arXiv:2602.05418v1 [math-ph] 5 Feb 2026

普适量子维数：I. γ无关因子

R.L.Mkrtchyan

*Alikhanyan National Science Laboratory (Yerevan Physics Institute), 2 Alikhanian Br. Str., 0036 Yerevan, Armenia*E-mail: *mrl55@list.ru*

摘要。 我们提出一种方法，用于计算关联的 sl、 so和sp 表示均非零的普适多重态的普适量子维数公式（在 Vogel 意义下）。该方法利用垂直求和运算给出的 sl 与 so表示之间的关系，以及由相应杨图上的水平求和运算给出的sl 与 sp表示之间的对偶关系。这三种表示通常的量子维数，加上普适公式在 sl Dynkin 图的自同构下保持不变所涉及的微妙问题，使我们能够确定普适量子维数的 γ无关因子（注意，对于经典代数， γ 是唯一的参数，且取决于它们的秩）。采用这一方法，我们计算了（已知的）伴随表示普适量子维数的γ无关因子，并在一个新情形中也得到了这样的因子。我们讨论了如何将这一方法扩展到量子维数公式中依赖γ的因子，以及其他问题。这是又一个例子：由于单李代数理论中隐藏的普适性结构，仅在经典代数范围内进行计算，便能预测例外情形的答案。

1. Introduction

本文旨在提出一种计算普适（量子）维数公式的新方法。该方法建立在我们先前论文 [1]中提出的计算普适 Casimir 本征值的方法之上。其他普适量，例如 Chern–Simons 配分函数或群的普适体积，不在本文的讨论范围之内。

具有最高权 λ 的单李代数表示的量子维数，通常定义为其特征标在 Weyl 线 $x\rho$上的取值，其中x 是一个参数， ρ 是 Weyl 向量（基本权之和，等价地说，也是所有正根之和的一半）。在极限 $x \to 0$下，量子维数还原为普通维数。Weyl 特征标公式给出量子维数的以下表达式（例如参见 [2], 式 (13.170)）：

$$dim_q(\lambda) = \chi_\lambda(x\rho) = \prod_{\alpha>0} \frac{\sinh((\alpha, \lambda+\rho)x/2)}{\sinh((\alpha,\rho)x/2)} \tag{1}$$

事实证明，对于许多表示，这个公式可以写成双曲正弦的乘积/比值，其自变量是普适参数的线性函数

例如，伴随表示的量子维数为 [3, 4]:

$$dim_q(\mathfrak{g}) = -\frac{\sinh\left(\frac{(\gamma+2\beta+2\alpha)x}{4}\right)}{\sinh\left(\frac{\gamma x}{4}\right)}\frac{\sinh\left(\frac{(2\gamma+\beta+2\alpha)x}{4}\right)}{\sinh\left(\frac{\beta x}{4}\right)}\frac{\sinh\left(\frac{(2\gamma+2\beta+\alpha)x}{4}\right)}{\sinh\left(\frac{\alpha x}{4}\right)} \tag{2}$$

另一个例子是伴随表示的平方的量子维数。它分解为对称部分和反对称部分，且二者都存在统一表达式。对称部分的普适分解为 [5]

$$S^2\mathfrak{g} = 1 \oplus Y_2(\alpha) \oplus Y_2(\beta) \oplus Y_2(\gamma) \tag{3}$$

各个直和项的量子维数为

$$dim_q(Y_2(\alpha)) = \\ -\frac{\sinh[\frac{xt}{2}]\sinh[\frac{x(\beta-2t)}{4}]\sinh[\frac{x(\gamma-2t)}{4}]\sinh[\frac{x(\beta+t)}{4}]\sinh[\frac{x(\gamma+t)}{4}]\sinh[\frac{x(3\alpha-2t)}{4}]}{\sinh[\frac{x\alpha}{4}]\sinh[\frac{x\alpha}{2}]\sinh[\frac{x\beta}{4}]\sinh[\frac{x\gamma}{4}]\sinh[\frac{x(\alpha-\beta)}{4}]\sinh[\frac{x(\alpha-\gamma)}{4}]} \tag{4}$$

而 $Y_2(\beta)$和 $Y_2(\gamma)$的结果也类似，只需置换参数。

类似地，反对称平方的普适分解为

$$\wedge^2(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} + X_2 \tag{5}$$

其中，对所有代数而言， X_2 都是不可约表示，前提是我们通过相应 Dynkin 图的自同构对它们进行扩展；特别是，对于 sl 代数，需要通过 $\mathbb{Z}_2$ 进行扩展。

表示 X_2 的量子维数为 [6]

$$dim_q(X_2) = \frac{\sinh\left[\frac{(2t-\alpha)x}{4}\right]\sinh\left[\frac{(2t-\beta)x}{4}\right]\sinh\left[\frac{(2t-\gamma)x}{4}\right]}{\sinh\left[\frac{\alpha x}{4}\right]\sinh\left[\frac{\beta x}{4}\right]\sinh\left[\frac{\gamma x}{4}\right]} \times \\ \frac{\sinh\left[\frac{(t+\alpha)x}{4}\right]\sinh\left[\frac{(t+\beta)x}{4}\right]\sinh\left[\frac{(t+\gamma)x}{4}\right]}{\sinh\left[\frac{\alpha x}{2}\right]\sinh\left[\frac{\beta x}{2}\right]\sinh\left[\frac{\gamma x}{2}\right]}\frac{\sinh\left[\frac{(t-\alpha)x}{2}\right]\sinh\left[\frac{(t-\beta)x}{2}\right]\sinh\left[\frac{(t-\gamma)x}{2}\right]}{\sinh\left[\frac{(t-\alpha)x}{4}\right]\sinh\left[\frac{(t-\beta)x}{4}\right]\sinh\left[\frac{(t-\gamma)x}{4}\right]} \tag{6}$$

普适多重态在 [1] 中定义。对于给定的普适维数公式，我们将给定单李代数的小普适多重态称为：将该公式取值于 Vogel 表 3 中该代数对应的普适参数值，并连同这些参数的同时置换所得到的表示集合。因此，小多重态至多有六个成员，不过其中大多数通常为零。给定普适维数公式的通用大多重态是所有单李代数对应的小多重态的并集。

按照这一术语，对于维数公式 (2)，小多重态由伴随表示构成（置换得到相同的表示），而大多重态是所有伴随表示的并集。伴随表示的平方包含若干普适多重态。其反对称部分首先根据 (5) 包含由伴随表示构成的普适大多重态。另一个多重态是由 X_2 表示构成的大多重态；对于每个代数，它都是相应小多重态中唯一的非零成员，与伴随表示的情况类似。伴随表示的对称平方由两个大多重态构成。一个是单态，即其小多重态对每个代数都由一个单独的单态构成。

TABLE 1. 伴随表示的平方的普适分解

不可约表示	卡西米尔算符	sl	so	sp
$\mathfrak{g}$	$2t$	$D_s\left(\square,\square\right)$	$\begin{array}{l}\square\\\square\end{array}$	$\square\square$
$Y_2(\alpha)$	$4t-2\alpha$	$D_s\left(\square\square,\square\square\right)$	$\begin{array}{ll}\square&\square\\\square&\square\end{array}$	$\square\square\square\square$
$Y_2(\beta)$	$4t-2\beta$	$D_s\left(\begin{array}{l}\square\\\square\end{array},\begin{array}{l}\square\\\square\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}\square\\\square\\\square\\\square\end{array}$	$\begin{array}{ll}\square&\square\\\square&\square\end{array}$
$Y_2(\gamma)$	$4t-2\gamma$	$D_s\left(\square,\square\right)$	$\square\square$	$\begin{array}{l}\square\\\square\end{array}$
X_2	$4t$	$D_s\left(\square\square,\begin{array}{l}\square\\\square\end{array}\right)$	$\begin{array}{ll}\square&\square\\\square&\\\square&\end{array}$	$\begin{array}{lll}\square&\square&\square\\\square&&\end{array}$

另一个是由 $Y_2(\cdot)$表示构成的大多重态；经典群的小多重态列于表 1。

在表 1 中，我们用记号 $D(\lambda,\ \tau)$ 表示 Dynkin 标记为

$$D(\lambda,\tau)=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k,0,...,0,\tau_k,...,\tau_2,\tau_1) \tag{7}$$

且 k 固定（即与 N 无关）的 $\lambda(\tau)$ 表示。根据 [7, 8] ，需要将这些表示按照 Dynkin 图的 $\mathbb{Z}_2$ 自同构进行对称化：$D_s(\lambda,\tau)=D(\lambda,\tau)\oplus D(\tau,\lambda)$，其中 $\lambda\neq\tau$；以及 $D_s(\lambda,\lambda)=D(\lambda,\lambda)$。我们还将使用记号 $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k,0,\ldots,0,\tau_k,\ldots,\tau_1)_s=D_s(\lambda,\tau)$。标记 $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ 和 $(\tau_1,\tau_2,\ldots)$ 按照标准方式对应于杨图 λ 和 τ。我们还假设 N “足够大”，因而所涉及的反对称张量不会消失。

根据 [1], Vogel 的表 3，在每个大多重态内部，不同代数的各个表示之间建立了对应关系，也就是小多重态中特定成员之间的对应关系。具体而言，我们将把普适维数公式代入 Vogel 的表 3 中的数值后得到的表示称为该公式的关联表示；对于由所有代数同时进行普适参数置换而得到的表示，也采用同样的称谓。表 1 中的关联表示就是每一行所列的那些表示。

如何推导普适维数和普适量子维数的表达式？Vogel 最初通过利用 IHX 和 AS 关系操作 Jacobi 图（用纽结理论的术语来说），推导出了普适公式（尤其是分解 3）。他根据表示 $Y_2(\cdot)$ 的 Casimir本征值定义了普适参数α、β、γ，这些表示参数化了普适李代数 [9]: 特别是，任意 Jacobi 图都可以用这些参数表示。Vogel 的表 3 则用这些参数来参数化单李代数。然而，对于伴随表示的更高次幂，这种方法会变得难以操作，而且量子维数也不在该方法的适用范围内。

推导普适公式的另一种方法基于对根系的考察 [10, 6]。它也可以用于推导量子维数。然而，对于伴随表示的较高次幂，根数据似乎过于有限，无法重构普适维数。

另一种方法在 [11], 中提出，基于同时使用（猜想的）普适（分裂）卡西米尔本征值，以及由卡西米尔算子的幂的迹导出的表示维数方程。普适量子维数似乎不在此方法的适用范围内，而对于伴随表示的较高次幂，该方法的计算也变得困难。

本文旨在开发一种推导普适（量子）维数公式的新方法。目前，该方法仅适用于相关的 sl、 so和 sp 表示均非零的普适多重态。推导基于 sl 与 so 小多重态之间的联系，这一联系在 [1]中被发现： so 成员的杨图由相应 sl 表示的杨图的所谓垂直和给出。本文还使用了这种联系的对偶版本，即杨图的横向求和。相应的论述涉及 sp 代数：在普适多重态中，存在相关的 sl 和 sp 成员，使得 sp 表示的杨图由定义 sl 成员的两个杨图的横向和给出。

已知这三个表示的普通量子维数后，可以尝试重构相应的普适量子维数。本文通过实例展示了如何求出普适量子维数中与 γ无关的部分，也就是不含 Vogel 表 3 中参数 γ 的因子。回顾一下， γ 是唯一一个取决于代数秩的 Vogel 参数。量子维数在这里发挥着关键作用，因为它们能够清晰地区分不同的贡献。特别是，我们将说明，必须考虑普适公式在 $\mathfrak{sl}$ Dynkin 图自同构下的不变性。

总而言之，所提出的方法包括以下步骤。首先选择一个满足某些限制条件的 $\mathfrak{sl}$ 表示 $D_s(\lambda,\ \tau)$；例如，杨图 λ 和 τ 的面积应相等，设二者均为 A。这是该表示出现在伴随表示的幂 $\mathfrak{g}^{\otimes A}$ 的分解中的必要条件。如果这样的表示在 $\mathfrak{g}^{\otimes A}$中“单独”出现，也就是说，没有其他表示具有相同的卡西米尔算符本征值，那么便可以假设 [12] 存在一个配备普适（量子）维数公式的普适多重态。假定它们确实存在，就可以分别通过纵向和横向求和运算，得到该多重态中相应的 $\mathfrak{so}$ 和 $\mathfrak{sp}$ 成员。随后可以计算这三个表示的量子维数，并参照下文讨论的示例，重构 γ无关因子，并有望重构 γ相关部分，从而得到完整的普适公式。

其中一些步骤涉及某些假设和模糊之处，因此每一步都需要进一步分析和完善。接下来，我们将通过若干示例展示具体计算，以支持这一研究计划的关键步骤：从相关的 $\mathfrak{sl}$、 $\mathfrak{so}$和 $\mathfrak{sp}$ 表示的量子维数重构普适量子维数公式的可行性。

2. The general form of universal quantum dimensions

由（1）计算得到的简单李代数不可约表示的量子维数的一般形式为

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{\sinh(xa_i)}{\sinh(xb_i)} \tag{8}$$

其中 a_i, b_i 是有理数，取决于表示和代数。普适量子维数具有相同的一般形式，其中 a_i, b_i 现在是普适参数的线性函数，如上面的例子所示。

普适公式给出了原单李代数在其 Dynkin 图自同构作用扩展下的不可约表示的（量子）维数 [7, 8]。特别地，如果一个 sl 表示在$\mathbb{Z}_2$ 自同构下保持不变，那么普适公式给出的其（量子）维数与（1）一致。如果一个表示在此 $\mathbb{Z}_2$下不保持不变，那么普适公式给出的则是该表示与其在非平凡自同构下的像之和的维数。由于二者的量子维数相同，普适公式中会多出一个因子 2。然而，Weyl 公式中不可能出现这样的系数，那么对于 Z_2 不变表示以及两个 Z_2 非不变表示之和，普适公式为何都能保持相同的形式（8）？

例如，考虑 X_2 (6) 的普适量子维数。将其特化到 sl时，它是由非平凡自同构相连的两个 Z_2 非不变表示之和。（6）中没有显式的因子 2，乍看之下，似乎无法从正弦的乘积中得到它。关键在于，这个统一表达式中的一个因子，即

$$\frac{\sinh\left[\frac{(t-\gamma)x}{2}\right]}{\sinh\left[\frac{(t-\gamma)x}{4}\right]} \tag{9}$$

当 sl （即在 $\alpha + \beta = 0$ 处）时，结果为 2，因为两个正弦都为零，因此必须取极限。对于其他代数，该因子给出一个非平凡的正弦比，与 Weyl 公式 (1) 相容。因此，以下我们假设普适量子维数具有双曲正弦乘积/比值的通用形式，如公式 (6) 以及所有其他已知的普适公式所示。

3. The vertical sum relation of sl and so small multiplets

关于杨图垂直和相关定义与陈述的细节，请参阅 [1] 。其陈述为：在普适多重态中，相应小多重态的一些关联的 sl 和 so 成员通过垂直和运算相连。具体而言，如果 sl 表示为 $D_s(\lambda, \tau)$，那么对应的 so 成员的杨图为 $\lambda \oplus_v \tau$，定义如下。

将杨图 λ 和 τ 上下叠放，使它们的左侧垂直边界对齐。然后将下方图中的每个方框向上推，直到它碰到上方图中的方框，或到达上方图的上方水平边界。所得杨图 $\lambda \oplus_v \tau$称为 λ 和 τ的逐分量垂直和。

等价地，也可以将同一运算定义为：

1. 令 h_i^μ 为杨图 μ中从左向右数第 i列的高度。则

$$h_i^{\lambda\oplus_v\tau} = h_i^\lambda + h_i^\tau. \tag{10}$$

2. 令 $\{r_i^\lambda\}$ 为 λ 的行长（无序）多重集。同理，令 $\{r_\alpha^\tau\}$ 为 τ 的行长多重集。那么，$\lambda \oplus_v \tau$ 是行长由这两个多重集的并集给出的杨图：$\{r_i^\lambda, r_\alpha^\tau\}$。

4. The horizontal sum relation of sl and sp small multiplets

可以用完全类似的方式引入对偶运算，即水平逐分量和 $\lambda\oplus_h\tau$。

其自然定义如下：将两个图并排放置，使它们的上方水平边界对齐，然后将右侧图的方框向左推，直到它们与左侧图的方框相接或到达左边界。等价地（与垂直和类似），利用上文引入的行长，可以将横向求和定义为

$$r_i^{\lambda\oplus_h\tau} = r_i^\lambda + r_i^\tau. \tag{11}$$

同样，若 $\{h_i^\lambda\}$ 是杨图λ的列高（无序）多重集，且 $\{h_\alpha^\tau\}$ 对 τ 也如此，那么 $\lambda \oplus_h \tau$ 是列高由这两个多重集的并集给出的杨图：$\{h_i^\lambda, h_i^\tau\}$。

与 [1], 中相同，可以验证，关于垂直和的类似论述也适用于通过水平求和得到的 sl–sp 关系；也就是说，对于每个已知的普适多重态，都存在 sl 和 sp的关联表示，它们由水平求和关系联系起来。和 [1], 中一样，可以猜想，对于所有其他目前未知的多重态，以及普遍卡西米尔多重态，总是存在这样一对表示。还可以利用关系式

$$\lambda \oplus_h \tau = \left(\lambda^T \oplus_v \tau^T\right)^T \tag{12}$$

通过$so(N) \sim sp(-N)$对偶，将关于水平求和与垂直和的论述联系起来。

5. Application of method to adjoint representation

现在，我们以伴随表示这一最简单的例子，阐述计算普适量子维数公式中与 γ 无关因子的拟议方法。

考虑公式 2，即伴随表示的量子维数普适公式。假设我们只知道其一般结构，即分母中有两个与γ无关的正弦因子，并希望根据 sl、 so和 sp的伴随表示的量子维数重构它们。首先注意，这是一个符合要求类型的普适公式，也就是说，它在所有三个典型系列中均非零。接下来，写出这三个系列的量子维数：

对于 $sl(N)$:

$$\frac{\sinh\left(\frac{x}{2}(N-1)\right)\sinh\left(\frac{x}{2}(N+1)\right)}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)\sinh\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{13}$$

对于 $so(N)$:

$$\frac{\sinh\left(\frac{x}{4}N\right)\sinh\left(\frac{x}{2}(N-1)\right)\sinh\left(\frac{x}{2}(N-4)\right)}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)\sinh\left(\frac{x}{1}\right)\sinh\left(\frac{x}{4}(N-4)\right)} \tag{14}$$

对于 $sp(N)$:

$$\frac{\sinh\left(\frac{x}{8}N\right)\sinh\left(\frac{x}{4}(N+1)\right)\sinh\left(\frac{x}{4}(N+4)\right)}{\sinh\left(\frac{x}{4}\right)\sinh\left(\frac{x}{2}\right)\sinh\left(\frac{x}{8}(N+4)\right)} \tag{15}$$

现在设想我们已知这三个表达式，并希望恢复普适表达式 (2)，或者更准确地说，恢复其与 γ 无关的分母因子。从这些表达式可以看出，分母中至少有两个正弦必须与 γ 无关。假设最小的可能性，即两个，并将它们参数化为

$$\sinh\left(\frac{x}{4}(x_1 w_x + y_1 w_y)\right)\sinh\left(\frac{x}{4}(x_2 w_x + y_2 w_y)\right) \tag{16}$$

$$w_x = -\frac{2\alpha+\beta}{2} \tag{17}$$

$$w_y = \frac{\alpha+\beta}{2} \tag{18}$$

一个细微之处在于，我们可以认为 sinh 的所有自变量均为正（对于 $x>0$），因为改变符号只会改变整个表达式 (16) 的整体符号。

不同经典代数的 w_x, w_y 的取值在表2中给出。将 (16) 特化到 sl，得到

$$\sinh\left(\frac{x}{4}(x_1)\right)\sinh\left(\frac{x}{4}(x_2)\right) \tag{19}$$

并将其与 (13) 比较，我们推出 $x_1 = x_2 = 2$。

接下来，将 (16) 特化到 so，得到

$$\sinh\left(\frac{x}{4}(y_1)\right)\sinh\left(\frac{x}{4}(y_2)\right) \tag{20}$$

与 (14) 比较，我们推出要么 $y_1 = 2, y_2 = 4$，要么相反。由于 $x_1 = x_2$，我们可以自由选择标记；我们取 $y_1 = 2, y_2 = 4$。

在这个例子中，我们无需使用 sp，仅凭 sl 和 so 数据就找到了所有 x_i, y_i。下文更复杂的例子中情况则不同。在这里，我们可以将 sp 数据用作一致性检验。将 (16) 特化为 sp:

$$\sinh\left(\frac{x}{4}(x_1\frac{3}{2} - y_1\frac{1}{2})\right)\sinh\left(\frac{x}{4}(x_2\frac{3}{2} - y_2\frac{1}{2})\right) \tag{21}$$

与（15）比较后，我们推得要么是 $x_1\frac{3}{2} - y_1\frac{1}{2} = 1, x_2\frac{3}{2} - y_2\frac{1}{2} = 2$，要么反之。第二种情形由我们的解满足，因此检验成功，并且我们的统一分母再现了所有经典代数（以及例外代数，因为我们已经知道最终的统一结果）的量子维数的分母。

一般而言，需要 sp 数据来确定多重集$\{x_i\}$ 与 $\{y_i\}$之间的配对，因为在 sl 情形中只能推出多重集 $\{x_i\}$ ，而在so 情形中只能推出多重集 $\{y_i\}$，它们之间的对应关系仍然未知。 sp 数据的作用是固定这一配对，因为 x_i 与 y_i 同时进入 sp 特殊化。此外，并不能保证 sp数据唯一地确定该配对；至少，它施加了很强的限制，只留下少量可能性。

6. Application of method: E representation

考虑 [12] 中给出的普适多重态 E 的普适维数公式:

$$dimE = -\frac{64(\alpha+\gamma)(2\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)(\beta+\gamma)(2\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha^2\beta^2\gamma(\alpha-3\beta)(\alpha-\beta)^2(3\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\beta-2\gamma)} \times \tag{22}$$

$$(2\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+2\beta+\gamma)(2\alpha+2\beta+\gamma)(2\alpha+\beta+2\gamma)(\alpha+2\beta+2\gamma) \tag{23}$$

该表达式在交换 $\alpha \leftrightarrow \beta$ 时保持对称，因此相应的小普适多重态包含三个表示，不过正如我们将看到的，其中大多数为零。 sl 小多重态的一个成员为

$$D_s(\ydiagram{3,1},\ydiagram{2,1,1}) = (2,1,0,...0,1,0,1)_s \tag{24}$$

其维数为

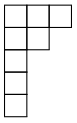
$$\frac{1}{32}(N-4)(N-2)(N-1)^2(N+1)^2(N+2)(N+4) \tag{25}$$

由于式 (22) 在 $\alpha \leftrightarrow \beta$ 下保持对称，因此它在 $N \leftrightarrow -N$ 下保持不变。 sl 小多重态的另外两个成员为零。

相应的 so 关联表示的维数为，其图为

$$\tfrac{1}{630}(N-6)(N-4)(N-2)(N-1)N^2(N+2)(N+4) \tag{26}$$

(27)

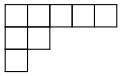


so 小多重态的其他元素均为零。

对应的 sp 多重态数据为

$$\tfrac{1}{630}(N-4)(N-2)N^2(N+1)(N+2)(N+4)(N+6) \tag{28}$$

(29)



其他成员均为零。

接下来，我们考察这些表示的量子维数。 sl 表示的量子维数是通过对钩长公式中的所有因子进行 q变形得到的:

TABLE 2. w_x的值， w_y

	sl	so	sp
w_x	1	0	$\frac{3}{2}$
w_y	0	1	$-\frac{1}{2}$

$$\dim_q(\lambda) = \frac{\sinh(\frac{x}{2}(N-4))\,\sinh(\frac{x}{2}(N-2))\,\sinh(\frac{x}{2}(N-1))^2\,\sinh(\frac{x}{2}(N+1))^2}{\sinh(\frac{x}{2})^4\,\sinh(x)^2\,\sinh(2x)^2} \times \sinh(\frac{x}{2}(N+2))\,\sinh(\frac{x}{2}(N+4)) \tag{30}$$

so（$2n$）表示的量子维数为

$$\dim_q = \frac{\sinh(\frac{x}{2}n)\,\sinh(\frac{x}{2}(n+2))\,\sinh(x(n-5))\,\sinh(x(n-3))\,\sinh(x(n-2))}{\sinh(\frac{x}{2})^3\,\sinh(x)\,\sinh(3\frac{x}{2})^2\,\sinh(5\frac{x}{2})\,\sinh(7\frac{x}{2})\,\sinh(\frac{x}{2}(n-5))\,\sinh(\frac{x}{2}(n-1))} \times \sinh(x(n-1))^2\,\sinh(\frac{x}{2}(2n-1))\,\sinh(xn)\,\sinh(x(n+1)) \tag{31}$$

类似地，对于 $sp(2n)$表示：

$$\dim_q = \frac{\sinh(\frac{x}{4}(n-2))\,\sinh(\frac{x}{4}n)\,\sinh(\frac{x}{2}(n-1))\,\sinh(\frac{x}{2}(n))\,\sinh(\frac{x}{4}(2n+1))}{\sinh(\frac{x}{4})^3\,\sinh(\frac{x}{2})\,\sinh(3\frac{x}{4})^2\,\sinh(5\frac{x}{4})\,\sinh(7\frac{x}{4})\,\sinh(\frac{x}{4}(n+1))\,\sinh(\frac{x}{4}(n+5))} \times \sinh(\frac{x}{2}(n+1))^2\,\sinh(\frac{x}{2}(n+2))\,\sinh(\frac{x}{2}(n+3))\,\sinh(\frac{x}{2}(n+5)) \tag{32}$$

有了这些数据，我们希望在自然假设下，确定普适表示 E的普适量子维数中与γ无关的因子。我们假设该表示的量子维数具有以下形式。首先，回想一下，专门化到 sl时，普适公式对应于一个表示与其在 sl的 Dynkin 图的 $\mathbb{Z}_2$ 自同构下的像之和，二者的维数和量子维数相同。因此，正弦乘积前会出现因子 2。其他普适量子维数中也会通过普适因子出现这样的因子

$$\frac{\sinh(x(\alpha+\beta)c/2)}{\sinh(x(\alpha+\beta)c/4)} \tag{33}$$

其中 c是一个待定常数。对于 sl 代数，当 $\alpha+\beta=0$时，该因子为 2；对于置换以及其他代数，它给出正弦之比的非零值。

接下来，我们分离出与 γ无关的正弦因子，并假设分母中与 γ无关的因子数量最少；在本例中，该数量必须为 8，才能重现上述公式的分母。最后，我们允许分母中出现若干个依赖于 γ的正弦，设其数量为 k；相应地，分子中出现 $8+k\gamma$个依赖于 γ的正弦。

我们将分母中与 γ 无关的正弦记为：

$$\prod_{i=1}^{8} \sinh\left(\frac{x}{2}(x_i w_x + y_i w_y)\right) \tag{34}$$

回顾表2，其中列出了不同经典代数对应的 w_x， w_y 取值。

置于分母中的乘积 (34)，连同 (33)，应再现 sl、 so和 sp的量子维数中与 γ无关的分母。

对于 sl 代数，(30)的分母中正弦的自变量集合（我们把使得 $\sinh\left(\frac{x}{2}u\right)$ 出现的数 u 称为 sin 的自变量）是无序多重集

$$1,1,1,1,2,2,4,4 \tag{35}$$

另一方面，来自统一表达式的参数集合为$\{x_i, i=1,\ldots,8\}$。这意味着，经过适当的重新编号后，有:

$$x_1=1, x_2=1, x_3=1, x_4=1 \tag{36}$$

$$x_5=2, x_6=2, x_7=4, x_8=4 \tag{37}$$

类似地，我们将针对 so 特化的统一表达式 (34) 与 so量子维数的分母进行比较。它们分别为

$$1,1,1,2,3,3,5,7 \tag{38}$$

统一表达式 (34) 中的参数集合为 $\{y_i, i$ =1，.....， $8\}$，但需作一处修正。因子 (33) 的分子中与 γ 无关的正弦项应与某个 y 抵消，例如 y_k (即 $(\alpha+\beta)$ $c=2c=y_k$)，而 (33) 的分母中的正弦项则会额外贡献一个因子。由于 (33) 的分子中的正弦项的参数是分母中的正弦项参数的两倍，因此在统一量子维数中，多重集 $\{y_i, i=1,\ldots,8\}$ 实际上被替换为 $\{y_1,\ldots,y_{k-1},\frac{y_k}{2},y_{k+1},\ldots,y_8\}$。注意，这个多重集应与无序集合 (38) 一致，因此对于给定的 i，无法确定 y_i 的值。为消除这一歧义，我们使用来自 sp量子维数的额外信息。

关键在于，专门化为 sp时，普适量子维数（34）中的参数同时涉及 x_i 和 y_i（见表2），因此有望确定（38）与 $\{y_i\}$之间的唯一联系。

因此，sp 的量子维数分母中的正弦参数为

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2} \tag{39}$$

这与 so的情形相同，差一个公因子$_{1\ 2}$；这是因为 so 图与 sp 图互为转置，所以它们的（量子）维数仅相差 $n\leftrightarrow -n$和对 x的重新缩放；特别是， n无关的正弦因子仅通过重新缩放相联系。

普适量子维数公式（34）给出的分母参数为 $\{\frac{3}{2}x_i-\frac{1}{2}y_i, i=1,\ldots,8\}$。然而，这里同样存在来自（33）的非平凡贡献。由于我们已经假设，在 so 情形下，该因子等于

$$\frac{\sinh(x(\alpha+\beta)c/2)}{\sinh(x(\alpha+\beta)c/4)}=\frac{\sinh(xy_k/2)}{\sinh(xy_k/4)} \tag{40}$$

那么对于 sp ，它变为

$$\frac{\sinh(x(\alpha+\beta)c/2)}{\sinh(x(\alpha+\beta)c/4)}=\frac{\sinh(xy_k/4)}{\sinh(xy_k/8)} \tag{41}$$

因此， $\{\frac{3}{2}x_i - \frac{1}{2}y_i\}$ 中的一个数应等于 $y_k/2$，并将其替换为 $y_k/4$，作为正弦的自变量。

经过详尽的情况分析，我们发现 $y_k = 2$，于是 y_i 的无序多重集变为

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 7 \tag{42}$$

$\{\frac{3}{2}x_i - \frac{1}{2}y_i, i = 1, \ldots, 8\}$ 的无序多重集变为

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \tag{43}$$

因此，应对 y_i 列表排序，使相应的列表 $\{\frac{3}{2}x_i - \frac{1}{2}y_i, i = 1, \ldots, 8\}$ 与上述多重集相匹配。可得唯一解：

$$x_1 = 1, y_1 = 1, \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1 = 1 \tag{44}$$

$$x_1 = 1, y_2 = 1, \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_2 = 1 \tag{45}$$

$$x_3 = 1, y_3 = 2, \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}y_3 = \frac{1}{2} \tag{46}$$

$$x_4 = 1, y_4 = 2, \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}y_4 = \frac{1}{2} \tag{47}$$

$$x_5 = 2, y_5 = 3, \frac{3}{2}x_5 - \frac{1}{2}y_5 = \frac{3}{2} \tag{48}$$

$$x_6 = 2, y_6 = 3, \frac{3}{2}x_6 - \frac{1}{2}y_6 = \frac{3}{2} \tag{49}$$

$$x_7 = 4, y_7 = 5, \frac{3}{2}x_7 - \frac{1}{2}y_7 = \frac{7}{2} \tag{50}$$

$$x_8 = 4, y_8 = 7, \frac{3}{2}x_8 - \frac{1}{2}y_8 = \frac{5}{2} \tag{51}$$

最后，利用 x_i， y_i 的这一解，我们计算统一分母 (34)：

$$\prod_{i=1}^{8} \sinh\Big(\frac{x}{2}(x_i w_x + y_i w_y)\Big) = \tag{52}$$

$$\sinh\Big(\frac{x}{4}\alpha\Big)^2 \sinh\Big(\frac{x}{4}\beta\Big)^2 \sinh\Big(\frac{x}{4}(\beta-\alpha)\Big)^2 \times \tag{53}$$

$$\sinh\Big(\frac{x}{4}(\beta-3\alpha)\Big) \sinh\Big(\frac{x}{4}(3\beta-\alpha)\Big) \tag{54}$$

在极限 $x \to 0$下，也就是在普适维数公式中，这与下式成正比

$$\alpha^2\beta^2(\beta-\alpha)^2(\beta-3\alpha)(3\beta-\alpha) \tag{55}$$

这恰好与普适维数公式 (22) 完全一致。请注意，我们的推导与 [12], 中的推导截然不同，因此这一吻合非同寻常地印证了本文的方法。

7. 结论

我们提出了一种方法，可以根据经典单李代数的标准量子维数数据推导普适量子维数公式。目前，该方法仅适用于其相关的 sl、 so 和 sp 表示均非零的普适公式。此类普适公式有多个系列（例如伴随表示的嘉当幂），也有相反的例子（ X_2 的嘉当幂）。该方法还存在一个模糊之处：事先无法确定 sp 数据是否能唯一确定系数多重集 $\{x_i\}$ 与 $\{y_i\}$之间的对应关系。至少，这似乎只留下少数几种可能性。

我们将这种方法用于普适伴随多重态，并推导出了该多重态普适量子维数中与 γ 无关的因子的新公式。

这种方法的优点是所需计算量少，因此可以处理维数较大的表示。希望这种方法能帮助我们更深入地理解普适公式的结构。

要使这一研究方案完全发挥作用，必须将这种方法扩展到计算普适量子维数公式中与 γ 有关的因子。这会稍微困难一些，因为分子与分母之间因子的消去模式可能很复杂；相关工作仍在进行中。或许通过这种方法，可以得到所有可能的普适量子维数公式，其对应的 sl， so， sp 表示均非零。此外，这种方法也不适用于由多个不可约表示构成的卡西米尔子空间的量子维数公式，因为它们的普适维数并非线性因子的乘积或比值，而是更复杂多项式的比值。

8. Acknowledgments

本工作部分由亚美尼亚共和国科学与教育部科学委员会通过合同 21AG-1C060 和 24WS-1C031 资助。

Appendix A. Vogel's table

下文列出 Vogel 表中与单李代数对应的射影平面上的点。射影平面上的齐次坐标 α, β, γ 在共同重新缩放和置换下视为等价。

Table 3. 单李代数的 Vogel 参数

代数/参数	α	β	γ	$t = \alpha + \beta + \gamma$	Line
$sl(N)$	-2	2	N	N	$\alpha + \beta = 0$
$so(N)$ $sp(-N)$	-2	4	$N-4$	$N-2$	$\alpha + 2\beta = 0$
$Exc(n)$	-2	$n+4$	$2n+4$	$3n+6$	$\gamma = 2(\alpha + \beta)$

在表3中，对于 $sl(N)$ 和 $so(N)$， N是正整数；对于 $sp(-N)$， N是负偶数；对于例外行 $Exc(n)$， $n = -1$， $-2/3$，0，1，2，4，8 分别对应 A_2， G_2， D_4， F_4， E_6， E_7， E_8。

References

[1] L. Mkrtchyan, R. *On the universal Casimir spectrum*, arXiv:2509.13707, 《国际现代物理学杂志 A》, 2026年, https://doi.org/10.1142/S0217751X26500417[2] Philippe Di Francesco, PierreMathieu, and David S´en´echal, *Conformal field theory*, 当代物理学研究生教材, 施普林格, 纽约州纽约市, 1997年.[3] Bruce W. Westbury, *Invariant tensors and diagrams*, 《几何、拓扑与物理学第十届波尔图会议论文集》（新加坡）（M. C. Bento, P. S. Ferreira, and R. F. Picken 编）, 世界科学出版社, 2003年, pp. 49–82.[4] Mkrtchyan, R. L. and Veselov, A. P., 陈-西蒙斯理论中的普适性, 《高能物理学杂志》, 08, (2012 年), 153, https://doi.org/10.1007/JHEP08(2012)153[5] Pierre Vogel, *The universal Lie algebra*, 预印本 , 格勒诺布尔 ,`https://webusers.imj-prg.fr/~pierre.vogel/grenoble-99b.pdf`, 1999 年 .[6] Ruben L. Mkrtchyan, *On universal quantum dimensions*, 《核物理 B》921 (2017年), 236–249.[7] P. Deligne, *La série exceptionnelle des groupes de lie*, Comptes Rendus de l'Acad´emie des Sciences. S´erie I. Math´ematique 322 (1996年), 321–326.[8] A. M. Cohen and R. de Man, *Computational evidence for Deligne's conjecture regardingexceptional Lie groups*, Comptes Rendus de l'Acad´emie des Sciences. S´erie I. Math´ematique 322 (1996年), no. 5, 427–432.[9] P. Vogel, *Algebraic structures on modules of diagrams*, 《纯粹与应用代数杂志》215 (2011年), no. 6, 1292–1339.[10] J. M. Landsberg and L. Manivel, *A universal dimension formula for complex simple Liealgebras*, 《数学进展》201 (2006年), 379–407.[11] A. P. Isaev, S. O. Krivonos, and A. A. Provorov, *Split Casimir operator for simple Lie algebras in the cube of ad-representation and Vogel parameters*, 《国际现代物理学杂志 A》38 (2023年), no. 06n07, 2350037.[12] M. Avetisyan, A. P. Isaev, S. O. Krivonos, and R. L. Mkrtchyan, *The uniform structure of* $\mathfrak{g}^{\otimes 4}$, 《俄罗斯数学物理学杂志》31 (2024年), no. 3, 379–388.