关于某些类型至多为一的实直线排列的有界性

Marek Janasz

2026年2月6日

arXiv:2602.05409v1 [math.AG] 5 Feb 2026

摘要

本文证明，交点重数至多为五的类型至多为一的实直线排列满足某些有界性性质。特别地，我们证明，交点重数不超过 5 的含有 d 条直线的自由实排列至多有 522 条直线，因此这类排列仅存在有限多个组合类型。

1 引言

实射影平面与复射影平面中的直线排列研究处于组合学、代数几何与奇点理论的交汇处。过去几十年来，人们投入了大量精力，试图理解排列的代数性质（如自由性或加一生成）如何与其组合结构相互作用，尤其是如何与交点的分布及其重数相互作用。

这一领域的一个核心概念是自由平面曲线，由 K. Saito [10] 在一般情形下引入，后来又在超平面排列中得到了广泛发展。自由性可以通过雅可比关系模从代数角度刻画，或者等价地，通过对数向量场层的分裂型来刻画 [4]。自由排列具有显著的结构性质，但其存在受到组合与几何条件的严格限制。该领域的基础课题之一，是确定某些排列类是否有界，也就是说，在对交点重数施加适当限制后，直线的数量是否存在一个绝对上界。

对于实直线排列，由于存在额外的几何不等式，情况尤其微妙，例如 Melchior 不等式或 Shnurnikov 不等式 [8, 12], ，这些不等式没有直接的复数对应物。这些不等式通常会对实排列可能具有的组合学性质施加强有力的限制，并已成功用于在若干情形下证明有界性结果。特别地，对于具有二重点、三重点和四重点的实自由直线排列，已有有界性结果 [9]。

近来，加一生成曲线这一类作为自由曲线与近自由曲线的一种自然推广而出现。Abe 在超平面排列的背景下引入并系统研究了这些对象 [1], ；随后，Dimca 和 Sticlaru [5] 在平面曲线的背景下对其进行了研究。根据雅可比 syzygy 的复杂程度，这些对象构成了平面曲线层级结构中的下一个层次。从直线排列的角度来看，这一类

为研究有界性现象在自由情形之外能延伸多远提供了一个自然的试验场。

本文旨在针对交点重数满足明确约束、类型至多为一的实直线排列，建立新的有界性结果。我们的第一个主要结果针对交点重数至多为五的实自由直线排列。我们证明，这类排列是有界的，更确切地说，其直线数至多为 522。证明结合了由自由性导出的代数约束、精细的组合计数论证，以及关于实直线排列的经典不等式。

我们的第二个主要结果讨论仅有二重点、三重点和四重点的实加一生成直线排列。在这种情况下，我们证明了一个强得多的上界，表明直线数至多为 47。这说明有界性在自由排列类之外仍然成立，并凸显了加一生成条件与较低交点重数相结合时所施加的刚性。

本文结构如下。第 2 节回顾雅可比 syzygies、米尔诺代数，以及自由性、加一生成和平面曲线类型等概念所需的背景知识。第 3 节研究点的重数至多为五的实自由直线排列：我们先建立关于高重数交点的组合上界，再证明主要有界性定理。第 4 节讨论交点重数至多为四的实加一生成直线排列，并得到相应的有界性结果。

2 预备知识

我们沿用 [4] 中引入的记号。记 $S := \mathbb{C}[x, y, z]$ 为 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 的齐次坐标环。设 $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 是由齐次多项式 $f \in S_d$ 定义的、次数为 d 的约化平面曲线。记 J_f 为 f 的雅可比理想，它由所有偏导数生成，即

$$J_f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle.$$

我们考虑 f 的分次 S-模雅可比关系模，其定义为

$$AR(f) = \{(a, b, c) \in S^3 : af_x + bf_y + cf_z = 0\}.$$

f 的非平凡雅可比关系的最小次数定义为

$$\operatorname{mdr}(f) := \min\{r \geq 0 : AR(f)_r \neq 0\}.$$

与 f 相关的米尔诺代数定义为

$$M(f) := S/J_f.$$

定义 **命题 2.1.** 若约化平面曲线 C 的 Milnor 代数是一个 m-*syzygy* 曲线，则称其为.....

$M(f)$ 存在如下形式的最小分次自由分解

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{m-2} S(-e_i) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{m} S(1-d-d_i) \longrightarrow S^3(1-d) \longrightarrow S \longrightarrow M(f) \longrightarrow 0,$$

其中整数满足 $e_1 \leq e_2 \leq \ldots \leq e_{m-2}$ 且 $1 \leq d_1 \leq \ldots \leq d_m$. 有序的$m$元组 $(d_1$、.....、 $d_m)$ 称为 C的指数。

定义 2.2 ([2, 定义 1.1])。设 $C = \{f = 0\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 是次数为d的约化曲线，且 d_1 和 d_2 是雅可比关系模 $AR(f)$的最小生成元系中次数最小的两个。我们称 C 具有类型 $t(C)$，其中正整数 $t(C)$定义为

$$t(C) = d_1 + d_2 + 1 - d.$$

以下定义出自 [2, 定理 1.1]。

定义 2.3。如果且仅如果 $t(C) = 0$，则称约化平面曲线 $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 是自由的，其指数为 (d_1, d_2)。

定义 2.4。若约化平面曲线 $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 是加一生成 的，且指数为（d_1, d_2, d_3），当且仅当 $t(C) = 1$。

为了判定给定曲线是自由曲线还是加一生成曲线，我们可以使用以下关键结果。

定理 2.5 (du Plessis – Wall, [7])。设 $C = \{f = 0\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 是次数为d的约化曲线，并设 $d_1 = \mathrm{mdr}(f)$。记 C的总 *Tjurina* 数为 $\tau(C)$。则有以下两种情形。

a) 若 $d_1 < d/2$，则 $\tau(C) \leq \tau_{max}(d, d_1) = (d-1)(d-d_1-1) + d_1^2$，且等号成立当且仅当曲线 C 是自由曲线。

b) 若 $d/2 \leq d_1 \leq d-1$，则 $\tau(C) \leq \tau_{max}(d, d_1)$，在这种情形下，我们令

$$\tau_{max}(d, d_1) = (d-1)(d-d_1-1) + d_1^2 - \binom{2d_1 - d + 2}{2}.$$

命题 2.6 (Dimca – Sticlaru, [5])。设 $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 是由$f = 0$ 定义的次数为 $d \geq 3$的约化平面曲线，恰有三个指数为(d_1, d_2, d_3)的最小关系。则 C 是加一生成的，当且仅当其总 *Tjurina* 数满足

$$\tau(C) = (d-1)^2 - d_1(d-d_1-1) - (d_3 - d_2 + 1).$$

3 重数至多为五的点的实自由直线排列的有界性

我们将使用以下由 [12] 得出的不等式。对于直线排列 $\mathcal{L}$，我们用 $t_k = t_k(\mathcal{L})$ 表示 $\mathcal{L}$ 中 k 重交点的数量。

定理 3.1 (Shnurnikov)。 设 $L \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 是由 d 条直线构成的排列，满足 $t_d = t_{d-1} = t_{d-2} = 0$。则有以下不等式：

$$t_2 + \frac{3}{2}t_3 \;\geq\; 8 + \sum_{r\geq 4} \frac{4r-15}{2}\, t_r.$$

我们先给出一个具有独立意义的一般结果。

引理 3.2。 设 L 是 d 条位于 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$中的直线所构成的排列。取整数 $k \geq 4$，并假设所有交点的重数至多为 k，即 $t_i(L) = 0$ 对所有 $i \geq k+1$均成立。则 k重交点的数量 t_k 满足以下界。

（***1***）情形 $d \geq k+3$。有

$$t_k \;\leq\; \frac{d(d-1)-16}{k^2+3k-15}.$$

（***2***）一般情形。有

$$t_k \;\leq\; \frac{d}{k}\left\lfloor \frac{d-1}{k-1} \right\rfloor.$$

特别地，对于每个 $d \geq 2$，我们有

$$t_k \;\leq\; \max\left\{ \frac{d}{k}\left\lfloor \frac{d-1}{k-1} \right\rfloor,\; \left\lfloor \frac{d(d-1)-16}{k^2+3k-15} \right\rfloor \right\},$$

其中第二项仅在 $d \geq k+3$ 时才有意义。

证明。 以两种方式计算不同直线的无序对，得到

$$\binom{d}{2} \;=\; \sum_{r\geq 2} \binom{r}{2} t_r. \tag{1}$$

在假设 $t_r = 0$ 对于 $r \geq k+1$ 成立的条件下，恒等式 **(1)** 化为

$$\binom{d}{2} \;=\; t_2 + \sum_{r=3}^{k} \binom{r}{2} t_r, \tag{2}$$

因此

$$t_2 \;=\; \binom{d}{2} - \sum_{r=3}^{k} \binom{r}{2} t_r. \tag{3}$$

情形 $d \geq k+3$。 于是最大重数满足 $m(\mathcal{L}) \leq k \leq d-3$，因此我们可以应用 Shnurnikov 不等式

$$t_2 + \frac{3}{2}t_3 \;\geq\; 8 + \sum_{r\geq 4} \frac{4r-15}{2}\, t_r. \tag{4}$$

由于 $t_r = 0$ 对于 $r \geq k+1$，**(4)** 化简为

$$t_2 + \frac{3}{2}t_3 \;\geq\; 8 + \sum_{r=4}^{k} \frac{4r-15}{2}\, t_r. \tag{5}$$

将 (3) 代入 (5) 得

$$\binom{d}{2} - \sum_{r=3}^{k} \binom{r}{2} t_r + \frac{3}{2} t_3 \;\geq\; 8 + \sum_{r=4}^{k} \frac{4r-15}{2}\, t_r,$$

因此，重新整理后，

$$\binom{d}{2} - 8 \;\geq\; \frac{3}{2} t_3 + \sum_{r=4}^{k} \left(\binom{r}{2} + \frac{4r-15}{2} \right) t_r. \tag{6}$$

右边的所有项都是非负的。特别地，

$$\binom{d}{2} - 8 \;\geq\; \left(\binom{k}{2} + \frac{4k-15}{2} \right) t_k.$$

直接计算可得

$$\binom{k}{2} + \frac{4k-15}{2} = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{4k-15}{2} = \frac{k^2+3k-15}{2}.$$

因此，

$$t_k \;\leq\; \frac{2\left(\binom{d}{2} - 8\right)}{k^2+3k-15} = \frac{d(d-1)-16}{k^2+3k-15},$$

由此证明了 (1)。

一般界。 固定一个直线排列$\mathcal{L}$。对于$\mathcal{L}$中的每条直线 ℓ，有如下显然的计数关系

$$(d-1) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{L}) \cap \ell} (r-1) t_{r,\ell},$$

其中 $t_{r,\ell}$ 表示位于直线 ℓ 上的 r重多重点的数量。上述公式说明，Sing($\mathcal{L}$) 中的每个 k 重点都会占用 $k-1$ 个相交（因为还有 $k-1$ 条其他直线在该点与$\mathcal{L}$ 相交）。因此，Sing($\mathcal{L}$) $\cap\, \ell$ 中的 k 重点数量至多为$\lfloor (d-1)/(k-1) \rfloor$。对直线与 k 重点之间的关联进行计数，得到

$$k\, t_k \;\leq\; d \left\lfloor \frac{d-1}{k-1} \right\rfloor,$$

从而

$$t_k \;\leq\; \frac{d}{k} \left\lfloor \frac{d-1}{k-1} \right\rfloor,$$

由此证明了 (2)。最后的统一估计立即可得。 □

注记 3.3. 对于 $k = 5$，(1) 的特例为

$$t_5 \leq \frac{d(d-1)-16}{25}.$$

为了证明下一个结果（这是本文的主要贡献），我们需要回顾 Melchior 不等式 [8]。

定理 3.4 (Melchior)。 设 $L \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 是由 $d \geq 3$ 条直线组成的排列，满足 $t_d = 0$。则

$$t_2 \geq 3 + t_4 + 2t_5 + 3t_6 + \ldots + (d-4)t_{d-1}. \tag{7}$$

定理 3.5. 设 $L \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 是一个由 $d \geq 8$ 条直线组成的排列，满足 $t_d = 0$。假设 L 是自由的，则 $d \leq 522$。

证明。 我们假设$\mathcal{L}$是自由的，这意味着下列等式成立：

$$d_1^2 - d_1(d-1) + (d-1)^2 = \tau(\mathcal{L}) = t_2 + 4t_3 + 9t_4 + 16t_5,$$

其中 d_1 =最小关系次数($\mathcal{L}$)。应用朴素组合计数后，我们得到

$$d_1^2 - d_1(d-1) + (t_2 + 2t_3 + 3t_4 + 4t_5 - d + 1) = 0.$$

我们计算上述方程的判别式，得到

$$\triangle_{d_1} := (d-1)^2 - 4(1-d) - 4(t_2 + 2t_3 + 3t_4 + 4t_5). \tag{8}$$

由于$\mathcal{L}$ 是自由的，我们有$\triangle_{d_1} \geq 0$，这意味着

$$(d-1)^2 + 4d - 4 \geq 4t_2 + 8t_3 + 12t_4 + 16t_5 = 2t_2 + 2t_3 - 4t_5 + d(d-1).$$

因此

$$\frac{3}{2}(d-1) + 2t_5 \geq t_2 + t_3. \tag{9}$$

此外，方程 (8) 还给出了关于交点的另一个非平凡上界，即

$$\frac{1}{4}(d^2 + 2d - 3) \geq t_2 + 2t_3 + 3t_4 + 4t_5. \tag{10}$$

让我们回到朴素组合计数：

$$\begin{aligned}\frac{d(d-1)}{2} &= (t_2 + 2t_3 + 3t_4 + 4t_5) + t_3 + 3(t_4 + 2t_5) \overset{(10)}{\leq} \frac{1}{4}(d^2 + 2d - 3) + t_3 + 3(t_4 + 2t_5) \\ &\overset{(7)}{\leq} \frac{1}{4}(d^2 + 2d - 3) + t_3 + 3(t_2 - 3) \leq \frac{1}{4}(d^2 + 2d - 3) - 9 + 3(t_2 + t_3) \\ &\overset{(9)}{\leq} \frac{1}{4}(d^2 + 2d - 3) - 9 + \frac{9}{2}(d-1) + 6t_5,\end{aligned}$$

因此我们得到

$$t_5 \geq \frac{1}{24}(d-3)(d-19).$$

另一方面，我们有一个如下形式的上界

$$t_5 \leq \frac{d(d-1) - 16}{25},$$

因此我们得到

$$\frac{1}{24}(d-3)(d-19) \leq t_5 \leq \frac{1}{25}(d(d-1) - 16),$$

由此得到 $d \in [8, 9, 10, \ldots, 522]$，证明完毕。 □

4 重数至多为四的实加一生成直线排列的有界性

定理 4.1。 设 $L \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 是由 $d \geq 3$ 条直线组成的排列，满足 $t_d = 0$，且仅有二重、三重和四重点。假设 L 是加一生成的。那么 $d \leq 47$。

证明。 我们的证明与定理 3.5 的证明思路相似。首先，假设$\mathcal{L}$ 是加一生成的，这意味着

$$t_2 + 4t_3 + 9t_4 = d(d-1) - t_2 - 2t_3 - 3t_4 = (d-1)^2 - d_1(d-d_1-1) - h,$$

其中 $h := d_3 - d_2 + 1 \geq 1$。由此可得

$$d_1^2 - d_1(d-1) + (t_2 + 2t_3 + 3t_4 - d + 1 - h) = 0.$$

条件$\mathcal{L}$ 是加一生成的，这意味着判别式$\triangle_{d_1} \geq 0$，因此我们得到

$$d^2 + 2d - 3 + 4h \geq 4t_2 + 8t_3 + 12t_4 = 2(t_2 + t_3) + d(d-1).$$

综上，我们得到以下不等式:

$$t_2 + t_3 \leq \frac{3(d-1)}{2} + 2h. \tag{11}$$

回到朴素组合计数，我们有

$$d(d-1) = 2t_2 + 6t_3 + 12t_4 \overset{(7)}{\leq} 14t_2 + 6t_3 - 36 \leq 14(t_2 + t_3) - 36 \overset{(11)}{\leq} 21(d-1) + 28h - 36,$$

因此我们得到

$$d^2 - 22d + 57 - 28h \leq 0.$$

这表明 $d \leq 11 + 2\sqrt{16 + 7h}.$。由于对于直线排列，我们有 $h \leq d - 2$ （[11],推论 3.5），最终得到以下不等式

$$d \leq 11 + 2\sqrt{2 + 7d},$$

由此得到 $d \leq 47$，证明完毕。 □

致谢

作者谨此感谢 Piotr Pokora 在本研究过程中给予的指导和宝贵意见。

Marek Janasz 获得波兰国家科学中心 Sonata Bis 项目资助**2023/50/E/ST1/00025**。为实现开放获取，作者已对本次投稿所产生的任何作者接受稿（AAM）版本采用知识共享署名（CC-BY）公共版权许可。

参考文献

[1] T. Abe, 《超平面排列的 Plus–one 生成与近自由排列》。*Int. Math.Res. Not.***2021(12)**：9233 – 9261（2021）。[2]T. Abe、A. Dimca 和 P. Pokora, 《复平面曲线的新层级》。*Canad. Math. Bull.* 在线先行发表，1 – 24（2025），https://doi.org/10.4153/S0008439525101422。[3] A. Dimca, 《实奇点与复奇点专题：导论。数学高级讲座。布伦瑞克/威斯巴登：Friedr. Vieweg & Sohn。1987。[4] A. Dimca, 《超平面排列：导论》。Universitext。尚贝里：施普林格。xii，200 页。（2017）。[5] A. Dimca 和 G. Sticlaru, 《具有三个 syzygy 的平面曲线、极小 Tjurina 曲线与近尖点曲线》。*Geom. Dedicata* **207**：29 – 49（2020）。[6] A. Dimca 和 P. Pokora, 《作为自由曲线考察的极大曲线》。*Int. Math. Res. Not.IMRN* **22**：19156 – 19183（2023）。[7] A. Du Plessis 和 C. T. C. Wall, 《判别式理论在高度奇异平面曲线中的应用》。*Math. Proc. Camb. Philos. Soc.***126(2)**：259 – 266（1999）。[8] E. Melchior, 《关于射影平面中的多边形》。Deutsche Mathematik **5**：461 – 475（1941）。[9] M. Janasz 和 I. Leśniak, 《具有二重点、三重点和四重点的自由直线排列》。*European Journal of Mathematics* **11**：第 81 号文章（2025）。[10] K. Saito, 《对数微分形式与对数向量场理论》。*J. Fac.Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A***27**：265 – 291（1980）。[11] H. Schenck, 《$\mathbb{P}^2$ 中的初等修改与直线构形》。Comment. Math. Helv. 78：447 – 462（2003）。[12] I. N. Shnurnikov, 《伪直线排列的 t_k 不等式》。*Discrete Comput.Geom.* **55(2)**：284 – 295（2016）。作者单位：克拉科夫国家教育委员会大学数学系，Podchor.ążych 2, PL-30-084 克拉科夫，波兰。Marek Janasz： marek.janasz@uken.krakow.pl