arXiv:2602.05402v1 [math.DS] 5 Feb 2026

关于星向量场周期测度的稠密性

Qimai Sun、Guangwa Wang、Wanlou Wu *

摘要

在本文中，我们证明，一个 C^1 星向量场的每一个遍历双曲不变测度都可以在弱* 拓扑下由周期测度逼近。这将Katok [18] 关于 $C^{1+\alpha}$（$\alpha > 0$）微分同胚的经典结果推广到 C^1 任意维数的星向量场。

1 引言

动力学旨在描述由已知微分规则支配的系统的长期演化。在确定性非线性动力系统中，一个核心难题是，简单的确定性方程如何能够产生看似随机、并对初始条件极度敏感的复杂轨道——这一现象被称为混沌。理解混沌并非宣称预测不可能，而是在表面的无序之中寻求新的秩序形式。将视角从单个轨道转向整体统计行为，是揭示这种隐藏秩序的有效方法。在这一努力中，周期测度起着至关重要的桥梁作用，将周期轨道的经典概念与统计描述联系起来，并为理解一般动力系统的复杂渐近行为提供了关键工具——正如著名的“周期三蕴含混沌”结果 [22]所说明的那样。

在动力系统的遍历理论中，研究测度的一种方法是用易于理解的测度对其进行逼近。这在光滑遍历理论中尤为如此；光滑遍历理论是可微动力系统的遍历理论。周期测度是这类易于理解的测度中的典型例子，它将周期轨道的几何信息与统计和遍历测度理论结合起来。1970年，Bowen [4] 在 Axiom A 微分同胚的基本集上构造了不变测度。对于 Axiom A 微分同胚，Sigmund [44] 证明了周期测度在所有不变测度组成的集合中稠密。Katok [18]表明，对于 $C^{1+\alpha}(\alpha > 0)$ 微分同胚，双曲周期点在给定双曲测度的吸引域闭包中稠密。Ma˜n´e [35] 运用其遍历闭合引理证明，泛性微分同胚的每个遍历测度都可以在弱拓扑下由支撑于周期轨道上的测度逼近。Hirayama [17] 将 Sigmund 的结果推广到非一致双曲动力系统。该证明依赖于 [18], 为这类系统给出的影踪引理，以及规范性质的一个非一致版本。Abdenur、Bonatti 和 Crovivier [1]给出了 Ma˜n´e 经典结果的一个变体：对于 C^1-泛性微分同胚，每个不变测度都是沿周期轨道的狄拉克测度凸和的弱极限。关于微分同胚的遍历测度与周期测度之间更进一步的逼近性质，参见 [24, 25, 47]。对于希尔伯特空间上的半流，Lian 和 Young [23] 证明了双曲周期点在给定双曲测度的吸引域闭包中稠密。Ma [34] 将 Lian 和 Young 的结果推广到了光滑半流

*Wanlou Wu是通讯作者。Wanlou Wu得到国家自然科学基金委员会12001245的资助。

可分巴拿赫空间。最近，Li、Liang 和 Liu [20] 证明，对于 $C^{1+\alpha}(\alpha > 0)$ 非一致双曲向量场，任何不支撑于奇点上的遍历双曲不变测度都可以在弱* 拓扑下由周期测度逼近。Lu 和 Wu [33] 将这一结果推广到了 C^1 三维流形上的星向量场。

本文讨论高维流形上的 C^1 星向量场所涉及的这一问题。更准确地说，我们研究此类系统的遍历双曲不变测度。我们证明，对于这些向量场，每个遍历双曲不变测度都可以在弱* 拓扑下由周期测度逼近。本文的主要结果如下。

主定理。设 φ_t 为由紧黎曼流形 M 上的星向量场 $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ 生成的 C^1 流，其中流形的维数为d，并设 μ 为一个不支撑在奇点上的遍历双曲不变测度。那么存在一个周期测度序列，在弱* 拓扑下收敛于 μ 。

与微分同胚情形相比，向量场中的奇点带来了显著困难。带奇点的流呈现出丰富而复杂的动力学，洛伦兹吸引子 [14, 32]便是一个例子。在奇点处，无法定义**线性庞加莱 ˊ流**(参见定义 2.1)。因此，一些紧致性性质不复存在，这阻碍了将为微分同胚发展出的某些技术直接应用于奇异向量场，例如 Crovisier中心模型[7] 以及 Pujals-Sambarino 的畸变论证 [42], 。即使没有奇点，Lian 和 Young [23]所采用的标准 Pesin理论也不能直接应用于此处，因为我们的向量场仅仅是 C^1。本文结构如下。第2 节介绍向量场所需的背景知识。第3 节详述 Lyapunov度量和影踪引理。第4 节用于证明**主定理**。

2 预备知识

2.1 向量场的基本内容

设 M 是一个无边界的紧致 d维（$d \geq 3$） C^∞ 黎曼流形。用 $\mathfrak{X}^r(M)(r \geq 1)$表示 M上所有 C^r向量场构成的空间。给定 $X \in \mathfrak{X}^1(M)$，若点$x \in M$ 满足 $X(x) = 0$，则称其为 X 的奇点。用 Sing(X)表示所有奇点构成的集合。若点 $x \in M$ 满足 $X(x) \neq 0$，则称其为正则点。设 $\varphi_t^X = \{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 为向量场 X生成的 C^1 流。若无歧义，我们将其简记为 φ_t 。若正则点 p 满足 $\varphi_{t_0}(p) = p$ ，其中 $t_0 > 0$为某个值，则称其为周期点。临界点要么是奇点，要么是周期点。将 X 的法丛记为

$$\mathcal{N} \triangleq \bigcup_{x\in M\setminus \mathrm{Sing}(X)} \mathcal{N}_x,$$

其中 $\mathcal{N}_x$ 是流方向 $X(x)$的正交补空间，即，

$$\mathcal{N}_x = \{v \in T_xM : v \perp X(x)\}.$$

由 X 生成的流 φ_t 关于空间变量的导数称为**切流**，记为 $\Phi_t = \mathrm{d}\varphi_t$。线性庞加莱流是研究动力系统时所使用的数学工具，尤其用于分析流在轨道或不变集附近的行为。它由流的微分（或切映射）导出，描述切丛中的向量在投影去除沿流方向的分量后的演化。

定义 2.1。对于 $x \in M \setminus Sing(X)$ $v \in \mathcal{N}_x$ 和 $t \in \mathbb{R}$，线性庞加莱 ́流 $\boldsymbol{w}$

$$\psi_t : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$$

定义为

$$\psi_t(v) \triangleq \Phi_t(v) - \frac{\langle \Phi_t(v), X(\varphi_t(x)) \rangle}{\|X(\varphi_t(x))\|^2} X(\varphi_t(x)).$$

即， $\psi_t(v)$ 是 $\Phi_t(v)$ 沿流方向 $X(\varphi_t(x))$在$\mathcal{N}_{\varphi_t(x)}$ 上的正交投影。

固定 $T > 0$，范数

$$\|\psi_T\| = \sup \{|\psi_T(v)| : \ v \in \mathcal{N}, \ |v| = 1\}$$

在 $\mathcal{N}$上一致上有界，尽管 $M \setminus \text{Sing}(X)$可能不是紧致的。记

$$m(\psi_T) = \inf \{|\psi_T(v)| : \ v \in \mathcal{N}, \ |v| = 1\}$$

ψ_T的最小范数。由于

$$m(\psi_T) = \|\psi_T^{-1}\|^{-1} = \|\psi_{-T}\|^{-1},$$

最小范数 $m(\psi_T)$ 在 $\mathcal{N}$ 上一致地有界且远离 0。一个密切相关的构造是**缩放线性庞加莱 ́流** ψ_t^* : $\mathcal{N} \to \mathcal{N}$，它是按流速缩放的线性庞加莱 ́流。

定义 2.2。缩放线性庞加莱 ́流 ψ_t^* : $\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ 定义为

$$\psi_t^*(v) \triangleq \frac{\|X(x)\|}{\|X(\varphi_t(x))\|} \psi_t(v) = \frac{\psi_t(v)}{\left\|\Phi_t|_{\langle X(x) \rangle}\right\|},$$

其中， $x \in M \setminus Sing$（X） $v \in \mathcal{N}_x$ 和 $\langle X$（x）$\rangle$ 表示 T_xM 中由流方向 X（x）张成的1维子空间。

线性庞加莱 ́流 ψ_t 由于奇点的存在而不具备紧致性。为克服这一困难，线性庞加莱 ́流还可以由 Liao 以更一般的方式定义 [31]。Li、Gan 和 Wen [19]使用了“扩展线性庞加莱 ́流”这一术语。对于每个点 $x \in M$，位于该点的**单位球面纤维**定义为 x

$$S_xM = \{v : \ v \in T_xM, \ |v| = 1\}.$$

该**球面丛**

$$SM = \bigcup_{x \in M} S_xM$$

因此是紧致的。对于每个 $v \in SM$，定义**单位切流** Φ_t^I : $SM \to SM$ 为

$$\Phi_t^I(v) = \frac{\Phi_t(v)}{|\Phi_t(v)|}.$$

给定流 φ_t的紧不变集 Λ ，令

$$\widetilde{\Lambda} = \text{Closure} \left(\bigcup_{x \in \Lambda \setminus \text{Sing}(X)} \frac{X(x)}{|X(x)|} \right)$$

~属于 SM。因此， Λ 与 Λ 之间的本质区别在于奇点。我们可以获得关于 Λ的更多~信息：它告诉我们 Λ 中的正则点如何聚集到奇点。对于每个 $x \in M$以及任意两个正交向量 $v_1 \in S_xM$、 $v_2 \in T_xM$，定义

$$\Theta_t(v_1, v_2) = \left(\Phi_t(v_1), \Phi_t(v_2) - \frac{\langle \Phi_t(v_1), \Phi_t(v_2)\rangle}{\|\Phi_t(v_1)\|^2}\Phi_t(v_1)\right).$$

根据定义， Θ_t 的两个分量保持正交。记

$$\Theta_t = (\mathrm{Proj}_1(\Theta_t), \mathrm{Proj}_2(\Theta_t)),$$

对于每个正则点 $x \in M$ 和任意向量 $v \in \mathcal{N}_x$，有

$$\psi_t(v) = \mathrm{Proj}_2(\Theta_t)(X(x), v).$$

由 Θ_t的连续性，可将 ψ_t 的定义延拓至奇点。对于每个~向量 $u \in \Lambda$，定义纤维

$$\widetilde{\mathcal{N}}_u = \{v \in T_{\pi(u)}M : \ v \perp u\},$$

~ ~ ~，由此得到底空间 Λ上的一个（$d-1$）维向量丛 $\mathcal{N}$。对于每个 $u \in \Lambda$以及每个 $v \in \mathcal{N}_u$，定义线性映射~

$$\widetilde{\psi}_t(v) = \mathrm{Proj}_2(\Theta_t)(u, v).$$

于是，原来的线性 Poincar´e 流 ψ_t 可以“嵌入”流 Θ_t中。根据定义，

~ ~ ~Proj2(Θ_t) 在丛 $\mathcal{N}$上诱导出一个连续线性流 $\widetilde{\psi}_t$ 。因此，$\widetilde{\psi}_t(v)$ 关于向量场 X、时间 t和向量 v 连续变化，并可视为 ψ_t的紧化。

现在，我们回顾向量场法丛的几种直和分解的定义。

定义 2.3。 设 Λ 是向量场 X 的一个紧不变集，且 $\mathcal{N}_\Lambda = E \oplus F$ 是关于 Λ 上的线性 *Poincar´e* 流 ψ_t 的一个不变分裂。若存在常数 $C \geq 1$ 和 $\lambda > 0$，使得对于任意 $x \in \Lambda$ 和 $t \geq 0$，则称直和分解 $\mathcal{N}_\Lambda = E \oplus F$ 关于 ψ_t 是一个支配分裂，

$$\left\|\psi_t|_{E(x)}\right\| \cdot \left\|\psi_{-t}|_{F(\varphi_t(x))}\right\| \leq Ce^{-\lambda t}.$$

为简便起见，我们将其记为 $E \prec F$。

定义 2.4。 设 Λ 是向量场 X 的一个不变集，且 $\mathcal{N}_\Lambda = E \oplus F$ 是关于 Λ 上的线性 *Poincar´e* 流 ψ_t 的一个不变分裂。若存在常数 $C \geq 1$ 和 $\lambda > 0$，使得

$$\left\|\psi_t|_{E(x)}\right\| \leq Ce^{-\lambda t} \ \textit{and} \quad \left\|\psi_{-t}|_{F(x)}\right\| \leq Ce^{-\lambda t}, \ \textit{for every } x \in \Lambda \ \textit{and every } t \geq 0.$$

在这种情况下，集合 Λ 本身被称为关于 ψ_t 的双曲的集合。

备注。 回顾一下，缩放线性庞加莱流 ψ_t^* 由线性庞加莱流ψ_t诱导。相应地，可以定义相对于 ψ_t^*的支配分裂和双曲分裂。具体而言，设 Λ 是流 φ_t的一个（不一定是紧致的）不变集。其上的一个不变分裂

$$\mathcal{N}_\Lambda = E \oplus F$$

称为相对于缩放线性庞加莱流 ψ_t^*的支配分裂，如果存在常数 $C \geq 1$ 和 $\lambda > 0$，使得对每个 $x \in \Lambda$ 及每个 $t \geq 0$,

$$\left\|\psi_t^*|_{E(x)}\right\| \cdot \left\|\psi_{-t}^*|_{F(\varphi_t(x))}\right\| \leq Ce^{-\lambda t}.$$

不变直和分解

$$\mathcal{N}_\Lambda = E \oplus F$$

在不变集 Λ 上的直和分解，若存在常数 $C \geq 1$ 和 $\lambda > 0$，使得对任意 $x \in \Lambda$ 和任意 $t \geq 0$, 则称其相对于缩放的线性 *Poincar´e* 流 ψ_t^* 是一个双曲分裂。

$$\left\|\psi_t^*|_{E(x)}\right\| \leq Ce^{-\lambda t} \text{ and } \left\|\psi_{-t}^*|_{F(x)}\right\| \leq Ce^{-\lambda t}.$$

此外，一个直和分解

$$\mathcal{N}_\Lambda = E \oplus F$$

是一个支配(分别为双曲) 直和分解相对于 ψ_t，当且仅当它是一个支配(分别为双曲) 直和分解相对于 ψ_t^*。

星系统这一概念源于对著名稳定性猜想的研究。回想一下，Smale 的经典定理 [46] （针对微分同胚）和 Pugh-Shub [41] （针对流）指出，Axiom A 加上无环条件蕴含 Ω-稳定性。Palis 和 Smale [39]猜想其逆命题也成立，这一猜想后来被称为 Ω-稳定性猜想。在研究这一猜想的过程中，Pliss、Liao 和 Ma˜n´e 发现了一个重要条件，即（由 Liao 命名的）星条件。此后，许多数学家开始关注星系统。

定义 2.5. 向量场 $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ 称为星向量场，如果存在 X 的一个 C^1邻域 $\mathcal{U}$，使得对每一个向量场 $Y \in \mathcal{U}$, φ_t^Y的所有奇点和所有周期轨道都是双曲的。

M 上的所有星向量场构成的集合记为 $\mathfrak{X}^*(M)$，并赋予 C^1拓扑。事实上，Ω-稳定性很容易推出星条件（Franks [10] 和Liao [27]）。因此，星条件能否反过来推出 Axiom A 加无环条件，成为一个引人注目的问题；Liao [29] 和Ma˜n´e [35]分别独立提出了这一问题。对于微分同胚，已知一个微分同胚是星的，当且仅当它是双曲的，即满足 Axiom A 加无环条件 [2, 16]。Gan 和 Wen [12] 证明，无奇点星向量场满足 Axiom A 加无环条件。然而，奇异星向量场可能不满足 Axiom A，著名的洛伦兹吸引子 [14]便是一个例子。为描述洛伦兹吸引子的几何结构，Morales、Pacifico 和 Pujals [37] 提出了一个称为奇异双曲性的概念（更高维情形见 [19] 和 [36] ）。后来，Shi、Gan 和 Wen [43] 证明，在对奇点施加某些假设的条件下，典型星向量场是奇异双曲的。长期以来，人们认为奇异双曲性是刻画典型星向量场的恰当概念，这类似于双曲性刻画星微分同胚。 然而，最近 da Luz [9] 构造了一个引人注目的五维星向量场例子，其中两个指标不同的奇点稳健地包含在同一个链类中；因此，它稳健地具有无奇点双曲性。针对这一例子，Bonatti 和 da Luz [3]提出了一个称为多奇异双曲性的新概念。他们证明， $\mathfrak{X}^*(M)$ 中的开稠密子集内的每个 X 都是多奇异双曲的。反过来，每个多奇异双曲向量场都是星向量场。

2.2 向量场的李雅普诺夫指数

本节介绍向量场的遍历理论。给定一个向量场$X \in \mathfrak{X}^r(r \geq 1)$，若测度 μ 对于流 φ_t （或向量场 X）是不变的，即对于每个 $T \in \mathbb{R}$， μ 都是 φ_T的不变测度，则称 μ 为该流（或向量场）的不变测度。类似地，若测度 μ 对于流 φ_t （或向量场 X）是遍历的，即对于每个 $T \in \mathbb{R}$, μ 都是 φ_T的遍历不变测度，则称 μ 为该流（或向量场）的遍历测度。流 φ_t 的所有不变测度和所有遍历测度分别记为 $\mathcal{M}(X)$、 $\mathcal{E}(X)$。设 μ是流 φ_t的不变测度。根据奥塞列杰茨乘法遍历定理 [38], ，对于 μ-几乎处处的 $x \in M$，存在一个正整数 $k(x) \in [1, d]$、实数 $\chi_1(x) < \chi_2(x) < \cdots < \chi_{k(x)}(x)$，以及一个可测的$\Phi_t$-不变分裂

$$T_xM = E_1(x) \oplus E_2(x) \oplus \cdots \oplus E_k(x)$$

使得

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi_t(v)\| = \chi_i(x), \text{ for all } v \in E_i(x) \setminus \{\mathbf{0}\}, \text{ and } i = 1, 2, \cdots, k(x).$$

称数 $\chi_1(x) \cdots$， $\chi_{k(x)}(x)$ 为点 x 处的 Φ_t 关于 μ 的李雅普诺夫指数，而由这些数（按重数计，并按递增顺序排列）构成的向量称为点 x 处的 Φ_t 关于 μ 的**李雅普诺夫向量**。 μ 的**指标**记为 $\mathrm{Ind}(\mu)$，定义为

$$\mathrm{Ind}(\mu) \triangleq \sum_{\chi_i(x)<0} \dim E_i(x).$$

若 μ 是遍历的，则数 $k(x)$ $\chi_1(x) \cdots$， $\chi_{k(x)}(x)$ 在 μ-几乎处处为常数；将它们简记为 k， χ_1, $\cdots$， χ_k。根据庞加莱复现定理，对于 μ-几乎所有的 $x \in M$,

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log \left\|\Phi_t|_{\langle X(x)\rangle}\right\| = 0,$$

其中 $\langle X(x)\rangle$ 是由流方向 $X(x)$ 张成的 T_xM 的一维子空间。因此，流 Φ_t 的李雅普诺夫谱中总是存在一个零李雅普诺夫指数，它对应于流方向本身。

对于不支撑在 $\mathrm{Sing}(X)$ 上的遍历不变测度 μ ，应用于线性庞加莱流 ψ_t 的 Oseledec 乘法遍历定理： $\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ 表明，对μ-几乎每个 $x \in M\backslash\mathrm{Sing}(X)$，存在整数 $k \in [1, d-1]$、实数 $\chi_1 < \chi_2 < \cdots < \chi_k$，以及一个可测的 ψ_t-不变分裂

$$\mathcal{N} = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_k$$

法丛的，使得

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log \|\psi_t(v)\| = \chi_i, \quad \text{for all } v \in E_i \setminus \{\mathbf{0}\}, \text{ and } i = 1, 2, \cdots, k.$$

因此，数值 $\chi_1, \cdots, \chi_k$ 是相对于 μ 的 ψ_t 的**李雅普诺夫指数**，由这些数值构成的向量（按重数计，并按递增顺序排列）称为相对于 μ 的 ψ_t 的**李雅普诺夫向量**。回忆一下，缩放线性庞加莱流 $\psi_t^*: \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ 定义为

$$\psi_t^*(v) = \frac{\|X(x)\|}{\|X(\varphi_t(x))\|}\psi_t(v) = \frac{\psi_t(v)}{\left\|\Phi_t|_{\langle X(x)\rangle}\right\|}, \text{ for any non-zero } v \in \mathcal{N}.$$

由于 Φ_t 沿流方向的李雅普诺夫指数为零，即，

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\log\left\|\Phi_t|_{\langle X(x)\rangle}\right\|=0,$$

由此可知，对于任意非零的 $v\in\mathcal{N}_x$,

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\log\|\psi_t^*(v)\|=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\left(\log\|\psi_t(v)\|-\log\left\|\Phi_t|_{\langle X(x)\rangle}\right\|\right)=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\log\|\psi_t(v)\|.$$

因此，对于 μ-几乎处处的 x，缩放线性庞加莱流 ψ_t^* 恰好具有相同的奥塞列杰茨分裂

$$\mathcal{N}_x=E_1(x)\oplus E_2(x)\oplus\cdots\oplus E_k(x)$$

其李雅普诺夫指数也相同 χ_1，$\cdots$，χ_k。因此，关于 μ，缩放线性庞加莱流 ψ_t^* 的李雅普诺夫指数（以及李雅普诺夫向量）与线性庞加莱流 ψ_t的相同。忽略重数时，我们通常将关于 μ 的（缩放）线性庞加莱流 ′的李雅普诺夫指数记为

$$\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_{d-1}.$$

这意味着

$$\lambda_j=\chi_i,\qquad \text{for each } d_1+d_2+\cdots+d_{i-1}<j\le d_1+d_2+\cdots+d_i,$$

其中 $d_i=\dim E_i(x)$。

定义 2.6. 如果流 φ_t 的遍历测度 μ 不支撑在奇点上，则称其为正则 遍历测度。若线性庞加莱流 ψ_t 关于 μ 的所有李雅普诺夫指数均非零，则称正则遍历测度为双曲的 。

注. 通常也可以用切流Φ_t =dφ_t 来定义遍历测度的双曲性。然而，对于每个正则遍历测度，切流 Φ_t 在流方向上总有一个零李雅普诺夫指数。

给定一个遍历双曲不变测度 μ，令 Γ 为线性庞加莱流 ψ_t 的 μ-典型且李雅普诺夫正则点的集合（即奥塞列杰茨乘法遍历定理给出的全 μ-测度集）。对于每个 $x\in\Gamma$，令

$$\mathcal{N}_x=E_1(x)\oplus E_2(x)\oplus\cdots\oplus E_s(x)\oplus E_{s+1}(x)\oplus\cdots\oplus E_k(x)$$

为对应于不同李雅普诺夫指数的奥塞列茨分解

$$\chi_1(\mu)<\chi_2(\mu)<\cdots<\chi_s(\mu)<0<\chi_{s+1}(\mu)<\cdots<\chi_k(\mu),$$

其中，$k\in[0,d-1]$是不同指数的个数，并令 $d_i=\dim E_i(x)\ge1$为它们的重数（$i=1,\ \cdots,\ k$）。定义稳定与不稳定子丛如下:

$$E^s=E_1\oplus E_2\oplus\cdots\oplus E_s,\qquad E^u=E_{s+1}\oplus E_{s+2}\oplus\cdots\oplus E_k.$$

那么，奥塞列杰茨分裂可写为

$$\mathcal{N}=E^s\oplus E^u,$$

并分别称 E^s 和 E^u 为稳定丛和不稳定丛。

3 L向量场的李雅普诺夫范数与影踪引理 s

3.1 李雅普诺夫范数与李雅普诺夫图

本节中，我们仅考虑 C^1 向量场 $X \in \mathfrak{X}^1(M)$。由于线性庞加莱′流（定义 2.1）在奇点处无定义，因此某些一致估计会失效。不过，通过使用缩放线性庞加莱′流，我们可以恢复一定的一致性。

在切空间 TM上，佐佐木度量（见 [5, 第2.1]小节），记为 d_S，是由 M的黎曼度量诱导的自然度量。由 M的紧致性，存在一个小常数 $\rho_S > 0$，使得对满足 $d(x,y) < \rho_S$的任意两点 x、$y \in M$，存在唯一一条连接 y 与 x的最短测地线。此外，若 $u_x \in T_xM$ 与 $u_y \in T_yM$ 满足 $d_S(u_x,u_y) \le \rho_S$，则令 $u'_y \in T_xM$ 为u_y 沿该测地线从y 到 x的平行移动，于是有

$$\frac{\left(d(x,y)+|u_x-u'_y|\right)}{2} \le d_S(u_x,u_y) \le 2\left(d(x,y)+|u_x-u'_y|\right).$$

此外，存在常数 K_{G^1}，使得对任意两个（不必基于同一点的）单位向量 $u_1,\ u_2 \in TM$，

$$d_{G^1}(\langle u_1\rangle,\langle u_2\rangle) \le K_{G^1}\cdot d_S(u_1,u_2),$$

其中，d_{G^1}表示 TM的一维子空间丛 G^1 上的格拉斯曼距离，即

$$G^1 = \{N \subset T_xM : N \text{ is a 1-dimensional linear subspace of } T_xM, x \in M\}.$$

由于 M 是紧致的，存在常数 $K_0 > 0$，使得

$$\max_{x\in M}\{|X(x)|,\ \|DX(x)\|\} \le K_0.$$

Li、Liang 和 Liu [20]给出了佐佐木度量与底黎曼度量之间的精确关系，如下述引理 3.1所示。

引理 3.1。 [20, 引理 3。1] 存在常数 $K_1 > K_0$ 和 $\beta_0^* > 0$，使得对任意$x \in M\backslash Sing(X)$以及任意 $y \in B(x,\ \beta_0^*|X(x)|)$，

(1) $1 - K_1\cdot\dfrac{d(x,y)}{|X(x)|} \le \dfrac{|X(x)|}{|X(y)|} \le 1 + K_1\cdot\dfrac{d(x,y)}{|X(x)|}$;

(2) $d_S\left(\dfrac{X(x)}{|X(x)|},\dfrac{X(y)}{|X(y)|}\right) \le K_1\cdot\dfrac{d(x,y)}{|X(x)|}$;

(3) $d_{G^1}\left(\langle X(x)\rangle,\langle X(y)\rangle\right) \le K_1\cdot\dfrac{d(x,y)}{|X(x)|}$.

设 $r_0 > 0$ 为指数映射的半径

$$\exp:\ TM \to M$$

当限制在圆盘丛 $T_xM(r_0) = \{v \in T_xM:\ |v| < r_0\}$ 上时，是一个 C^∞ 微分同胚。必要时缩小 $\beta_0^* > 0$，我们可以假设

$$10\beta_0^* K_1 < \min\{r_0, 1\}.$$

因此，引理 3.1 的第（1）部分意味着 $B(x,\beta_0^*|X(x)|)$ 中没有奇点。接下来，我们分析缩放邻域局部图表中的截面庞加莱流，即所谓的廖缩放图表，其由 [26, 30, 31], 引入，以获得某种一致性。类似的构造和讨论可见于 [8, 13, 48]。

设 $\{e_1,\cdots,e_d\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的标准正交基。对于每个 $x\in M$，选取切空间 T_xM 的标准正交基 $\{e_1^x,\cdots,e_d^x\}$。这一选择定义了一个线性等距映射

$$C_x:\mathbb{R}^d\to T_xM,$$

该映射给出了从欧几里得空间到切空间的保度量坐标变换，其显式形式为

$$C_x(e_i)=e_i^x,\qquad \text{for } i=1,2,\cdots,d.$$

于是，

$$\langle C_x(u),C_x(v)\rangle_x=\langle u,v\rangle,\ \text{for all } u,v\in\mathbb{R}^d,$$

其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的标准内积。利用黎曼指数映射 $\exp_x:T_xM\to M$，我们定义复合映射

$$\mathrm{Exp}_x=\exp_x\circ C_x:\mathbb{R}^d\to M.$$

对于每个 $r>0$，记

$$\mathbb{R}^d(r)=\left\{v\in\mathbb{R}^d:\ |v|\le r\right\}$$

以原点为中心、半径为 r 的 $\mathbb{R}^d$ 中的闭球。于是，对每个 $x\in M$，限制映射 $\mathrm{Exp}_x|_{\mathbb{R}^d(r_0)}$ 是一个微分同胚，将 $\mathbb{R}^d(r_0)$ 映到 $B(x,r_0)$。邻域 $B(x,r_0)$ 中的流可通过 Exp_x 局部提升到 $\mathbb{R}^d(r_0)$。更准确地说，若对于一点 $y\in\mathbb{R}^d$ 和时刻 $t_1<0<t_2$，有

$$\varphi_t(\mathrm{Exp}_x(y))\in B(x,r_0),\quad \text{for each } t\in[t_1,t_2],$$

那么我们可以在 $\mathbb{R}^d(r_0)$ 上定义一个局部流：

$$\widetilde{\varphi_{x,t}}(y)=\left(\mathrm{Exp}_x|_{\mathbb{R}^d(r_0)}\right)^{-1}\circ\varphi_t\circ\mathrm{Exp}_x(y),\quad \text{for each } t\in[t_1,t_2].$$

在 x 的这个 Liao 缩放坐标图中，由向量场 $X\in\mathfrak{X}^1(M^d)$ 生成的流 φ_t^X 满足微分方程

$$\frac{dz}{dt}=\widehat{X}_x(z),$$

其中 $\widehat{X}_x(z)=D\left(\mathrm{Exp}_x|_{\mathbb{R}^d(r_0)}\right)^{-1}\circ X\circ\mathrm{Exp}_x(z)$。注意，$\mathrm{Exp}_x(0)=x$，因此

$$\left|\widehat{X}_x(0)\right|=|X(x)|.$$

由于 M 是紧致的，存在一个常数 $K_{\mathrm{E}}>1$ 使得

$$\max_{x\in M}\left\{\left\|D\mathrm{Exp}_x|_{\mathbb{R}^d(r_0)}\right\|,\ \left\|D\left(\mathrm{Exp}_x|_{\mathbb{R}^d(r_0)}\right)^{-1}\right\|\right\}<K_{\mathrm{E}}.$$

因此，如有必要，增大 $K_0>0$ 后，我们还可以假设

$$\max_{x\in M}\left\{\max_{p\in\mathbb{R}^d(r_0)}\left\{\left|\widehat{X}_x(p)\right|,\ \left\|D\widehat{X}_x(p)\right\|\right\}\right\}<K_0.$$

因此，对于每个 $x \in M$ 以及每个 $p \in \mathbb{R}^d$（r_0），

$$\left|\widehat{X}_x(p) - \widehat{X}_x(0)\right| < K_0|p| \leq K_0 r_0.$$

对于每个正则点 $x \in M$，取

$$e_1^x = \frac{X(x)}{|X(x)|}.$$

于是，在相应的坐标中，有 $\widehat{X}_x(0) = (|X(x)|, 0, 0, \cdots, 0)$。给定 $x \in M \backslash \mathrm{Sing}(X)$，对于每个 $y \in B(x, \beta_0^*|X(x)|)$，我们可以选择 T_yM 的一个标准正交基 $\{e_1^y, \cdots, e_d^y\}$，使得 $e_1^y = \frac{X(y)}{|X(y)|}$，从而对于任意两个点 y_1、$y_2 \in B(x, \beta_0^*|X(x)|)$ 以及每个 $j = 1$、2、$\cdots$、d，

$$d_S\left(e_j^{y_1}, e_j^{y_2}\right) < 2K_1 \frac{d(y_1, y_2)}{|X(x)|}.$$

在 $T_{B(x,\beta_0^*|X(x)|)}M$ 中的这些标准正交基下，我们可以得到关于 C^1 微分同胚 Exp 的范数$_x$的一致估计，如下面的引理 3.2所述。

引理 3.2. [20,引理 3.2] 存在一个常数 $K_2 > 1$ 使得对每个 $x \in M \backslash$奇点集(X) 以及任意两点 $y_1, y_2 \in B(x, \beta_0^*|X(x)|)$,

$$\left\| \left(\mathrm{Exp}_{y_1}^{-1} \circ \mathrm{Exp}_{y_2} - id_{\mathbb{R}^d}\right) |_{\mathbb{R}^d(r_0/2)} \right\|_{C^1} \leq K_2 \frac{d(y_1, y_2)}{|X(x)|},$$

其中 $\|\cdot\|_{C^1}$ 表示 C^1 范数。

3.2 影踪引理

“跟踪”这一概念由 Sinaĭ [45], 提出，他证明了 Anosov 微分同胚满足跟踪性质，而且每条伪轨道都被唯一一条真实轨道跟踪。本质上，跟踪描述的是动力系统的一条真实轨道始终处于给定伪轨道附近的情形。一致双曲微分同胚的影踪引理由 Bowen [4], 全面确立，此后得到了广泛研究（例如参见 [6, 40]）。然而，对于流而言，影踪引理比微分同胚的情形复杂得多。

在 [28], 中，Liao引入了“拟双曲串”的概念，表明即使在非一致双曲系统中，某些特殊类型的伪轨道仍可被真实轨道跟踪。Liao还给出了关于单个拟双曲串的第一个影踪引理，既适用于微分同胚 [27] ，也适用于流 [28, 30], ，表明若这样一条串的首尾充分接近，则它被一条周期轨道跟踪。随后，Gan [11]将这一结果推广到微分同胚情形下的拟双曲串序列。Han与Wen [15] 进一步将Gan的工作推广到 C^1 向量场，建立了流中拟双曲串序列的影踪引理。下文中，我们概述Liao关于流的影踪引理 [28, 30], ，它构成本文的重要基础。

定义 3.3。 设 Λ 是流 φ_t 的不变集，且设 $E \subset \mathcal{N}_{\Lambda \backslash Sing(X)}$ 是缩放线性 *Poincar´e* 流 ψ_t^* 的不变子丛。对于常数 $C > 0$、 $\eta > 0$ 和 $T > 0$，若点 $x \in \Lambda \backslash \mathit{Sing}(X)$ 被称为 $(C$、η、T、$E)$-ψ_t^*-收缩，则存在一个递增序列

次数 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n<\cdots$，满足 $t_n\to+\infty$ 和 $t_{i+1}-t_i\le T$，对每个 $i\in\mathbb{N}$，使得对于每个 $n\in\mathbb{N}$,

$$\prod_{i=0}^{n-1}\left\|\psi^*_{t_{i+1}-t_i}|_{E(\varphi_{t_i}(x))}\right\|\le Ce^{-\eta t_n}.$$

点 $x\in\Lambda\backslash Sing(X)$ 称为(C,η,T,E)-ψ_t^*-扩张的，如果对于向量场 $-X$而言，它是(C,η,T,E)-ψ_t^*-收缩的。

定义 3.4。给定 $\eta>0$, $T>0$。对于每个 $x\in M\backslash Sing(X)$和 $T_0>T$，若存在时间划分：，则称轨道弧 $\varphi_{[0,T_0]}$关于直和分裂 $\mathcal{N}_x=E(x)\oplus F(x)$为$(\eta,T)$-$\psi_t^*$-拟双曲的，

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_k=T_0,\ with\ t_{i+1}-t_i\le T\ for\ i=0,\cdots,k-1,$$

使得对于每个 $n=0,1,\cdots,k-1$,

$$\prod_{i=0}^{n-1}\left\|\psi^*_{t_{i+1}-t_i}|_{E(\varphi_{t_i}(x))}\right\|\le e^{-\eta t_n},\quad \prod_{i=n}^{k-1}m\left(\psi^*_{t_{i+1}-t_i}|_{F(\varphi_{t_i}(x))}\right)\ge e^{\eta(t_k-t_n)},$$

and

$$\frac{\left\|\psi^*_{t_{n+1}-t_n}|_{E(\varphi_{t_n}(x))}\right\|}{m\left(\psi^*_{t_{n+1}-t_n}|_{F(\varphi_{t_n}(x))}\right)}\le e^{-\eta(t_{n+1}-t_n)}.$$

以下关于奇异流的影踪引理由 Liao 提出 [30], ，它为我们寻找周期点提供了一种方法。

定理 3.5。假设 $X\in\mathfrak{X}^1(M)$。设 $\Lambda\subset M\backslash Sing(X)$ 为关于缩放线性庞加莱流 $'$具有支配分裂 $\mathcal{N}_\Lambda=E\oplus F$ 的不变集。给定 $\eta>0$和 $T>0$。对于 $\alpha>0$ 和 $\varepsilon>0$，存在常数 $\mathcal{D}=\mathcal{D}(\alpha,\varepsilon)>0$，使得对于每个$(\eta,T)$-$\psi_t^*$-拟双曲轨道段 $\varphi_{[0,T_0]}(x)$ 满足

- $d(x,\text{奇异点}(X))>\alpha$ 和 $d(\varphi_{T_0}(x),\text{奇异点}(X))>\alpha$;
- $x\in\Lambda$, $\varphi_{T_0}(x)\in\Lambda$ 和 $d(x,\varphi_{T_0}(x))<\mathcal{D}$;

存在一个严格递增的 C^1 函数 $\theta:[0,T_0]\to\mathbb{R}$ 以及一个周期点 $p\in M\backslash$奇异点（X），满足以下性质:

（1） $\theta'(t)<1+\varepsilon$，对每个 $t\in[0,T_0]$;

（2） p 是周期为 $\theta(T_0)$: $\varphi_{\theta(T_0)}(p)$的周期点 $=p$;

（3） $d(\varphi_t(x)\varphi_{\theta(t)}(p))<\varepsilon|X(\varphi_t(x))|$，对每个 $t\in[0,T_0]$。

4 周期测度的稠密性：主定理的证明

本节证明**主定理**。设 $X\in\mathfrak{X}^*(M)$ 是一个星向量场， $\mu\in\mathcal{M}(X)$ 是 X 的一个遍历双曲不变测度。Shi、Gan 和 Wen [43] 证明了 μ 关于缩放后的线性庞加莱流 ψ_t^* 是双曲的。因此，我们有奥塞莱德茨双曲分裂

$$\mathcal{N}=E^s\oplus E^u.$$

通过分析相对于 μ 的缩放线性庞加莱′流 ψ_t^* 的李雅普诺夫指数，我们完成了**主定理**的证明。

主定理的证明主定理。 我们根据相对于 μ 的 ψ_t^* 的李雅普诺夫指数，将证明分为两种情况。

情形 1：所有指数具有相同的符号。假设 ψ_t^*相对于 μ 的所有李雅普诺夫指数均为负（或均为正）。那么， μ 是一个支撑在吸引（分别为排斥）周期轨道上的遍历测度。

情形 2：符号混合。假设 ψ_t^* 相对于 μ的李雅普诺夫指数既非全为负，也非全为正；等价地，稳定丛 E^s 和不稳定丛 E^u 均非平凡。在这种情况下，奥塞列杰茨分裂本身呈现出控制结构。具体而言，我们有如下断言。

断言。 对于缩放后的线性庞加莱 $\prime$流 ψ_t^*，奥塞列杰茨分裂 $\mathcal{N}_\Gamma = E^s \oplus E^u$ 是一个支配分裂。

断言的证明。 对于星向量场 μ 的一个非平凡遍历测度 $X \in \mathfrak{X}^*(M)$，Li、Shi、Wang 和 Wang [21]证明了缩放后的线性庞加莱 $\prime$流 ψ_t^* 存在支配分裂

$$\mathcal{N}_{\mathrm{supp}(\mu)\setminus \mathrm{Sing}(X)} = E \oplus F,$$

其中 $\dim(E) = \mathrm{Ind}(\mu)$。因此，只需证明该支配分裂与奥塞列杰茨分裂 $\mathcal{N}_\Gamma = E^s \oplus E^u$ 重合。

Let

$$\lambda^-(\mu) = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log \|\psi_t^*|_{E^s}\|, \qquad \lambda^+(\mu) = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log m\left(\psi_t^*|_{E^u}\right).$$

给定一点 $x \in (\Gamma \cap \mathrm{supp}(\mu)) \setminus \mathrm{Sing}(X)$，固定

$$\epsilon \in \left(0, \frac{\min\{|\lambda^-(\mu)|,\ \lambda^+(\mu)\}}{8}\right)$$

充分小。对于奥塞列杰茨分裂 $\mathcal{N}_x = E^s(x) \oplus E^u(x)$，存在正常数$T_0 > 0$，使得对每个 $t \geq T_0$,

$$|\psi_t^*(v)| \leq e^{(\lambda^-(\mu)+\epsilon)t}|v|, \text{ for every nonzero vector } v \in E^s(x), \text{ and}$$

$$m\left(\psi_t^*(v)\right) \geq e^{(\lambda^+(\mu)-\epsilon)t}|v|, \text{ for every nonzero vector } v \in E^u(x).$$

由支配分裂的定义，存在两个常数 $C \geq 1$ 和 $\lambda > 0$，使得对于直和分解 $\mathcal{N}_x = E(x) \oplus F(x)$ 以及每个 $t \geq 0$,

$$\frac{\left\|\psi_t^*|_{E(x)}\right\|}{\left\|\psi_t^*|_{F(x)}\right\|} \leq Ce^{-\lambda t}.$$

现在反设

$$E^s(x) \nsubseteq E(x).$$

则存在非零向量 $u \in E(x)\setminus E^s(x)$。另一方面，由于

$$\dim(E^s(x)) = \mathrm{Ind}(\mu) = \dim(E(x)),$$

我们还有

$$E(x) \nsubseteq E^s(x).$$

因此，存在一个非零向量 $v \in E^s(x) \backslash E(x)$。因此，存在一个向量分解

$$u = u_1 + u_2, \text{ where } u_1 \in E^s(x),\, u_2 \in E^u(x) \text{ and } u_2 \neq 0,$$

在 u un der 直和分解 $\mathcal{N}_x = E^s(x) \oplus E^u(x)$ 下。同样，存在一个向量分解 n

$$v = v_1 + v_2, \text{ where } v_1 \in E(x),\, v_2 \in F(x) \text{ and } v_2 \neq 0,$$

在直和分解 $\mathcal{N}_x = E(x) \oplus F(x)$ 下的 v。因此，

$$\begin{aligned}\frac{|\psi_t^*(u)|}{|\psi_t^*(v)|} &= \frac{|\psi_t^*(u_1) + \psi_t^*(u_2)|}{|\psi_t^*(v)|} \geq \frac{|\psi_t^*(u_2)| - |\psi_t^*(u_1)|}{|\psi_t^*(v)|} \geq \frac{e^{(\lambda^+(\mu)-\epsilon)t}|u_2| - e^{(\lambda^-(\mu)+\epsilon)t}|u_1|}{e^{(\lambda^-(\mu)+\epsilon)t}|v|} \\ &= \frac{e^{(\lambda^+(\mu)-\lambda^-(\mu)-2\epsilon)t}|u_2| - |u_1|}{|v|} \to +\infty \quad (\text{as } t \to +\infty),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{|\psi_t^*(v)|}{|\psi_t^*(u)|} &= \frac{|\psi_t^*(v_1) + \psi_t^*(v_2)|}{|\psi_t^*(u)|} \geq \frac{|\psi_t^*(v_2)| - |\psi_t^*(v_1)|}{|\psi_t^*(u)|} \geq \frac{|\psi_t^*(v_2)| - Ce^{-\lambda t}|\psi_t^*(v_2)|}{|\psi_t^*(u)|} \\ &= \left(1 - Ce^{-\lambda t}\right) \frac{|\psi_t^*(v_2)|}{|\psi_t^*(u)|} \geq \left(1 - Ce^{-\lambda t}\right) C^{-1} e^{\lambda t} \frac{|v_2|}{|u|} \to +\infty \quad (\text{as } t \to +\infty).\end{aligned}$$

这导 致矛盾。因此，假设 $E^s(x) \not\subset E(x)$ 不成立，故

$$E^s(x) = E(x).$$

由于 $\dim E^s(x) = \dim E(x)$，可得

$$E^u(x) = F(x)$$

同样成立。因此，两个直和分解 $\mathcal{N}_\Gamma = E^s \oplus E^u$ 和 $\mathcal{N}_\Gamma = E \oplus F$ 重合。至此，命题得证。

□

令 $C(M)$ 为 M 上所有连续实值函数构成的空间，并令 $\{f_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 为 $C(M)$ 的一个可数稠密子集。对于任意两个测度 μ， $\nu \in \mathcal{M}(X)$，定义

$$d_{\mathcal{M}}(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\left|\int_M f_i d\mu - \int_M f_i d\nu\right|}{2^i \|f_i\|}.$$

则 $d_{\mathcal{M}}(\cdot,\ \cdot)$ 是一个度量，它在 $\mathcal{M}(X)$ 上诱导弱* 拓扑。给定一个遍历双曲不变正则测度 μ，对于每个 $\varepsilon > 0$，我们将证明存在一个周期测度 μ_p 使得

$$d_{\mathcal{M}}(\mu, \mu_p) < \varepsilon.$$

首先，选取一个充分大的正整数 n，使得对于每个不变测度 ν，以下结论成立

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{\left|\int_M f_i d\mu - \int_M f_i d\nu\right|}{2^i \|f_i\|} \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i-1}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{△}$$

根据伯克霍夫遍历定理，存在一个 φ-不变集 Λ_B，其 μ测度为满测度，使得对于每个 $x \in \Lambda_B$ 以及每个 $f \in C$（M），

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t(x)) dt = \int_M f d\mu.$$

因此， 存在一个常数 $T_1 > 1$，使得对于所有 $T \geq T_1$、所有 $x \in \Lambda_B$ 以及每个 $i = 1,\ 2,\ \cdots, n$,

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f_i(\varphi_t(x))dt - \int_M f_i d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{4n} \cdot \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ 2^i \left\| f_i \right\| \right\}. \qquad (\triangle\triangle)$$

根据该断言，双曲Oseledec分裂

$$\mathcal{N}_\Gamma = E^s \oplus E^u$$

缩放后的线性庞加莱流相对于 μ是一个支配分裂。根据 [49,引理 5。1], 对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个常数 $T_2 = T(\epsilon) > 0$ 使得对于 μ-几乎处处的 $x \in M$以及每个 $T \geq T_2$，有

$$\lim_{J \to +\infty} \frac{1}{JT} \sum_{i=0}^{J-1} \log \left\| \psi_T^* |_{E^s(\varphi_{iT})} \right\| \text{ exists and is contained in } [\lambda^-(\mu), \lambda^-(\mu) + \epsilon),$$

and

$$\lim_{J \to +\infty} \frac{1}{JT} \sum_{i=0}^{J-1} \log \left\| \psi_{-T}^* |_{E^u(\varphi_{-iT})} \right\| \text{ exists and is contained in } (-\lambda^+(\mu) - \epsilon, -\lambda^+(\mu)].$$

Let

$$\chi = \min \left\{ \left| \lambda^-(\mu) \right|,\ \lambda^+(\mu) \right\},\ T_0 = \max \left\{ T_1,\ T_2 \right\},\ \eta_0 = (\chi - \epsilon/4) T_0.$$

那么存在一个正整数 $N = N(T_0)$，使得对于每个整数 $J \geq N$ 以及 μ-几乎处处的$x \in M$，有

$$\prod_{i=0}^{J-1} \left\| \psi_{T_0}^* |_{E^s(\varphi_{iT_0}(x))} \right\| \leq e^{-(\chi - \epsilon/4) JT_0},\ \prod_{i=0}^{J-1} m \left(\psi_{T_0}^* |_{E^u(\varphi_{iT_0}(x))} \right) \geq e^{(\chi - \epsilon/4) JT_0},$$

and

$$\frac{\left\| \psi_{T_0}^* |_{E^s(x)} \right\|}{m \left(\psi_{T_0}^* |_{E^u(x)} \right)} \leq e^{-T_0(\chi - \epsilon/4)}.$$

对于每个 $C > 0$，**佩辛块**$\Lambda_{\eta_0}^{T_0}(C)$定义为

$$\Lambda_{\eta_0}^{T_0}(C) = \left\{ x \in \Gamma : \prod_{i=0}^{J-1} \left\| \psi_{T_0}^* |_{E^s(\varphi_{iT_0}(x))} \right\| \leq C e^{-J\eta_0},\ \forall\ J \geq 1, \right.$$
$$\left. \prod_{i=0}^{J-1} m \left(\psi_{T_0}^* |_{E^u(\varphi_{iT_0}(x))} \right) \geq C^{-1} e^{J\eta_0},\ \forall\ J \geq 1,\ d(x, \mathrm{Sing}(X)) \geq \frac{1}{C} \right\}.$$

根据 [49, 命题 5.3], ， 每个集合 $\Lambda_{\eta_0}^{T_0}(C)$都是紧致的，并且

$$\mu \left(\Lambda_{\eta_0}^{T_0}(C) \right) \to 1 \text{ as } C \to +\infty.$$

记

$$K = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left\| f_i \right\| \right\}.$$

取 $\gamma > 0$ 足够小，使得

$$(2K + 1)\gamma < \frac{\varepsilon}{4n} \cdot \min_{1 \leq i \leq n} \{ 2^i \left\| f_i \right\| \}.$$

回顾一下，对于每个 $x \in M$，都有 $|X(x)| \leq K_0$。由于每个 f_i $(1 \leq i \leq n)$ 在 M 上一致连续，因此存在一个足够小的常数 $\xi \in [0, \gamma]$，使得对于任意两点 $x,\ y \in M$，只要 $d(x,\ y) \leq \xi K_0$，且对于每个 $i = 1,\ \cdots,\ n$,

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \gamma.$$

取 $C > 0$ 足够大，使得 $\mu\left(\Lambda_{\eta_0}^{T_0}(C)\right)$ 可以任意接近 1。对于这个固定的 C，存在一个正整数 $j_0 = j_0(C) \in \mathbb{N}^+$ 使得 $C < e^{\frac{j_0 T_0 \epsilon}{4}}$。因此，对于每个 $x \in \Lambda_{\eta_0}^{T_0}(C)$ 以及每个整数 $J \geq 1$，都有

$$\prod_{i=0}^{J-1} \left\| \psi^*_{j_0 T_0}|_{E^s(\varphi_{i j_0 T_0}(x))} \right\| \leq e^{-(\chi - \epsilon/2) J j_0 T_0},\ \prod_{i=0}^{J-1} m\left(\psi^*_{j_0 T_0}|_{E^u(\varphi_{i j_0 T_0}(x))} \right) \geq e^{(\chi - \epsilon/2) J j_0 T_0}.$$

令 $T = j_0 T_0,\ \ \eta = (\chi - \epsilon/2) j_0 T_0$，我们考虑集合

$$\Lambda_\eta^T(C) = \Bigg\{ x \in \Gamma : \prod_{i=0}^{J-1} \left\| \psi^*_T|_{E^s(\varphi_{iT}(x))} \right\| \leq e^{-J\eta},\ \forall\ J \geq 1,$$
$$\prod_{i=0}^{J-1} m\left(\psi^*_T|_{E^u(\varphi_{iT}(x))} \right) \geq e^{J\eta},\ \forall\ J \geq 1,\ d(x, \mathrm{Sing}(X)) \geq \frac{1}{C} \Bigg\}.$$

取一点 $x_0 \in \Lambda_\eta^T(C) \cap \mathrm{supp}(\mu)$。由 $X(x)$ 的连续性，且由于 $X(x_0) \neq 0$，存在一个充分小的常数 $r > 0$，使得对于每个 $x \in B(x_0,\ r)$,

$$B(x_0, r) \subset B\left(x, \xi |X(x)|\right).$$

令 $\varepsilon' =$ 最小值 $\{\varepsilon,\ \xi\}$。对于每个 $\alpha \in (0, 1/C)$，定理 3.5 给出了一个正常数

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\alpha, \varepsilon') > 0.$$

由于 $\mu\left(B(x_0, r) \cap \Lambda_\eta^T(C) \cap \mathrm{supp}(\mu) \cap \Lambda_B\right) > 0$，根据庞加莱复现定理，存在一点 $y \in B(x_0,\ r) \cap \Lambda_\eta^T(C) \cap \Lambda_B$ 以及一个充分大的整数 l，使得

$$\varphi_{lT}(y) \in B(x_0, r) \cap \Lambda_\eta^T(C) \cap \mathrm{supp}(\mu) \cap \Lambda_B \text{ and } d(y, \varphi_{lT}(y)) < \mathcal{D}.$$

因此，我们得到一个满足以下条件的 (η, T)-ψ_t^*-拟双曲轨道段 $\varphi_{[0,lT]}(y)$:

- $d(y,\ \mathrm{Sing}(X)) > \alpha$ 且 $d(\varphi_{lT}(y),\ \mathrm{Sing}(X)) > \alpha$;
- $y \in \Lambda_\eta^T(C),\ \ \varphi_{lT}(y) \in \Lambda_\eta^T(C)$ 且 $d(y, \varphi_{lT}(y)) < \mathcal{D}$。

根据定理 3.5，存在一个严格递增的 C^1 函数 $\theta:\ [0, lT] \to \mathbb{R}$ 以及一个周期点 $p \in M$，使得

(1) $\theta(0) = 0$ and $1 - \gamma \leq 1 - \xi < \theta'(t) < 1 + \xi \leq 1 + \gamma$, for every $t \in [0, lT]$;

(2) p 是一个周期为 $\theta(lT)$ 的周期点: $\varphi_{\theta(lT)}(p) = p$;

(3) 对于每个 $t \in [0, lT]$，都有 $d(\varphi_t(y)\, \varphi_{\theta(t)}(p)) < \varepsilon' |X(\varphi_t(y))| < \xi |X(\varphi_t(y))|$。

因此，对于每个 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\theta(lT)}\int_0^{\theta(lT)} f_i(\varphi_t(p))dt-\frac{1}{lT}\int_0^{\theta(lT)} f_i(\varphi_t(p))dt\right| &\le \left|\frac{\theta(lT)}{lT}-1\right|\cdot\frac{1}{\theta(lT)}\int_0^{\theta(lT)} f_i(\varphi_t(p))dt\\ &\le \gamma K.\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{lT}\int_0^{\theta(lT)} f_i(\varphi_s(p))ds-\frac{1}{lT}\int_0^{lT} f_i(\varphi_t(x))dt\right|=\frac{1}{lT}\left|\int_0^{lT} f_i(\varphi_{\theta(t)}(p))d\theta(t)-\int_0^{lT} f_i(\varphi_t(x))dt\right|\\ \le&\frac{1}{lT}\left|\int_0^{lT} f_i(\varphi_{\theta(t)}(p))(\theta'(t)-1)dt\right|+\frac{1}{lT}\left|\int_0^{lT}\left[f_i(\varphi_{\theta(t)}(p))-f_i(\varphi_t(x))\right]dt\right|\\ \le&\gamma K+\gamma.\end{aligned}$$

因此，

$$\left|\frac{1}{\theta(lT)}\int_0^{\theta(lT)} f_i(\varphi_t(p))dt-\frac{1}{lT}\int_0^{lT} f_i(\varphi_t(x))dt\right|<\frac{\varepsilon}{4n}\cdot\min_{1\le i\le n}\{2^i\left\|f_i\right\|\}.$$

记 μ_p 为支撑在周期轨道 Orb(p) 上的不变测度。由方程(△)和(△△)可得

$$\begin{aligned}d_{\mathcal{M}}(\mu,\mu_p)&=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\left|\int_M f_i d\mu-\int_M f_i d\mu_p\right|}{2^i\left\|f_i\right\|}\\ &=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left|\int_M f_i d\mu-\int_M f_i d\mu_p\right|}{2^i\left\|f_i\right\|}+\sum_{i=n+1}^{+\infty}\frac{\left|\int_M f_i d\mu-\int_M f_i d\mu_p\right|}{2^i\left\|f_i\right\|}\\ &\le\sum_{i=1}^{n}\frac{\left|\int_M f_i d\mu-\frac{1}{lT}\int_0^{lT} f_i(\varphi_t(y))dt+\frac{1}{lT}\int_0^{lT} f_i(\varphi_t(y))dt-\int_M f_i d\mu_p\right|}{2^i\left\|f_i\right\|}+\sum_{i=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^{i-1}}\\ &\le\sum_{i=1}^{n}\frac{\left|\int_M f_i d\mu-\frac{1}{lT}\int_0^{lT} f_i(\varphi_t(y))dt\right|+\left|\frac{1}{lT}\int_0^{lT} f_i(\varphi_t(y))dt-\frac{1}{\theta(lT)}\int_0^{\theta(lT)} f_i(\varphi_t(p))dt\right|}{2^i\left\|f_i\right\|}+\frac{\varepsilon}{2}\\ &<\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{\varepsilon}{4n}\cdot\min\limits_{1\le i\le n}\left\{2^i\left\|f_i\right\|\right\}+\frac{\varepsilon}{4n}\cdot\min\limits_{1\le i\le n}\left\{2^i\left\|f_i\right\|\right\}}{2^i\left\|f_i\right\|}+\frac{\varepsilon}{2}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2n}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

这就完成了**主定理**的证明。 □

参考文献

[1] F. Abdenur、C. Bonatti 和 S. Crovisier， C^1-泛型微分同胚，《以色列数学杂志》，**183**(2011), 1–60. 1

[2] N. Aoki，无环的 Axiom A 微分同胚集合，《巴西数学学会公报》(新系列)，23 (1992)，第 1-2 期，21–65。 5[3] C. Bonatti 和 A. da Luz，星流与多奇异双曲性，《欧洲数学学会杂志》，23 (2021)，第 8 期，2649–2705。 5[4] R. Bowen，Axiom A 微分同胚的马尔可夫分割，《美国数学杂志》，92 (1970)，725–747。 1, 10[5] K. Burns、H. Masur 和 A. Wilkinson，韦伊–彼得森测地流是遍历的，Ann. of Math. (2)，175 (2012)，第 2 期，835–908。 8[6] S. N. Chow、X. B. Lin 和 K. J. Palmer，带有半线性抛物方程应用的影踪引理，工业与应用数学学会数学分析杂志，20 (1989)，第 3 期，547–557。 10[7] S. Crovisier，同宿交点的产生：部分双曲系统中心动力学的一个模型，Ann. of Math. (2)，172 (2010)，第 3 期，1641–1677。 2[8] S. Crovisier 和 D. W. Yang，三维向量场的同宿切触与奇异双曲性，预印本，(2017)，arXiv:1702.05994。 9[9]A. da Luz，具有不同指标奇点的星流，预印本，(2020)，arXiv:1806.09011v2。 5[10] J. Franks，微分同胚稳定性的必要条件，，Trans. Amer. Math. Soc.，158 (1971)，301–308。 5[11] S. B. Gan，广义影踪引理，离散与连续动力系统，8 (2002)，第 3 期，627–632。 10[12] S. B. Gan 和 L. Wen，无奇点星流满足 Axiom A 和无环条件，Invent. Math.，164 (2006)，第 2 期，279–315。 5[13] S. B. Gan 和 D. W. Yang，三维奇异流的莫尔斯–斯梅尔系统与马蹄，Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er. (4)，51 (2018)，第 1 期，39–112。 9[14] J. Guckenheimer，一个奇异的奇异吸引子，载于《霍普夫分岔及其应用》，应用数学科学丛书 19，Springer New York，纽约，NY，1976，368–381。 2, 5[15] B. Han 和 X. Wen，流的拟双曲串影踪引理，微分方程杂志，264 (2018)，第 1 期，1–29。 10[16] S. Hayashi，$\mathcal{F}^1(M)$中的微分同胚满足 Axiom A，《遍历理论与动力系统》，12 (1992)，第 2 期，233–253。 5[17] M. Hirayama，周期概率测度在不变测度集合中稠密，离散与连续动力系统，9 (2003)，第 5 期，1185–1192。 1[18] A. Katok，微分同胚的李雅普诺夫指数、熵与周期轨道，Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math.，51 (1980)，137–173。 1[19] M. Li、S. B. Gan 和 L. Wen，通过扩展线性庞加莱流的方法构造鲁棒传递奇异集，离散与连续动力系统，13 (2005)，第 2 期，239–269。 3, 5

[20] M. Li、C. Liang 和 X. Z. Liu, 《非一致双曲奇异流的一个闭轨引理》, 《数学物理通讯》, 405（2024年）, 第 8 期, 论文编号 195, 35 页。2, 8, 10[21] M. Li、Yi Shi、S. R. Wang 和 X. D. Wang, 《星向量场的中间熵测度》, 《以色列数学杂志》, 240（2020年）, 第 2 期, 791–819。12[22] T. Y. Li 和 J. A. Yorke, 《周期三蕴含混沌》, 《美国数学月刊》, 82（1975年）, 第 10 期, 985–992。1[23] Z. Lian 和 L. S. Young, 《希尔伯特空间上半流的李雅普诺夫指数、周期轨道与马蹄》, 《美国数学会杂志》, 25（2012年）, 第 3 期, 637–665。1, 2[24] C. Liang、G. Liao 和 W. X. Sun, 《关于奥塞列杰茨分裂逼近性质的一则注记》, 《美国数学会会刊》, 142（2014年）, 第 11 期, 3825–3838。1[25] C. Liang、G. Liu 和 W. X. Sun, 《非一致双曲系统中不变测度与奥塞列杰茨分裂的逼近性质》, Trans. Amer. Math. Soc., 361（2009年）, 第 3 期, 1543–1579。1[26] S. T. Liao, 《某类微分系统的一个基本性质》, 《数学学报》, 22（1979年）, 第 3 期, 316–343。9[27] S. T. Liao, 《周期轨道的一个存在定理》, 《北京大学学报》, （1979年）, 第 1 期, 1–20。5, 10[28] S. T. Liao, 《关于稳定性猜想》, 《数学年刊（A辑）》, 1（1980年）, 第 1 期, 8–30。10[29] S. T. Liao, 《阻碍集 II》, 《北京大学学报》, （1981年）, 第 2 期, 1–36。5[30] S. T. Liao, 《常微分系统的若干一致性性质及周期轨道存在定理的推广》, 《北京大学学报》, （1985年）, 第 2 期, 1–19。9, 10, 11[31] S. T. Liao, 《向量场的 (η, d)-可压缩轨道》, 《系统科学与数学》, 2（1989年）, 第 3 期, 193–227。3, 9[32] E. N. Lorenz, 《确定性非周期流》, 《大气科学杂志》, 20（1963年）, 第 2 期, 130–141。2[33] Y. S. Lu 和 W. L. Wu, 《三维流形上星向量场的双曲测度的李雅普诺夫指数》, C^1 预印本, （2025年）, arXiv: 2507.23605。2[34] X. Ma, 《可分巴拿赫空间上半流的周期轨道与马蹄的存在性》, 《变分法与偏微分方程》, 61（2022年）, 第 6 期, 论文编号 217, 37 页。1[35] R. Ma˜n´e, 《一个遍历闭合引理》, Ann. of Math.（第 2 辑）, 116（1982年）, 第 3 期, 503–540。1, 5[36] R. Metzger 和 C. Morales, 《截面双曲系统》, 《遍历理论与动力系统》, 28（2008年）, 第 5 期, 1587–1597。5[37] C. A. Morales、M. J. Pacifico 和 E. R. Pujals, 《三维流的鲁棒传递奇异集是部分双曲吸引子或排斥子》, Ann. of Math.（第 2 辑）, 160（2004年）, 第 2 期, 375–432。5

[38] V. Oseledec, 《乘法遍历定理：动力系统的特征李雅普诺夫指数》, Trudy Moskov. Mat. Obš˘C., 19（1968）, 179–210。6[39] J. Palis 和 S. Smale, 《结构稳定性定理》, 《Global Analysis》（纯数学专题讨论会论文集，第 XIV、XV、XVI 卷，伯克利，加利福尼亚州，1968）, 纯数学专题讨论会论文集，XIV–XVI，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1970年，第 223–231 页。5[40] S. Y. Pilyugin, 《动力系统中的跟踪》, 数学讲义，第 1706 卷，施普林格出版社，柏林，1999年。10[41] C. Pugh 和 M. Shub, 《流的 Ω-稳定性定理》, Invent. Math., 11（1970）, 150–158。5[42] E. R. Pujals 和 M. Sambarino, 《曲面微分同胚的同宿切触与双曲性》, Ann. of Math.（第 2 辑）, 151（2000）, 第 3 期，961–1023。2[43] Y. Shi、S. B. Gan 和 L. Wen, 《关于星流的奇异双曲性》, J. Mod. Dyn., 8（2014）, 第 2 期，191–219。5，11[44] K. Sigmund, 《Axiom A微分同胚不变测度的泛性质》, Invent. Math., 11（1970）, 99–109。1[45] J. G. Sina˘ı, 《遍历理论中的吉布斯测度》, Uspehi Mat. Nauk，27（1972）, 第 4(166) 期，21–64。10[46] S. Smale, 《Ω-稳定性定理》, 《Global Analysis》（纯数学专题讨论会论文集，第 XIV、XV、XVI 卷，伯克利，加利福尼亚州，1968）, 纯数学专题讨论会论文集，XIV–XVI，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1970年，第 289–297 页。5[47] Z. Q. Wang 和 W. X. Sun, 《双曲测度与双曲周期轨道的李雅普诺夫指数》, Trans. Amer. Math. Soc.，362（2010）, 第 8 期，4267–4282。1[48] X. Wen 和 L. Wen, 《流的重标度扩张性》, Trans. Amer. Math. Soc.，371（2019）, 第 5 期，3179–3207。9[49] Wu, W. L.、Yang, D. W. 和 Zhang, Y., 《向量场周期轨道的增长率》, Adv. Math.，346（2019）, 170–193。14

Sun Qimai 江苏师范大学数学与统计学院，徐州，
221116，中国 sunqimajsnu@163.com

Wang Guangwa 江苏师范大学数学与统计学院，徐州，
221116，中国 wanggw7653@163.com

Wanlou Wu 江苏师范大学数学与统计学院，徐州，
221116，中国 wuwanlou@163.com