L}^\infty(Y_i^{I_i})$ 和 $\mathscr{P} = \mathrm{L}^\infty(\widetilde{X})$视为相同。考虑由 $\alpha_j(g) = \mathrm{Ad}(u_{\hat{g}})$给出的作用 $B_j \curvearrowright^{\alpha_j} (Y_j^{I_j}, \nu_k^{I_k})$，对所有 $g \in B_j$均成立。注意，$\alpha_j$ 与基于 $B_j \curvearrowright I_j$ 构造的一个作用共轭。设 $B_j \times B_k \curvearrowright^{\alpha} (X, \mu)$ 由 $(g_1, g_2) \cdot (x_1, x_2) = (g_1 \cdot x_1, g_2 \cdot x_2)$给出，对所有 $g_1 \in B_j, g_2 \in B_k$ 以及$x_1 \in Y_j^{I_j}, x_2 \in Y_k^{I_k}$均成立。用 $\tilde{\alpha}$ 表示由 $(g, a) \cdot (x, b) =$$(g \cdot x, a+b)$给出的作用 $\tilde{\alpha}$：$B_j \times B_k \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \curvearrowright (\widetilde{X}, \tilde{\mu})$。设 $X_0 \subset X$ 是一个满足 $f = \mathbf{1}_{X_0}$的可测集。由于 $\mathscr{P}f = \mathrm{L}^\infty(X_0)$ 是 $\beta(B_i)$-不变的，我们得到一个保测作用 $B_i \curvearrowright^{\beta} (X_0, \tilde{\mu}_{|X_0})$。

由于 $\mathcal{N}) = \mathscr{R}(B_j \times B_k \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{\beta}{\curvearrowright}^{\tilde{\alpha}} \widetilde{X}),$ $f\mathcal{N}f$ $\mathscr{R}(\mathscr{P} \subset$to 的限制由 中的酉元实现，且 我们有，因此可得

$$\beta(B_i) \cdot x \subset \tilde{\alpha}(B_j \times B_k \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cdot x, \text{for almost every } x \in X_0. \tag{4.8}$$

注意，$\alpha$同构于构造在 $B_j \times B_k \curvearrowright I =$$I_j \sqcup I_k$ 上的作用 $B_j \times B_k \curvearrowright ((Y_j \times Y_k)^I, (\nu_j \times \nu_k)^I)$，该作用由 $(g_1, g_2) \cdot i = g_l \cdot i$ 给出，其中 $i \in I_l$，且 $l = j$ 或 $k$。结合 $B_i$ 具有 (T) 性质以及 [CIOS22 引理 3. 11], ，我们得到一个划分 $X_0 = \bigsqcup_{t=1}^{l} X_t$，将其分成非零可测子集 $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，以及有限指数子群 $S_t \leqslant B_i$，使得 $X_t$ 是 $\beta(S_t)$-不变的，并且对所有 $1 \leqslant t \leqslant l$，$\beta|_{S_t}$ 在 $X_t$ 上是弱混合的。

为了将定理 3.7 应用于（4.8），我们证明以下断言。

**命题 4.8.** 固定 $r \in I_j$（或 $r \in I_k$）。那么存在一个序列 $(h_m) \subset S_t$，使得对于每个$s$，$t \in B_j$（或 $s$, $t \in B_k$），我们都有 $\tilde{\mu}(\{x \in X_0 \mid \beta_{h_m}(x) \in \tilde{\alpha}(sStab_{B_j}(r)t \times B_k \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})(x)\}) \to 0$（或 $\tilde{\mu}(\{x \in X_0 \mid \beta_{h_m}(x) \in \tilde{\alpha}(B_j \times sStab_{B_k}(r)t \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})(x)\}) \to 0$）。

命题的证明 4.8. 设 $G_0 = \pi^{-1}$(稳定子$_{B_k}(r)$)。那么 $G_0 < G_k$ 是一个可和子群。此外，由于 $\pi_i(S_t)^{-1}$ 具有 (T) 性质，利用引理 4.2(a)，我们可以找到一个序列 $(k_m) \subset \pi_i(S_t)^{-1}$，使得对于每个 $x$， $y \in \mathcal{N}$ 我们都有

$$\|E_{\mathcal{M}_j\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_0)\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})}(x\Delta(u_{k_m})fy)\|_2 \to 0. \tag{4.9}$$

我们将证明 $h_m = \pi_i(k_m) \in S_t$ 满足该断言。为此，我们首先证明，对每个 $x, y \in (\mathcal{N})_1$，都有 $\|E_{\mathcal{M}_j\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_0)\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})}(x\Delta(u_{\widehat{h_m}})f\omega_{h_m}y)\|_2 \to 0$as $m \to \infty$。注意，由于 $\mathscr{P}$在 $\mathcal{N}$中是正则的，基本逼近表明，只需在$x, y \in \mathcal{N}_{\mathcal{N}}(\mathscr{P})$时证明我们的结论；在下文证明中，我们将作此假设。

注意， $k_m^{-1}\widehat{h_m} \in A_i^{(I_i)}$、 $f \in \mathscr{P}$ $\omega_{h_m} \in \mathscr{U}(\mathcal{Q})$ $\Delta(u_{\widehat{h_m}})f\omega_{h_m} \in$和，因此我们得到。令 $\Delta(u_{k_m})\mathscr{U}(\mathcal{Q})$ $\mathscr{Z}(\mathcal{Q})$ $\mathcal{Q}$ $\mathscr{P} \subseteq \mathcal{Q}$ $\mathscr{P} \subset \mathcal{N}$ 为 的中心，并注意到它包含于 中，因为 是极大阿贝尔自伴代数。因此，存在（可数多个）投影 $(r_\iota)_\iota \subset \mathscr{Z}(\mathcal{Q})$，满足 $\sum_\iota r_\iota = 1$，使得$\mathcal{Q}r_\iota = \mathscr{Z}(\mathcal{Q})r_\iota\bar{\otimes}\mathbb{M}_{n_\iota}(\mathbb{C})$，其中某个 $n_\iota \in \mathbb{N}$。特别地，包含 $\mathscr{Z}(\mathcal{Q})r_\iota \subseteq \mathcal{Q}r_\iota$ 存在有限的 Pimsner-Popa 基，因此对所有 $\iota$， $\mathscr{P}r_\iota \subseteq \mathcal{Q}r_\iota$也如此。记 $(v_{\iota,l})_{l=1}^{k_\iota} \subset \mathcal{Q}r_\iota$ 为包含 $\mathscr{P}r_\iota \subseteq \mathcal{Q}r_\iota$ 的一组 Pimsner-Popa 基，使得对每个 $z \in \mathcal{Q}r_\iota$，都有 $z = \sum_{l=1}^{k_\iota} v_{\iota,l}\mathbb{E}_{\mathscr{P}r_\iota}(v_{\iota,l}^* z)$。

固定 $\epsilon > 0$，并用某个有限集 $F$ 近似 $f \in \mathscr{P}$by $f_\epsilon = \sum_{\iota\in F} fr_\iota$。注意，对于$x$, $y \in \mathcal{N}_{\mathcal{N}}(\mathscr{P})$，我们得到以下一致界

$$\|\mathbb{E}_{\mathcal{M}_j\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_0)\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})}(x\Delta(u_{\widehat{h_m}})(f - f_\epsilon)\omega_{h_m}y)\|_2 \leqslant \epsilon.$$

因此，我们只需考虑 $\|\mathbb{E}_{\mathcal{M}_j\bar{\otimes}\ (G_0)\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})}(x\Delta(u_{\widehat{h_m}})f_\epsilon\omega_{h_m}y)\|_2$ $\Delta(u_{\widehat{h_m}})f_\epsilon\omega_{h_m} =_{\mathrm{L}_\circ}$ $\sum_{\iota\in F}\Delta(u_{k_m})\Delta(u_{k_m^{-1}\widehat{h_m}})fr_\iota\omega_{h_m}$ $z_m = \Delta(u_{k_m^{-1}\widehat{h_m}})\omega_{h_m} \in \mathcal{Q}$ $r_\iota z_m =$ 记 。令， ，我们可以进一步改写 $\sum_{l=1}^{k_\iota} v_{\iota,\ l}\mathbb{E}_{\mathscr{P}r_\iota}(v_{\iota,\ l}^* z_m r_\iota)$。由于 $\mathscr{P} \subseteq \mathcal{M}_j\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_0)\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，由前述关系和 $x$, $y \in \mathcal{N}_{\mathcal{N}}(\mathscr{P})$ 可得

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}_{\mathcal{M}_j\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_0)\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})}(x\Delta(u_{\widehat{h_m}})f_\epsilon\omega_{h_m}y)\|_2 &\leqslant \|\sum_{\iota\in F}\sum_{l=1}^{k_\iota}\mathbb{E}_{\mathcal{M}_j\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_0)\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})}(x\Delta(u_{k_m})fv_{\iota,l}\mathbb{E}_{\mathscr{P}r_\iota}(v_{\iota,l}^* z_m r_\iota)y)\|_2 \\ &\leqslant \sum_{\iota\in F}\sum_{l=1}^{k_\iota}\|\mathbb{E}_{\mathcal{M}_j\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_0)\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})}(x\Delta(u_{k_m})fv_{\iota,l}y)\|_2,\end{aligned} \tag{4.10}$$

由于 $F$ 和 $k_\iota$ 都不依赖于 $m$，因此由 (4.10) 中的最后一个表达式根据 (4.9) 收敛到零可知，对所有 $\epsilon > 0$，$\lim_{m\to\infty}\|\mathbb{E}_{\mathcal{M}_j\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_0)\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})}(x\Delta(u_{\widehat{h_m}})f\omega_{h_m}y)\|_2 \leqslant \epsilon$，从而得到所述结论。

另一方面，对每个$(g_1, g_2) \in B_j \times B_k$，我们有 $\beta_{h_m} =$Ad$(\Delta(u_{\widehat{h_m}})f\omega_{h_m})$ 和 $\alpha(g_1, g_2) =$Ad$(u_{(\widehat{g_1},\widehat{g_2})})$。这些事实意味着 $\tilde{\mu}(\{x \in X_0 \mid \beta_{h_m}(x) \in \tilde{\alpha}(B_j \times s\mathsf{Stab}_{B_k}(r)t \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})(x)\}) =\|E_{\mathcal{M}_j\bar{\otimes}\mathrm{L}}$ $_{(G_0)\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})}((u_s^*\otimes 1\otimes 1)\Delta(u_{\widehat{h_m}})f\omega_{h_m}(u_t^*\otimes 1\otimes 1))\|_2^2$ 小于 $\epsilon$，因为 $m \to \infty$。由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，这就证明了该断言中的一项。另一项可类似证明。■

由于根据假设， $g \in B_j\backslash\{1\}$ 和 $h \in B_k\backslash\{1\}$ 的中心化子 $C_{B_j}(g)$ 和 $C_{B_k}(h)$ 是可和的，因此，将稳定子替换为中心化子后，前述断言仍然成立。

利用定理 3.7，我们得到单射同态 $\varepsilon_t = (\varepsilon_{t,1}, \varepsilon_{t,2}) : S_t \to B_j \times B_k$ 和 $\varphi_t \in [\mathscr{R}(B_j \times B_k \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \curvearrowright X)]$，使得 $\varphi_t(X_t) = X \times \{t\} \equiv X$ 且 $\varphi_t \circ \beta_h|_{X_t} = \alpha_{\varepsilon_t(h)} \circ \varphi_t|_{X_t}$,

对每个 $h \in S_t$ 均成立。特别地，$(\tau_j \otimes \tau_k \otimes \text{迹})(f) = \tilde{\mu}(X_0) = \sum_{t=1}^{l} \tilde{\mu}(X_t) = l \in \mathbb{N}$ 且 $l \leqslant n$。这表明 $p^{j}{}_{,i}{}^{k}$ 要么为零，要么其迹为整数，而这进而意味着 $(\tau \otimes \tau \otimes \text{迹})(p) \in \mathbb{N}$；也就是说，$p = 1_{\mathscr{M}}$ 且 $t = n$。

记 $p_t = \mathbf{1}_{X_t}$，并令 $u_t \in \mathscr{N}_{\mathcal{N}}(\mathscr{P})$ 满足 $u_t a u_t^* = a \circ \varphi_t^{-1}$，对每个 $a \in \mathscr{P}$ 均如此。于是 $u_t p_t u_t^* = 1 \otimes 1 \otimes e_t$，而最后一个关系意味着我们可以找到 $(\zeta_{t,\ h})_{h \in B} \subset \overline{\mathscr{U}(\mathcal{P}_j \bar{\otimes} \mathcal{P}_k)}$ 使得

$$u_t \Delta(u_{\hat{h}}) f \omega_h p_t u_t^* = \zeta_{t,h} u_{(\widehat{\varepsilon_{t,1}(h)}, \widehat{\varepsilon_{t,2}(h)})} \otimes e_t, \text{ for every } h \in S_t. \tag{4.11}$$

将 $S_t$ 替换为 $S = \bigcap_{t=1}^{l} S_t$ 后，我们可以假设对所有 $1 \leqslant t \leqslant l$ 都有 $S_t = S$。令 $K = \pi_i^{-1}(S)$ 且 $\mathcal{M}_0 = \mathrm{L}(K)$，我们将证明可以找到一个投影 $p_0 \in f(\Delta(\mathcal{M}_0)' \cap \mathcal{N})f$，使得 $(\tau_j \otimes \tau_k \otimes \text{迹})(p_0) = k \in \{1, \ldots\ldots, l\}$，同态 $\delta\colon K \to G_j \times G_k$、$\rho\colon K \to \mathscr{U}_k(\mathbb{C})$，以及一个酉元 $w \in \mathscr{U}(\mathcal{N})$，满足 $\delta$ 是单射，$w p_0 w^* = 1 \otimes (\sum_{i=1}^{k} e_i)$ 且 $w \Delta(u_g) p_0 w^* = u_{\delta(g)} \otimes \rho(g)$，对所有 $g \in K$ 均如此。

**命题 4.9.** 存在 $1 \leqslant k \leqslant l$ 和 $\varepsilon\colon S \to B_j \times B_k$，使得重新编号后有 $p_0 = \sum_{t=1}^{k} p_t \in f(\Delta(\mathcal{M}_0)' \cap \mathcal{N})f$，并且对每个 $1 \leqslant t \leqslant k$，我们都可以取 $\varepsilon_t = \varepsilon$。

命题的证明 *4.9*。首先我们证明 $\varepsilon_{t,\ 1}(S) \leqslant B_j$ 是非平均的。否则，$G_0 = \pi_j^{-1}(\varepsilon_{t,\ 1}(S)) \leqslant G_j$ 是可和的，由（4.11）可得 $\Delta(\mathcal{M}_0) \prec \mathrm{L}(G_0) \bar{\otimes} \mathcal{M}_k \bar{\otimes} \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。由于 $\mathcal{M}_0$ 具有 (T) 性质，[HPV11，引理 1] 推出 $\Delta(\mathcal{M}_0) \prec 1 \bar{\otimes} \mathcal{M}_k$，这与 $\mathcal{M}_0$ 是弥散的事实矛盾。同理，我们得到 $\varepsilon_{t,\ 2}(S) \leqslant B_k$ 是一个非平均子群。

接下来我们证明，若 $1 \leqslant t_1, t_2 \leqslant l$ 满足 $p_{t_1} \mathcal{Q} p_{t_2} \neq \{0\}$，那么 $\varepsilon_{t_1}$ 共轭于 $\varepsilon_{t_2}$。令 $x \in (\mathcal{Q})_1$ 满足 $p_{t_1} x p_{t_2} \neq 0$，$x_h = \mathrm{Ad}(\Delta(u_{\hat{h}}) f \omega_h)(p_{t_1} x) = \beta_h(p_{t_1} x) \in (\mathcal{Q})_1$，并注意到 $(\Delta(u_{\hat{h}}) f \omega_h p_{t_1}) x p_{t_2} = x_h (\Delta(u_{\hat{h}}) f \omega_h p_{t_2})$，对 $h \in S$ 成立。利用（4.11）可得

$$(u_{t_1}^* (\zeta_{t_1,h} u_{\widehat{\varepsilon_{t_1}(h)}} \otimes e_{t_1}) u_{t_1}) x p_{t_2} = x_h (u_{t_2}^* (\zeta_{t_2,h} u_{\widehat{\varepsilon_{t_2}(h)}} \otimes e_{t_2}) u_{t_2}), \text{for all } h \in S. \tag{4.12}$$

对于有限集 $F \subset B_j \times B_k$，记 $P_F$ 为从 $L^2(\mathcal{N})$ 到 $\|\cdot\|_2$-闭线性张成的正交投影：$\{u_g \otimes x :\ g \in (\pi_j \times \pi_k)^{-1}(F),\ x \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})\}$。由于 $(\zeta_{t_1,\ h})_{h \in S}$，$(\zeta_{t_2,\ h})_{h \in S} \subset \overline{\mathscr{U}(\mathcal{P}_j \bar{\otimes} \mathcal{P}_k)}$ 并且 $(x_h)_{h \in S} \subset (\mathcal{Q})_1$，利用基本的 $\|\cdot\|_2$-逼近以及（4.12），存在一个有限集 $F \subset B_j \times B_k$，使得对所有 $h \in S$ 都有

(a) $\|(u_{t_1}^* (\zeta_{t_1,h} u_{\widehat{\varepsilon_{t_1}(h)}} \otimes e_{t_1}) u_{t_1}) x p_{t_2} - P_{F \varepsilon_{t_1}(h) F}((u_{t_1}^* (\zeta_{t_1,h} u_{\widehat{\varepsilon_{t_1}(h)}} \otimes e_{t_1}) u_{t_1}) x p_{t_2})\|_2 < \|p_{t_1} x p_{t_2}\|_2 / 2,$

(b) $\|x_h (u_{t_2}^* (\zeta_{t_2,h} u_{\widehat{\varepsilon_{t_2}(h)}} \otimes e_{t_2}) u_{t_2}) - P_{F \varepsilon_{t_2}(h) F}(x_h (u_{t_2}^* (\zeta_{t_2,h} u_{\widehat{\varepsilon_{t_2}(h)}} \otimes e_{t_2}) u_{t_2}))\|_2 < \|p_{t_1} x p_{t_2}\|_2 / 2.$

结合 (a)、(b) 与 (4.12)，我们推出：对每个 $h \in S$，有 $F \varepsilon_{t_1}(h) F \cap F \varepsilon_{t_2}(h) F \neq \varnothing$。由于 $\varepsilon_{t_1}$ 是单射的，且 $S \leqslant B_i$ 是有限指数子群，故 $\varepsilon_{t_1}(S)$ 是具有 (T) 性质的无限群。对任意 $g \in B_j \backslash \{1\}$（相应地 $g \in B_k \backslash \{1\}$），$C_{B_j}(g)$（相应地 $C_{B_k}(g)$）是可和的；并且对每个 $(g_1, g_2) \in B_j \times B_k \backslash \{(1, 1)\}$、$C_{B_j \times B_k}((g_1, g_2))$ 包含于 $C_{B_j}(g_1) \times B_k$ 或 $B_j \times C_{B_k}(g_2)$。利用 $\varepsilon_{t_1,\ 1}(S)$、$\varepsilon_{t_1,\ 2}(S)$ 是非平均的，对 $(g_1, g_2) \in B_j \times B_k \backslash \{(1, 1)\}$ 我们得到 $\{\varepsilon_{t_1}(h)(g_1, g_2)\varepsilon_{t_1}(h)^{-1} :\ h \in S\}$ 是无限的。由 [BV13，引理 7.1]，存在 $g \in B_j \times B_k$，使得对所有 $h \in S$ 有 $\varepsilon_{t_1}(h) = g \varepsilon_{t_2}(h) g^{-1}$。这证明了我们的断言：$\varepsilon_{t_1}$ 与 $\varepsilon_{t_2}$ 共轭。

设 $\varepsilon=\varepsilon_1\colon\ S\to B_j\times B_j$。重新编号后，我们可以假设：对某个 $1\leqslant k\leqslant l$，$\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k$与 $\varepsilon$共轭，而 $\varepsilon_{k+1},\dots,\varepsilon_l$不与 $\varepsilon$共轭。前述断言蕴含：对每个 $1\leqslant t\leqslant k$与 $k+1\leqslant t'\leqslant l$，有 $p_t\mathcal{Q}p_{t'}=\{0\}$。因此，$p_0\colon=\sum_{t=1}^k p_t$属于$\mathcal{Q}f$的中心。由于 $p_0$与 $\Delta(u_{\hat{h}})f\omega_h$及 $\omega_h\in\mathcal{Q}$交换，故对每个 $h\in S$，$p_0$与 $\Delta(u_{\hat{h}})f$交换。由于$p_t\in\mathscr{P}f\subset\mathcal{Q}=\Delta(\mathcal{P}_i)'\cap\mathcal{N}$，$p_0$也与 $\Delta(\mathcal{P}_i)f$交换。因此得到 $p_0\in f(\Delta(\mathcal{M}_0)'\cap\mathcal{N})f$，此即所求。最后，对 $1\leqslant t\leqslant k$存在 $g_t\in B_j\times B_k$，使得对每个 $h\in S$有 $\varepsilon_t(h)=g_t\varepsilon(h)g_t^{-1}$；因此，将 $\varphi_t$替换为${}^{\alpha_{g_t^{-1}}}\circ\varphi_t$后，我们可以假设对每个 $1\leqslant t\leqslant k$有 $\varepsilon=\varepsilon_t$。■

设 $u=\sum_{t=1}^k u_tp_k$与 $e=\sum_{t=1}^k e_t$。注意 $u$是一个偏等距，满足 $uu^*=1\otimes e$与$u^*u=p_0$。令 $\zeta_h=\sum_{t=1}^k\zeta_{t,\ h}\otimes e_t\in\mathscr{U}(\mathscr{P}(1\otimes1\otimes e))$并利用（4.11）得到

$$u\Delta(u_{\hat{h}})f\omega_hp_0u^*=\zeta_h(u_{\widehat{\varepsilon(h)}}\otimes1),\ \text{for every } h\in S.$$

将 $\mathcal{N}_1=(1\otimes1\otimes e)\mathcal{N}(1\otimes1\otimes e)$ 等同于 $\mathcal{M}_j\bar{\otimes}\mathcal{M}_k\bar{\otimes}\mathbb{M}_k(\mathbb{C})$，并将 $\mathscr{P}_1=\mathscr{P}(1\otimes1\otimes e)$ 等同于 $\mathcal{P}_j\bar{\otimes}\mathcal{P}_k\bar{\otimes}\mathbb{D}_k(\mathbb{C})$。考虑保单位的 $*$-同态 $\Delta_1\colon\ \mathcal{M}_0\to\mathcal{N}_1$，其由 $\Delta_1(x)=u\Delta(x)p_0u^*$对 $x\in M_0$给出。将其记为 $\mathcal{Q}_1=\Delta_1(\mathcal{P}_i)'\cap\mathcal{N}_1$，并注意到 $w_h\colon=u\omega_hp_0u^*\in\mathscr{U}(\mathcal{Q}_1)$。此外，由前述等式可得

$$\Delta_1(u_{\hat{h}})w_h=\zeta_h(u_{\widehat{\varepsilon(h)}}\otimes1),\ \text{for every } h\in S.$$

由（4.7），$\mathscr{P}_1\subseteq\mathcal{Q}_1$。由于 $(\Delta_1(u_{\hat{h}})w_h)_{h\in S}$ 正规化 $\mathcal{Q}_1$ 且 $(\zeta_h)_{h\in S}\subset\mathscr{U}(\mathscr{P}_1)$，上面的等式蕴含$(u_{\widehat{\varepsilon(h)}}\otimes1)_{h\in S}$正规化 $\mathcal{Q}_1$。令 $\eta_h\colon=\zeta_h\mathrm{Ad}(u_{\widehat{\varepsilon(h)}}\otimes1)(w_h^*)\in\mathscr{U}(\mathcal{Q}_1)$，我们得到

$$\Delta_1(u_{\hat{h}})=\eta_h(u_{\widehat{\varepsilon(h)}}\otimes1),\ \text{for every } h\in S.\tag{4.13}$$

**命题 4.10**。 $\mathcal{Q}_1=\mathcal{P}_j\bar{\otimes}\mathcal{P}_k\bar{\otimes}\mathcal{T}$，对于某个冯·诺依曼子代数 $\mathcal{T}\subseteq\mathbb{M}_k(\mathbb{C})$。

命题 *4.10* 的证明。我们首先证明 $\mathcal{Q}_1\subseteq\mathcal{P}_j\bar{\otimes}\mathcal{P}_k\bar{\otimes}\mathbb{M}_k(\mathbb{C})$。记映射 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$其中 $\varepsilon_l\colon\ S\to B_l$ 满足 $l=j$ 或 $k$。由于 $\varepsilon_1(S)$ 和 $\varepsilon_2(S)$ 均为非平均的，因此存在一个序列 $(h_m)_m\subset S$，使得对每个 $g_1,\ g_2\in B_j\times B_k$ 且 $g_3\in B_j\times B_k\backslash\{(1,\ 1)\}$ 我们有$g_1\mathrm{Ad}(\varepsilon(h_m))(g_3)g_2\neq1$ 当 $m$ 足够大时。

接下来我们证明，对于每个 $a_1,a_2\in\mathcal{M}_j\bar{\otimes}\mathcal{M}_k$ 和$b\in\mathcal{M}_j\bar{\otimes}\mathcal{M}_j\ominus(\mathcal{P}_j\bar{\otimes}\mathcal{P}_k)$，都有 $\|\mathbb{E}_{\mathcal{P}_j\bar{\otimes}\mathcal{P}_k}(a_1\mathbf{Ad}(u_{\widehat{\varepsilon(h_m)}})(b)a_2)\|_2\to0$。我们对$a_1=u_g$、$a_2=u_h$、$b=u_s$ 验证这一点，其中 $g,h\in G_j\times G_k$ 且 $s\in G_j\times G_k\backslash(A_j^{(I_j)}\times A_k^{(I_k)})$。注意到 $(\pi_j\times\pi_k)(s)\neq(1,1)$，因此对于充分大的 $m$，有 $(\pi_j\times\pi_k)(g\mathbf{Ad}(\varepsilon(h_m))(s)h)=(\pi_j\times\pi_k)(g)\mathbf{Ad}(\varepsilon(h_m))((\pi_j\times\pi_k)(s))(\pi_j\times\pi_k)(h)\neq(1,1)$。于是，对于充分大的 $m$，有 $\mathbb{E}_{\mathcal{P}_j\bar{\otimes}\mathcal{P}_k}(a_1\mathbf{Ad}(u_{\widehat{\varepsilon(h_m)}})(b)a_2)=0$。利用基本逼近，这一事实进一步意味着

$$\lim_{m\to\infty}\|\mathbb{E}_{\mathscr{P}_1}(\mathrm{Ad}(u_{\widehat{\varepsilon(h_m)}}\otimes1)(b))\|_2=0,\ \text{for all } b\in\mathcal{N}_1\ominus(\mathcal{P}_j\bar{\otimes}\mathcal{P}_j\bar{\otimes}\mathbb{M}_k(\mathbb{C})).\tag{4.14}$$

令 $\mathscr{Z}(\mathcal{Q}_1)$ 为 $\mathcal{Q}_1$的中心，并注意到它包含于 $\mathscr{P}_1\subseteq\mathcal{Q}_1$。此外，$\mathcal{Q}_1\prec^s_{\mathcal{N}_1}\mathscr{P}_1$ 由命题 4.7，且由于 $\mathscr{P}_1$ 是阿贝尔的，可知 $\mathcal{Q}_1$ 是一个 I 型冯·诺依曼代数。因此，存在投影 $(r_\iota)_\iota\subset\mathscr{Z}(\mathcal{Q}_1)$ 满足 $\sum_\iota r_\iota=1$，使得 $\mathcal{Q}_1r_\iota=\mathscr{Z}(\mathcal{Q}_1)r_\iota\bar{\otimes}\mathbb{M}_{n_\iota}(\mathbb{C})$，对于

某个 $n_\iota \in \mathbb{N}$。特别地，包含 $\mathscr{Z}(\mathcal{Q}_1)r_\iota \subseteq \mathcal{Q}_1 r_\iota$ 存在有限 Pimsner-Popa 基，因此对所有 $\mathscr{P}_1 r_\iota \subseteq \mathcal{Q}_1 r_\iota$，包含 $\iota$也同样成立。结合（4.14），基本$\|\cdot\|_2$逼近表明

$$\lim_{m\to\infty} \|\mathbb{E}_{\mathcal{Q}_1}(\mathrm{Ad}(u_{\widehat{\varepsilon(h_m)}}\otimes 1)(b))\|_2 = 0, \text{ for all } b \in \mathcal{N}_1 \ominus (\mathcal{P}_j \bar{\otimes} \mathcal{P}_k \bar{\otimes} \mathbb{M}_k(\mathbb{C})).$$

为了证明 $\mathcal{Q}_1 \subseteq \mathcal{P}_j \bar{\otimes} \mathcal{P}_k \bar{\otimes} \mathbb{M}_k(\mathbb{C})$，令 $a \in \mathcal{Q}_1$，记 $c = \mathbb{E}_{\mathcal{P}_j \bar{\otimes} \mathcal{P}_k \bar{\otimes} \mathbb{M}_k(\mathbb{C})}(a)$，并令 $b = a - c$。由于 $u_{\widehat{\varepsilon(h_m)}} \otimes 1$ 正规化 $\mathcal{Q}_1$，$\mathrm{Ad}(u_{\widehat{\varepsilon(h_m)}} \otimes 1)(a) \in \mathcal{Q}_1$,，这意味着 $\|\mathbb{E}_{\mathcal{Q}_1}(\mathrm{Ad}(u_{\widehat{\varepsilon(h_m)}} \otimes 1)(a))\|_2 = \|a\|_2$。根据前一个等式，$\|\mathbb{E}_{\mathcal{Q}_1}(\mathrm{Ad}(u_{\widehat{\varepsilon(h_m)}} \otimes 1)(b))\|_2 \to 0$，这意味着 $\|\mathbb{E}_{\mathcal{Q}_1}(\mathrm{Ad}(u_{\widehat{\varepsilon(h_m)}} \otimes 1)(c))\|_2 \to \|a\|_2$。由于 $\|\mathbb{E}_{\mathcal{Q}_1}(\mathrm{Ad}(u_{\widehat{\varepsilon(h_m)}} \otimes 1)(c))\|_2 \leqslant \|c\|_2 \leqslant \|a\|_2$，这意味着 $\|c\|_2 = \|a\|_2$，因此 $a = c \in \mathcal{P}_j \bar{\otimes} \mathcal{P}_k \bar{\otimes} \mathbb{M}_k(\mathbb{C})$。

因此，$\mathcal{P}_j \bar{\otimes} \mathcal{P}_k \bar{\otimes} \mathbb{D}_k = \mathscr{P}_1 \subseteq \mathcal{Q}_1 \subseteq \mathcal{P}_j \bar{\otimes} \mathcal{P}_k \bar{\otimes} \mathbb{M}_k(\mathbb{C})$。由于 $\mathcal{P}_j \bar{\otimes} \mathcal{P}_k = \mathrm{L}^\infty(X, \mu)$，我们可以将 $\mathcal{Q}_1 = \int_X^\oplus \mathcal{T}_x d\mu(x)$ 分解为可测场，其中 $(\mathcal{T}_x)_x$ 是冯·诺依曼子代数 $\mathbb{M}_k(\mathbb{C})$ 的可测场，且对几乎每个 $x \in X$ 都包含 $\mathbb{D}_k$。记 $\gamma_h = \mathrm{Ad}(u_{\widehat{\varepsilon(h)}}) \in$ 自同构群$(\mathcal{P}_j \bar{\otimes} \mathcal{P}_k)$，其中 $h \in S$。由于 $(u_{\widehat{\varepsilon(h)}} \otimes 1)_{h\in S}$ 正规化了 $\mathcal{Q}_1$，我们得到，对每个 $h \in S$ 以及几乎每个 $x \in X$，都有 $\mathcal{T}_{\gamma_h(x)} = \mathcal{T}_x$。注意，$\gamma$ 是建立在由 $s \cdot i = \varepsilon_l(s) \cdot i$ 给出的作用 $S \curvearrowright I = I_j \sqcup I_k$ 之上的，其中 $i \in I_l$，且$l = j$ 或 $k$。由于 $\varepsilon$ 是单射，$S$ 具有 (T) 性质，并且对于 $i \in I_l$（其中 $l$ 为 $j$ 或 $j$），稳定子$_{B_l}(i)$是可和的，因此作用 $S \curvearrowright I$ 具有无限轨道。这意味着 $\gamma$ 是弱混合的，因而是遍历的。因此，我们可以找到一个子代数 $\mathcal{T} \subset \mathbb{M}_k(\mathbb{C})$，使得对几乎每个 $x$ 都有 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_x$。这表明$\mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}_j \bar{\otimes} \mathcal{P}_k \bar{\otimes} \mathcal{T}$。■

设 $\mathscr{U} = \mathscr{U}(\mathcal{T})/\mathscr{U}(\mathscr{Z}(\mathcal{T})),$，其中 $\mathscr{Z}(\mathcal{T})$ 是 $\mathcal{T}$ 的中心，并将 $q\colon \mathscr{U}(\mathcal{T}) \to \mathscr{U}$ 记为商映射。下面继续给出命题。

**命题 4.11**。存在映射 $\xi\colon S \to \mathscr{U}(\mathcal{T})$, $\nu\colon S \to \mathscr{U}(\mathscr{Z}(\mathcal{Q}_1))$，使得 $S \ni h \mapsto q(\xi_h) \in \mathscr{U}$ 是同态；将 $\Delta_1$ 替换为 $\mathrm{Ad}(u) \circ \Delta_1$（其中 $u \in \mathscr{U}(\mathcal{Q}_1)$）后，对所有 $h \in S$，有 $\Delta_1(u_{\hat{h}}) = \nu_h(u_{\widehat{\varepsilon(h)}} \otimes \xi_h)$。

命题 *4.11* 的证明。注意，$(\mathrm{Ad}\Delta_1(u_{\hat{h}}))_{h\in S}$ 和 $(\gamma_h \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{T}})_{h\in S}$ 定义了 $S$ 在 $\mathcal{Q}_1$ 上的作用。结合 (4.13) 可得

$$\eta^*_{h_1h_2}\eta_{h_1}(\gamma_{h_1} \otimes \mathrm{Id})(\eta_{h_2}) \in \mathscr{Z}(\mathcal{Q}_1) = \mathcal{P}_j \bar{\otimes} \mathcal{P}_k \bar{\otimes} \mathscr{Z}(\mathcal{T}).$$

将 $\eta$ 视为可测函数 $\eta\colon X \to \mathscr{U}(\mathcal{T})$，前面的等式可改写为 $\eta_{h_1h_2}(x)^*\eta_{h_1}(x)\eta_{h_2}(\gamma_{h_1^{-1}}(x)) \in \mathscr{U}(\mathscr{Z}(\mathcal{T}))$，对每个 $h_1, h_2 \in S$ 以及几乎处处的 $x \in X$ 均成立。令$c\colon S \times X \to \mathscr{U}$ 由 $c(h, x) = q(\eta_h(x))$ 给出，并注意它是 $\gamma$ 的一个 1-余循环。由于 $\mathscr{U}(\mathscr{Z}(\mathcal{T}))$ 是紧波兰群 $\mathscr{U}(\mathcal{T})$ 的闭中心子群，$\mathscr{U}$ 在商拓扑下是紧波兰群。特别地，它是一个 $\mathscr{U}_{\mathrm{fin}}$ 群 [Pop05，引理 2.7]。由于 $S$ 具有 (T) 性质，$\gamma$ 构建在 $S \curvearrowright I$ 之上，且 $S \curvearrowright I$ 有无限轨道，[CIOS22，定理 3.5] 推出 $c$ 与同态 $\psi\colon S \to \mathscr{U}$ 上同调等价。

设 $u\colon X \to \mathscr{U}(\mathcal{T})$ 为可测映射，满足 $q(u(x))c(h, x)q(u(\gamma_{h^{-1}}(x)))^{-1} = \psi_h$，对所有 $h \in S$ 以及几乎所有 $x \in X$成立。设 $\xi\colon S \to \mathscr{U}(\mathcal{T})$ 使得 $q(\xi_h) = \psi_h$。于是，我们得到可测映射 $\nu_h\colon X \to \mathscr{U}(\mathscr{Z}(\mathcal{T}))$，使得 $u(x)\eta_h(x)u(\gamma_{h^{-1}}(x))^{-1} = \nu_h(x)\xi_h$ 对所有 $h \in S$ 以及

几乎所有 $x \in X$。等价地， $u \in \mathscr{U}(\mathcal{Q}_1)$ 与 $\nu\colon S \to \mathscr{U}(\mathscr{Z}(\mathcal{T}))$ 满足 $u\eta_h(\gamma_h \otimes \mathrm{Id})(u^*) = \nu_h(1 \otimes \xi_h)$，对每个 $h \in S$成立。因此， $u\Delta_1(u_{\hat{h}})u^* = u\eta_h(u_{\widehat{\varepsilon(h)}} \otimes 1)u^* = \nu_h(u_{\widehat{\varepsilon(h)}} \otimes \xi_h)$，对所有 $h \in S$成立，即为所求。■

取 $g \in K = \pi_i^{-1}(S)$，并令 $h = \pi_i(g) \in S$。那么 $a = g\widehat{h^{-1}} \in A_i^{(I_i)}$ 且 $\Delta_1(u_a) \in \mathscr{Z}(\mathcal{Q}_1)$。令 $k_g = \Delta_1(u_a)\nu_h \in \mathscr{Z}(\mathcal{Q}_1)$，注意到

$$\Delta_1(u_g) = k_g(u_{\widehat{\varepsilon(\pi_i(g))}} \otimes \xi_{\pi_i(g)}), \text{ for all } g \in K. \tag{4.15}$$

**断言 4.12**。存在 $c\colon K \to \mathcal{P}_j \bar{\otimes} \mathcal{P}_k$，$e\colon K \to \mathscr{Z}(\mathcal{T})$ 以及 $z \in \mathscr{U}(\mathscr{Z}(\mathcal{Q}_1))$，使得 $k_g = (u_{c_g} \otimes e_g)z^*(\gamma_{\pi_i(g)} \bar{\otimes} \text{恒等})(z)$。

断言 *4.12* 的证明。定义 $s\colon K \times K \to A_j^{(I_j)} \times A_k^{(I_k)}$ 为 $s_{g,\ h} = \widehat{\varepsilon(\pi_i(g))}\widehat{\varepsilon(\pi_i(h))}\widehat{\varepsilon(\pi_i(gh))}^*$，以及 $d\colon K \times K \to \mathscr{U}(\mathscr{Z}(\mathcal{T}))$ 为 $d_{g,\ h} = \xi_{\pi_i(gh)}\xi^*_{\pi_i(h)}\xi^*_{\pi_i(g)}$。由前面的等式（4.15），可得

$$u_{s_{g,h}} \otimes 1 = k_{gh}k_g^*((\gamma_{\pi_i(g)} \otimes \mathrm{Id})(k_h))^*(1 \otimes d_{g,h}), \text{ for every } g, h \in K. \tag{4.16}$$

此外请注意，映射 $K \times K \ni (g,h) \mapsto u_{s_{g,h}} \in \mathscr{U}(\mathcal{P}_j \bar{\otimes} \mathcal{P}_k)$ 是作用$K \curvearrowright^{\gamma\circ\pi_i} \mathcal{P}_j \bar{\otimes} \mathcal{P}_k$ 的 2-余循环，而映射 $K \times K \ni (g,h) \mapsto d_{g,h} \in \mathscr{U}(\mathscr{Z}(\mathcal{T}))$ 是平凡作用的 2-余循环。由于 $\gamma$ 构造于 $S \curvearrowright I$ 之上，$\gamma \circ \pi_i$ 是由 $k \cdot m = \pi_i(k) \cdot m$ 给出的、构造于 $K \curvearrowright I$ 之上的作用，其中 $k \in K$ 且 $m \in I$。由于作用 $K \curvearrowright I$ 具有无限轨道，$\gamma \circ \pi_i$ 是弱混合的。若 $n \in \mathbb{N}$，则作用 $(\gamma \circ \pi_i)^{\otimes n}$ 构造于对角乘积 $K \curvearrowright I^n$ 之上，而后者具有无限轨道。由于 $K$ 具有 (T) 性质，CIOS22 的定理 3.5] 表明 $(\gamma \circ \pi_i)^{\otimes n}$ 是 $\mathscr{U}_{\mathrm{fin}}$-余循环超刚性的。根据 CIOS22 的定理 3.7]，，存在 $c\colon K \to A_j^{(I_j)} \times A_k^{(I_k)}$，$e\colon K \to \mathscr{U}(\mathscr{Z}(\mathcal{T}))$，满足 $u_{s_{g,h}} = u_{c_{gh}}u^*_{c_g}\gamma_{\pi_i(g)}(u_{c_h})^*$ 以及对每个 $g, h \in K$ 都有 $d_{g,h} = e^*_{gh}e_ge_h$。由 (4.16) 可知，$S \ni g \mapsto k_g^*(u_{c_g} \otimes e_g) \in \mathscr{U}(\mathscr{Z}(\mathcal{Q}_1))$ 是 $((\gamma \circ \pi_i) \otimes \mathrm{Id})\colon K \curvearrowright \mathcal{P}_j \bar{\otimes} \mathcal{P}_k \bar{\otimes} \mathscr{Z}(\mathcal{T})$ 的 1-余循环。由于 $\gamma \circ \pi_i$ 是 $\mathscr{U}_{\mathrm{fin}}$ 超刚性的，我们得到所需的 $z \in \mathscr{U}(\mathscr{Z}(\mathcal{Q}_1))$。■

由此可得 $\Delta_1(u_g) = z^*(u_{c_g\widehat{\varepsilon(\pi_i(g))}} \otimes \xi_{\pi_i(g)}e_g)z$。映射 $\delta\colon K \to G_j \times G_k$ 由 $\delta(g) = c_g\varepsilon(\pi_i(g))$ 给出，映射 $\rho\colon K \to \mathscr{U}(\mathcal{T})$ 由 $\rho(g) = \xi_{\pi_i(g)}e_g$ 给出，它们都是同态，且

$$\Delta_1(u_g) = z^*(u_{\delta(g)} \otimes \rho(g))z, \text{ for every } g \in K. \tag{4.17}$$

根据构造，$A_i^{(I_i)} \subset K$ 和 $\delta(A_i^{(I_i)}) \subset A_j^{(I_j)} \times A_k^{(I_k)}$。此外，若 $g \in \ker\delta$，则有 $\Delta_1(u_g) = z^*(1 \otimes \rho(g))z \in z^*(1 \otimes \mathbb{M}_k(\mathbb{C}))z$。这意味着 $\ker\delta$ 是有限的。由于 $K$ 是无限共轭类，因此必有 $\delta$ 是单射。归纳步骤至此完成。

从这里开始，我们将证明分为两部分。首先，假设情形(a)，即 $t \leqslant 1$。这自动意味着 $n = 1$，$f = 1$ 以及 $\mathcal{T} = \mathbb{C}$。此外，我们有 $\Delta = \Delta_0$。在这种情况下，关系(4.17)意味着存在一个有限指数子群 $K \leqslant G_i$、一个酉元 $z \in \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}$、一个单同态 $\delta = (\delta_1,\ \delta_2)\colon K \to G_j \times G_k$ 以及一个乘法特征 $\mu\colon K \to \mathbb{T}$ 使得

$$\Delta(u_g) = \mu(g)zu_{\delta(g)}z^*, \text{ for all } g \in K. \tag{4.18}$$

**命题 4.13.** 关系 (4.18) 对 $K = G_i$成立。

命题 *4.13* 的证明。 取一个有限指数子群，使得我们可以假设 $K \leqslant G_i$ 是正规子群。现在固定 $g \in G_i$ 和 $h \in K$。利用 4.18 对 $h$， $ghg^{-1} \in K$ 中的关系，我们得到

$$\mu(h)\Delta(u_g)zu_{\delta(h)}z^*\Delta(u_{g^{-1}}) = \Delta(u_g)\Delta(u_h)\Delta(u_{g^{-1}}) = \Delta(u_{ghg^{-1}}) = \mu(ghg^{-1})zu_{\delta(ghg^{-1})}z^*.$$

令 $y := z^*\Delta(u_g)z$ 且令 $t_h := \mu(h)\mu(\overline{ghg^{-1}}) \in \mathbb{T}$，则前一个等式意味着对于所有 $h \in K$，有 $yu_{\delta(h)} = t_h u_{\delta(ghg^{-1})}y$。由于 $K$ 是无限性质（T），并且 $G_j$ 中 $G_k$ 的中心化子是可和的，对于每个有限指数子群 $K_0 \leqslant K$，我们都有 $C_{G_j}(\delta_1(K_0)) = \{1\}$ 和 $C_{G_k}(\delta_2(K_0)) = \{1\}$。特别地，我们有 $C_{G_j\times G_k}(\delta(K_0)) = \{1\}$。利用命题 4.4，我们得到对于所有 $g \in G_i$， $y = z^*\Delta(u_g)z \in \mathbb{T}(u_{(h,\ l)})_{(h,\ l)\in G_j\times G_k}$。因此， $\mu$ 和 $\delta$ 可延拓为同态 $\mu: G_i \to \mathbb{T}$ 和 $\delta: G_i \to G_j \times G_k$，且对于每个 $g \in G_i$ 都有 $\Delta(u_g) = \mu(g)zu_{\delta(g)}z^*$。 ■

**命题 4.14**。 在命题 *4.13*中，我们可以取 $j = k$ 和 $\delta_1 = \delta_2$。

证明 命题 *4.14*的证明。 由于 $\zeta \circ \Delta = \Delta$，其中 $\zeta$ 是翻转映射，由（4.18），我们得到 n

$$\zeta(z^*)z(u_{\delta_1(g)} \otimes u_{\delta_2(g)}) = (u_{\delta_2(g)} \otimes u_{\delta_1(g)})\zeta(z^*)z, \text{ for every } g \in G_i.$$

仿照前一命题的证明可得，对于每个有限指数子群 $K_0 \leqslant G_i$，都有 $C_{G_j\times G_k}(\delta(K_0)) = \{1\}$。利用命题 4.4，可以找到 $c \in \mathbb{T}$ 和 $(h,\ l) \in G_j \times G_k$满足 $\zeta(z^*)(z) = cu_h \otimes u_l$，使得 $\mathrm{Ad}(h) \circ \delta_1 = \delta_2$ 和 $\mathrm{Ad}(l) \circ \delta_2 = \delta_1$。将 $z$ 替换为 $z(1 \otimes u_h)$，得到 $j = k$，并且可以取 $\delta_1 = \delta_2 =: \upsilon$。 ■

由于 $i$ 是任意的，我们现在可以分别描述 $\mathrm{L}(G_1)$ 和 $\mathrm{L}(G_2)$ 上的余乘法。在下面的命题中，我们证明可以将这两种描述选为相同。

**命题 4.15.** 存在一个酉元 $y \in \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}$ 和一个单同态 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2): G \to G \times G$以及一个乘法特征 $\mu: G \to \mathbb{T}$，使得

$$\Delta(u_g) = \mu(g)yu_{\gamma(g)}y^*, \ \textit{for all } g \in G. \tag{4.19}$$

命题 *4.15* 的证明。 根据命题 4.13 我们可以找到酉元 $z_i \in \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}$、一个单同态$\delta_i = (\upsilon_i, \upsilon_i): G_i \to G_{j_i} \times G_{j_i}$ 以及一个乘法特征 $\mu_i: G_i \to \mathbb{T}$ 满足

$$\Delta(u_g) = \mu_i(g)z_iu_{\delta_i(g)}z_i^*, \text{ for all } g \in G_i. \tag{4.20}$$

因此，对每个 $g \in C \leqslant G_1 \cap G_2$，我们有 $\mu_1(g)z_1u_{\delta_1(g)}z_1^* = \Delta(u_g) = \mu_2(g)z_2u_{\delta_2(g)}z_2^*$，从而若令 $z = z_2^*z_1$ 和 $t(g) = \mu_2(g)\mu_1(\overline{g})$，则进一步有 $t(g)zu_{\delta_1(g)} = u_{\delta_2(g)}z^*$ 对所有 $g \in C$ 都成立。

接下来我们将论证，对每个有限指数子群 $C_0 \leqslant C$，都有 $C_{G\times G}(\delta_1(C_0)) = \{1\}$。根据假设，对每个 $i = 1$、 2 以及每个 $1 \neq h \in G_i$，中心化子 $C_{G_i}(h)$ 都是可和的；由 KS07 定理 1], 对 $G$ [ 也同样成立。现在，由于 $C$ 是非平均的， $C_0$ 也如此， $\delta_1(C_0)$亦然，这意味着 $C_{G\times G}(\delta_1(C_0)) = \{1\}$。利用命题 4.4，可以找到标量 $c \in \mathbb{C}$和 $(h$、 $l) \in G \times G$，使得 $z = cu_h \otimes u_l$。特别地，在用 $G \times G$的一个内群同态对 $\delta_2$ 进行共轭之后，我们不失一般性地可以假设，在方程 (4.20) 中

有 $z_1 = z_2 =: y$。然而，这些关系随后自动蕴含存在一个单射群同态 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$：$G \to G \times G$ 以及一个乘法特征 $\mu$： $G \to \mathbb{T}$满足（4.19）。■

**断言 4.16.** $h_H(G) > 0$.

断言 *4.16*的证明。 固定 $\epsilon > 0$，并设 $F_\epsilon = F_1 \times F_2 \subset H \times H$ 为有限集，其中$y_\epsilon \in \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}$ 支撑在 $F_\epsilon$上且满足 $\|y - y_\epsilon\|_2 < \epsilon$。此时，令 $u_g = \sum_h \tau(u_g v_h^*)v_h$、 $y_\epsilon = \sum_{f\in F_\epsilon} \tau(y_\epsilon v_f^*)v_{(f_1,f_2)}$与$u_{\gamma(g)} = \sum_{h_1,h_2} \tau(u_{\gamma_1(g)}v_{h_1}^*)\tau(u_{\gamma_2(g)}v_{h_2}^*)v_{(h_1,h_2)}$，我们得到

$$\begin{aligned}\|y\|_2^2 &= |\langle \Delta(u_g)yu_{\gamma(g^{-1})}, y\rangle| \leqslant \epsilon(\|y\|_2 + \|y_\epsilon\|_2) + |\langle \Delta(u_g), y_\epsilon u_{\gamma(g)}y_\epsilon^*\rangle| \\ &\leqslant \epsilon(2\|y\|_2 + \epsilon) + \sum_{h,h_1,h_2\in H, f,k\in F_\epsilon} |\tau(y_\epsilon v_{f^{-1}})\tau(y_\epsilon v_k)\tau(u_g v_{h^{-1}})\tau(u_{\gamma_1(g)}v_{h_1^{-1}})\tau(u_{\gamma_2(g)}v_{h_2}^{-1})|\delta_{h,f_1h_1k_1}\delta_{h,f_2h_2k_2} \\ &\leqslant \epsilon(2\|y\|_2 + \epsilon) + \|y_\epsilon\|_2^2 \cdot |F_\epsilon|^2 \cdot h_H(u_g) \leqslant \epsilon(2\|y\|_2 + \epsilon) + (\|y\|_2 + \epsilon)^2|F_\epsilon|^2 \cdot h_H(u_g).\end{aligned}$$

因此，对所有 $g \in G$，我们有 $h_H(u_g) \geqslant \frac{\|y\|_2^2 - \epsilon(2\|y\|_2+\epsilon\|_2)}{(\|y\|_2+\epsilon)^2\cdot|F_\epsilon|^2}$。取足够小的 $\epsilon > 0$，则 $h_H(G) > 0$。 ■

根据 [KV15，定理 4。1] 可得一个酉元 $w \in \mathrm{L}(H)$、一个特征 $\mu$： $G \to \mathbb{T}$ 以及一个群同构 $\rho$： $G \to H$ 满足 $u_g = \mu(g)wv_{\rho(g)}w^*$。在这种情况下，也可以用下面的断言来完成定理的证明。我们在此写出它，因为稍后将在断言 4.19 中使用它的一个变体。

**断言 4.17**。 $\gamma(g) = (g, g)$，对每个 $g \in G$ 均成立。

断言 *4.17* 的证明。 重复使用断言 4.14，不妨设 $\gamma(g) = (\upsilon(g), \upsilon(g))$，对每个 $g \in G$ 均成立。现在，由于 $\Delta$ 满足 $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$，我们得到

$$\begin{aligned}(1 \otimes y^*)(\mathrm{id} \otimes \Delta)(y^*)(\Delta \otimes \mathrm{id})(y)(y \otimes 1)(u_{\upsilon(\upsilon(g))} \otimes u_{\upsilon(\upsilon(g))} \otimes u_{\upsilon(g)}) \\ = (u_{\upsilon(g)} \otimes u_{\upsilon(\upsilon(g))} \otimes u_{\upsilon(\upsilon(g))})(1 \otimes y^*)(\mathrm{id} \otimes \Delta)(y^*)(\Delta \otimes \mathrm{id})(y)(y \otimes 1),\end{aligned}$$

对所有 $g \in G$。由命题 4.4，存在 $h \in G$，使得 $\upsilon(g) = hgh^{-1}$ 对每个 $g \in G$ 均成立。将$y$ 替换为 $y(u_h \otimes u_h)$，得到 $\Delta(u_g) = y(u_g \otimes u_g)y^*$，对每个 $g \in G$ 均成立。 ■

根据 [IPV10，定理 3。4]，存在一个酉元 $w \in \mathrm{L}(H)$、一个特征 $\mu$： $G \to \mathbb{T}$ 以及一个群同构 $\rho$： $G \to H$ 满足 $u_g = \mu(g)wv_{\rho(g)}w^*$。这就得到了情形 (a) 下的结论。

现在假设情形(b)成立；也就是说， $H$ 是无挠的。首先我们证明以下命题。

**命题 4.18**。 对于每个不可约冯·诺依曼子代数 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$，我们有 $\Delta(\mathcal{S})' \cap (\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) = \mathbb{C}1$。

证明断言 *4.18*。 首先我们论证，对每个 $h \neq 1$ 我们有 $\mathcal{S} \not\prec \mathrm{L}(C_H(h))$。事实上，若$\mathcal{S} \prec \mathrm{L}(C_H(h))$，转到相对交换子的交织，我们得到 $\mathrm{L}(\langle h\rangle) \subset \mathrm{L}(C_H(h))' \cap \mathrm{L}(H) \prec \mathcal{S}' \cap (\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) = (\mathcal{S}' \cap \mathcal{M})\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。然而，由 [CdSS15，命题 2.6]，这进一步蕴含 $\langle h\rangle$是有限群，这与 $H$ 无挠相矛盾。利用

命题 4.2(d)，我们得到 $\Delta(\mathcal{S})' \cap \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) = \Delta(S' \cap \mathcal{M}) = \mathbb{C}1$，因为 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ 被假定为不可约。■

由于 $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}$ 是不可约的，我们有 $\Delta(\mathcal{M}_i)' \cap \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}1$，因此在断言 4.6 中， $f = 1$ 和 $p^j$, $_i{}^k = 1$ 。类似地，由于 $K \leqslant G_i$ 具有有限指数，可以看出 $\mathcal{M}_0 = \mathrm{L}(K) \subseteq \mathcal{M}$ 也是不可约的。因此，在命题 4.9 中， $\Delta(\mathcal{M}_0)' \cap \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}1$ 和 $p_0 = 1$。总之，关系 (4.17) 表明存在一个有限指数子群 $K \leqslant G_i$、一个酉元 $z \in \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}$、一个单同态 $\delta = (\delta_1、\delta_2)$： $K \to G_j \times G_k$，以及一个酉表示 $\rho$： $K \to \mathscr{U}(\mathbb{C}^n)$，使得

$$\Delta(u_g) = z(u_{\delta(g)} \otimes \rho(g))z^*, \text{ for all } g \in K. \tag{4.21}$$

接下来我们证明与情形(a)中类似的结论，部分细节留给读者。

**断言 4.19**。 关系 (4.21) 对 $K = G_i$成立，且我们可以取 $\delta_1 = \delta_2 =: \upsilon_i$。

断言 *4.19*的证明。 第一部分与断言 4.13的证明类似；对于第二部分，我们沿用断言4.17 以及 [ CIOS21，定理 1.3 步骤 6]。由（4.1），

$$\Delta_0(u_g \otimes 1) = U\psi(z \otimes 1)(u_{\delta_1(g)} \otimes \rho(g) \otimes u_{\delta_2(g)} \otimes 1)\psi(z^* \otimes 1)U^*.$$

由于 $\zeta \circ \Delta_0 = \Delta_0$，其中 $\zeta$是翻转映射，令 $V = \zeta(\psi(z^* \otimes 1)U^*)U\psi(z \otimes 1)$，我们得到

$$V(u_{\delta_1(g)} \otimes \rho(g) \otimes u_{\delta_2(g)} \otimes 1) = (u_{\delta_2(g)} \otimes 1 \otimes u_{\delta_1(g)} \otimes \rho(g))V, \text{ for all } g \in G_i.$$

根据命题 4.4，我们得到 $V = cu_{(h,\ l)}$ 对于某个酉元 $c \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 和某个 $(h,\ l) \in G \times G$。这表明 $\mathrm{Ad}(h) \circ \delta_1 = \delta_2 =: \upsilon_i$。将 $z$ 替换为 $z(u_h \otimes 1 \otimes 1)$，得到 $\Delta(u_g) = z(u_{\upsilon_i(g)} \otimes u_{\upsilon_i(g)} \otimes \rho(g))z^*$，对每个 $g \in G_i$都成立。■

综上所述，前述断言与关系（4.21）蕴含存在酉元 $z_i \in \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$、单同态 $\delta_i = (\upsilon_i,\ \upsilon_i)$： $G_i \to G_{j_i} \times G_{k_i}$ 以及酉表示 $\rho_i$： $G_i \to \mathscr{U}(\mathbb{C}^n)$ 使得

$$\Delta(u_g) = z_i(u_{\delta_i(g)} \otimes \rho_i(g))z_i^*, \text{ for all } g \in G_i.$$

到目前为止，我们只处理了 $i$。正如在断言 4.15中那样，我们证明前述等式可以延拓到整个 $\mathrm{L}(G)$。

**断言 4.20.** 存在 $g \in G \times G$ 以及一个酉元 $c \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，使得 $z_2^* z_1 = u_g \otimes c$。

命题的证明 *4.20*。 注意，对于每个 $g \in C \leqslant G_1 \cap G_2$，我们都有 $z_1(u_{\delta_1(g)} \otimes \rho_1(g))z_1^* = \Delta(u_g) = z_2(u_{\delta_2(g)} \otimes \rho_2(g))z_2^*$，因此，若令 $z = z_2^* z_1$，则进一步有：对于所有 $g \in C$， $z(u_{\delta_1(g)} \otimes \rho_1(g)) = (u_{\delta_2(g)} \otimes \rho_2(g))z^*$ 。由命题 4.15 的证明可知，每个有限指数子群 $C_0 \leqslant C$ 都满足 $C_{G\times G}(\delta_1(C_0)) = \{1\}$。利用命题4.4 ，可以找到一个酉元$c \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 和 $(h,\ l) \in G \times G$，使得 $z = u_{(h,\ l)} \otimes c$。■

经过对 $\delta_2$ 施以内群 $G\times G$ 的内群同态共轭，并对 $\rho_2$ 施以$\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$中的一个酉元共轭后，我们得到一个群、一个酉元 $z\in\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$、一个单同态$\gamma=(\gamma_1,\ \gamma_2)\colon G\to G\times G$，以及一个酉表示 $\rho\colon G\to\mathscr{U}(\mathbb{C}^n)$，使得

$$\Delta(u_g)=z(u_{\gamma(g)}\otimes\rho(g))z^*,\ \text{for all}\ g\in G. \tag{4.22}$$

与断言 4.19中一样，并利用 $(\Delta_0\otimes\mathrm{id})\circ\Delta_0=(\mathrm{id}\otimes\Delta_0)\circ\Delta_0$，我们得到：将$z$ 扰动为新的酉元，并将 $\rho$ 扰动为新的表示后，可以证明 $\gamma(g)=(g,\ g)$。

最后，我们沿用 [CIOS21, 定理 1.3] 证明的最后部分来证明 $n=1$。令 $\mathscr{N}$为由$\{u_{(g,g)}\otimes x$ 生成的冯·诺依曼代数：$g\in G, x\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})\}$。注意到 $\Delta(\mathrm{L}(G))\subset\mathscr{N}\subset\Delta(\mathrm{L}(G))\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。由引理 4.2(c), $\mathscr{N}=\Delta(\mathrm{L}(G))$，因此 $1\otimes1\otimes\mathbb{M}_n(\mathbb{C})\subset\Delta(\mathrm{L}(G))$。由 (4.22)，$n=1$。此外，对所有 $g\in G$，都有 $\rho(g)\in\mathbb{T}$ 和 $\Delta(u_g)=\rho(g)zu_{(g,g)}z^*$。根据 [IPV10, 定理 3.4]，存在酉元 $w\in\mathrm{L}(H)$、特征 $\mu\colon G\to\mathbb{T}$ 以及群同构 $\rho\colon G\to H$，满足$u_g=\mu(g)wv_{\rho(g)}w^*$。这就得到了情形 (b) 下的结论。 □

# 5 乘积与嵌入刚性

现在我们给出其余主要结果的证明，包括定理1.4至推论1.8。前两个结果涉及乘积刚性，我们首先回顾一个根据冯·诺依曼代数的同构重构群的判据（定理 5.2）。

## 5.1 在 W* 等价下重构群的直积分解

本小节的主要目的是提出一个判据（定理 5.2），用于根据群的 W*-等价重构其直积结构。该判据将在第 5.2 节中发挥关键作用，帮助我们推导主要结果。该结果隐含地见于以下文献的相关证明中：[CdSS15，定理 4。3], [CdSS17，定理 6。1], 和 [CU18，定理 3。6]。因此，我们不逐字重述这些论证，而是简要概述该判据如何由这些证明中的相关部分得出。我们建议读者查阅所引文献，了解完整细节。

**引理 5.1**。设 $G$ 是一个可数群，$(G)$是相应的冯·诺依曼代数。假设存在非零投影 $p\in(G)$，使得压缩 $p(G)p$ 是一个因子。那么，*FC*-根可以写为 $G^{\mathrm{fc}}=\bigcup_n F_n$，其中 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $G$ 的一个递增（可能稳定的）有限正规子群塔，并满足 $[G:\ C_G(F_n)]<\infty$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$均成立。

证明。令 $z\in\mathrm{L}(G)$ 为 $p$ 的中心支撑，则 $\mathrm{L}(G)z$ 也是一个因子。回顾 $G^{fc}=\{g\in G:\ |\{hgh^{-1}:\ h\in G\}|$是有限的$\}$。令 $\{\mathcal{O}_n:\ n\in\mathbb{N}\}$ 为 $G$的所有有限共轭轨道的一个枚举，并考虑由 $F_n=\langle\mathcal{O}_1、\ldots\ldots、\mathcal{O}_n\rangle\lhd G$生成的正规子群。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，注意到 $F_n\leqslant F_{n+1}$，$[G:\ C_G(F_n)]<\infty$，并且 $G^{fc}=\bigcup_n F_n$。要得到结论，只需证明每个 $F_n$ 都是有限的。

对于每个 $n\in\mathbb{N}$，记 $F_n$ 的中心为 $Z_n=Z(F_n)$。由于我们有 $[F_n:\ Z_n]\leqslant[G:\ C_G(F_n)]<\infty$，因此只需证明每个 $Z_n$ 都是有限的。为此，令 $C_n=C_G(F_n)$ 并

考虑 $D_n = \{g \in G : u_g z \in \mathrm{L}(C_n)z\}$。注意， $D_n$ 构成 $C_n \leqslant D_n \leqslant G$的一个中间子群。由于 $[G : C_n] < \infty$，存在一个有限集 $K \subset G$，其元素是 $D_n \leqslant G$的左陪集代表。考虑映射 $\mathbb{E}_n : (\mathrm{L}(C_n)z)' \cap \mathrm{L}(G)z \to (\mathrm{L}(G)z)' \cap \mathrm{L}(G)z = \mathbb{C}z$，定义如下

$$\mathbb{E}_n(x) = [G : D_n]^{-1} \sum_{k \in K} u_k x u_{k^{-1}} \text{ for all } x \in (\mathrm{L}(C_n)z)' \cap \mathrm{L}(G)z. \tag{5.1}$$

很容易验证 $\mathbb{E}_n$ 是一个保迹的条件期望 $\tau_z$。此外，利用（5.1），可知对于每个正算子 $x \in (\mathrm{L}(C_n)z)' \cap \mathrm{L}(G)z$，都有

$$\|\mathbb{E}_n(x)\|_{2,z}^2 = \tau_z(\mathbb{E}_n(x)\mathbb{E}_n(x)) = \tau_z(\mathbb{E}_n(x)x) = [G : D_n]^{-1} \sum_k \tau_z(u_k x u_{k^{-1}} x) \geqslant [G : D_n]^{-1} \tau_z(x^2).$$

由于 $\|\mathbb{E}_n(x)\|_{2,z}^2 = \|\tau_z(x)z\|_{2,z}^2 = \frac{|\tau(x)|^2}{\tau(z)^2}$，由前一个等式可得 $|\tau(x)|^2 \geqslant \tau(z)[G:D_n]^{-1}\tau(x^2)$，对每个 $x \geqslant 0$ 均成立。令 $x$ 为 $(\mathrm{L}(C_n)z)' \cap \mathrm{L}(G)z$ 中的一个非零投影，则有$\tau(x) \geqslant [G : D_n]^{-1}\tau(z) > 0$。这意味着 $(\mathrm{L}(C_n)z)' \cap \mathrm{L}(G)z$ 必须是有限维的；又由于 $\mathrm{L}(Z_n)z \subset (\mathrm{L}(C_n)z)' \cap \mathrm{L}(G)z$，因此 $\mathrm{L}(Z_n)z$ 也是有限维的。根据 [CdSS15，命题 2.6]， $Z_n$ 是有限的。 □

**定理 5.2.** 设 $G_1$、$G_2$ 为非 *amenable* 的 *ICC* 群，并设 $G = G_1 \times G_2$。假设 $H$是任意群，使得 $\mathcal{M} = \mathrm{L}(G)^t = \mathrm{L}(H)$，其中 $t > 0$为某个量。此外，用$\Delta : \mathcal{M} \to \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}$ 表示由 $\Delta(v_h) = v_h \otimes v_h$给出的 $*$-嵌入。假设下列条件成立：

*(1)* $\mathrm{L}(G_2)$ 是实心冯诺依曼代数；

*(2)* $\Delta(\mathrm{L}(G_1)^t) \prec^s_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}} \mathrm{L}(G_1)^t \bar{\otimes} \mathrm{L}(G_1)^t$；

*(3)* 不存在有限子群 $F_n < H$ 的无限严格递增塔，使得交集 $\cap_n C_H(F_n)$ 是非平均的。

则 $H$ 具有直积分解 $H = H_1 \times H_2$，并且存在标量 $s > 0$ 和酉元$u \in \mathcal{M}$，使得$\mathrm{L}(G_1)^s = u\mathrm{L}(H_1)u^*$ 且$\mathrm{L}(G_2)^{t/s} = u\mathrm{L}(H_2)u^*$。

证明。由假设 (2) 以及 [DHI16, 定理 4.1]（另见 [Io11]），存在一个非平均群 $\Lambda_1 \leqslant H$，其中心化子 $C_H(\Lambda_1)$ 也是非平均的，并且满足 $\mathrm{L}(G_1)^t \cong^{\mathrm{com}}_{\mathcal{M}} \mathrm{L}(\Lambda_1)$ （见 [CdSS17, 定义 4.1]）。此外，根据 [CU18, 定理 3.6] 的第一部分（截至方程 (3.16)），存在一个投影 $q \in \mathrm{L}(\Lambda_1)$ 和 $r \in \mathrm{L}(\Lambda_1)' \cap \mathcal{M}$，使得 $q(\mathrm{L}(\Lambda_1) \vee (\mathrm{L}(\Lambda_1)' \cap \mathcal{M}))qr \subseteq qr\mathcal{M}qr$ 是有限指数 $\mathrm{II}_1$ 因子的包含。特别地， $q\mathrm{L}(\Lambda_1)qr$ 和 $r(\mathrm{L}(\Lambda_1)' \cap \mathcal{M})rq$ 是彼此对易的 $\mathrm{II}_1$ 因子。

记 $\Omega = \{\lambda \in H : |\mathscr{O}_{\Lambda_1}(\lambda)| < \infty\} = vC_H(\Lambda_1)$, [CdSS15，断言 4.7] 表明 $[H : \Omega\Lambda_1] < 8$。由于 $q\mathrm{L}(\Lambda_1)qr$ 是 $\mathrm{II}_1$ 因子，引理 5.1、 $C_H(\Lambda_1)$ 是非平均的这一事实以及关于 $H$ 的假设 (3)表明 $\Lambda_1 \cap \Omega$ 是有限的。现在，CdSS15 中 [定理 3.6 的证明（断言 4.9–4.12] ，另见 CdSS17 中 [定理 4.4]）给出了一个有限指数的非 amenable 的 icc 群子群 $\Theta \subseteq \Lambda_1$，使得 $[\Theta, \Omega] = \{1\}$ 且 $[H : \Theta\Omega] < \infty$。此外，$\mathrm{L}(G_1)^t \cong^{\mathrm{com}}_{\mathcal{M}} \mathrm{L}(\Theta)$ 如同 $\mathrm{L}(G_1)^t \cong^{\mathrm{com}}_{\mathcal{M}} \mathrm{L}(\Lambda_1)$，并且$\Theta \leqslant \Lambda_1$ 具有有限指数。

最后，结合上述结果与 [CdSS17，定理 4.6]，，我们得到一个非 amenable 的 icc 群 $\Omega_1 \leqslant C_H(\Theta)$，满足 $\mathrm{L}(G_2) \cong^{\mathrm{com}}_{\mathcal{M}} \mathrm{L}(\Omega_1)$ 且 $[H : \Theta\Omega_1] < \infty$。其余结论由 [CdSS17，定理 4.7]得出。□

**命题 5.3**。设 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ 是 $n$ 个非 *amenable* 的 *icc* 群的直积。假设对于 $2 \leqslant i \leqslant n$，群 $G_i$ 是合并自由积 $G_i = \Gamma_{i,1} *_{\Sigma_i} \Gamma_{i,2}$ 其中 $\Gamma_{i,k}$ 是非 *amenable* 的，且 $\Sigma_i$ 是 $\Gamma_{i,k}$的几乎自正规且无限指数子群，对于 $k = 1, 2$。令 $H$ 为满足 $\mathcal{M} = \mathrm{L}(G)^t = \mathrm{L}(H)$的任意群，其中某个 $t > 0$成立。此外，记 $\Delta : \mathcal{M} \to \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}$ 为由 $\Delta(v_h) = v_h \otimes v_h$给出的 $*$-嵌入。假设以下条件成立：

*(1)* $\mathrm{L}(G_1)$ 是一个实心冯·诺依曼代数，并且

*(2)* $\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{1}})^t) \prec^s_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}} \mathrm{L}(G_{\hat{1}})^t \bar{\otimes} \mathrm{L}(G_{\hat{1}})^t$.

那么 $H$ 具有直积分解 $H = H_1 \times H_2$，并且存在一个标量 $s > 0$ 和一个酉元$u \in \mathcal{M}$，使得 $\mathrm{L}(G_1)^s = u\mathrm{L}(H_1)u^*$ 且 $\mathrm{L}(G_{\hat{1}})^{t/s} = u\mathrm{L}(H_2)u^*$。

证明。根据前述定理即可得到证明，只需说明假设 (3) 在我们的情形下满足。5.2。

由前面的证明，我们得到一个非平均群 $\Lambda_1 \leqslant H$，其中心化子$C_H(\Lambda_1)$也是非平均的，且 $\mathrm{L}(G_{\hat{1}})^t \cong^{\mathrm{com}}_{\mathcal{M}} \mathrm{L}(\Lambda_1)$。定义 $\Omega = vC_H(\Lambda_1)$。注意，前述定理中的假设 (3) 仅用于证明 $\Lambda_1 \cap \Omega$ 是有限的。我们沿用 [CdSS15，命题 4.8]，仍可得到 $|\Lambda_1 \cap \Omega| < \infty$。令 $\{\mathcal{O}_i : i \in \mathbb{N}\}$ 为 $\Lambda_1$ 在 $H$ 上的共轭作用的所有有限轨道的（可数）枚举，并注意 $\Omega = \bigcup_i \mathcal{O}_i$。定义 $\mathcal{O}'_i = \mathcal{O}_i \cap \Lambda_1$，并注意 $\Lambda_1 \cap \Omega = \bigcup_i \mathcal{O}'_i$。对于每个 $k$，令 $R_k = \langle \bigcup_{i=1}^k \mathcal{O}'_i \rangle$，并注意它构成 $\Lambda_1$ 的正规子群的递增序列，且 $\bigcup_k R_k = \Lambda_1 \cap \Omega$ 和 $[\Lambda_1 : C_{\Lambda_1}(R_k)] < \infty$。由于 $R_k \cap C_{\Lambda_1}(R_k)$ 是阿贝尔的，且 $[\Lambda_1 : C_{\Lambda_1}(R_k)] < \infty$，可知 $R_k$ 几乎阿贝尔；因此，$\Lambda_1 \cap \Omega$ 是 $\Lambda_1$ 的正规可和子群。

根据 [CdSS15 的命题 4.8]，，令 $z = z(pr)$ 为 $qr$ 在 $\mathrm{L}(\Lambda_1)$中的中心支撑，我们得到 $\mathrm{L}(G_{\hat{1}})^s \subset \mathrm{L}(\Lambda_1)z \subset \mathrm{L}(G_{\hat{1}})^\mu$是非平均 $\mathrm{II}_1$因子的有限指数包含，其中某些 $s, \mu > 0$成立。此外，我们可以写作 $\mathrm{L}(G_{\hat{1}})^\mu = (\mathrm{L}(G_{\hat{1}})\bar{\otimes}\mathbb{M}_k(\mathbb{C}))^{t_1/k}$，其中 $t_1 = \tau(qr)\mu$。取足够大的 $k$，并记为 $r = t_1/k \in (0, 1)$。固定 $2 \leqslant l \leqslant n$。根据 [Va13 定理 A]，，由于 $\mathrm{L}(G_{\hat{1}})^t \bar{\otimes} \mathbb{M}_k(\mathbb{C}) = (\mathrm{L}^{(G_{\hat{1}}, l)^t} \bar{\otimes} \mathrm{L}(\Gamma_{l,1}) \bar{\otimes} \mathbb{M}_k(\mathbb{C})) *_{\mathrm{L}(G_{\hat{1}}, l)^t \bar{\otimes} \mathrm{L}(\Sigma_l) \bar{\otimes} \mathbb{M}_k(\mathbb{C})} (\mathrm{L}^{(G_{\hat{1}}, l)^t} \bar{\otimes} \mathrm{L}(\Gamma_{l,2}) \bar{\otimes} \mathbb{M}_k(\mathbb{C}))$，$\mathrm{L}(\Lambda_1 \cap \Omega)$是可和的，且 $\mathrm{L}(\Lambda_1)z$ 是一个因子，我们得到以下二者之一：

(i) $\mathrm{L}(\Lambda_1 \cap \Omega)z \prec^s \mathrm{L}(G_{\widehat{1,l}})^t \bar{\otimes} \mathrm{L}(\Sigma_l) \bar{\otimes} \mathbb{M}_k(\mathbb{C})$,

(ii) 存在 $j = 1, 2$，使得 $\mathrm{L}(\Lambda_1)z \prec^s \mathrm{L}^{(G_{\widehat{1}, l})^t} \bar{\otimes} \mathrm{L}(\Gamma_{l,j}) \bar{\otimes} \mathbb{M}_k(\mathbb{C})$，或者

(iii) $\mathrm{L}(\Lambda_1)z$ 相对于 $\mathrm{L}^{(G_{\widehat{1}, l})^t} \bar{\otimes} \mathrm{L}(\Sigma_l) \bar{\otimes} \mathbb{M}_k(\mathbb{C})$ 是相对 amenable 的。

由于 $\mathrm{L}(G_{\hat{1}})^s$ 在 $\mathrm{L}(\Lambda_1)z$中具有有限指数，(ii) 给出 $\mathrm{L}(G_{\hat{1}})^s \prec^s \mathrm{L}^{(G_{\widehat{1}, l})^t} \bar{\otimes} \mathrm{L}(\Gamma_{l,j})$，这意味着 $\Gamma_{l,j} \leqslant G_l$是一个有限指数子群，产生矛盾。同样地，(iii) 给出 $\mathrm{L}(G_{\hat{1}})^s$ 相对

于 $\mathrm{L}^{(G_{\widehat{1}},l)^t}\bar{\otimes}\mathrm{L}(\Sigma_l)\bar{\otimes}\mathbb{M}_k(\mathbb{C})$是可和的。特别地，这意味着 $G_l$ 相对于 $\Sigma_l$是可和的，产生矛盾。因此，必有 $\mathrm{L}(\Lambda_1\cap\Omega)z \prec^s \mathrm{L}^{(G_{\widehat{1}},l)^t}\bar{\otimes}\mathrm{L}(\Sigma_l)\bar{\otimes}\mathbb{M}_k(\mathbb{C})$。如果 $\mathrm{L}(\Lambda_1\cap\Omega)z \not\prec \mathrm{L}^{(G_{\widehat{1}},l)^t}\bar{\otimes}\mathbb{M}_k(\mathbb{C})$，那么 $\Sigma_l$ 几乎自正规、$\Lambda_1\cap\Omega$ 在 $\Lambda_1$中正规、$\mathrm{L}(\Lambda_1)\cong^{\mathrm{cong}}_{\mathcal{M}}\mathrm{L}(G_{\hat{1}})^t$且 [AMACK25, Theorem 4.10] 将推出 $\mathrm{L}(G_{\hat{1}})^t \prec \mathrm{L}^{(G_{\widehat{1}},l)^t}\bar{\otimes}\mathrm{L}(\Sigma_l)\bar{\otimes}\mathbb{M}_k(\mathbb{C})$，再次产生矛盾。因此，我们必须有 $\mathrm{L}(\Lambda_1\cap\Omega)z \prec^s \mathrm{L}^{(G_{\widehat{1}},l)^t}\bar{\otimes}\mathbb{M}_k(\mathbb{C})$。由于 $l$ 是任意的，我们得到对所有 $2\leqslant l\leqslant n$都有 $\mathrm{L}(\Lambda_1\cap\Omega)z \prec^s \mathrm{L}^{(G_{\widehat{1}},l)^t}\bar{\otimes}\mathbb{M}_k(\mathbb{C})$，因此 [DHI16, Lemma 2.8(2)] 意味着 $\mathrm{L}(\Lambda_1\cap\Omega)z \prec \mathbb{M}_k(\mathbb{C})$。利用 [CdSS15, Proposition 2.6], , 我们得到 $\Lambda_1\cap\Omega$ 是有限的。

□

## 5.2 直积群的 W* 和 C* 超刚性

在本小节中，我们将证明定理 1.4 和 1.5。我们首先证明下面的定理，它为这两个结果提供了主要的关键要素。

**定理 5.4**。对于每个 $i\in\mathbb{N}$，令 $G_i=\Lambda_{k,\,1}*_{\Sigma_i}\Lambda_{k,\,2}$ 为一个可数合并自由积群，其中 $[\Lambda_{k,\,i}:\Sigma_i]=\infty$ 且 $\Sigma_i<\Lambda_{k,\,i}$ 对于所有 $1\leqslant i\leqslant 2$及所有 $k$都是几乎自正规子群。令 $G=\oplus_{i\in\mathbb{N}}G_i$。假设 $H$ 是一个任意群，使得 $\mathcal{M}=\mathrm{L}(G)^t=\mathrm{L}(H)$，其中某个 $t>0$。此外，记 $\Delta:\ \mathcal{M}\to\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}$ 为由 $\Delta(v_h)=v_h\otimes v_h$给出的 $*$-嵌入。那么对于任意 $j\in\mathbb{N}$，我们有

$$\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t)\prec^s_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}}\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t.$$

上文中，对于每个 $s\in\mathbb{N}$，我们用 $G_{\hat{s}}=\{(g_i)_i\in G|g_s=1\}$ 表示。

证明。首先，对于 $\Sigma_i$ 可和的情形，我们给出一个更简短的证明。注意，$G_i$ 存在一个映入弱-$\ell^2$ 表示的数组，该数组相对于$\{\Lambda_i,1,\Lambda_{i,2}\}$是适当的。仿照 [AMCOS25, 引理 8.3], , 群 $G\times G$ 存在一个映入其某个弱-$\ell^2$表示的数组，该数组相对于子群族 $\{G\times(G_{\hat{k}}\times\Lambda_{k,s}),(G_{\hat{j}}\times\Lambda_{j,t})\times G\mid s,t=1,2;\ j,k\in\mathbb{N}\}$ 是适当的。特别地，$G\times G$ 相对于该子群族是双精确的。固定 $j\in\mathbb{N}$。由于 $\Delta(\mathrm{L}(G_j)^t)$ 没有可 amenable 直和项，[BO08, 定理 15.1.5] 推出存在 $k\in\mathbb{N}$ 和 $1\leqslant s\leqslant 2$，使得 $\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t)\prec\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t\bar{\otimes}\mathrm{L}(\Lambda_{k,s})$。

现在反设 $\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t)\not\prec\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{k}})$。由于 $\Sigma_k$ 在 $G_k$ 中几乎自正规（引理 2.6），我们也有 $\Lambda_{k,s}$ 在 $G_k$ 中自正规。与 [Pop03, 定理 3.1]（另见 [AMACK25, 定理 4.10]）中相同的论证表明，正规化子满足 $\Delta(\mathcal{M})\subseteq\mathcal{N}_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}}(\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t))''\prec\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t\bar{\otimes}\mathrm{L}(\Lambda_{k,s})$。利用 [IPV10, 命题 7.2], , 进一步可得 $\mathcal{M}\prec_{\mathcal{M}}\mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t\bar{\otimes}\mathrm{L}(\Lambda_{k,s})$，因此 $[G:G_{\hat{k}}\times\Lambda_{k,s}]<\infty$，这就产生了矛盾。因此，必有 $\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t)\prec\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t$。由于正规化子满足 $\mathcal{N}_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}}(\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t))'\cap(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M})\subseteq\Delta(\mathcal{M})'\cap(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M})$，且根据 [IPV10, 命题 7.2], , 后一个相对交换子由 [DHI16, 引理 2.4] 可知是平凡的，我们得到

$$\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t)\prec^s_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}}\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t. \tag{5.2}$$

注意，若 $\zeta$ 表示 $\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}$上的翻转自同构，则有 $\zeta\circ\Delta=\Delta$。结合前面的包含关系，可得 $\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t)\prec^s_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}}\mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t\bar{\otimes}\mathcal{M}$，再利用 [DHI16] 可得

$\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t) \prec^s_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}} \mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t$。采用与 [Dr20，定理 43], 中相同的论证，我们可以选取 $k = j$。

接下来，我们基于不同的论证给出一般情形的证明。固定 $j,\ k \in \mathbb{N}$。将 $\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}$ 写成合并自由积 $\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M} = (\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}_{\hat{k}}\bar{\otimes}\mathrm{L}(\Lambda_{k,\ 1})) *_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}_{\hat{k}}\bar{\otimes}\mathrm{L}(\Sigma_k)}(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}_{\hat{k}}\bar{\otimes}\mathrm{L}(\Lambda_{k,\ 2}))$，其中 $\mathcal{M}_{\hat{k}} = \mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t$。注意 $\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t)$，$\Delta(\mathrm{L}(G_j)^t)$ 是相互交换的不可和冯·诺伊曼子因子，属于 $\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}$。由定理 3.4 可得下列情形之一必成立：

(1) $\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t) \prec \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t\bar{\otimes}\mathrm{L}(\Sigma_k)$,

(2) $\Delta(\mathrm{L}(G_j)) \prec \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t\bar{\otimes}\mathrm{L}(\Sigma_k)$,

(3) $\Delta(\mathcal{M}) = \Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t) \vee \Delta(\mathrm{L}(G_j)) \prec \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t\bar{\otimes}\mathrm{L}(\Lambda_{k,s})$, for some $1 \leqslant s \leqslant 2$, or

(4) $\Delta(\mathcal{M}) = \Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t) \vee \Delta(\mathrm{L}(G_j))$ is amenable relative to $\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t\bar{\otimes}\mathrm{L}(\Sigma_k)$ inside $\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}$.

若 (3) 成立，则 [IPV10，命题 7.2] 蕴含 $[G :\ G_{\hat{k}} \times \Lambda_{k,\ s}] < \infty$ 从而 $[G_k :\ \Lambda_{k,\ s}] < \infty$，矛盾。若 (4) 成立，则 [BV13，定理 4.1(b)] 蕴含 $\mathrm{L}(G)$ 相对 amenable 于 $\mathrm{L}(G_{\hat{k}} \times \Sigma_k)$。因此，$G_k$ 相对 amenable 于 $\Sigma_k$，在 $G_k$ 内，矛盾。

假设 (1) 成立，并反设 $\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t) \not\prec \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t$。由于 $\Sigma_k$ 几乎自正规，采用 [Pop03，定理 3.1] 中的相同论证（另见 [AMACK25，定理 4.10]）可得 $\Delta(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}}(\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t))'' \prec \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t\bar{\otimes}\mathrm{L}(\Sigma_k)$。利用 [IPV10，命题 7.2]，我们得到 $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{M}} \mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t\bar{\otimes}\mathrm{L}(\Sigma_k)$，因此 $[G :\ G_{\hat{k}} \times \Sigma_k] < \infty$，这就产生了矛盾。总之，由 (1) 可得 $\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t) \prec \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t$。由于正规化子满足 $\mathcal{N}_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}}(\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t))' \cap (\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}) \subseteq \Delta(\mathcal{M})' \cap (\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M})$，且根据 [IPV10，命题 7.2],，最后一个相对交换子是平凡的，再利用 [DHI16，引理 2.4]，我们进一步得到

$$\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t) \prec^s_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}} \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t.$$

注意，如果 $\zeta$ 是 $\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}$ 上的翻转自同构，那么我们有 $\zeta \circ \Delta = \Delta$。结合前一个等式可得 $\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t) \prec^s_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}} \mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t\bar{\otimes}\mathcal{M}$。因此，如所需，$\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t) \prec^s_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}} \mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t$。

以类似的方式可以证明，（2）同样给出

$$\Delta(\mathrm{L}(G_j)) \prec^s_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}} \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t. \tag{5.3}$$

假设对于每个 $k \in \mathbb{N}$，(5.3) 都成立。由 [DHI16，引理 2。6]，$\Delta(\mathrm{L}(G_j)) \prec^s_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}} \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{F}})^t$，对于每个有限集 $F \subset \mathbb{N}$。由 [CU18，断言 3。4], 可知 $\Delta(\mathrm{L}(G_j))$ 相对于$\mathcal{M}\bar{\otimes}1$是可和的；再由 [IPV10，定理 7.2(4)] $\mathrm{L}(G_j)$ 是可和的，矛盾。

因此，我们已经证明，对于每个 $j \in \mathbb{N}$ 都存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{j}})^t) \prec_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}} \mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{k}})^t$ 成立。与之前类似，[Dr20，定理 43] 使我们能够选取 $k = j$。 □

**定理 5.5**。对每个 $i \in \mathbb{N}$，设 $G_i = \Lambda_{i,1} *_{\Sigma_i} \Lambda_{i,2}$ 为可数合并自由积，其中 $[\Lambda_{i,k} :\ \Sigma_k] = \infty$，且 $\Sigma_i < \Lambda_{i,k}$ 对所有 $1 \leqslant i \leqslant 2$ 都是几乎自规范可和子群。

假设对于任意 $i\in\mathbb{N}, 1\leqslant j\leqslant 2$，$\mathrm{L}(\Lambda_{i,j})$ 都是 *solid*。设 $G=\oplus_{i\in\mathbb{N}}G_i$。假设 $H$ 是无挠群，或者更一般地，是一个满足以下条件的群：存在 $C\in\mathbb{N}$，使得任意有限子群 $K<H$ 都满足 $|K|\leqslant C$。假设对于某个 $t>0$，$\mathcal{M}=\mathrm{L}(G)^t=\mathrm{L}(H)$。

那么，$H$ 存在直和分解 $H=(\oplus_{i\in\mathbb{N}}H_i)\times A$，其中 $H_i$ 对所有 $i\in\mathbb{N}$ 都是无限共轭类群，而 $A$ 是 *ICC*可和群。此外，存在一个序列 $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}_+^*$，使得对每个 $n\in\mathbb{N}$，都可以找到一个酉元 $u_n\in\mathrm{L}(H)$，满足

$$u_n\mathrm{L}(G_j)^{t_j}u_n^*=\mathrm{L}(H_j)\quad \textit{for all } j\leqslant n;\ \textit{and}$$
$$u_n\mathrm{L}(\oplus_{j>n}G_j)^{t/(t_1\cdots t_{n+1})}u_n^*=\mathrm{L}((\oplus_{j>n}H_j)\times A).$$

证明。令 $\Delta:\mathrm{L}(H)\to\mathrm{L}(H)\bar{\otimes}\mathrm{L}(H)$ 为由 $\Delta(v_h)=v_h\otimes v_h$ 给出的 $*$-同态，其中 $h\in H$，并将其视为映射 $\Delta:\mathrm{L}(G)^t\to\mathrm{L}(G)^t\bar{\otimes}\mathrm{L}(G)^t$。考虑 $\mathrm{L}(G)^t=\mathrm{L}(G_{\hat{1}})^t\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_1)$，其中 $\mathrm{L}(G_1)$ 是 solid。由定理 5.4，$\Delta(\mathrm{L}(G_{\hat{i}})^t)\prec_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}}\mathrm{L}(G_{\hat{i}})^t\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{i}})$；再由定理 5.2，可得彼此对易的非平均无限共轭类子群 $H_1$、$K_1\leqslant H$、$t_1>0$，以及一个酉元 $u_1\in\mathcal{M}$，使得 $u_1\mathrm{L}(G_1)^{t_1}u_1^*=\mathrm{L}(H_1)$ 且 $u_1\mathrm{L}(G_{\hat{1}})^{t/t_1}u_1^*=\mathrm{L}(K_1)$。在关于群 $G_{\hat{1}}$ 的最后一个关系中再次应用定理 5.2，可得分解 $K_1=H_2\oplus K_2$，$u_2\in\mathscr{U}(u_1\mathrm{L}(G^{t/t_1}{}_{\hat{1}})u_1^*)$ 和 $t_2>0$，使得 $u_2\mathrm{L}(G_2)^{t_2}u_2^*=\mathrm{L}(H_2)$ 且 $u_2\mathrm{L}(G_{\widehat{\{1,2\}}})^{t/(t_1t_2)}u_2^*=\mathrm{L}(K_2)$。归纳下去可得 $K_{n-1}=H_n\oplus K_n$、一个酉元 $u_n\in\mathscr{U}(u_{n-1}\mathrm{L}(G_{\mathbb{N}\setminus 1,\cdots,n-1})^{t/(t_1\cdots t_{n-1})}u_{n-1}^*)$ 和 $t_n>0$，使得 $u_n\mathrm{L}(G_n)^{t_n}u_n^*=\mathrm{L}(H_n)$ 且 $u_n\mathrm{L}(G_{\mathbb{N}\setminus 1,\cdots,n})^{t/(t_1\cdots t_n)}u_n^*=\mathrm{L}(K_n)$。因此，$K_{n+1}\leqslant K_n$ 和 $H=\oplus_nH_n\oplus A$，其中 $A=\cap_nK_n$。

令 $v_n=u_1u_2\cdots u_n$ 可知 $v_n\mathrm{L}(G_i)^{t_i}v_n^*=\mathrm{L}(H_i)$ 对所有 $1\leqslant i\leqslant n$，且 $v_n\mathrm{L}(G_{\mathbb{N}\setminus 1,\cdots,n})^{t/(t_1\cdots t_n)}v_n^*=\mathrm{L}((\oplus_{i\geqslant n+1}H_i)\times A)$。根据 [CU18，命题 2。7]，$A$ 是无限共轭类且可和的。 □

定理 1.4 的证明。令 $\Delta:\mathrm{L}(H)\to\mathrm{L}(H)\bar{\otimes}\mathrm{L}(H)$ 为由 $\Delta(v_h)=v_h\otimes v_h$ 给出的 $*$-同态，其中 $h\in H$，并将其视为映射 $\Delta:\mathrm{L}(G)^t\to\mathrm{L}(G)^t\bar{\otimes}\mathrm{L}(G)^t$，其中 $0<t\leqslant 1$。注意，$\mathrm{L}(G)^t=\mathrm{L}(G_{\hat{1}})^t\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_1)$，其中 $\mathrm{L}(G_1)$ 是 solid。根据定理 5.4，$\Delta(G_{\hat{i}})^t\prec_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}}\mathrm{L}(G_{\hat{i}})^t\bar{\otimes}\mathrm{L}(G_{\hat{i}})^t$，由命题 5.3 可得彼此对易的非平均、无限共轭类子群$H_1$、$K_1\leqslant H$、$t_1>0$ 以及一个酉元 $u_1\in\mathcal{M}$，使得 $u_1\mathrm{L}(G_1)^{t_1}u_1^*=\mathrm{L}(H_1)$ 且 $u_1\mathrm{L}(G_2\oplus\cdots\oplus G_k)^{t/t_1}u_1^*=\mathrm{L}(K_1)$。考察 $u_1\mathrm{L}(G_2\oplus\cdots\oplus G_n)^{t/t_1}u_1^*=\mathrm{L}(K_1)$，并用归纳法可得 $K_{n-2}=H_{n-1}\oplus K_{n-1}$、一个酉元 $u_{n-1}\in\mathscr{U}(u_{n-2}\mathrm{L}(G_{n-2})^{t/(t_1\cdots t_{n-2})}u_{n-2}^*)$ 以及 $t_{n-1}>0$，使得 $u_{n-1}\mathrm{L}(G_{n-1})^{t_{n-1}}u_{n-1}^*=\mathrm{L}(H_{n-1})$ 且 $u_{n-1}\mathrm{L}(G_n)^{t/(t_1\cdots t_{n-1})}u_{n-1}^*=\mathrm{L}(K_{n-1})$。记$H_n=K_{n-1}$和 $t_n=t/(t_1\cdots t_{n-1})$。由于 $\mathrm{L}(\oplus H_i)=\mathrm{L}(H)$，因此 $H=\oplus_{i=1}^nH_i$。

令 $w=u_1u_2\cdots u_{n-1}$，我们看到，对于所有 $1\leqslant i\leqslant n$，$w\mathrm{L}(G_i)^{t_i}w^*=\mathrm{L}(H_i)$，且 $t_1\cdots t_n=t\leqslant 1$。由此可知，存在 $1\leqslant i\leqslant n$，使得 $t_i\leqslant 1$。对于这样的 $i$，$w\mathrm{L}(G_i)^{t_i}w^*=\mathrm{L}(H_i)$。由于 $G_i$ 是 W*-超刚性的，$t_i=1$ 且 $G_i\cong H_i$。因此，$t_1\cdots t_{i-1}t_{i+1}\cdots t_n=t$。继续使用归纳法，我们看到，对于每个 $i$，都有 $t_i=1$，因此 $t=1$ 且 $G_i\cong H_i$。由 $w\mathrm{L}(G_i)w^*=\mathrm{L}(H_i)$（对于 $1\leqslant i\leqslant n$）以及定理 1.3 可知，存在一个特征 $\eta_i:G_i\to\mathbb{T}$ 和一个群同构 $\delta_i:G_i\to H_i$，使得对于所有 $g\in G_i$，都有 $u_iu_gu_i^*=\eta_i(g)v_{\delta_i(g)}$。取 $\delta=\oplus_i\delta_i$ 和$\eta=\prod_i\eta_i$，我们看到 $\delta:G\to H$ 是一个群同构，满足对于所有$g\in G$，都有 $wu_gw^*=\eta(g)v_{\delta(g)}$。这表明映射 $\mathrm{L}(G)\cong\mathrm{L}(H)$ 是群型的。 □

要证明 为了将其应用于 C*-超刚性，我们需要以下初等结果。

**命题 5.6**。设 $G$ 和 $H$ 为离散可数群，使得它们的约化 $C^*$-代数 $C_r^*(G)$ 和 $C_r^*(H)$ 具有唯一迹。则任意 $*$-嵌入 $\theta\colon C_r^*(G)\to C_r^*(H)$ 都可延拓为一个 $*$-嵌入 $\theta\colon \mathrm{L}(G)\to \mathrm{L}(H)$。特别地，如果 $\theta$ 是一个 $*$-同构，那么 $\theta$ 也是如此。

证明。设 $\tau\colon C_r^*(G)\to\mathbb{C}$ 和 $\rho\colon C_r^*(H)\to\mathbb{C}$ 分别表示典范迹。由于 $C_r^*(G)$ 具有唯一迹，我们有 $\rho\circ\theta=\tau$。定义映射 $U_0\colon \ell^2G\to\ell^2H$，其中对所有 $x\in C_r^*(G)$ 都有 $U_0(x\delta_e)=\theta(x)\delta_e$。对于任意 $x,y\in C_r^*(G)$，我们计算

$$\langle U_0(x\delta_e),U_0(y\delta_e)\rangle=\langle\theta(x)\delta_e,\theta(y)\delta_e\rangle=\langle\theta(y^*x)\delta_e,\delta_e\rangle=\rho(\theta(y^*x))=\tau(y^*x)=\langle x\delta_e,y\delta_e\rangle.$$

因此，$U_0$ 通过线性延拓为等距映射 $U\colon \ell^2G\to\ell^2H$。定义 $\tilde\theta\colon \mathbb{B}(\ell^2G)\to\mathbb{B}(\ell^2H)$ by$\tilde\theta(x)=UxU^*$。由于 $U$是等距映射，$\tilde\theta$是一个 $*$-嵌入。令 $\mathcal{H}=U(\ell^2G)$，它是 $\ell^2H$的希尔伯特子空间。我们声称，对于每个 $x\in C_r^*(G)$，都有 $\tilde\theta(x)\big|_{\mathcal{H}}=\theta(x)\big|_{\mathcal{H}}$。事实上，固定 $\eta\in\mathcal{H}$，并选取一个网 $\{x_i\}\subset C_r^*(G)$，使得 $\theta(x_i)\delta_e\to\eta$。那么

$$\tilde\theta(x)\eta=UxU^*\eta=\lim_i UxU^*\theta(x_i)\delta_e=\lim_i Ux x_i\delta_e=\lim_i\theta(xx_i)\delta_e=\theta(x)\eta,$$

如所声称的那样。最后，由于 $U$ 是等距映射，网 $\{x_i\}\subset\mathbb{B}(\ell^2G)$ 在弱算子拓扑下收敛到 $x$，当且仅当 $\{Ux_iU^*\}$在弱算子拓扑下收敛到 $UxU^*$。由此可得$\tilde\theta(\mathrm{L}(G))=\theta(C_r^*(G))''\subseteq\mathrm{L}(H)$。因此，$\theta$ 将 $\theta$ 延拓为一个 $*$-嵌入 $\mathrm{L}(G)\hookrightarrow\mathrm{L}(H)$。 □

**引理 5.7**。对于每个 $i\in\mathbb{N}$，令 $G_i=\Lambda_{i,1}*_{\Sigma_i}\Lambda_{i,2}$ 为一个合并自由积，其中 $\Sigma_i$ 在 $G_i$ 中几乎自正规，且 $\Lambda_{i,k}\in\mathcal{WR}(A_{i,k},B_{i,k})$ 满足：$A_{i,k}$ 为阿贝尔无挠群，而 $B_{i,k}$ 为无挠群，并且相对于具有 ***Haagerup*** 性质的残有限子群双曲。令 $G=\oplus_{i\in\mathbb{N}}G_i$。假设 $H$ 是满足 $C_r^*(G)\cong C_r^*(H)$ 的任意群。那么 $H$ 是无挠群，并且其可 ***amenable*** 根是平凡的。

证明。首先，我们论证 $H$ 是无挠群。由于 $B_i$ 是双曲群的子群，它满足 Baum-Connes猜想 [La12]。由于 $A_i,_k$ 具有 Haagerup 性质，因此 $A^{(B_i}$、$_k)$ 也具有 Haagerup 性质。因此，利用 [O-O01]，我们得出 $\Lambda_i$、$_k$ 对所有 $i\in\mathbb{N}$、$k=1$、$^{ik}2$ 都满足 Baum-Connes 猜想。此外，根据 [O-O01，推论 1.2]，$G_i$ 也满足 Baum-Connes猜想。由于该性质可传递到直和 [Lu18，定理 8.7(2)(d)],，可知 $G$ 满足 Baum-Connes猜想。由于 $G$ 是无挠群，它满足 Kaplansky猜想，即 $C_r^*(G)$ 没有非平凡投影。因此 $C_r^*(H)\cong C_r^*(G)$ 也没有非平凡投影，从而 $H$ 是无挠群。

固定 $i\in\mathbb{N}$。接下来我们论证 $G_i$ 具有平凡的可和根。设 $A\lhd G_i$ 是一个可和正规子群，并令 $\mathcal{A}:=\mathrm{L}(A)\subset\mathrm{L}(G_i)$。利用 [Va13，定理 A]，我们得到 $\mathcal{A}\prec_{\mathrm{L}(G_i)}\mathrm{L}(\Sigma_i)$。由于 $\mathcal{A}\subseteq\mathrm{L}(G_i)$ 是正则的，根据 [HPV11，命题 8]，我们得到，对于任意有限族元素 $g_1$、……、$g_l\in G_i$，$\mathcal{A}\prec\mathrm{L}\left(\cap_k(g_k\Sigma_ig_k^{-1})\right)$。$\Sigma_i$在 $G_i$中的自正规性意味着 $\mathcal{A}\prec\mathbb{C}1$。利用 [CdSS15，命题 2.6]，我们得到 $A$ 是有限的。然而，由于 $G_i$ 是无限共轭类，我们必须有 $A=\{1\}$。现在设 $A\lhd G$ 是一个可和正规子群。固定 $i\in\mathbb{N}$，并令 $\pi_i\colon G\to G_i$

是典范投影。注意到 $\pi_i(A)$ 是 $G_i$ 的正规可和子群，根据前一部分我们得到 $\pi_i(A) = \{1\}$，因此 $A \leqslant$ 核$(\pi_i) = \oplus_{j\neq i} G_j$。由于这对所有 $i$都成立，我们有 $A \leqslant \cap_{i\in\mathbb{N}}$ 核$(\pi_i) = \{1\}$。因此，$G$ 具有平凡的可和根。根据 [BKKO14]，$C_r^*(G)$具有唯一迹，因此 $C_r^*(H)$也具有唯一迹。再次利用 [BKKO14]，我们得到 $H$ 具有平凡的可和根。 □

定理*1.5*的证明。由引理5.7，$H$ 是无挠群，且其可和根平凡，因此由命题5.6，同构 $C_r^*(G) \cong C_r^*(H)$ 可扩展为同构 $\mathrm{L}(G) \cong \mathrm{L}(H)$ （另见 [BKKO14]）。由定理5.5，$H$ 有直和分解$H = (\oplus_{i\in\mathbb{N}} H_i) \oplus A$，其中 $H_i$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$ 都是无限共轭类群，且 $A$ 是 ICC可和群。此外，存在一个序列 $(t_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$，都可以找到一个酉元$u_n \in \mathrm{L}(H)$，使得

$$u_n \mathrm{L}(G_j)^{t_j} u_n^* = \mathrm{L}(H_j) \quad \text{for all } j \leqslant n; \text{ and}$$
$$u_n \mathrm{L}(\oplus_{j>n} G_j)^{1/(t_1\cdots t_{n+1})} u_n^* = \mathrm{L}((\oplus_{j>n} H_j) \times A).$$

由于 $A$ 是可和的，且 $H$ 的可和根平凡，$A = \{1\}$。此外，由于每个 $H_j$ 都是无挠群，定理 4.5(b) 给出 $t_j = 1$ 和 $G_j \cong H_j$；因此 $G \cong H$。其余部分的证明与定理1.4证明的最后部分类似。 □

### 5.3 自同构与嵌入

在本节中，我们将说明如何利用前面的结果和方法，给出一些非平均群的例子，使得它们的约化 C*-代数只有弱内外自同构。我们还得到了这类代数的嵌入的类似结果。

定理 1.6 的证明。由于 $G$ 的可 amenable 根平凡（由定理 1.5 得出），并利用命题 5.6，我们可以将 $\theta\colon C_r^*(G) \to C_r^*(G)$ 延拓为一个 $*$-嵌入 $\theta : \mathrm{L}(G) \to \mathrm{L}(G)$。现在注意，定理 1.4 的证明将 $\mathrm{L}(G)$ 上的余乘法视为嵌入，直到命题 4.14 为止。因此，同样的方法可原样应用于此，对每个 $i = 1, 2$，我们得到一个单射群同态 $\delta_i\colon G_i \to G$、一个特征 $\mu_i\colon G_i \to \mathbb{T}$ 和一个酉元 $z_i \in \mathscr{U}(\mathrm{L}(G))$，使得$\theta(u_g) = \mu_i(g) z_i u_{\delta_i(g)} z_i^*$ 对所有 $g \in G_i$ 均成立。命题 4.15 的证明给出一个单射群同态 $\delta\colon G \to G$、一个特征 $\eta\colon G \to \mathbb{T}$ 和一个酉元 $z \in \mathscr{U}(\mathrm{L}(G))$，满足 $\theta(u_g) = \eta(g) z u_{\delta(g)} z^*$，对每个 $g \in G$ 均成立。 □

当群 $G$ 进一步假设属于子类 $\mathcal{AT}_0$时，我们立即得出推论 1.7的结论，因为每个单射同态 $\delta : G \to G$ 都是内自同构（由定理2.8得出）。

推论的证明 *1.8.* 设 $G, H \in \mathcal{AT}_1$ 是非同构群，并假设 $\theta\colon C_r^*(G) \to C_r^*(H)$ 是一个嵌入。根据定理 5.6, $\theta$ 可扩展为冯·诺依曼代数 $\mathrm{L}(G)$ 与 $\mathrm{L}(H)$之间的一个嵌入，我们仍将其记为 $\theta$。与定理1.6的证明类似，我们可以利用定理 1.4 (因为 $H \in \mathcal{AT}$) 的证明得到单射群同态

$\delta_i\colon G_i \to H$，一个特征 $\mu_i\colon G_i \to \mathbb{T}$ 以及一个酉元 $z_i \in \mathscr{U}(\mathrm{L}(H))$ 满足 $\theta(u_g) = \mu_i(g) z_i v_{\delta_i(g)} z_i^*$，对所有 $g \in G_i$。应用命题 4.15 可得一个单射群同态 $\delta : G \to H$，这与定理 2.9矛盾。

□

注5.8。前面的结果也使我们能够给出无限共轭类群 $G$ 的例子，使得 $\mathrm{L}(G)$ 是 McDuff 的，并且对于每个自同构 $\theta \in \mathrm{Aut}(C_r^*(G))$，都存在一列酉元 $w_n \in \mathrm{L}(G)$，使得

$$\|\theta(x)w_n - w_n x\|_\infty \to 0 \text{ for all } x \in C_r^*(G). \tag{5.4}$$

事实上，只需取 $G = \oplus_{\in\mathbb{N}} G_i$，其中 $G_i \in \mathcal{AT}$ 是两两不同构、外自同构群平凡且阿贝尔化平凡的群。细节留给读者。

# 参考文献


[AMACK25] J. F. Ariza Mej´ıa, D. N. Amaraweera, I. Chifan, K. Khan, 《相对实心性结果及其在计算某些 $\mathrm{II}_1$ 因子不变量中的应用》，预印本 2025，arxiv:2509.19481。[AMCOS25] J. F. Ariza Mej´ıa, I. Chifan, D. Osin, B. Sun, 《群 $\mathrm{II}_1$ 因子的 McDuff W*-刚性》，预印本 2025，arXiv:2511.23123。[BO08] I. Belegradek, D. Osin, 《Rips 构造与 Kazhdan 性质 (T)》， *Groups, Geom., & Dynam.* **2**(2008)，第 1 期，1-12。[Ber14] M. Berbec, 《具有正第一 $\ell^2$-Betti 数的群的花环积的 W*-超刚性》，*Internat. J. Math.* **26** (2015)，第 1 期，1550003，共 27 页。[BV13] M. Berbec, S. Vaes, 《左右花环积群冯·诺伊曼代数的 $W^*$-超刚性》，*Proc. Lond. Math. Soc.* **108** (2014)，1116-1152。[BKKO14] E. Breuillard, M. Kalantar, M. Kennedy, N. Ozawa, 《*$C^*$-simplicity and the unique trace property for discrete groups* **126** 2017 35 71 》，《高等科学研究所数学出版物》( )，–。[BO08] N. Brown, N. Ozawa, 《C $C^*$-代数与有限维逼近》。数学研究生系列，第 88 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，(2008)。[CLMW25] F. Chan, S. J. Lippert, I. Moutzouris, E. Weld：几乎阿贝尔群的核维数与刚性，预印本 arXiv:2504.20850[CdSS15] I. Chifan, R. de Santiago 和 T. Sinclair, 《*$W^*$-rigidity for the von Neumann algebras of products ofhyperbolic groups*》，《几何与泛函分析》，26 (2016)，136-159。[CdSS17] I. Chifan, R. de Santiago, W. Sucpikarnon, 《由合并自由积群的扩张产生的 $\mathrm{II}_1$ 因子的张量积分解》。 *Comm. Math. Phys.* **364**(2018)，第 3 期，1163–1194。[CD-AD20] I. Chifan, A. Diaz-Arias, D. Drimbe, 《W* 与 C*-超刚性群的新例子》， *Adv. Math.* **412**(2023)，论文编号 108797，共 57 页。[CD-AD21] I. Chifan, A. Diaz-Arias, D. Drimbe, 《余诱导群的 W* 与 C*-超刚性结果》， *J. Funct.Anal.* **284** (2023)，第 1 期，109730。[CI17] I. Chifan, A. Ioana, 《群冯·诺依曼代数的合并自由积刚性》， *Adv. Math.*，329 (2018)，819-850。[CIOS21] I. Chifan, A. Ioana, D. Osin, B. Sun, 《群的类花环积及其冯·诺依曼代数 I：W*-超刚性》。 *Ann. of Math.* (2) 198 (2023)，第 3 期，1261–1303。[CIOS22] I. Chifan, A. Ioana, D. Osin, B. Sun, 《群的类花环积及其冯·诺依曼代数 II：外自同构》，预印本 2022，arxiv:2304.07457。

[CIOS24] I. Chifan, A. Ioana, D. Osin, B. Sun, 《*Wreath-like products of groups and their von Neumann algebras III: Ebbeddings* 2024, 2402 19461》, 预印本 arxiv.org: . .[CIOS26] I. Chifan, A. Ioana, D. Osin, B. Sun, 《*Wreath-like products and rigidity of their von Neumann algebras V: W* and C*-superridgidity* 2026》, 预印本。[CU18] I. Chifan, B. Udrea, 《*Some rigidity results for $II_1$ factors arising from wreath products of property (T) groups* 278 2020 7, 108419》, 《函数分析杂志》( ), 第 期。[Co76] A. Connes, 《内射因子的分类》, *Ann. of Math.* **104** (1976) 73-115。[CD26] J. Curda, D. Drimbe, 《W* 与 C*-超刚性乘积群的例子》, 预印本 2026。[CKRTW] J. Curda, S. Knuby, S. Raum, H. Thiel, S. White, 《几乎阿贝尔群的 $C^*$-超刚性》, 准备中。[DGO11] F. Dahmani, V. Guirardel, D. Osin, 《双曲空间上群作用中的双曲嵌入子群与旋转族》, *Memoirs Amer. Math. Soc.* **245** (2017), 第 1156 期。[Dr20] D. Drimbe, 《通过 s-可变形变研究冯·诺依曼代数与 C* -代数中的乘积刚性》。( ), 第 – 期。[DHI16] D. Drimbe, D. Hoff, A. Ioana, 《由秩一单李群乘积中的不可约格产生的素 $II_1$ 因子》, *J. Reine Angew. Math.* **757** (2019), 197-246。[DS05] C. Drutu, M. Sapir, 《树分层空间与群的渐近锥》。附录由 Denis Osin 和 Mark Sapir 撰写。 *Topology* **44** (2005), 第 5 期, 959-1058。[ER18] C. Eckhardt, S. Raum, 《*C*-superrigidity of 2-step nilpotent groups*》, 《数学进展》338 (2018), 175–195。[Ga21] G. Gardam, 《群环单位猜想的一个反例》, *Ann. of Math.* 194 (2021), 967–979。[HPV11] C. Houdayer, S. Popa, S. Vaes, 《一类所有作用均为 W* -超刚性的群》。( ), 第 – 期。[Ioa10] A. Ioana, 《具有 (T) 性质的群的伯努利作用的 $W^*$-超刚性》, *Groups Geom. Dyn.* 7 2013 3, 577 590 *J. Amer. Math. Soc.* **24** (2011), 第 4 期, 1175-1226。[Io11] A. Ioana, 《Popa 的 $\mathcal{HT}$ Geom. Funct. 因子群测度空间分解的唯一性》。( ), 第 – 期。[Io12] A. Ioana, 《合并自由积 $II_1$ 因子的 Cartan 子代数》。附录由 Ioana 和 Stefaan Vaes 撰写。 *Anal.* **22** 2012 3, 699 732 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4) 48 (2015), 第 1 期, 71–130。[IPP05] A. Ioana, J. Peterson 和 S. Popa, 《弱刚性因子的合并自由积及其对称群的计算》, *Acta Math.* **200** (2008), 第 1 期, 85-153。[IPV10] A. Ioana, S. Popa, S. Vaes, 《一类超刚性群冯·诺依曼代数》, *Ann. of Math.* (2) 178 (2013), 第 1 期, 231-286。[KS 07] A. Karrass, D. Solitar, 《具有自正规化合并子群的两个群的自由积》。*Canadian J. Math.* **23** (1971), 933–959。[KV15] A. S. Krogager, S. Vaes, 《恰有两种群测度空间分解的 $II_1$ 因子类》, *J. Math. Pures Appl.* **108**(2017), 第 1 期, 88-110。[La12] V. Lafforgue, 《双曲群的带系数 Baum-Connes 猜想》 (《双曲群的带系数 Baum-Connes 猜想》)。*J. Noncommut. Geom.*, 6 (2012), 1–197。[Lu18] W. L ¨ uck, 《组装映射》。同伦理论手册, –, CRC 出版社, 佛罗里达州博卡拉顿, [2020]。[McD69] D. McDuff, 《不可数多个 $II_1$ 因子》, *Ann. of Math.* **90** (1969), 372-377。[Mu21] A. G. Murray, 《群环单位猜想的更多反例》, *J. Algebra*, 581 (2021), 588–606。[MvN43] F. J. Murray, J. von Neumann, 《算子环 IV》。 *Ann. of Math.* **44** (1943), 716-808。[Om18] T. Omland, 《自由幂零群是 $C^*$-超刚性的》, *Proc. Amer. Math. Soc.* **148** (2020), 第 1 期, 283–287。 851 890 *CRC Press/Chapman Hall Handb. Math. Ser.*

[Osi06] D. Osin，相对双曲群：内在几何、代数性质与算法问题。 *Mem. Amer. Math. Soc.* **179** (2006)，第843号，vi+100 页。[O-O01] H. Oyono-Oyono，Baum-Connes猜想与扩张， *J. Reine Angew. Math.*，**532**（2001）133–149。[OP07] N. Ozawa，S. Popa，关于至多具有一个 Cartan 子代数的 $\mathrm{II}_1$ 因子， *Ann. of Math.* **172** （2010），第1期，713–749。[Pop03] S. Popa，由 -刚性群的可变形作用产生的 II

$_1$ $w$ *Invent. Math.* 因子的强刚性 **165** 2006 2, 369 408

I, （），第 - 期。[Pop04] S. Popa，由 - 刚性群的可变形作用产生的 II

$_1$ $w$ *Invent. Math.* 因子的强刚性 **165** 2006 2, 409 452

II, （），第 - 期。[Pop05] S. Popa，w- 刚性群的可变形作用的余循环与轨道等价超刚性，

*Invent.* （），-。[

*Math.* **170** 2007 243 295

PV12] S. Popa，S. Vaes，双曲群任意作用产生的 $\mathrm{II}_1$ 因子的唯一 Cartan 分解， *J. Reine Angew. Math.* **694** （2014），215-239。[Sc74] S. Scheinberg，阿贝尔群的同胚与同构， *Canad. J. Math.* 26（1974），1515–1519。[Sun20] B. Sun，群论 Dehn填充的上同调 I：科恩-林登型定理， *J. Algebra* **542** （2020），277-307。[Va13] S. Vaes，合并自由积冯·诺依曼代数中的正规化子。

*Publ. Res. Inst. Math.* （），第 - 期。

*Sci.* **50** 2014 4, 695 721