关键词 残差多项式，圆弧，权函数，Widom因子，切比雪夫多项式

数学主题分类41A50. 30C10. 33C45.**圆弧上的加权残差多项式**

JACOB S. CHRISTIANSEN[1,5],BENJAMIN EICHINGER[2,6],OLOF RUBIN[3,7],和 MAXIM ZINCHENKO[4,8]

摘要。我们研究圆弧上加权残差多项式的行为，包括加权切比雪夫多项式。对于由多项式倒数给出的权函数，我们建立了 Szegő–Widom 渐近。将分析扩展到规则性较低的权函数后，我们确定了相应加权Widom因子的渐近行为，从而推广了 Eichinger、Thiran 等人的结果。作为应用，我们推导出某些双纽线弧上 Widom因子的渐近式。

arXiv:2602.05428v1 [math.CV] 5 Feb 2026

1. 引言

给定集合 $\mathsf{E} \subset \overline{\mathbb{C}}$，其中 $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 表示黎曼球面，我们将 $\|\cdot\|_{\mathsf{E}}$ 定义为上确界范数，即对任意函数 $f : \mathsf{E} \to \mathbb{C}$,

$$\|f\|_{\mathsf{E}} := \sup_{z\in\mathsf{E}} |f(z)|.$$

本文的核心对象是 $\mathcal{P}_n$，即次数至多为 $n \in \mathbb{N}$ 的代数多项式集合。对于由多项式凸紧集 $\mathsf{E} \subset \mathbb{C}$ （即补集 $\mathbb{C} \setminus \mathsf{E}$ 连通的紧集）和固定的有界权函数 $w : \mathsf{E} \to [0, \infty)$ 构成的任意一对，我们都可以与之关联一列加权残差多项式。对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathsf{E}$，我们将用记号 $R_n^{\mathsf{E},w}(\cdot, z_0)$ 表示满足下列条件的唯一一个次数至多为 n 的多项式

$$(i) \quad \|wR_n^{\mathsf{E},w}(\cdot, z_0)\|_{\mathsf{E}} = \sup_{z\in\mathsf{E}} \big|w(z)R_n^{\mathsf{E},w}(z, z_0)\big| \le 1, \text{ and}$$
$$(ii) \quad R_n^{\mathsf{E},w}(z_0, z_0) = \sup\big\{|P(z_0)| : P \in \mathcal{P}_n, \|wP\|_{\mathsf{E}} \le 1\big\}.$$

[1] 隆德大学数学科学中心，瑞典隆德22100，118号信箱。电子邮箱：ja- cob stordal.christiansen@math.lth.se。_[2] 兰卡斯特大学数学科学学院，英国兰卡斯特LA1 4YF。电子邮箱：b.eichinger@lancaster.ac.uk。[3] KTH皇家理工学院概率、数学物理与统计学部，瑞典斯德哥尔摩11428，Lindst- edtsvägen 25。电子邮箱：orubin@kth.se。[4] 新墨西哥大学数学与统计系，美国新墨西哥州阿尔伯克基87131；电子邮箱：maxim@math.unm.edu。[5] 本研究由瑞典研究委员会VR项目2023-04054资助，并部分由丹麦独立研究基金DFF研究项目1026-00267B资助。[6] 本研究由奥地利科学基金FWF资助，项目编号P33885。[7] 本研究由弗兰德斯研究基金会（FWO）Odysseus资助项目G0DDD23N以及Göran Gustafsson自然科学与医学研究基金会资助。[8] 本研究部分由西蒙斯基金会项目MP-TSM-00002651资助。

对于多项式 P，值 $P(\infty)$ 应理解为其首项系数。归一化的规定使得残差多项式在点 z_0 处为正。关于存在性和唯一性的证明，请参阅 [13, 定理 2.1 b)]。

或者，(i)–(ii)中的刻画可以改写为其对偶形式：在所有满足 $P(z_0) = 1$的多项式 P中，求使 $\|wP\|_{\mathsf{E}}$最小的多项式。事实上，该多项式为

$$T_n^{\mathsf{E},w}(z, z_0) = \frac{R_n^{\mathsf{E},w}(z, z_0)}{R_n^{\mathsf{E},w}(z_0, z_0)}, \tag{1.1}$$

并且我们注意到

$$\|wT_n^{\mathsf{E},w}(\cdot, z_0)\|_{\mathsf{E}} = \frac{1}{R_n^{\mathsf{E},w}(z_0, z_0)}. \tag{1.2}$$

与 $z_0 = \infty$对应的多项式 $T^{\mathsf{E}}{}_n{}^w := T_{\mathsf{E}_n}{}^w(\cdot, \infty)$在文献中受到广泛关注（例如参见 [1, 12, 27, 31, 39]）。这些所谓的加权切比雪夫多项式是逼近理论中的基本对象。更一般的残差多项式也在计算科学中发挥着重要作用，尤其是在 Krylov 子空间迭代中（例如参见 [15, 18, 24]）。

经典问题包括确定相对于区间 $[-1, 1]$的残差多项式。对于点 $x_0 \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$，实集上残差多项式的交错性质表明

$$R_n^{[-1,1]}(x, x_0) = 2^{n-1}T_n(x),$$

其中 $T_n(x) := T_n^{[-1,1]}(x)$ 表示定义在 $[-1, 1]$ 上的经典切比雪夫多项式（见 [13, 28]）。关于非实点相对于 $[-1, 1]$ 的残差多项式，其性质更为复杂。具体而言，纯虚点的情形见 [19, 20]，而任意点的情形则由 Yuditskii 在 [46, 命题 1] 中讨论。后一个参考文献对下文的讨论尤其重要。

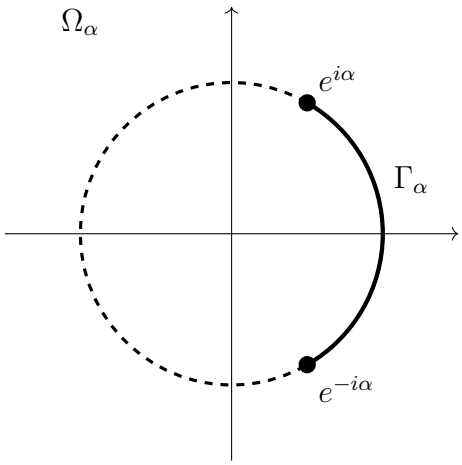


图 1. 圆弧 $\Gamma_\alpha = \{e^{it} : -\alpha \le t \le \alpha\}$。

我们关注单位圆 $\mathbb{T}$ 连通子集上的加权残差多项式。这类研究拓展了 [16] 的结果。任意数 $0 < \alpha < \pi$ 都会确定一段圆

弧，如图 1 所示；其由以下公式确定

$$\Gamma_\alpha := \{e^{it} : -\alpha \le t \le \alpha\}. \tag{1.3}$$

给定权函数 $w:\ \Gamma_\alpha \to [0,\infty)$，我们希望描述相应加权残差多项式的渐近行为。

为说明这项工作的创新之处，我们采用位势理论中的概念。关于这一主题的背景知识，请参阅 [4, 21, 26, 34]。设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 的真子域，且 $\zeta \in \Omega$。假设 $\partial\Omega$ 非极性，即其对数容量为正。于是 Ω 存在唯一一个以 ζ 为极点的格林函数，记为 $g_\Omega(\cdot,\ \zeta)$。相对于基点 ζ，博雷尔集 $I \subset \partial\Omega$ 的调和测度记为 $\omega(\zeta,\ I;\Omega)$。回忆一下，若 $f:\partial\Omega \to \mathbb{R}$ 连续，则函数 $h:\Omega \to \mathbb{R}$ 定义为

$$h(z) := \int_{\partial\Omega} f(x)\,\omega(z, dx;\Omega) \tag{1.4}$$

在 Ω 中是调和函数，并在 Ω 的所有正则点处取边界值 $f(x)$。特别地，当 $\Omega := \mathbb{C}\setminus \mathsf{E}$ 是紧的、非极性的多项式凸集 $\mathsf{E} \subset \mathbb{C}$ 的补集时，Ω 的边界与 E 的边界重合。因此，带无穷远点极点的 Ω 的格林函数可直接通过 E 的位势理论表示为：

$$g_\Omega(z,\infty) = \int \log|z-x|\, d\mu_{\mathsf{E}}(x) - \log \operatorname{Cap}(\mathsf{E}), \quad z \in \Omega, \tag{1.5}$$

其中，μ_{E} 是 E 的平衡测度，$\operatorname{Cap}(\mathsf{E})$ 是其对数容量。反过来，对于区域 Ω，平衡测度与 $\zeta=\infty$ 处的调和测度重合。

引入记号

$$\Omega_\alpha := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_\alpha \ \text{ and } \ \mathbb{C}_+ := \{z : \operatorname{Re} z > 0\}, \tag{1.6}$$

我们将分别把变量 u 和 λ与这些区域联系起来。关于 Γ_α 的剩余多项式的首次研究由 [16] 开展。回顾一下，对于 $\mathbb{C}_+$ 上关于测度 $\lambda\, dA(\lambda)$的加权 Bergman 空间，其再生核为，其中 dA 表示面积测度，给定为

$$k_{\mathbb{C}_+}(\lambda,\lambda_0) := \frac{2\lambda\overline{\lambda}_0}{(\lambda+\overline{\lambda}_0)^2}. \tag{1.7}$$

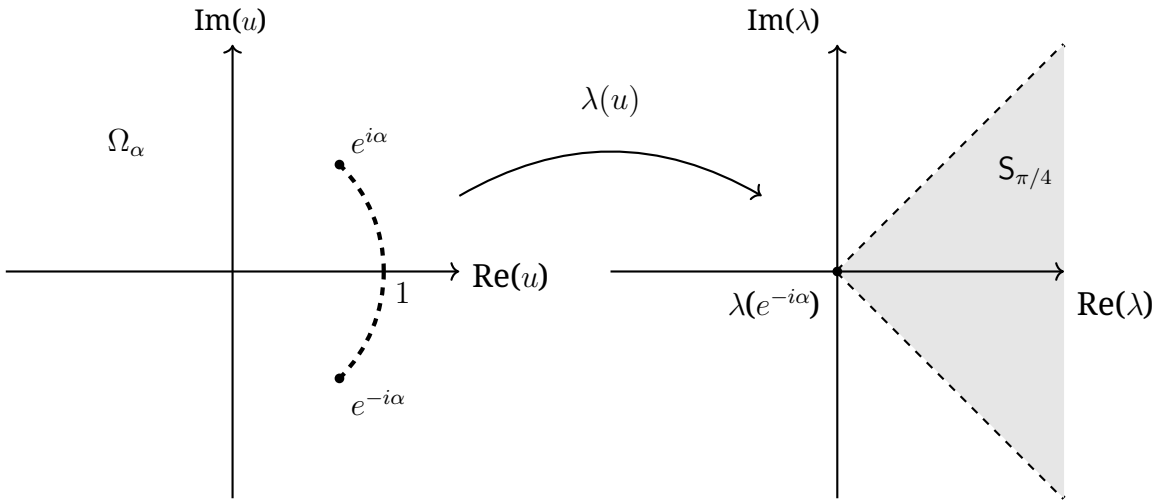
对于 $u \in \Omega_\alpha$，[16, 定理 1.3] 证明了

$$\|T_n^{\Gamma_\alpha}(\cdot,u)\|_{\Gamma_\alpha} = \frac{1}{R_n^{\Gamma_\alpha}(u,u)} \sim e^{-n g_{\Omega_\alpha}(u,\infty)} k_{\mathbb{C}_+}\big(\lambda(u),\lambda(u)\big)^{-1}, \tag{1.8}$$

其中 $\lambda:\ \Omega_\alpha \to \mathsf{S}_{\pi/4}:\ =\{z\in\mathbb{C}_+ :\ \ |\arg\ z| < \pi/4\}$ 是由下式给出的共形映射

$$\lambda(u) := \left(\frac{ue^{i\alpha}-1}{u-e^{i\alpha}}\right)^{1/4}. \tag{1.9}$$

照例，符号 $\sim$ 表示两个表达式之比在 $n\to\infty$ 时趋于 1。



首先，我们将这一结果推广到加权多项式，其中权函数是某个多项式的乘法逆元。最终，这将使我们能够证明：对于 $u \in \Omega_\alpha$ 以及一类一般的权（其性质详见定理 4.1），

$$\|wT_n^{\Gamma_\alpha,w}(\cdot,u)\|_{\Gamma_\alpha} \sim e^{-ng_{\Omega_\alpha}(u,\infty)} k_{\mathbb{C}_+}\big(\lambda(u),\lambda(u)\big)^{-1} \exp\left(\int_{\Gamma_\alpha} \log w(x)\, \omega(u,dx,\Omega_\alpha)\right). \tag{1.10}$$

在特殊情形 $u=\infty$ 下，我们得到渐近公式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|wT_n^{\Gamma_\alpha,w}\|_{\Gamma_\alpha}}{\mathrm{Cap}(\Gamma_\alpha)^n} = 2\cos^2(\alpha/4) \exp\left(\int_{\Gamma_\alpha} \log w(x)\, d\mu_{\Gamma_\alpha}(x)\right). \tag{1.11}$$

这应与无权（$w\equiv 1$）渐近公式进行比较

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|T_n^{\Gamma_\alpha}\|_{\Gamma_\alpha}}{\mathrm{Cap}(\Gamma_\alpha)^n} = 2\cos^2(\alpha/4) \tag{1.12}$$

该公式在 [43] 中推导出来。后来，人们通过 [38, 定理 8] 更深入地理解了这种收敛的单调性。该结果的背景具有重要的历史意义。对于有界的上半连续函数 $w:\ \Gamma \to [0,\infty)$，且 $\log w \in L^1(\mu_\Gamma)$，Widom 建立了如下的一般上界 [45, 定理 11.4]:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|wT_n^{\Gamma,w}\|_{\Gamma}}{\mathrm{Cap}(\Gamma)^n} \le 2\exp\left(\int_{\Gamma} \log w(x)\, d\mu_{\Gamma}(x)\right). \tag{1.13}$$

在无权情形下，积分项消失，使该界降为 2。受此结果以及区间情形已知结论的启发，Widom 猜想，对于任意足够光滑的若尔当弧Γ，该极限总是恰好等于 2，即 $\lim_{n\to\infty} \|T_n^\Gamma\|_\Gamma / \mathrm{容量}(\Gamma)^n = 2$。正在讨论的例子之所以引人注目，是因为它是第一个推翻这一猜想的例子。

与 Widom猜想形成鲜明对比的是，Alpan 最近的一项结果 [3, 定理 1.3]证明，若存在一个内部点 $z\in\Gamma$ （即不同于其端点的点）满足

$$\frac{\partial g_{\Omega_\Gamma}}{\partial n_+}(z,\infty) \neq \frac{\partial g_{\Omega_\Gamma}}{\partial n_-}(z,\infty), \quad \Omega_\Gamma = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma. \tag{1.14}$$

这里，法向导数分别取自圆弧的两侧。正如后来在 [10, 定理 1.1], 中所观察到的，唯一一个在所有内点处等式（1.14）成立的圆弧

是直线段，因此它构成了唯一满足Widom猜想的圆弧。

关于下界，我们也可以考虑任意满足 $\log w \in L^1(\mu_{\mathsf{E}})$ 的权函数 $w : \mathsf{E} \to [0, \infty)$。在这种情况下，Szegő不等式成立：

$$\|wT_n^{\mathsf{E},w}\|_{\mathsf{E}} \geq \operatorname{Cap}(\mathsf{E})^n \exp\left(\int_{\mathsf{E}} \log w(x)\, d\mu_{\mathsf{E}}(x)\right), \tag{1.15}$$

如 [31, 定理 13]所示。根据 (1.13) 和 (1.15)，自然可以引入加权*Widom*因子，定义如下：

$$\mathcal{W}_n(\mathsf{E}, w) := \frac{\|wT_n^{\mathsf{E},w}\|_{\mathsf{E}}}{\operatorname{Cap}(\mathsf{E})^n}. \tag{1.16}$$

对应于 $w \equiv 1$ 的非加权Widom因子记为 $\mathcal{W}_n(\mathsf{E})$。对于圆弧$\Gamma$，结合 (1.13) 和 (1.15) 可知，$\mathcal{W}_n(\Gamma, w)$ 的所有极限点均落在范围

$$\left[\exp\left(\int_{\Gamma} \log w(x)\, d\mu_{\Gamma}(x)\right), 2\exp\left(\int_{\Gamma} \log w(x)\, d\mu_{\Gamma}(x)\right)\right]. \tag{1.17}$$

我们强调，文献中关于圆弧对应的Widom因子极限点的精确公式十分罕见。值得注意的是，区间仍是唯一得到全面研究的例子，这在很大程度上要归功于Bernstein的开创性工作 [6, 7]。对于相对于圆弧的非加权切比雪夫多项式的范数，除区间外，唯一得到理解的情形是圆弧。

探讨本文结果以及 [16], 中的结果对于分析 Krylov 子空间方法收敛速度的启示，将会很有意思，但这超出了本文的范围。特别是，研究与具有受限谱的酉矩阵相关的算法值得关注。不过，由于这类问题具有数值性质，我们决定不在本文中讨论。

1.1. 概要。 在第2节中，我们分析与 $\{z$ 的子集相关的切比雪夫多项式范数的渐近行为：$|z^m + 1| = r\}$，其中 $r > 0$。我们的完整渐近分析汇总于定理 2.1，该定理依托于第4节证明的加权公式。我们的目标之一是分析式 (1.14) 对连通弧系的 Widom 因子的势极限点的影响。

在第3节中，我们将采用 [16] 中的方法；该文在一般残差多项式框架下建立了圆弧的 Szegő–Widom 渐近。事实上，我们还将针对由多项式倒数组成的权函数给出类似结果。更确切地说，在定理 3.9 中，我们确定当 P是一个在单位圆上不消失的多项式时，$R^{\Gamma_\alpha,\ n}{}^{1/P}(\cdot, u)$ 的渐近行为。这一结果使我们能够在定理 3.10 中确定 $\|T^{\Gamma_\alpha,\ n}{}^{1/P}(\cdot,\ u)/P\|_{\Gamma_\alpha}$ 的渐近行为，并为第4节的工作奠定基础。在该节中，我们确定 $\|wT^{\Gamma_\alpha,\ n}{}^{w}(\cdot,\ u)\|_{\Gamma_\alpha}$ 的渐近行为，尤其关注情形 $u = \infty$；所考虑的是一般权函数类，其中包括可能在 Γ_α上为零的权函数。具体而言，定理 4.1 推广了 Bernstein [6, 7], 的结果；他研究了一般权函数 w 下 $\|wT^{[-1,1],}{}_{n}{}^{w}\|_{[-1,1]}$ 的渐近行为：$[-1, 1] \to [0, \infty)$。

2. 双纽线弧上的切比雪夫多项式

为说明定理 4.1 的适用性，我们推导了一族圆弧并集所对应的 Widom因子的渐近公式。这些结果补充了 [10] 中的分析。

如前所述，当 Γ 是一条光滑圆弧时，

$$\limsup_{n\to\infty} \mathcal{W}_n(\Gamma, w) \le 2\exp\left(\int_\Gamma \log w(x)\, d\mu_\Gamma(x)\right),$$

当且仅当 Γ 为直线段时取等号。这一结果源于如下事实：直线段是唯一满足 Γ 的若尔当弧

$$\frac{\partial g_{\Omega_\Gamma}}{\partial n_+}(z,\infty) = \frac{\partial g_{\Omega_\Gamma}}{\partial n_-}(z,\infty), \quad \Omega_\Gamma = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma \tag{2.1}$$

在所有内点处。(2.1)向一组圆弧的推广由 S性质给出，其正式定义见下文定义 2.2。

[10] 的结果表明， S性质是Widom因子出现较大极限的关键机制，具体而言会导致极限为2。在本节中，我们通过考察一族 S性质不成立的圆弧并集，为此提供进一步证据，并证明其相应的Widom因子渐近地严格小于2。

2.1. 主要结果。 勒让德曲线上的极值多项式已得到广泛研究，尤其是形如 $\{z$ 的集合： $z^m+1 \in r\mathbb{T}\}$（参见例如 [5, 23, 30, 33, 44]）。为了由此结构得到一组圆弧，我们考虑一条圆弧而非整个圆的原像：

$$\mathsf{E}_{m,r}(\alpha) := \{z : z^m + 1 \in r\Gamma_\alpha\}, \quad 0 < \alpha < \pi, \tag{2.2}$$

其中 $m \in \mathbb{N}$ 且 $r > 0$。这些集合的几何结构关键取决于参数 r。(2.2)中的集合在 $r \neq 1$时由 m 条互不相交的解析弧组成。然而，若 $r = 1$，这些连通分支在原点处相连，有 $2m$ 条解析弧在此交汇。这些结构的示例见图 2。

我们的主要结果给出了这一族集合的Widom因子的显式极限。

定理 2.1. 设$\mathsf{E}_{m,r}(\alpha) = \{z : z^m + 1 \in r\Gamma_\alpha\}$，其中 $m \in \mathbb{N}$、 $r > 0$和 $0 < \alpha < \pi$。则对任意 $0 \le l < m$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{W}_{nm+l}\big(\mathsf{E}_{m,r}(\alpha)\big) = 2\cos^2(\alpha/4)\, c(r,\alpha)^{l/m} \tag{2.3}$$

其中

$$c(r,\alpha) = \frac{|1-r| + \sqrt{1 - 2r\cos(\alpha) + r^2}}{2r\sin(\alpha/2)}. \tag{2.4}$$

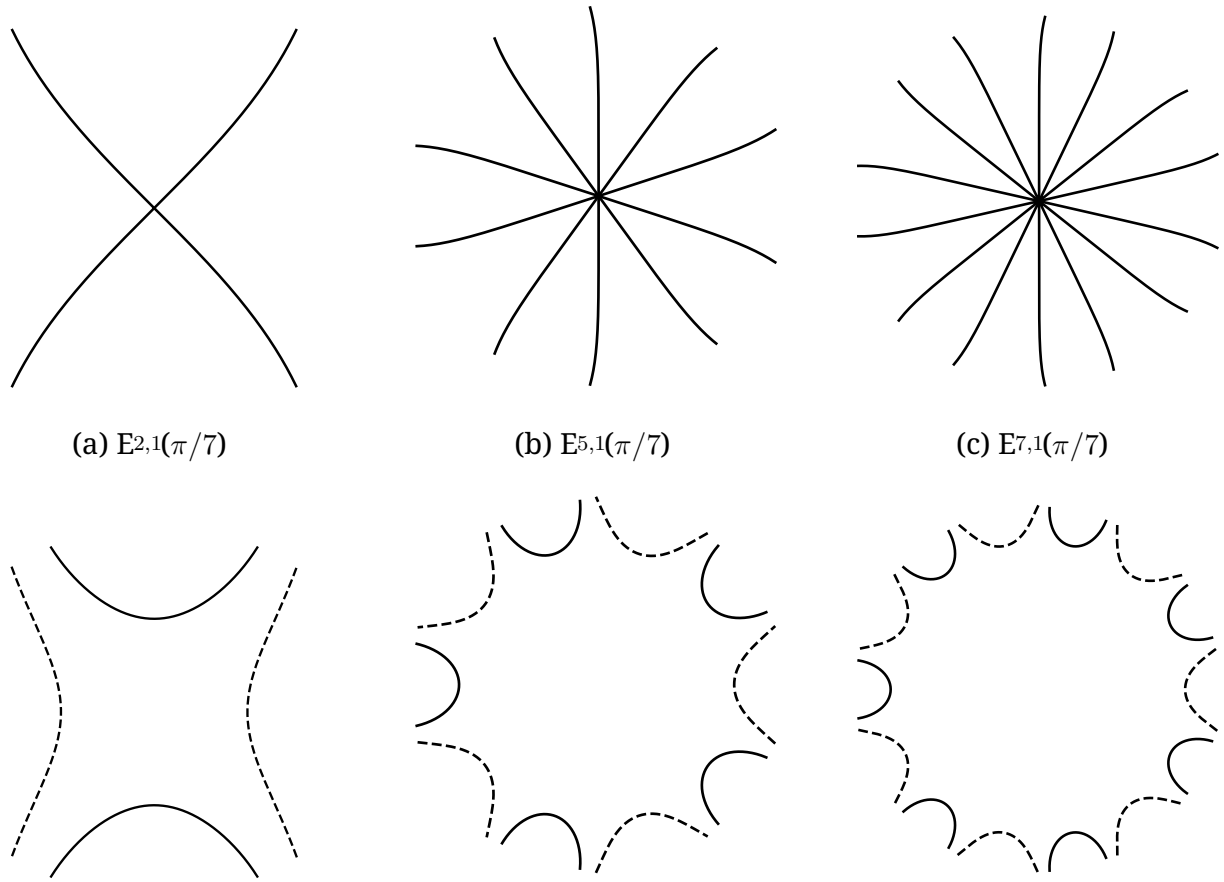
特别地，对于 $r = 1$时的连通情形，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{W}_n\big(\mathsf{E}_{m,1}(\alpha)\big) = 2\cos^2(\alpha/4). \tag{2.5}$$

本定理具有重要意义，因为正如我们将在命题 2.3中所证明的，连通集$\mathsf{E}_{m,1}(\alpha)$不满足 S 性质。显式公式(2.5)表明，缺少 S性质会导致极限严格小于2，从而支持如下猜想： S性质对于连通集的Widom因子趋近于2至关重要。

2.2. 定理 2.1 的证明。 证明分几个步骤进行。首先，我们正式定义 S-性质，并证明集合 $\mathsf{E}_{m,1}(\alpha)$ 不具有该性质。其次，我们利用对称性论证，将问题简化为分析圆弧 Γ_α 上的加权切比雪夫多项式。最后，我们计算所需的位势论量，从而推导出渐近公式。

我们先给出形式化定义。



(a) $E_{2,1}(\pi/7)$ (b) $E_{5,1}(\pi/7)$ (c) $E_{7,1}(\pi/7)$

(d) $E_{2,0.9}(\pi/7)$ 和 $E_{2,1.1}(\pi/7)$ (e) $E_{5,0.9}(\pi/7)$ 和 $E_{5,1.1}(\pi/7)$ (f) $E_{7,0.9}(\pi/7)$ 和 $E_{7,1.1}(\pi/7)$

图 2. 当 r 取不同值时，族 $E_{2,r}(\pi/7)$、$E_{5,r}(\pi/7)$ 和 $E_{7,r}(\pi/7)$ 中集合的示例。对应于 $r = 1.1$ 的线为虚线。

定义 2.2. 设 $E \subset \mathbb{C}$ 是一个容量 $\mathrm{Cap}(E) > 0$ 的紧集，并假设 $\Omega_E = \mathbb{C} \setminus E$ 是连通的。此外，假设存在子集 $E_0 \subset E$，其容量 $\mathrm{Cap}(E_0) = 0$，使得

$$E \setminus E_0 = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i, \tag{2.6}$$

其中，Γ_i' 是互不相交的开解析约旦弧，且 $I \subset \mathbb{N}$。我们称 E 满足 S-性质，如果

$$\frac{\partial g_{\Omega_E}}{\partial n_+}(z, \infty) = \frac{\partial g_{\Omega_E}}{\partial n_-}(z, \infty) \tag{2.7}$$

对所有 $z \in E \setminus E_0$, 均成立，其中 n_+ 和 n_- 分别表示圆弧两侧的单位法向量。

S性质与容量极小化密切相关，关于这一点的更多细节，请参阅 [40, 41,42] 。 [10], 研究了与由 $E_m := \{z : z^m \in [-2, 2]\}$ 定义的 m星相关的切比雪夫多项式。这些 m星是具有S性质的集合的例子，并且证明了对于任意 m，当 $n \to \infty$ 时，$\mathcal{W}_n(E_m) \to 2$ 。这一行为类似于满足 S性质（即直线段）的若尔当弧。

为了证明 $\mathsf{E}_{m,1}(\alpha)$ 在子弧的内点处不满足 (2.7)，我们利用它与切博塔廖夫集之间的联系。给定复平面中的 N 个不同点 $a_1 \ldots, a_N$，存在唯一一个包含这些点且对数容量最小的连续统（即紧致连通集）。这个集合称为对应于 $\{a_1, \ldots, a_N\}$的切博塔廖夫集；有关其性质的参考资料见 [17, 22, 25, 29, 32, 36, 37, 42]。已知（参见 [42]），每个切博塔廖夫集必定具有定义 2.2 中所述的形式，因此满足S性质。反过来，具有所述解析弧结构且满足 S性质的紧集，必定是某个有限点集对应的切博塔廖夫集；这一点可从 [42]中问题 2 和定理 11 后的讨论推知。就我们的情形而言，这意味着：若 $\mathsf{E}_{m,1}(\alpha)$ 在点 $\{0\} \cup \{z : z^m + 1 \in e^{\pm i\alpha}\}$ 以外满足 (2.7)，则它必定与这些点（不包括原点）对应的切博塔廖夫集重合。

命题 2.3. 对于 $0 < \alpha < \pi$ 和 $m \in \mathbb{N}$，集合 $\mathsf{E}_{m,1}(\alpha)$（定义见 (2.2)）不满足 S-性质。

证明。 证明通过说明 $\mathsf{E}_{m,1}(\alpha)$ 不是 点集$\{z : z^m + 1 \in e^{\pm i\alpha}\}$的切博塔廖夫集来完成。为此，令 $\mathcal{C}(e^{\pm i\alpha},1)$ 表示 $\{e^{\pm i\alpha}, 1\}$的切博塔廖夫集。根据 [25,定理 1.2]，该集合必然包含于这些点的凸包内。由于这对 Γ_α不成立，因此我们得出 $\Gamma_\alpha \neq \mathcal{C}(e^{\pm i\alpha},1)$，进而可知

$$\operatorname{Cap}(\Gamma_\alpha) > \operatorname{Cap}\big(\mathcal{C}(e^{\pm i\alpha}, 1)\big).$$

此外，集合 $\{z : z^m + 1 \in \mathcal{C}(e^{\pm i\alpha},1)\}$ 构成一个连续统（因为 $\mathcal{C}(e^{\pm i\alpha},1)$ 包含 $z^m + 1$的临界值）。应用两次 [34, 定理 5.2.5]，得到

$$\operatorname{Cap}\big(\{z : z^m + 1 \in \mathcal{C}(e^{\pm i\alpha}, 1)\}\big) = \operatorname{Cap}\big(\mathcal{C}(e^{\pm i\alpha}, 1)\big)^{1/m} < \operatorname{Cap}(\Gamma_\alpha)^{1/m} = \operatorname{Cap}\big(\mathsf{E}_{m,1}(\alpha)\big).$$

因此，$\mathsf{E}_{m,\,1}(\alpha)$ 并非包含 $\{z$ 的最小容量集：$z^m + 1 \in e^{\pm i\alpha}\}$，因而不满足 S性质。□

既已证明 $\mathsf{E}_{m,\,1}(\alpha)$ 不具备 S 性质，接下来我们将进行 Widom 因子的主要渐近计算。论证首先利用集合 $\mathsf{E}_{m,\,r}(\alpha)$ 的旋转对称性。该集合在旋转 $2\pi/m$ 弧度后保持不变。因此，相应的次数为 $nm + l$ 的切比雪夫多项式（其中 $0 \le l < m$）满足对称关系

$$T_{nm+l}^{\mathsf{E}_{m,r}(\alpha)}(e^{2\pi i/m} z) = e^{2\pi i l/m} T_{nm+l}^{\mathsf{E}_{m,r}(\alpha)}(z).$$

这意味着 $T^{\mathsf{E}_{m,r}(\alpha)}_{nm+l}(z) = z^l Q_n(z^m + 1)$，其中 Q_n 是次数为 n 的首一多项式。通过变量替换 $z = (r\zeta - 1)^{1/m}$，我们得到 $Q_n(r\zeta) = r^n \tilde{Q}_n(\zeta)$，其中 $\tilde{Q}_n$ 是在 Γ_α 上关于权函数 w_r 使范数达到最小值的次数为 n 的首一多项式，$m,l(\zeta) = |r\zeta - 1|^{l/m}$。换言之，$\tilde{Q}_n(\zeta) = T^{\Gamma_\alpha}_{n,\ w_{r\,m\,l},}(\zeta) =: T^{w_r}_{n,\ m\,l,}(\zeta)$，并且

$$\|T_{nm+l}^{\mathsf{E}_{m,r}(\alpha)}\|_{\mathsf{E}_{m,r}(\alpha)} = r^n \|w_{r,m,l} T_n^{w_{r,m,l}}\|_{\Gamma_\alpha}.$$

右端的渐近行为由定理 4.1 给出，由此得到

$$\|w_{r,m,l} T_n^{w_{r,m,l}}\|_{\Gamma_\alpha} \sim 2\cos(\alpha/4)^2 \operatorname{Cap}(\Gamma_\alpha)^n \exp\left(\int_{\Gamma_\alpha} \log w_{r,m,l}(\zeta)\, d\mu_{\Gamma_\alpha}(\zeta)\right). \tag{2.8}$$

要应用这个公式，我们必须计算指数项中的积分，其表达式由以下引理给出。

引理 2.4。 对于 $r>0$，对数势由下列恒等式给出

$$\int_{\Gamma_\alpha}\log|r\zeta-1|\,d\mu_{\Gamma_\alpha}(\zeta)=\log\left(\frac{|1-r|+\sqrt{1-2r\cos(\alpha)+r^2}}{2}\right). \tag{2.9}$$

证明。 $r=1$ 的情形可由 Frostman 定理 [34, 定理 3.3 直接推出。4], 注意到 $\mathrm{Cap}(\Gamma_\alpha)=\sin(\alpha/2)$。

对于 $r\neq 1$，积分等于 $h_r(\infty)$，其中 h_r 是 $\Omega_\alpha=\mathbb{C}\setminus\Gamma_\alpha$ 上狄利克雷问题的解，其边界数据为 $\log|r\zeta-1|$。根据位势理论，我们有

$$h_r(\infty)=\log r+\log\mathrm{Cap}(\Gamma_\alpha)+g_{\Omega_\alpha}(1/r,\infty), \tag{2.10}$$

其中 $g_{\Omega_\alpha}(z,\ \infty)$ 表示 Ω_α 上以无穷远点为极点的格林函数。回想一下，函数

$$f(z)=\frac{1}{2}\Big(z-1+\sqrt{(z-e^{i\alpha})(z-e^{-i\alpha})}\Big),$$

选取 $\sqrt{\cdot}$ 的分支，使得当 $z\to\bar{\infty}$ 时，$f(z)=z+O(1)$，该函数将 Ω_α 共形映射到$\{w:\ |w|>\sin(\alpha/2)\}$（参见 [34, 练习 5.2。4]）。因此，格林函数为 $g_{\Omega_\alpha}(z,\ \infty)=\log(|f(z)|/\sin(\alpha/2))$。在 $z=1/r$ 处求值可得

$$g_{\Omega_\alpha}(1/r,\infty)=\log\left(\frac{|1-r|+\sqrt{1-2r\cos(\alpha)+r^2}}{2r\sin(\alpha/2)}\right). \tag{2.11}$$

将此结果和 $\mathrm{Cap}(\Gamma_\alpha)=\sin(\alpha/2)$ 代入 (2.10)，即可证明引理中所述的恒等式。该表达式在 $r=1$ 处的连续性证实了结果的一致性。□

由 (2.11) 可直接得出，在 (2.4) 中定义的量 $c(r,\ \alpha)$ 不过是 $g_{\Omega_\alpha}(1/r,\ \infty)$ 的指数。现在，我们已经具备完成定理 2.1 证明所需的全部要素。利用容量公式 $\mathrm{Cap}(\mathsf{E}_{m,\ r}(\alpha))=(r\mathrm{Cap}(\Gamma_\alpha))^{1/m}$，可得

$$\mathcal{W}_{nm+l}\big(\mathsf{E}_{m,r}(\alpha)\big)=\frac{\|T_{nm+l}^{\mathsf{E}_{m,r}(\alpha)}\|_{\mathsf{E}_{m,r}(\alpha)}}{\mathrm{Cap}\big(\mathsf{E}_{m,r}(\alpha)\big)^{nm+l}}=\frac{r^n\|w_{r,m,l}T_n^{w_{r,m,l}}\|_{\Gamma_\alpha}}{\big(r\,\mathrm{Cap}(\Gamma_\alpha)\big)^{(nm+l)/m}}.$$

代入渐近公式 (2.8) 和引理 2.4 的结果，并令$n\to\infty$，取极限，得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathcal{W}_{nm+l}\big(\mathsf{E}_{m,r}(\alpha)\big)&=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n\cdot 2\cos^2(\alpha/4)\,\mathrm{Cap}(\Gamma_\alpha)^n\exp\left(\frac{l}{m}\int_{\Gamma_\alpha}\log|r\zeta-1|\,d\mu_{\Gamma_\alpha}(\zeta)\right)}{r^{n+l/m}\,\mathrm{Cap}(\Gamma_\alpha)^{n+l/m}}\\&=\frac{2\cos^2(\alpha/4)}{r^{l/m}\,\mathrm{Cap}(\Gamma_\alpha)^{l/m}}\big(r\sin(\alpha/2)\,c(r,\alpha)\big)^{l/m}.\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Cap}(\Gamma_\alpha)=\sin(\alpha/2)$，该表达式可化简为 $2\cos^2(\alpha/4)c(r,\ \alpha)^{l/m}$，这就是定理的结论。□

2.3. 极限点的分析。 研究不同 r 值下极限点的取值范围颇有启发意义。关键在于理解固定 $\alpha\in(0,\pi)$ 时函数 $r\mapsto c(r,\alpha)$ 的行为。由于 $c(r,\alpha)>0$，$\partial_r c(r,\alpha)$ 的符号由其对数导数决定。计算表明，导数仅在 $k\in\mathbb{Z}$ 时满足 $r\in\{0,1\}$ 或 $\alpha=\pi k$。在我们的设定中，导数连续，且在 (0,1) 和 $(1,\infty)$ 上不为零，因此它

在这些区间上必定具有恒定符号。由此可知，当 $0 < r < 1$ 时， $\partial_r c(r, \alpha)$ 为负；当 $r > 1$ 时则为正。此外，由于

$$\lim_{r\to 0} c(r,\alpha) = \infty \quad \text{and} \quad \lim_{r\to\infty} c(r,\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha/2)},$$

由此可知， $c(\cdot, \alpha)$ 将 $(0, 1)$ 映射到 $(1, \infty)$，并将 $(1, \infty)$ 映射到 $\big(1, \csc(\alpha/2)\big)$。因此，对于 $0 \le l < m$，Widom因子的极限点位于以下范围内：

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{W}_{nm+l}\big(\mathsf{E}_{m,r}(\alpha)\big) \in \begin{cases} [2\cos^2(\alpha/4), 2\cos^2(\alpha/4)\csc^{\frac{l}{m}}(\alpha/2)], & r > 1, \\ [2\cos^2(\alpha/4), \infty), & 0 < r < 1. \end{cases}$$

这一分析的一个重要结论是，连通情形与非连通情形的收敛行为有所不同。当 $r = 1$ 时，我们有 $c(1, \alpha) = 1$，这使定理 2.1 中的极限与子序列指标 l 无关。这意味着整个序列$\{\mathcal{W}_n(\mathsf{E}_{m,\,1}(\alpha))\}$ 收敛。相反，对于 $r \neq 1$，极限取决于剩余类 $l \equiv n$(模 m)。因此，整个序列并不收敛；相反，它有 m 个不同的极限点。这种行为通常称为极限周期性，是对称系统的典型特征；在这类系统中，从无穷远点观察，每个非连通分量都具有相同的调和测度。

最后还需指出，定理 2.1 表明，在连通情形下， $\mathcal{W}_n(\mathsf{E}_{m,\,1}(\alpha))$ 的极限始终落在区间 $(1, 2)$ 内。随着 $\alpha \to 0$ 的变化，集合 $\mathsf{E}_{m,\,1}(\alpha)$ 越来越像一组相交直线，相应地，其 Widom因子 的极限趋近于 2。应将这一行为与 [10, 定理 1.2] 的结果进行比较。

3. 多项式倒数作为权函数

现在我们转而分析有理权 w 下的 $R^{\Gamma_\alpha,\,n\,w}(\underline{u},\ u_0)$，目标是确定其在 $\Omega_\alpha = \mathbb{C}\setminus\Gamma_\alpha$ 上的局部一致渐近行为。给定 $\mathbb{C}$ 的真子域 Ω 和一点 $\zeta \in \Omega$，我们定义

$$b_\Omega(\cdot,\zeta) := \exp\Big[-\big(g_\Omega(\cdot,\zeta) + i\widetilde{g}_\Omega(\cdot,\zeta)\big)\Big], \tag{3.1}$$

其中， $\widetilde{g}_\Omega(\cdot,\ \zeta)$ 是 $g_\Omega(\cdot,\ \zeta)$ 的调和共轭函数。一般而言，该函数在 Ω 上是多值的解析函数，并具有特征自守性。然而，若 Ω 是单连通的，它便定义了一个从 Ω 到单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的黎曼映射，并将 ζ 映至 0。该映射在乘以一个模为一的常数的意义下唯一；通常我们通过要求 $b_\Omega(z, \zeta)$ 在指定点 $z \in \Omega$ 处 > 0 来固定归一化。

取 Γ_α 为特例，我们研究 $b_{\Omega_\alpha}(u,\infty)^n R^{\Gamma_\alpha,\,n\,w}(u, u_0)$ 的渐近行为。为确保归一化一致，我们施加条件

$$\begin{cases} b_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty) > 0 \ \text{ if } u_0 \neq \infty, \text{ and} \\ \lim\limits_{u\to\infty} u b_{\Omega_\alpha}(u,\infty) > 0 \ \text{ when } u_0 = \infty. \end{cases} \tag{3.2}$$

采用这种归一化后，式 (3.2) 中的极限可解释为 $b_{\Omega_\alpha}(u,\infty)$ 在 $u = \infty$ 处的导数，且恰好对应于 Γ_α 的容量。此外，在 ∞附近，我们有如下渐近表达式

$$b_{\Omega_\alpha}(u,\infty) = \frac{\mathrm{Cap}(\Gamma_\alpha)}{u} + \mathcal{O}(|u|^{-2}). \tag{3.3}$$

3.1. 相对于原点的剩余多项式。我们先考虑情形 $u_0 = 0$。我们分析中的一个关键步骤，是将与 Ω_α 相关的有理函数空间转化为与

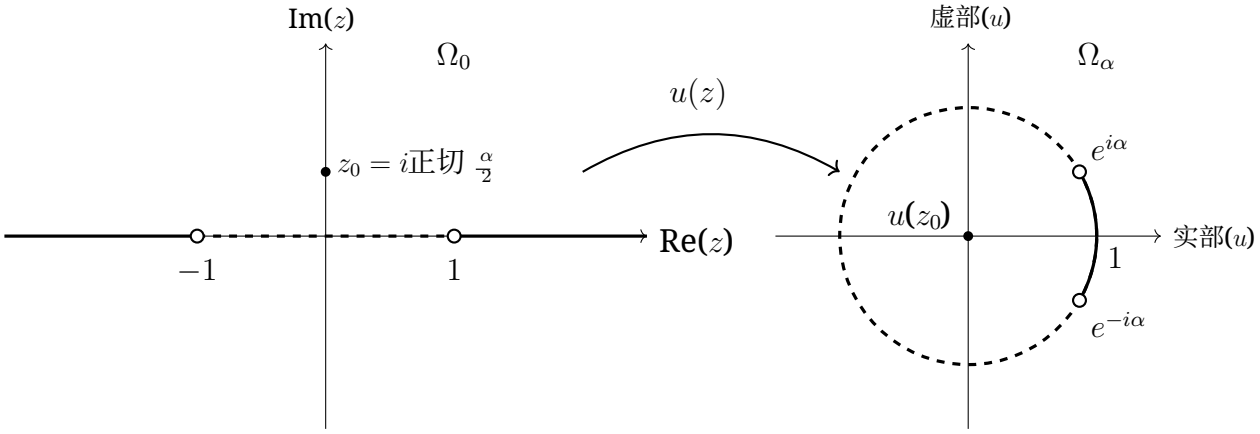
$$\Omega_0 := \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathsf{A}_0, \quad \mathsf{A}_0 = \big(\mathbb{R} \cup \{\infty\}\big) \setminus (-1, 1). \tag{3.4}$$

这一变换将使我们能够应用 Yuditskii [46] 的基本结果。我们将对应于 Ω_α 的变量记为 u，将与 Ω_0 相关联的变量记为 z。

这些区域之间的联系通过以下变量替换建立。设 $u : \Omega_0 \to \Omega_\alpha$ 为莫比乌斯变换

$$u(z) = \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}, \quad z_0 := i \tan(\alpha/2). \tag{3.5}$$

这一共形映射使我们能够从 $z \in \Omega_0$ 转换到 $u := u(z) \in \Omega_\alpha$，同时确保 $u(\pm 1) = e^{\mp i\alpha}$。此外，由于 $u(z_0) = \infty$，我们引入记号 $\overline{z}_\infty := z_0$ 来强调这一性质。



当 $z,\ \zeta \in \Omega_0$, 函数 u 满足

$$u(z) - u(\zeta) = \frac{z_0 - z_\infty}{\zeta - z_\infty} \frac{z - \zeta}{z - z_\infty}. \tag{3.6}$$

因此，若 $H : \Omega_\alpha \to \overline{\mathbb{C}}$ 是变量 u的有理函数，则 $H(u(z))$在 Ω_0上仍为有理函数。具体而言，若 $H(u) = \prod_{j=1}^n (u - u(z_j))^{k_j}$ 对于某个 $k_j \in \mathbb{Z}$ 和 $z_j \in \Omega_0$, , 则

$$H\big(u(z)\big) = c(z - z_\infty)^{-\sum_{j=1}^n k_j} \prod_{j=1}^n (z - z_j)^{k_j} \tag{3.7}$$

对于某个可明确计算的常数 c。这表明变量替换 $z \mapsto u(z)$ 保持有理函数不变。我们采用这一变换的动机源于相对于 Ω_0, 的剩余多项式理论，该理论在 [46], 中得到了发展，现在我们可以加以应用。

我们首先将研究范围限定为如下形式的权函数 w

$$w(u) = e^{i\beta} \left[\prod_{j=1}^k (u - u_j) \right]^{-1}, \tag{3.8}$$

其中 $|u_j| > 1$ 和 $\beta \in [0, 2\pi)$ 的选取满足 $w(0) > 0$。这些函数通常在 Γ_α 上取复值，严格来说并不符合权函数的定义。然而，由于

$$\|Pw\|_{\Gamma_\alpha} = \|P|w|\|_{\Gamma_\alpha},$$

我们用记号 $R^{\Gamma_\alpha, w}_n$ 表示 $R^{\Gamma_\alpha, |w|}_n$。在下文中，我们均采用这一约定，不再另行说明。

每个满足 $|u| > 1$ 的 u 都通过映射 $z \mapsto u(z)$ 对应于下半平面中的一个点。因此，对于 (3.8) 中的每个 u_j，都存在满足 $\operatorname{Im} z_j > 0$ 的 z_j，使得 $u_j = u(z_j)$。为方便起见，我们引入权函数

$$W_n(z) = e^{i\theta}(z - z_\infty)^{k-n}\big[(z - \overline{z}_1)\cdots(z - \overline{z}_k)\big]^{-1}, \tag{3.9}$$

其中，$\theta \in [0, 2\pi)$ 的选取使得 $W_n(z_0) > 0$。当 $P \in \mathcal{P}_n$ 时，由 (3.7) 可得

$$Q(z) := P\big(u(z)\big)\frac{w\big(u(z)\big)}{W_n(z)}$$

定义了一个多项式 $Q \in \mathcal{P}_n$。此外，这一对应在两个相同的 $\mathcal{P}_n$ 之间建立了双射，将 Γ_α 上的加权多项式 Pw 与 A_0 上的 QW_n 联系起来。

为了研究与 A_0 及权函数 W_n 相关的残差多项式，我们注意到 A_0 的非紧性给应用经典结果带来了困难。然而，如果

$$Q(z) = a_n z^n + \text{lower order terms},$$

then

$$\lim_{z\to\infty} Q(z)W_n(z) = a_n e^{i\theta},$$

从而确保 QW_n 连续延拓至 A_0。对 [13, 定理 2.1] 的证明稍作修改，即可得出存在唯一一个次数至多为 n、满足条件的多项式 $R^{\mathsf{A}_0, W_n}_n(\cdot, z_0)$

$$\begin{aligned} &(i) \quad \|R^{\mathsf{A}_0, W_n}_n(\cdot, z_0)W_n(\cdot)\|_{\mathsf{A}_0} \le 1, \text{ and} \\ &(ii) \quad R^{\mathsf{A}_0, W_n}_n(z, z_0) = \sup\big\{|Q(z_0)| : Q \in \mathcal{P}_n,\ \|QW_n\|_{\mathsf{A}_0} \le 1\big\}. \end{aligned}$$

Γ_α 上的极值问题与 A_0 上的极值问题可由以下结果联系起来；另见 [16,引理 2.1]。

引理 3.1. 令 $t\ z_0 = i\tan(\alpha/2)$ 并按(3.5)定义 $u : \Omega_0 \to \Omega_\alpha$。那么，对所有 $z \in \Omega_0$，

$$R^{\Gamma_\alpha, w}_n\big(u(z), 0\big)w\big(u(z)\big) = R^{\mathsf{A}_0, W_n}_n(z, z_0)W_n(z). \tag{3.10}$$

证明。如上所述，该映射

$$\mathcal{P}_n \ni P \mapsto Q(z) := P\big(u(z)\big)\frac{w\big(u(z)\big)}{W_n(z)} \in \mathcal{P}_n$$

是一个双射。此外，我们有

$$\|Pw\|_{\Gamma_\alpha} = \|QW_n\|_{\mathsf{A}_0}$$

and

$$P(0) = Q(z_0)W_n(z_0)/w(0).$$

根据剩余多项式的唯一性，以及$W_n(z_0) > 0$ 和 $w(0) > 0$这两个事实，即可得出该结果。□

我们的方法依赖于这样一个事实： $R^{\mathsf{A}_0,\ n\ W_n}(\cdot,\ z_0)$有显式表示，相关细节和证明见 [46]。该结果的简洁表述见 [16, 定理 2。2]存在唯一一点 $x_n \in (0,\ 1)$，使得在定义

$$I_n := [-x_n, x_n], \quad \Omega_n := \Omega_0 \setminus I_n, \tag{3.11}$$

调和测度满足以下恒等式

$$(n-k+1)\omega(z_\infty, I_n; \Omega_n) + \sum_{j=1}^{k} \omega(\overline{z}_j, I_n; \Omega_n) = 1. \tag{3.12}$$

对于 x_n 的这一选择，函数 $R^{\mathsf{A}_0}{}_{,n}{}^{W_n}(\cdot, z_0)W_n(\cdot)$ 可表示为

$$R_n^{\mathsf{A}_0,W_n}(z, z_0)W_n(z) = \frac{1+s_n(z)}{2B_n^{\Omega_n}(z)} + \frac{1-s_n(z)}{2} B_n^{\Omega_n}(z) \left(\frac{z-z_0}{z-z_\infty}\right)^{n-k+1} \prod_{j=1}^{k} \frac{z-z_j}{z-\overline{z}_j}, \tag{3.13}$$

其中

$$B_n^{\Omega_n}(z) := b_{\Omega_n}(z, z_\infty)^{n-k+1} \prod_{j=1}^{k} b_{\Omega_n}(z, \overline{z}_j) \tag{3.14}$$

and

$$s_n(z) := \sqrt{\frac{z_0^2 - x_n^2}{z_0^2 - 1} \frac{z^2-1}{z^2-x_n^2}}. \tag{3.15}$$

我们施加规范化条件 $B_n^{\Omega_n}(z_0) > 0$ 和 $s_n(z_0) = 1$。虽然（3.14）中的各个因子未必是单值的，但它们的乘积是单值的。这一性质与（3.12）有着内在联系，具体将在引理 3.2 的证明中说明。为确保（3.15）中的平方根是单值的，我们沿 A_0 和 I_n 引入分支切割。作此选择后，以下恒等式成立：

$$\sqrt{\overline{z}^2 - 1} = -\overline{\sqrt{z^2-1}} \ \text{ and } \ \sqrt{\overline{z}^2 - x_n^2} = \overline{\sqrt{z^2 - x_n^2}}.$$

由此可得 $s_n(z) = \overline{-s_n(z)}$，特别是 $s_n(z_\infty) = -1$。

引理 3.2. 函数 $B_n^{\Omega_n}$（定义见 (3.14)）在Ω_n中是单值的。此外，将(3.13)的右端除以 $W_n(z)$后，可从Ω_n 上的解析函数延拓为一个多项式。

证明。我们首先证明 $B_n^{\Omega_n}$ 是单值的。这可直接由 (3.12) 得出。由于模 $|b_{\Omega_n}(\cdot, \zeta)|$ 是单值的，只需证明 $B_n^{\Omega_n}$ 沿任意包围 I_n 的若尔当曲线 $\gamma \subset \Omega_n$ 的辐角变化（记为 $\Delta_\gamma \arg B_n^{\Omega_n}$）是 2π 的整数倍。对于任意这样的正定向曲线 γ，已知（参见 [2, §5.2, Ch. 6] 或 [45, Ch. 4]）$\Delta_\gamma \arg b_{\Omega_n}(\cdot, \zeta) = 2\pi\omega(\zeta, I_n; \Omega_n)$。因此，利用 (3.12)，我们得到

$$\begin{aligned}
\Delta_\gamma \arg B_n^{\Omega_n} &= \Delta_\gamma \arg \left(b_{\Omega_n}(\cdot, z_\infty)^{n-k+1} \prod_{j=1}^{k} b_{\Omega_n}(\cdot, \overline{z}_j) \right) \\
&= 2\pi \left((n-k+1)\omega(z_\infty, I_n; \Omega_n) + \sum_{j=1}^{k} \omega(\overline{z}_j, I_n; \Omega_n) \right) = 2\pi.
\end{aligned}$$

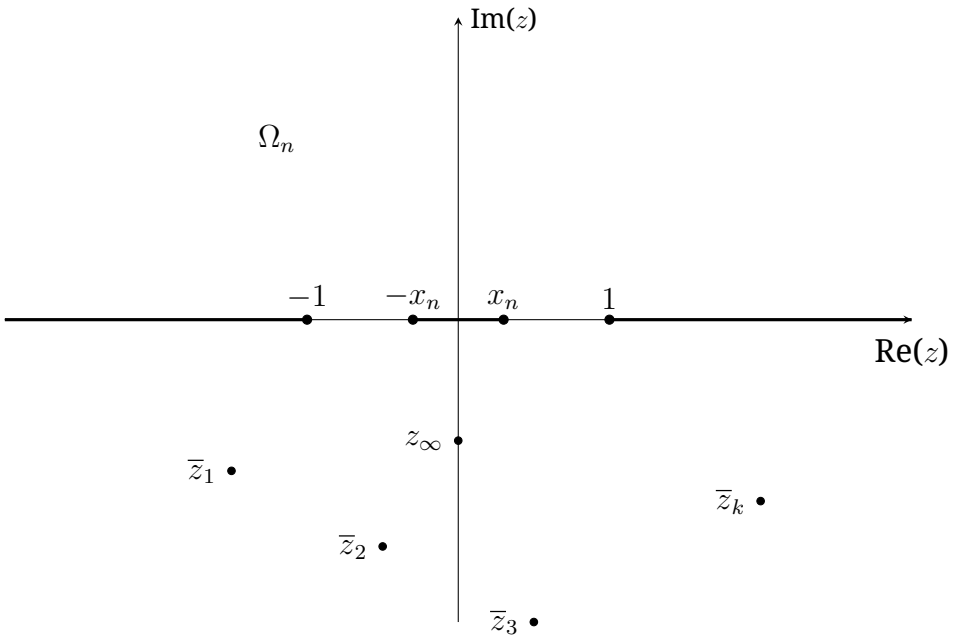


图3. 区域 Ω_n 及其指定点 z_j。

因此， $B_n^{\Omega_n}$ 在 Ω_n 中是单值的。由此，(3.13) 的右端（记为 $R(z)$）在 Ω_n 中也是单值的。

为证明第二个断言，我们证明 R 是一个有理函数。由于 R/W_n 在 Ω_n中没有极点，这就证明了该断言。函数 R 在 Ω_n 中解析，可能仅在 $B_n^{\Omega_n}$的零点处例外；这些零点是 R的极点。此外，由于$|B_n^{\Omega_n}| = 1$ 在 $\partial\Omega_n$上， R 在 Ω_n内的无穷远点附近有界。要证明 R 是有理函数，只需证明 R 可连续延拓至 $\partial\Omega_n$上。由于

$$b_{\Omega_n}(z,\zeta)\left(\frac{z-\overline{\zeta}}{z-\zeta}\right) = b_{\Omega_n}(z,\overline{\zeta}) = \overline{b_{\Omega_n}(\overline{z},\zeta)},$$

由此可得

$$B_n^{\Omega_n}(z)\left(\frac{z-z_0}{z-z_\infty}\right)^{n-k+1}\prod_{j=1}^{k}\frac{z-z_j}{z-\overline{z}_j} = \overline{B_n^{\Omega_n}(\overline{z})}. \tag{3.16}$$

由于 $s_n^2(x) > 0$ 对 $x \in \partial\Omega_n$成立，因此边界值 $s_n(x \pm i0)$ 为实数且非零。回想对称性 $s_n(z) = -s_n(z)$，可得 $s_n(x+i0) = -s_n(x-i0)$ 对 $x \in \partial\Omega_n$成立。利用这一关系、(3.16) 以及 $|B_n^{\Omega_n}| = 1$ 在 $\partial\Omega_n$上的事实，可得对 $x \in \partial\Omega_n$:

$$\begin{aligned} R(x+i0) &= \frac{1+s_n(x+i0)}{2B_n^{\Omega_n}(x+i0)} + \frac{1-s_n(x+i0)}{2}\overline{B_n^{\Omega_n}(x-i0)} \\ &= \frac{1-s_n(x-i0)}{2}\overline{B_n^{\Omega_n}(\overline{x-i0})} + \frac{1+s_n(x-i0)}{2B_n^{\Omega_n}(x-i0)} = R(x-i0). \end{aligned}$$

因此， R 可连续延拓穿过 $\partial\Omega_n$，从而确立 R 是有理函数。 □

乘积 $R^{\mathsf{A}_0,W_n}_n(\cdot,z_0)W_n(\cdot)$在 z_∞和$z_1,\dots,z_k$处有极点，但这些极点在与该因子相乘时自然抵消

$$B_n^{\Omega_0}(z) := b_{\Omega_0}(z,z_\infty)^{n-k}\prod_{j=1}^{k} b_{\Omega_0}(z,\overline{z}_j), \tag{3.17}$$

这里我们再次选择归一化，使得 $B_n^{\Omega_0}(z_0) > 0$。定义函数 $f_n:\ \Omega_0 \to \mathbb{C}$如下

$$f_n(z) := B_n^{\Omega_0}(z)R_n^{\mathsf{A}_0,W_n}(z,z_0)W_n(z), \tag{3.18}$$

我们看到，每个 f_n 在整个Ω_0 上都是解析的，并满足 $f_n(z_0) > 0$。此外，由于 $|f_n| \le 1$在 $\partial\Omega_0 = \mathsf{A}_0$, 上，最大值原理推出，对所有 n，都有 $\|f_n\|_{\Omega_0} \le 1$ 。根据蒙特尔定理[14, 定理 VII.2，9], 任意这样的序列在Ω_0, 的紧子集上一致收敛的子列，其极限为一个解析函数。我们将证明 $\{f_n\}$只有一个极限点，从而得出整个序列局部一致收敛。

命题 3.3。 设 $\{f_n\}$由(3.18)定义。则

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \frac{1+s(z)}{2}\frac{b_{\Omega_0}(z,0)}{b_{\Omega_0}(z,z_\infty)} \tag{3.19}$$

在Ω_0, 的紧子集上一致收敛，其中

$$s(z) := \frac{z_0\sqrt{z^2-1}}{z\sqrt{z_0^2-1}}. \tag{3.20}$$

我们采用归一化 $s(z_0) = 1$，并要求 $b_{\Omega_0}(z_0,0)$ 和 $b_{\Omega_0}(z_0,z_\infty)$ 为正。

我们将分几个步骤证明这一收敛过程，紧密遵循 [16] 中的方法，同时进行必要的修改，以考虑权函数的存在。

引理 3.4。 设 $I_n = [-x_n,x_n]$ 按照 (3.11) 定义。则当 $n\to\infty$ 时， $x_n \to 0$ 。此外，将 $n\omega(z_\infty,dx;\Omega_n)$ 限制在 I_n 上后，它在弱星意义下收敛到原点处的狄拉克测度：

$$n\omega(z_\infty,dx;\Omega_n)\big|_{I_n} \xrightarrow{*} \delta_0(dx) \quad as\ n\to\infty. \tag{3.21}$$

证明。 设 $\omega_n(z,I) := \omega(z,I;\Omega_n)$。函数 $z\mapsto\omega_n(z,I_n)$ 是下半平面上的正调和函数。由哈纳克不等式， [34, 推论 1.3.3], 存在一个与 n 无关的常数 $M\ge 1$，使得

$$M^{-1}\omega_n(z_\infty,I_n) \le \omega_n(\overline{z}_j,I_n) \le M\omega_n(z_\infty,I_n), \quad j=1,\dots,k. \tag{3.22}$$

将 (3.22) 与恒等式 (3.12) 结合可得

$$1 = (n-k+1)\omega_n(z_\infty,I_n) + \sum_{j=1}^{k}\omega_n(\overline{z}_j,I_n) \ge \left(n-k+1+kM^{-1}\right)\omega_n(z_\infty,I_n).$$

这意味着 $\omega_n(z_\infty,I_n) \le (n-k+1+kM^{-1})^{-1}$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\omega_n(z_\infty,I_n) = 0. \tag{3.23}$$

为证明 $x_n\to 0$，我们对 $0<x<1$ 定义函数 $f(x) := \omega(z_\infty,\ [-x,x];\Omega_x)$，其中 $\Omega_x := \Omega_0\setminus[-x,x]$。当 $a\le b$ 时，我们有 $\Omega_b\subset\Omega_a$，根据调和测度的区域单调性原理 [34, 推论 4.3.9], ，可得 $\omega(z_\infty,\ \mathsf{A}_0;\Omega_b) \le \omega(z_\infty,\mathsf{A}_0;\Omega_a)$。由于

$\omega(z_\infty,\ [-x,x];\Omega_x) = 1-\omega(z_\infty,\ A_0;\Omega_x)$，因此得到 $f(a) = \omega(z_\infty,\ [-a,a];\Omega_a) \le \omega(z_\infty,\ [-b,b];\Omega_b) = f(b)$。因此，$f(x)$ 是 x 的单调不减函数。由于 f 为正且单调不减，式 (3.23) 中给出的极限 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ 意味着 $x_n \to 0$。

最后，将由 (3.22) 推得的 $\omega_n(z_\infty,\ I_n)$ 的上界与相应的下界结合起来，可得

$$\frac{1}{n-k+1+kM} \le \omega_n(z_\infty, I_n) \le \frac{1}{n-k+1+kM^{-1}}.$$

这意味着 $\lim_{n\to\infty} n\omega_n(z_\infty,\ I_n) = 1$。令 $\nu_n := n\omega_n(z_\infty,\ dx)|_{I_n}$。那么 $\{\nu_n\}$ 是一列概率测度，且 $\operatorname{supp}(\nu_n) = I_n = [-x_n, x_n]$。由于 $x_n \to 0$，其支撑集收缩至原点。结合总质量趋于 1，可得弱星收敛$\nu_n \xrightarrow{*} \delta_0$，当 $n \to \infty$ 时成立。□

函数的极限 现在可以确定 (3.15) 中定义的函数 s_n 的渐近行为。

引理 3.5。设 $B_n^{\Omega_n}$、s_n 和 $B_n^{\Omega_0}$分别由 (3.14)、(3.15) 和(3.17) 定义，并设 s 由 (3.20) 定义。则

$$\lim_{n\to\infty} s_n(z)^2 = s(z)^2 = \frac{z_0^2}{z_0^2-1}\frac{z^2-1}{z^2} \tag{3.24}$$

and

$$\lim_{n\to\infty} B_n^{\Omega_0}(z)\frac{1-s_n(z)}{2}B_n^{\Omega_n}(z)\left(\frac{z-z_0}{z-z_\infty}\right)^{n-k+1}\prod_{j=1}^{k}\frac{z-z_j}{z-\overline{z}_j} = 0, \tag{3.25}$$

在$\Omega_0 \setminus \{0\}$的紧子集上一致收敛。

证明。显然，由引理 3.4 和 s_n 的定义可直接得出 (3.24)。为证明 (3.25)，注意对于 $j = 0, 1, \dots, k$，函数 $|b_{\Omega_n}(z, z_j)(z-z_j)/(z-\overline{z}_j)|$ 在 $\partial\Omega_n$上的边界值不超过 1。由最大模原理可知，

$$\left|b_{\Omega_n}(z,\overline{z}_j)\frac{z-z_j}{z-\overline{z}_j}\right| < 1, \quad z \in \Omega_n, \quad j = 0, 1, \dots, k.$$

由于当 $n \to \infty$ 时，$B_n^{\Omega_0}(z) \to 0$ 在 Ω_0 的每个紧子集上一致收敛，因此结论成立。□

现在我们可以分析由 (3.18) 定义的序列 $\{f_n\}$ 的极限点，并证明整个序列在区域 Ω_0 的紧子集上一致收敛。

命题 *3.3* 的证明。首先注意到，(3.19) 的右端在 Ω_0 内解析。这是因为，$s(z)$ 在 $z = 0$ 处的简单极点被$b_{\Omega_0}(z,0)$的零点抵消，而 $z = z_\infty$ 处的简单极点也因恒等式 $s(z_\infty) = -1$ 而消失。

对于 $z, \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，我们有

$$\log\left|\frac{b_{\Omega_0}(z,\zeta)}{b_{\Omega_n}(z,\zeta)}\right| = g_{\Omega_n}(z,\zeta) - g_{\Omega_0}(z,\zeta) = -\int_{-x_n}^{x_n} g_{\Omega_0}(z,x)\,\omega(\zeta, dx; \Omega_n).$$

如引理 3.4 的证明所示，可得 $\omega(\zeta, I_n;\ \Omega_n) \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时。结合对于固定的 z，$x \mapsto g_{\Omega_0}(z, x)$ 在 I_n 上有界，可得

$$\log\left|\frac{b_{\Omega_0}(z,\zeta)}{b_{\Omega_n}(z,\zeta)}\right| \longrightarrow 0 \ \text{ as } n \to \infty.$$

特别地，对于 $j = 0,1,\dots,k$，我们得到

$$|b_{\Omega_n}(z,\overline{z}_j)| \to |b_{\Omega_0}(z,\zeta)| \ \text{ as } n\to\infty.$$

应用 (3.21)，我们进一步推得

$$\log\left|\frac{b_{\Omega_0}(z,z_\infty)}{b_{\Omega_n}(z,z_\infty)}\right|^{n-k} = -\int_{-x_n}^{x_n} g_{\Omega_0}(z,x)(n-k)\omega(z_\infty,dx;\Omega_n) \longrightarrow -g_{\Omega_0}(z,0) \ \text{ as } n\to\infty.$$

结合 (3.13) 与引理 3.5，我们得出

$$|f_n(z)| = \left|B_n^{\Omega_0}(z)R_n^{\mathsf{A}_0,W_n}(z,z_0)W_n(z)\right| \longrightarrow \left|\frac{1+s(z)}{2}\frac{b_{\Omega_0}(z,0)}{b_{\Omega_0}(z,z_\infty)}\right| \ \text{ as } n\to\infty.$$

(3.19) 中的极限现在可由 $\{f_n\}$ 的正规族性质推出，或者在已知 $f_n(z_0) > 0$ 对所有 n 都成立的情况下，直接由 [11, 命题 4.2], 得出

$$\frac{1+s(z_0)}{2}\frac{b_{\Omega_0}(z_0,0)}{b_{\Omega_0}(z_0,z_\infty)} > 0$$

根据我们的归一化。 □

我们关注与圆弧相关的加权多项式，这使我们需要将渐近极限转回 Ω_α。由于 u 是一个共形映射，并且 $b_{\Omega_0}(z_0,z_\infty)$ 和 $b_{\Omega_\alpha}(0,\infty)$ 均为正，因此

$$b_{\Omega_0}(z,\zeta) = b_{\Omega_\alpha}\big(u(z),u(\zeta)\big), \quad z,\zeta\in\Omega_0. \tag{3.26}$$

结合引理 3.1，我们得到

$$b_{\Omega_\alpha}\big(u(z),\infty\big)^n R_n^{\Gamma_\alpha,w}\big(u(z),0\big)w\big(u(z)\big) = b_{\Omega_0}(z,z_\infty)^n R_n^{\mathsf{A}_0,W_n}(z,z_0)W_n(z). \tag{3.27}$$

利用 (3.5) 和 (3.7) 直接计算可得表达式

$$s(z) = \frac{\sqrt{\big(u(z)-e^{i\alpha}\big)\big(u(z)-e^{-i\alpha}\big)}}{u(z)+1}, \tag{3.28}$$

其中，平方根分支沿 Γ_α 取割线，并归一化为在 $u(z) = 0$ 处取值 1。应用命题 3.3（其中进行了核心渐近分析），并牢记 (3.17)–(3.18)，我们得出，当 $n\to\infty$ 时，(3.27) 中的表达式收敛到

$$\begin{aligned}&\frac{1+s(z)}{2}\frac{b_{\Omega_0}(z,0)}{b_{\Omega_0}(z,z_\infty)}\prod_{j=1}^{k}\frac{b_{\Omega_0}(z,z_\infty)}{b_{\Omega_0}(z,\overline{z}_j)}\\ &= \frac{u(z)+1+\sqrt{\big(u(z)-e^{i\alpha}\big)\big(u(z)-e^{-i\alpha}\big)}}{2\big(u(z)+1\big)}\frac{b_{\Omega_\alpha}\big(u(z),-1\big)}{b_{\Omega_\alpha}\big(u(z),\infty\big)}\prod_{j=1}^{k}\frac{b_{\Omega_\alpha}\big(u(z),\infty\big)}{b_{\Omega_\alpha}\big(u(z),u_j\big)}.\end{aligned} \tag{3.29}$$

剩下的就是除以权函数并化简。函数

$$f(u) := \left(\prod_{j=1}^{k}\frac{b_{\Omega_\alpha}(u,\infty)}{b_{\Omega_\alpha}(u,u_j)}\right)\Big/ w(u) \tag{3.30}$$

在 Ω_α 中解析且处处非零，因为极点与零点相互抵消。因此，$\log|f(u)|$ 在整个 Ω_α 中是调和函数。根据 (1.4)，函数

$$h(u) := -\int_{\Gamma_\alpha} \log|w(x)|\,\omega(u, dx, \Omega_\alpha). \tag{3.31}$$

由于两个函数在 Γ_α上都取相同的边界值 $-\log|w(x)|$，根据最大值原理，它们必定恒等$^{\sim}$。令 h 表示 h的调和共轭函数，并将其归一化为在u_0处取零。于是解析函数

$$F_w(u, u_0) := \exp\Big[h(u) + i\widetilde{h}(u)\Big] \tag{3.32}$$

变为正数　　在 $u = u_0$处。由于我们的归一化保证 $f(0) > 0$，因此

$$f(u) = F_w(u, 0), \quad u \in \Omega_\alpha. \tag{3.33}$$

综上所述，我们得到最终的渐近公式

$$b_{\Omega_\alpha}(u,\infty)^n R_n^{\Gamma_\alpha, w}(u, 0) \longrightarrow \frac{u + 1 + \sqrt{(u - e^{i\alpha})(u - e^{-i\alpha})}}{2(u + 1)} \frac{b_{\Omega_\alpha}(u, -1)}{b_{\Omega_\alpha}(u,\infty)} F_w(u, 0), \tag{3.34}$$

该公式在 Ω_α 的紧子集上一致成立，当 $n \to \infty$时。值得注意的是，$u = -1$处的奇点恰好被 $b_{\Omega_\alpha}(u, -1)$ 的零点抵消。

在下一节中，具体而言，在定理 3.9 中，我们将建立一个适用于一般 u_0 的渐近公式。现在，我们先介绍一种直接的方法，以求得 $u_0 = \infty$ 的结果。关键思路是考虑通过对合映射定义的共轭倒数多项式 *：$\mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ 定义为

$$P^*(u) := u^n \overline{P(1/\overline{u})}.$$

这一变换交换了 P 和 P^* 的常数项与首项系数。为方便起见，我们引入记号 $u^* := 1/u$，并注意到，对于 $u \in \mathbb{T}$，有 $u^* = u$。此外，映射 $\overline{u} \mapsto u^*$ 定义了 Ω_α 到其自身的一个双射。将其应用于残差多项式，我们得到

$$R_n^{\Gamma_\alpha, w}(\cdot,\infty) = \big(R_n^{\Gamma_\alpha, w}(\cdot, 0)\big)^*. \tag{3.35}$$

相应的黎曼映射变换可由以下事实推出：对于每个固定的 $v \in \Omega_\alpha$，存在 $\gamma \in [0, 2\pi)$ 使得

$$\overline{b_{\Omega_\alpha}(u^*, v)} = e^{i\gamma} b_{\Omega_\alpha}(u, v^*). \tag{3.36}$$

这一关系成立，是因为左侧定义了一个从 Ω_α 到 $\mathbb{D}$ 的解析映射，并将 v^* 映到 0。特别地，选择归一化 $b_{\Omega_\alpha}(\infty, 0) > 0$，我们可推出

$$\overline{b_{\Omega_\alpha}(u^*,\infty)} = b_{\Omega_\alpha}(u, 0). \tag{3.37}$$

此外，我们注意到恒等式 $b_{\Omega_\alpha}(u, 0) = u b_{\Omega_\alpha}(u, \infty)$，它可由最大值原理推出：考察这两个函数的比值，并注意到它们在 $u = \infty$ 处均为正。此外，正如紧接在 (3.2) 下方所解释的，我们有

$$b_{\Omega_\alpha}(\infty, 0) = \lim_{u\to\infty} u b_{\Omega_\alpha}(u,\infty) = \mathrm{Cap}(\Gamma_\alpha) = \sin(\alpha/2). \tag{3.38}$$

回到渐近公式，我们现在得到

$$b_{\Omega_\alpha}(u,\infty)^n R_n^{\Gamma_\alpha, w}(u,\infty) = b_{\Omega_\alpha}(u,\infty)^n u^n \overline{R_n^{\Gamma_\alpha, w}(u^*, 0)}$$

$$= b_{\Omega_\alpha}(u,0)^n \overline{R_n^{\Gamma_\alpha,w}(u^*,0)} = \overline{b_{\Omega_\alpha}(u^*,\infty)^n R_n^{\Gamma_\alpha,w}(u^*,0)}, \tag{3.39}$$

由此得到以下结果。

命题 3.6。 设 w 为 (3.8) 中定义的权函数。则 (3.34) 成立，并且在归一化 $b_{\Omega_\alpha}(\infty,-1) > 0$ 下，有

$$b_{\Omega_\alpha}(u,\infty)^n R_n^{\Gamma_\alpha,w}(u,\infty) \longrightarrow \frac{u+1-\sqrt{(u-e^{i\alpha})(u-e^{-i\alpha})}}{2(u+1)} \frac{b_{\Omega_\alpha}(u,-1)}{b_{\Omega_\alpha}(u,0)} F_w(u,\infty) \tag{3.40}$$

在 Ω_α 的紧子集上一致成立，其中 $n \to \infty$。

证明。利用 (3.5)，我们注意到，用 u^* 替换 u 相当于用 z 替换 z。回想 $s(z) = -s(z)$，即可得到 (3.40) 右端的第一个因子。其余各项由 (3.36)–(3.37) 以及 $F_w(\infty,\infty)$ 为正这一事实推出。□

一个关键问题是确定 $R^{\Gamma_\alpha}{}_n{}^w(\cdot,\infty)$ 的首项系数，该系数等于 $1/\|wT_n^w\|_{\Gamma_\alpha}$。利用 (3.3)，我们得到

$$\frac{\mathrm{Cap}(\Gamma_\alpha)^n}{\|wT_n^w\|_{\Gamma_\alpha}} = \lim_{u\to\infty} b_{\Omega_\alpha}(u,\infty)^n R_n^{\Gamma_\alpha,w}(u,\infty).$$

As 作为前一个命题的推论，我们得到以下结果 .

推论 3.7。 设 w 是在 (3.8) 中定义的权函数。则

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{W}_n(\Gamma_\alpha, w) = 2\cos(\alpha/4)^2 \exp\left(\int_{\Gamma_\alpha} \log|w(x)|\, d\mu_{\Gamma_\alpha}(x)\right). \tag{3.41}$$

证明。 只需计算 (3.40) 右端在 $u \to \infty$ 下的极限。由于 $s(z_\infty) = -1$，第一个因子趋于 1。为计算 $b_{\Omega_\alpha}(\infty,-1)$，注意到利用 Joukowski 变换直接计算可得

$$b_{\Omega_0}(z,0) = \frac{-1+\sqrt{1-z^2}}{iz} = \frac{iz}{1+\sqrt{1-z^2}},$$

其中平方根取沿 $\mathbb{A}_0$ 的分支切割，并选择使得 $\sqrt{1}=1$ 成立的分支。代入 $z_\infty = -i\tan(\alpha/2)$，得到

$$b_{\Omega_\alpha}(\infty,-1) = b_{\Omega_0}(z_\infty,0) = \frac{\tan(\alpha/2)}{1+\sqrt{1+\tan^2(\alpha/2)}} = \frac{\sin(\alpha/2)}{2\cos^2(\alpha/4)}.$$

然而，分子相消，这是因为根据 (3.38)，$b_{\Omega_\alpha}(\infty,0) = \sin(\alpha/2)$。最后，由 (3.31)–(3.32)，我们看到

$$F_w(\infty,\infty) = \exp\left(-\int_{\Gamma_\alpha} \log|w(x)|\, d\mu_{\Gamma_\alpha}(x)\right),$$

因为归一化确保了 $F_w(\infty,\infty) > 0$。至此证明完成。 □

3.2. 相对于任意一点的剩余多项式。 为使论述完整，我们确定相对于$\mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{D}$中任意一点的残差多项式的渐近行为。由对称性，只需考虑点 $u_0 \in \mathbb{D}$。事实上，对于 $|u_0| > 1$，关系式$R^{\Gamma_\alpha,}{}_n{}^w(\cdot, u_0) = R^{\Gamma_\alpha}{}_{,n}{}^w(\cdot, u_0^*)^*$蕴含恒等式

$$b_{\Omega_\alpha}(u,\infty)^n R_n^{\Gamma_\alpha,w}(u,u_0) = e^{i\gamma}\overline{b_{\Omega_\alpha}(u^*,\infty)^n R_n^{\Gamma_\alpha,w}(u^*,u_0^*)} \tag{3.42}$$

对于某个 $\gamma \in [0, 2\pi)$。

命题 3.8. 设 w 为 (3.8) 中定义的权函数。对于固定的 $u_0 \in \mathbb{D}$，定义参数

$$\theta_0 \in [0, 2\pi), \quad \tilde{\alpha} \in (0, \pi), \quad z_{u_0} \in \{z : \operatorname{Im} z > 0\}, \quad \textit{and} \quad x_0 \in (-1, 1)$$

如下关系

$$\frac{e^{\pm i\alpha} - u_0}{1 - e^{\pm i\alpha} u_0} = e^{i(\pm\tilde{\alpha}+\theta_0)}, \tag{3.43}$$

$$z_{u_0} := i\tan(\alpha/2)\frac{1+u_0}{1-u_0}, \tag{3.44}$$

and

$$x_0 := \tan(\alpha/2)\frac{\sin(\theta_0/2) - \operatorname{Im}(u_0 e^{-i\theta_0/2})}{\cos(\theta_0/2) - \operatorname{Re}(u_0 e^{-i\theta_0/2})}. \tag{3.45}$$

那么，在 Ω_0，的紧子集上一致地有渐近公式

$$\lim_{n\to\infty} b_{\Omega_\alpha}\big(u(z),\infty\big)^n R_n^{\Gamma_\alpha,w}\big(u(z),u_0\big) = \frac{1+s(z,z_{u_0})}{2}\frac{b_{\Omega_0}(z,x_0)}{b_{\Omega_0}(z,\overline{z}_{u_0})} F_w\big(u(z),u_0\big), \tag{3.46}$$

其中

$$s(z,z_{u_0}) := \frac{z_{u_0}-x_0}{\sqrt{z_{u_0}^2-1}}\frac{\sqrt{z^2-1}}{z-x_0}, \quad \textit{with} \quad s(z_{u_0},z_{u_0}) = 1. \tag{3.47}$$

这里，我们假设 $b_{\Omega_0}(z_{u_0}, x_0)$ 和 $b_{\Omega_0}(z_{u_0}, z_{u_0})$ 为正，并且 F_w 定义于(3.32)中。

证明。 我们的策略与第 3.1 节中的方法类似，在那里我们将原点处的剩余多项式与 Ω_0上的一个加权问题联系起来。这里，我们将这种方法调整为在任意点 $u_0 \in \mathbb{D}$处进行求值。核心思路是引入一个中间域 $\Omega_{\tilde{\alpha}}$，使点 u_0 映射到原点。这样，我们就能利用原点情形下已知的渐近结果（在平移后的参数处求值），然后将结果转换回原来的设定。

首先，考虑莫比乌斯变换

$$T_{u_0}(u) = \frac{u-u_0}{1-\overline{u}_0 u},$$

它将 $\mathbb{D}$ 共形映射到自身，并将 u_0 映射到 0。由于 T_{u_0} 保持单位圆不变，该映射下圆弧 Γ_α 的像是单位圆上的另一段圆弧。因此，存在满足 (3.43) 的参数 $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ 和 $\tilde{\alpha} \in (0, \pi)$，使得旋转后的映射 $u \mapsto e^{-i\theta_0} T_{u_0}(u)$ 将 Γ_α 映射到 $\Gamma_{\tilde{\alpha}}$。我们定义共形映射 $\varphi_1 : \Omega_\alpha \to \Omega_{\tilde{\alpha}}$ 和 $\varphi_2 : \Omega_{\tilde{\alpha}} \to \Omega_0$ 如下

$$\varphi_1(u) = e^{-i\theta_0}\frac{u-u_0}{1-\overline{u}_0 u} \quad \text{and} \quad \varphi_2(v) = i\tan(\tilde{\alpha}/2)\frac{1+v}{1-v}. \tag{3.48}$$

映射 φ_1 如图 4 所示。

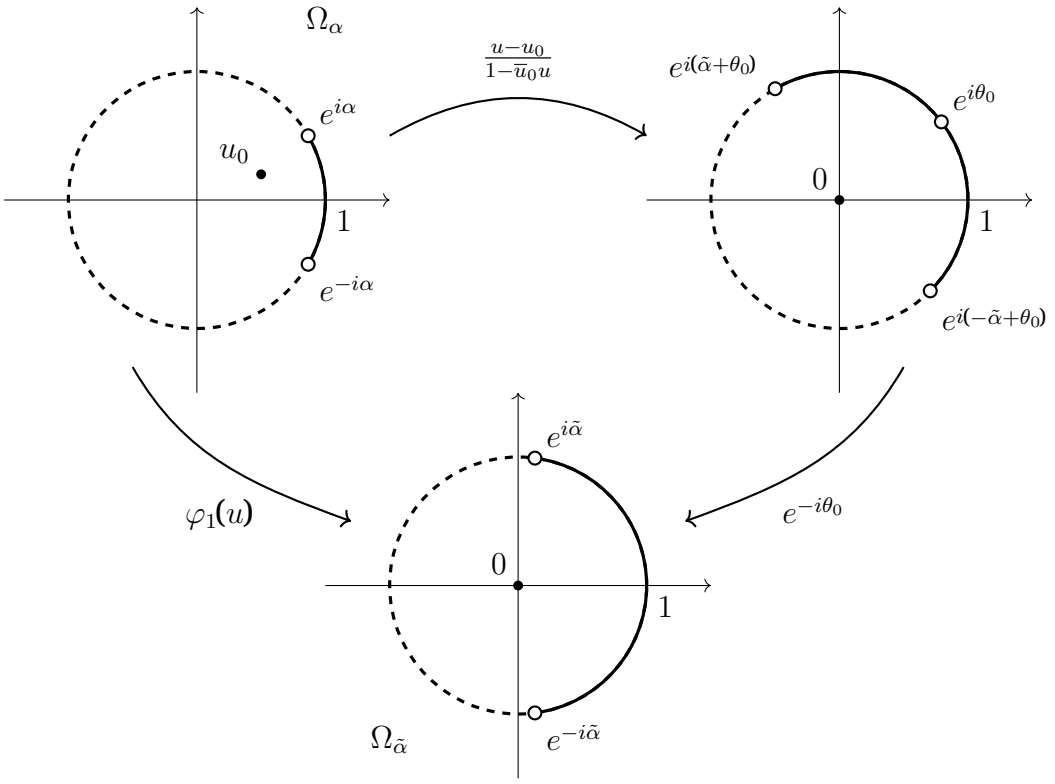


图 4. 区域 Ω_α (左上) 到 $\Omega_{\tilde{\alpha}}$ (底部) 的变换。映射 φ_1 将 u_0 映射到原点。

这些映射是莫比乌斯变换，其逆变换为

$$\varphi_1^{-1}(v) = \frac{e^{i\theta_0}v + u_0}{1 + \overline{u}_0 e^{i\theta_0} v} \quad \text{and} \quad \varphi_2^{-1}(\zeta) = \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \overline{\zeta}_0}, \quad \text{where } \zeta_0 = i\tan(\tilde{\alpha}/2). \tag{3.49}$$

令 $\phi(u) := (\varphi_2 \circ \varphi_1)(u)$，使得 $\phi(u_0) = \varphi_2(0) = \zeta_0$。应用与引理 3.1 相同的输运论证，我们得到关系

$$R_n^{\Gamma_\alpha, w}\big(\phi^{-1}(\zeta), \phi^{-1}(\zeta_0)\big) w\big(\phi^{-1}(\zeta)\big) = R_n^{\mathsf{A}_0, W_n}(\zeta, \zeta_0) W_n(\zeta), \tag{3.50}$$

其中，Ω_0 上的权函数 W_n 由下式给出

$$W_n(\zeta) = e^{i\theta}(\zeta - \zeta_\infty)^{k-n} \prod_{j=1}^{k} (\zeta - \overline{\zeta}_j)^{-1}, \tag{3.51}$$

其中 $\zeta_j = \phi(u_j)$、$\zeta_\infty = \overline{\zeta}_0 = -i\tan(\tilde{\alpha}/2)$ 和 $\theta \in [0, 2\pi)$ 的选取满足 $W_n(\zeta_0) > 0$。根据命题 3.3，可得 $R^{\mathsf{A}_0}{}_n{}^{W_n}(\cdot, \zeta_0) W_n(\cdot)$ 的渐近表达式。将其代入 (3.50)，可知在 Ω_0, 的紧子集上一致成立

$$\lim_{n\to\infty} b_{\Omega_\alpha}\big(\phi^{-1}(\zeta), \infty\big)^n R_n^{\Gamma_\alpha, w}\big(\phi^{-1}(\zeta), u_0\big) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\zeta_0\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta\sqrt{\zeta_0^2 - 1}}\right) \frac{b_{\Omega_0}(\zeta, 0)}{b_{\Omega_0}(\zeta, \zeta_\infty)} F_w\big(\phi^{-1}(\zeta), u_0\big). \tag{3.52}$$

这里，归一化保证了 $b_{\Omega_0}(\zeta_0, 0) > 0$ 和 $b_{\Omega_0}(\zeta_0, \zeta_\infty) > 0$。

为了用变量 $z \in \Omega_0$, 来表达这一结果，我们回顾一下式 (3.5) 中定义的共形映射 $u : \Omega_0 \to \Omega_\alpha$。其逆映射为

$$u^{-1}(\xi) = i \tan(\alpha/2) \frac{1+\xi}{1-\xi}. \tag{3.53}$$

接下来，我们考虑由以下复合映射给出的自同构 $\Phi\colon\ \Omega_0 \to \Omega_0$

$$\Phi = u^{-1} \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1}. \tag{3.54}$$

我们注意到， Φ将实轴映射到自身。此外，根据构造可得

$$\Phi(\zeta_0) = u^{-1}\Big(\varphi_1^{-1}\big(\varphi_2^{-1}(\zeta_0)\big)\Big) = u^{-1}\big(\varphi_1^{-1}(0)\big) = u^{-1}(u_0) = z_{u_0}.$$

为确定原点的像，我们计算

$$\begin{aligned}\Phi(0) &= \big(u^{-1} \circ \varphi_1^{-1}\big)(-1) = u^{-1}\left(\frac{u_0 - e^{i\theta_0}}{1 - \overline{u}_0 e^{i\theta_0}}\right) \\ &= i \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{1 - \overline{u}_0 e^{i\theta_0} + u_0 - e^{i\theta_0}}{1 - \overline{u}_0 e^{i\theta_0} - u_0 + e^{i\theta_0}}.\end{aligned}$$

利用欧拉公式以及 (3.45) 中 x_0 的定义，可将其简化为 $\Phi(0) = x_0$。由于 Φ 是 Ω_0 的一个自同构，并将原点映射到 $x_0 \in (-1,\ 1)$，因此它必为如下形式

$$\Phi(\zeta) = \frac{\zeta + x_0}{1 + x_0 \zeta}, \quad \text{with inverse } \Phi^{-1}(z) = \frac{z - x_0}{1 - x_0 z}. \tag{3.55}$$

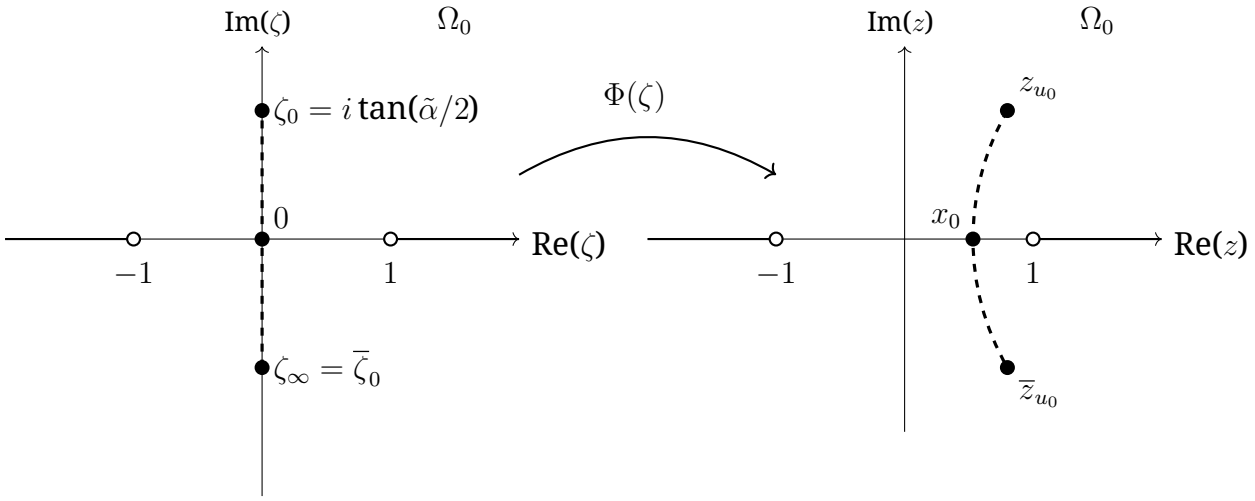


图 5. 将辅助参数平面（左）映射到原始参数平面（右）的莫比乌斯变换 Φ。该映射由点 $0 \mapsto x_0$ 和 $\zeta_0 \mapsto z_{u_0}$ 的对应关系确定。

将 $\zeta = \Phi^{-1}(z)$ 代入 (3.52) 的各项中，计算得

$$\frac{\zeta_0 \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta \sqrt{\zeta_0^2 - 1}} = \frac{\Phi^{-1}(z_{u_0}) \sqrt{\Phi^{-1}(z)^2 - 1}}{\Phi^{-1}(z) \sqrt{\Phi^{-1}(z_{u_0})^2 - 1}} = \frac{z_{u_0} - x_0}{\sqrt{z_{u_0}^2 - 1}} \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{z - x_0} = s(z, z_{u_0}). \tag{3.56}$$

类似地，布拉施克因子的比值变为

$$\frac{b_{\Omega_0}(\zeta,0)}{b_{\Omega_0}(\zeta,\zeta_\infty)}=\frac{b_{\Omega_0}\big(\Phi^{-1}(z),\Phi^{-1}(x_0)\big)}{b_{\Omega_0}\big(\Phi^{-1}(z),\Phi^{-1}(\overline{z}_{u_0})\big)}=\frac{b_{\Omega_0}(z,x_0)}{b_{\Omega_0}(z,\overline{z}_{u_0})}. \tag{3.57}$$

最后，注意到 $\phi^{-1}(\zeta)=u(z)$，将这些恒等式代入 (3.52)，即可得到所需的渐近公式 (3.46)。□

我们总结区域 Ω_α上的结果，并以与[16]一致的形式呈现。回顾一下，映射 $\lambda\colon \Omega_\alpha\to \mathsf{S}_{\pi/4}$ 在 (1.9) 中定义为

$$\lambda(u):=\left(\frac{ue^{i\alpha}-1}{u-e^{i\alpha}}\right)^{1/4}. \tag{3.58}$$

定理 3.9. 设 w 为 (3.8)中定义的权函数。对于固定的 $u_0\in\mathbb{D}$，有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} b_{\Omega_\alpha}(u,\infty)^n R_n^{\Gamma_\alpha,w}(u,u_0)\\&\quad=\frac{1}{2}\left(1+\frac{h(\lambda(u),\lambda(u_0))}{h(\lambda(u_0),\lambda(u_0))}\right)\frac{|\lambda(u_0)|^2\big(\lambda(u)^2-|\lambda(u_0)|^2\big)\big(\lambda(u)^2+\lambda(u_0)^2\big)}{\lambda_0^2\left(\lambda(u)^2+|\lambda(u_0)|^2\right)\big(\lambda(u)^2-\overline{\lambda(u_0)^2}\big)}F_w(u,u_0)\end{aligned} \tag{3.59}$$

*unif*在Ω_α的紧子集上一致，其中辅助函数 h由下式给出

$$h(\lambda,\lambda_0)=\frac{\lambda^2}{(\lambda^2-|\lambda_0|^2)(\lambda^2+|\lambda_0|^2)}. \tag{3.60}$$

证明。 将 (3.46) 转移到变量 λ所在的区域 $\mathsf{S}_{\pi/4}$ 即可得到此结果。为此，考虑如下定义的莫比乌斯变换 $g\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$

$$g(z)=\frac{z-1}{z+1},\quad \text{with inverse}\ \ g^{-1}(\xi)=\frac{1+\xi}{1-\xi}.$$

注意， g将区域 Ω_0映射到 $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$。此外，令 Φ 为式（3.55）中定义的 Ω_0的自同构。由于 Φ 保持实轴不变，且 $\Phi(\pm1)=\pm1$，复合映射 $g\circ\Phi\circ g^{-1}$ 是一个保持射线 $[0,\infty)$ 不变且固定 0 和 ∞ 的莫比乌斯变换。因此，它必定是某个 $r>0$对应的缩放 $\xi\mapsto r\xi$ 。注意到 $g(i\mathbb{R})=\mathbb{T}$，我们得出 $(g\circ\Phi)(i\mathbb{R})=r\mathbb{T}$。由于参数 z_{u_0}、 x_0和 z_{u_0} 都位于$-\Phi(i\mathbb{R})$ 上，它们在 g下的像都位于半径为 r 的圆上。

我们通过选取 $\sqrt{g(z)}$ 的一个分支来定义函数 $v(z)$，使其将 $\overline{\Omega_0}$ 保形映射到上半平面。与我们此前沿 $\mathbb{R}\setminus(-1,\ 1)$ 选取分支切割的做法一致，我们有恒等式 $\sqrt{z-1}=-\sqrt{z-1}$ 和 $\sqrt{z+1}=\sqrt{z+1}$。这意味着以下对称关系

$$v(\overline{z})=-\overline{v(z)}.$$

令 $v_0=v(z_{u_0})$，于是有 $v(z_{u_0})=-v_0$。此外，由于$-|g(x_0)|=|g(z_{u_0})|$ 且$g(x_0)<0$，可得 $v(x_0)=i|v_0|$。v 的映射性质如图6所示。

回顾式 (3.58) 中定义的映射 $\lambda(u)$。结合式 (3.5) 中的 $u(z)$，直接计算可得

$$i\lambda\big(u(z)\big)^2=v(z). \tag{3.61}$$

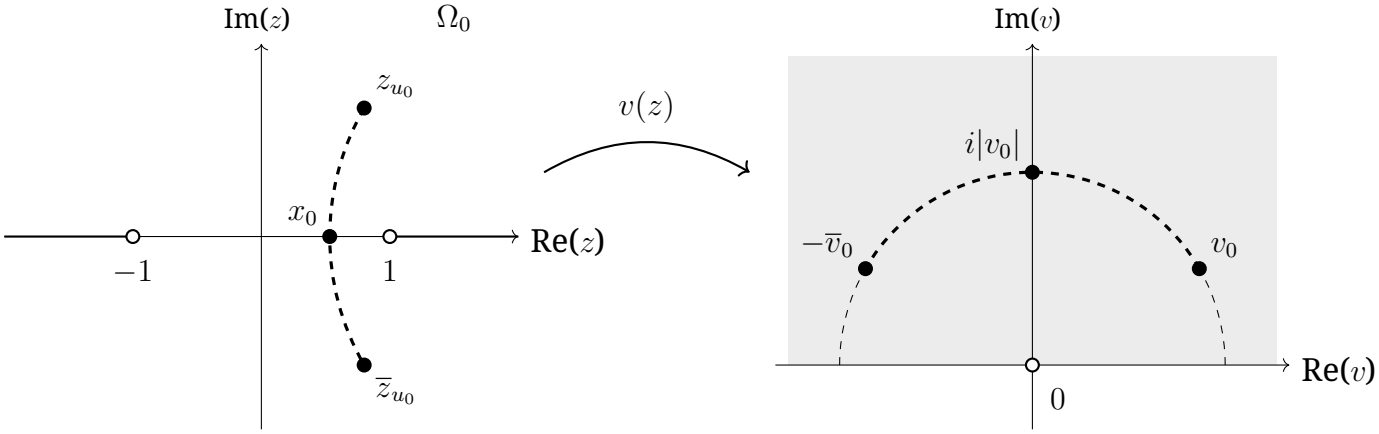


图6。共形映射 $v(z) = \sqrt{(z-1)/(z+1)}$ 将裂缝域 Ω_0（左）映射到上半平面（右）。点 z_{u_0}、$\overline{z}_{u_0}$ 和 x_0 分别映射到 v_0、$-\overline{v}_0$ 和 $i|v_0|$。

由 $\lambda = \lambda(u(z))$ 和 $\lambda_0 = \lambda(u_0)$，可得此恒等式推出 $v(z) = i\lambda^2$ 以及 $v_0 = i\lambda_0^2$。现在我们利用这些变量重写渐近公式 (3.46) 中的各项。利用关系式 $z = g^{-1}(v^2)$，并回顾式 (3.60) 中 h 的定义，项 $s(z,\ z_{u_0})$ 可变换如下:

$$s(z, z_{u_0}) = \frac{(v_0^2 + |v_0|^2)v(z)}{v_0(v(z)^2 + |v_0|^2)} = \frac{\lambda^2(\lambda_0^2 - |\lambda_0|^2)(\lambda_0^2 + |\lambda_0|^2)}{\lambda_0^2(\lambda^2 - |\lambda_0|^2)(\lambda^2 + |\lambda_0|^2)} = \frac{h(\lambda, \lambda_0)}{h(\lambda_0, \lambda_0)}. \tag{3.62}$$

类似地，布拉施克因子的比值变为

$$\frac{b_{\Omega_0}(z, x_0)}{b_{\Omega_0}(z, \overline{z}_{u_0})} = i\frac{v(z) - i|v_0|}{v(z) + i|v_0|} \cdot \frac{|v_0|}{v_0}\frac{v(z) + v_0}{v(z) + \overline{v}_0} = \frac{|\lambda_0|^2(\lambda^2 - |\lambda_0|^2)(\lambda^2 + \lambda_0^2)}{\lambda_0^2(\lambda^2 + |\lambda_0|^2)(\lambda^2 - \overline{\lambda_0^2})}. \tag{3.63}$$

将这些恒等式代入（3.46）即可得到公式（3.59），证明完毕。

□

我们所关注的一个核心量是给定点 u_0处的渐近极值。为刻画这一行为，我们令 $\lambda = \lambda(u)$ 和 $\lambda_0 = \lambda(u_0)$，并引入核函数 k_{Ω_α}，定义为

$$k_{\Omega_\alpha}(u, u_0) := k_{\mathbb{C}_+}(\lambda, \lambda_0) = \frac{2\lambda\overline{\lambda}_0}{(\lambda + \overline{\lambda}_0)^2}. \tag{3.64}$$

回顾无权情形（$w \equiv 1$），[16] 证明了

$$\lim_{n\to\infty} e^{n g_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)} \|T_n^{\Gamma_\alpha}(\cdot, u_0)\| = \frac{1}{k_{\Omega_\alpha}(u_0, u_0)}.$$

现在，我们将这一结果推广到具有有理权的加权残差多项式，从而为下一节所研究的更广泛的可容许权函数类奠定基础。

定理 3.10。设 w 为 (3.8) 中定义的权函数。则对于任意点 $u_0 \in \Omega_\alpha$，有

$$\lim_{n\to\infty} e^{n g_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)} \|w T_n^{\Gamma_\alpha, w}(\cdot, u_0)\|_{\Gamma_\alpha} = k_{\Omega_\alpha}(u_0, u_0)^{-1} \exp\left(\int_{\Gamma_\alpha} \log w(x)\, \omega(u_0, dx, \Omega_\alpha)\right). \tag{3.65}$$

证明。 首先，假设 $u_0 \in \mathbb{D}$。由 (3.2) 中的归一化可得 $b_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty) = e^{-g_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)}$。因此，由 (3.59) 可知，当 $n\to\infty$ 时，

$$e^{-ng_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)}R_n^{\Gamma_\alpha,w}(u_0,u_0) \longrightarrow \frac{2|\lambda_0|^2}{(\lambda_0+\overline{\lambda}_0)^2}F_w(u_0,u_0) = k_{\Omega_\alpha}(u_0,u_0)F_w(u_0,u_0).$$

回想

$$F_w(u_0,u_0) = \exp\left(-\int_{\Gamma_\alpha}\log w(x)\,\omega(u_0,dx,\Omega_\alpha)\right),$$

由对偶关系 (1.2) 可直接推出 (3.65)。

对应的外部 $\{u:\,|u|>1\}$ 结果可由对称性得出。令 $u^* = 1/\overline{u}$。对于 $u_0\in\mathbb{D}$，反射公式 (3.42) 表明

$$e^{-n}{}^{g_{\Omega_\alpha}(u_0^*,\infty)}R_n^{\Gamma_\alpha,w}(u_0^*,u_0^*) = e^{-ng_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)}R_n^{\Gamma_\alpha,w}(u_0,u_0) \longrightarrow k_{\Omega_\alpha}(u_0,u_0)F_w(u_0,u_0)$$

当 $n\to\infty$ 时亦然。由于 $\lambda(u^*)=\overline{\lambda(u)}$，我们有 $k_{\Omega_\alpha}(u_0^*,\ u_0^*) = k_{\Omega_\alpha}(u_0,\ u_0)$。此外，由于权函数$w$ 在 Γ_α 上取实值，施瓦茨反射原理表明 $F_w(u^*,\ u^*) = F_w(u,\ u)$。因此，该极限对单位圆盘外部的任意 u_0^* 都成立。

最后，对于 $u_0\in\mathbb{T}\setminus\Gamma_\alpha$，我们将经过适当调整以适用于带权情形的 [16, 引理 2.7], 应用于此。这保证了函数

$$u_0 \longmapsto \lim_{n\to\infty}\left(e^{ng_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)}\|wT_n^{\Gamma_\alpha,w}(\cdot,u_0)\|_{\Gamma_\alpha}\right)$$

在 Ω_α 上连续，从而完成证明。

□

备注。 这一结果可以自然地通过哈代空间理论来解释。为说明这一点，我们令 Γ 表示一条具有 $C^{1+\alpha}$ 类的若尔当弧，其补集为 Ω。若 ψ表示从单位圆盘的外部映射到 Ω、并将 ∞ 映射到 ∞ 的共形映射，则令$H^2(\Omega)$由满足下列条件的函数 F 组成：

$$F\circ\psi \in H^2(\mathbb{D}).$$

这样的 F 在 Γ 上从两侧均具有非切向边界值（相对于弧长几乎处处成立）。我们将这两个边界值分别记为 F_+ 和 F_-。给定点 $z_0\in\Omega$，$H^2(\Omega)$ 上的范数定义为

$$\|F\|^2_{\omega(z_0)} = \int_\Gamma \big(|F_+(x)|^2+|F_-(x)|^2\big)\omega(z_0,dx,\Omega).$$

赋予此范数后， $H^2(\Omega)$ 成为一个再生核希尔伯特空间，其相关核记为 $k_{\omega(z_0)}(z,\zeta)$。经典希尔伯特空间理论表明

$$\frac{1}{k_{\omega(z_0)}(z_0,z_0)} = \inf\left\{\int_\Gamma(|F_+(x)|^2+|F_-(x)|^2)\omega(z_0,dx,\Omega) : F\in H^2(\Omega),\ F(z_0)=1\right\}.$$

这个量通过 [9, 猜想 1.7]与加权残差多项式相关；该猜想假设，如果 Γ 属于 $C^{1+\alpha}$ 类，且 w 是上半连续权函数，那么

$$\lim_{n\to\infty} e^{ng_\Omega(z_0,\infty)}\|wT_n^{\Gamma,w}(\cdot,z_0)\|_\Gamma = \frac{1}{k_{\omega(z_0)}(z_0,z_0)}\exp\left(\int_\Gamma \log w(x)\omega(z_0,dx,\Omega_\alpha)\right).$$

在我们研究圆弧的当前设定下， [8, 定理 5.4.10]确立了如下关系

$$k_{\omega(u_0)}(u_0,u_0)=k_{\Omega_\alpha}(u_0,u_0).$$

因此，定理 3.10 证明了该猜想在圆弧和有理权的情形下成立。现在我们的目标是将这一结果推广到更大一类权函数。

4. 一般权函数

现在，我们放宽对权函数的假设，以便将诸如 (1.11) 的公式推广到更广泛的权类。为使表述清晰，我们固定 $u_0\in\Omega_\alpha=\mathbb{C}\setminus\Gamma_\alpha$，并将关注点从 $R^{\Gamma_\alpha,\ w}_n(\cdot,u_0)$ 转移到 $T^{\Gamma_\alpha,\ w}_n(\cdot,u_0)=:T^w_n(\cdot,u_0)$。需要强调的是，根据 (1.1)，它们本质上是同一个对象。

首先，设 $w:\Gamma_\alpha\to(0,\infty)$ 是定义在 Γ_α 上的正连续函数。假设存在多项式 Q_1 和 Q_2，二者在 $\mathbb{T}$ 上均不为零，使得

$$\frac{1}{|Q_1(u)|}\le w(u)\le\frac{1}{|Q_2(u)|} \tag{4.1}$$

对所有 $u\in\Gamma_\alpha$。由此很容易看出

$$\begin{aligned}\|T_n^{1/Q_1}(\cdot,u_0)/Q_1\|_{\Gamma_\alpha}&\le\|T_n^w(\cdot,u_0)/Q_1\|_{\Gamma_\alpha}\le\|wT_n^w(\cdot,u_0)\|_{\Gamma_\alpha}\\&\le\|T_n^{1/Q_2}(\cdot,u_0)w\|_{\Gamma_\alpha}\le\|T_n^{1/Q_2}(\cdot,u_0)/Q_2\|_{\Gamma_\alpha}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

不失一般性，我们可以假设多项式 Q_1 和 Q_2 的所有零点都在集合 $\{u:|u|>1\}$中。要看出这一假设并未造成限制，只需注意到

$$|u-u_j|=|1-u\overline{u}_j|$$

对于 $u\in\mathbb{T}$。因此，如果 P是一个在 $u_0\in\mathbb{D}$处有 n 阶零点的多项式，则多项式

$$\frac{P(u)(1-u\overline{u}_0)^n}{(u-u_0)^n}$$

在 $\mathbb{T}$ 上的绝对值相同，但现在在 $1/u_0$处有一个零点，而 $1/u_0$属于集合 $\{u:|u|>1\}$。现在，给定 $\epsilon>0$。由定理 3.10，我们有

$$\|T_n^{1/Q_k}(\cdot,u_0)/Q_k\|_{\Gamma_\alpha}\sim e^{-ng_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)}k_{\Omega_\alpha}(u_0,u_0)^{-1}\exp\left(-\int_{\Gamma_\alpha}\log Q_k(x)\,\omega(u_0,dx,\Omega_\alpha)\right)$$

对于 $k\in\{1,2\}$。通过令 n 足够大，我们可以确保

$$\begin{aligned}k_{\Omega_\alpha}(u_0,u_0)^{-1}\exp\left(-\int_{\Gamma_\alpha}\log Q_1(x)\,\omega(u_0,dx,\Omega_\alpha)\right)-\epsilon&\le\|wT_n^w(\cdot,u_0)\|_{\Gamma_\alpha}e^{ng_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)}\\&\le k_{\Omega_\alpha}(u_0,u_0)^{-1}\exp\left(-\int_{\Gamma_\alpha}\log Q_2(x)\,\omega(u_0,dx,\Omega_\alpha)\right)+\epsilon.\end{aligned}$$

由于 $\epsilon>0$ 是任意的，因此可得

$$\begin{aligned}k_{\Omega_\alpha}(u_0,u_0)^{-1}\exp\left(-\int_{\Gamma_\alpha}\log Q_1(x)\,\omega(u_0,dx,\Omega_\alpha)\right)&\le\liminf_{n\to\infty}\|wT_n^w(\cdot,u_0)\|_{\Gamma_\alpha}e^{ng_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)}\\\le\limsup_{n\to\infty}\|wT_n^w(\cdot,u_0)\|_{\Gamma_\alpha}e^{ng_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)}&\le k_{\Omega_\alpha}(u_0,u_0)^{-1}\exp\left(-\int_{\Gamma_\alpha}\log Q_2(x)\,\omega(u_0,dx,\Omega_\alpha)\right).\end{aligned} \tag{4.3}$$

对于满足（4.1）的任意多项式 Q_1 和 Q_2，上述结论均成立。下一步，我们将构造这样的多项式，使（4.1）中的不等式近似成为等式。

取 $\epsilon > 0$ 使得 $0 < 2\epsilon < \min_{u\in\Gamma_\alpha} w(u)$。根据 Stone–Weierstraß 定理，我们可以用关于 u 和 u 的多项式逼近函数 $1/w$。具体而言，存在多项式 P_1 和 P_2 满足

$$w(u) - 2\epsilon < 1/|P_1(u,\overline{u})| < w(u) - \epsilon \le w(u) + \epsilon < 1/|P_2(u,\overline{u})| < w(u) + 2\epsilon \tag{4.4}$$

对所有 $u \in \Gamma_\alpha$。由于 $\overline{u} = u^{-1}$ 对于 $u \in \mathbb{T}$，多项式 P_k（对于 $k = 1, 2$）可改写为

$$P_k(u,\overline{u}) = \sum_{l,j=1}^{m} a_{l,j}^{(k)} u^l \overline{u}^j = \sum_{l,j=1}^{m} a_{l,j}^{(k)} u^l u^{-j} = u^{-m} \sum_{l,j=1}^{m} a_{l,j}^{(k)} u^l u^{m-j}$$

对于 $u \in \mathbb{T}$。因此，定义

$$Q_k(u) := \sum_{l,j=1}^{m} a_{l,j}^{(k)} u^l u^{m-j},$$

我们得到多项式 Q_k，它们在 $\mathbb{T}$ 上的绝对值与 P_k 的绝对值相同。此外，我们可以假设 Q_k 在 $\mathbb{T}$ 上无零点。因为若出现零点，可以通过乘以因子 $1+\delta$（其中某个 $\delta > 0$）对其稍作膨胀来扰动它，这会连续地改变多项式的模。若扰动足够小，则（4.4）中的不等式仍然成立，从而保证

$$w(u) - 2\epsilon < 1/|Q_1(u)| < w(u) - \epsilon \le w(u) + \epsilon < 1/|Q_2(u)| < w(u) + 2\epsilon. \tag{4.5}$$

由于这对所有充分小的 ϵ 都成立，因此我们可以使 (4.3) 中的两个积分任意接近。这便得到渐近公式

$$\|wT_n^w(\cdot,u_0)\|_{\Gamma_\alpha} \sim e^{-ng_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)} k_{\Omega_\alpha}(u_0,u_0)^{-1} \exp\left(\int_{\Gamma_\alpha} \log w(x)\,\omega(u_0,dx,\Omega_\alpha)\right). \tag{4.6}$$

采用类似的方法，现在从上方和下方逼近阶梯函数，我们可以证明，对于 Γ_α 上满足附加条件的任意黎曼可积权函数 w，式 (4.6) 均成立；该附加条件是存在一个常数 $M \ge 1$，使得

$$1/M \le w(u) \le M \tag{4.7}$$

对于 $u \in \Gamma_\alpha$。由于所需论证与 [6, 第一章 7] 中的论证十分相似（总结见 [10, 附录 A 2]），此处从略。

4.1. 允许存在零点。 关于圆弧情形，我们的渐近公式最一般的形式如下。

定理 4.1。 设 $w:\ \Gamma_\alpha \to [0,\infty)$ 为如下形式的权函数

$$w(u) = w_0(u) \prod_{j=1}^{k} |u - u_j|^{s_j}, \tag{4.8}$$

其中，w_0 是满足(4.7)的黎曼可积函数，且其中 $u_j \in \Gamma_\alpha$ 和 $s_j \in \mathbb{R}$。那么，对于任意 $u_0 \in \Omega_\alpha$，

$$\|wT_n^w(\cdot,u_0)\|_{\Gamma_\alpha} \sim e^{-ng_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)} k_{\Omega_\alpha}(u_0,u_0)^{-1} \exp\left(\int_{\Gamma_\alpha} \log w(x)\,\omega(u_0,dx,\Omega_\alpha)\right). \tag{4.9}$$

特别地，

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{W}_n(\Gamma_\alpha, w) = 2\cos(\alpha/4)^2 \exp\left(\int_{\Gamma_\alpha} \log w(x)\, d\mu_{\Gamma_\alpha}(x)\right). \tag{4.10}$$

证明。与 [7], 中的方法类似，我们说明如何在假设 (4.10) 对 $w = w_0$ 成立的情况下，将附加因子 $|u-u_j|^{s_j}$ 纳入 (4.10)。然后可通过归纳法证明其余结论。

我们先假设

$$w(u) = w_0(u)|u-u_j|, \tag{4.11}$$

其中，w_0 是使 (4.10) 成立的权函数。将权函数 w 的零点纳入多项式后可知，若 $u_0 \neq \infty$，则

$$\begin{aligned}\frac{1}{|u_0-u_j|}\|wT_n^w(\cdot,u_0)\|_{\Gamma_\alpha} &\geq \|w_0 T_{n+1}^{w_0}(\cdot,u_0)\| \\ &\sim e^{-(n+1)g_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)} k_{\Omega_\alpha}(u_0,u_0)^{-1} \exp\left(\int_{\Gamma_\alpha} \log w_0(x)\, \omega(u_0,dx,\Omega_\alpha)\right).\end{aligned}$$

同时，显然

$$\|wT_n^w(\cdot,\infty)\|_{\Gamma_\alpha} \geq \|w_0 T_{n+1}^{w_0}(\cdot,\infty)\| \sim 2\cos(\alpha/4)^2\, \mathrm{Cap}(\Gamma_\alpha)^{n+1} \exp\left(\int_{\Gamma_\alpha} \log w_0(x)\, d\mu_{\Gamma_\alpha}(x)\right).$$

w 的对数积分可以分成两部分：

$$\int_{\Gamma_\alpha} \log w(x)\, \omega(u_0,dx,\Omega_\alpha) = \int_{\Gamma_\alpha} \log w_0(x)\, \omega(u_0,dx,\Omega_\alpha) + \int_{\Gamma_\alpha} \log|x-u_j|\, \omega(u_0,dx,\Omega_\alpha).$$

由 [35, 第 II 节4], 可知

$$\exp\left(\int_{\Gamma_\alpha} \log|x-u_j|\, \omega(u_0,dx,\Omega_\alpha)\right) = |u_0-u_j| e^{-g_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)}, \tag{4.12}$$

当 $u_0 = \infty$时，可将其简化为 $\mathrm{Cap}(\Gamma_\alpha)$。这意味着对于任意 $u_0 \in \Omega_\alpha$，我们都有

$$\liminf_{n\to\infty} \|wT_n^w(\cdot,u_0)\|_{\Gamma_\alpha} e^{ng_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)} \geq k_{\Omega_\alpha}(u_0,u_0)^{-1} \exp\left(\int_{\Gamma_\alpha} \log w(x)\, \omega(u_0,dx,\Omega_\alpha)\right). \tag{4.13}$$

为估计相应的上极限，我们定义 w_ϵ 为

$$w_\epsilon(u) = w_0(u)(|u-u_j|+\epsilon), \tag{4.14}$$

并注意到，对于任意 $u \in \Gamma_\alpha$，$w_\epsilon(u) > w(u)$。此外，w_ϵ 满足确保 (4.6) 成立所需的假设。因此，我们有

$$\|wT_n^w(\cdot,u_0)\|_{\Gamma_\alpha} \leq \|w_\epsilon T_n^{w_\epsilon}(\cdot,u_0)\|_{\Gamma_\alpha} \sim e^{-ng_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)} k_{\Omega_\alpha}(u_0,u_0)^{-1} \exp\left(\int_{\Gamma_\alpha} \log w_\epsilon(x)\, \omega(u_0,dx,\Omega_\alpha)\right).$$

当 $\epsilon \to 0$ 时，表达式

$$\int_{\Gamma_\alpha} \log w_\epsilon(x)\, \omega(u_0,dx,\Omega_\alpha) = \int_{\Gamma_\alpha} \log w_0(x)\, \omega(u_0,dx,\Omega_\alpha) + \int_{\Gamma_\alpha} \log(|u-u_j|+\epsilon)\, \omega(u_0,dx,\Omega_\alpha)$$

根据单调收敛定理，收敛到

$$\int_{\Gamma_\alpha} \log w(x)\,\omega(u_0, dx, \Omega_\alpha).$$

因此我们得到

$$\limsup_{n\to\infty} \|wT_n^w(\cdot, u_0)\|_{\Gamma_\alpha} e^{ng_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)} \le k_{\Omega_\alpha}(u_0,u_0)^{-1} \exp\left(\int_{\Gamma_\alpha} \log w(x)\,\omega(u_0, dx, \Omega_\alpha)\right). \tag{4.15}$$

结合式 (4.13)，可得

$$\|wT_n^w(\cdot, u_0)\|_{\Gamma_\alpha} \sim e^{-ng_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)} k_{\Omega_\alpha}(u_0,u_0)^{-1} \exp\left(\int_{\Gamma_\alpha} \log w(x)\,\omega(u_0, dx, \Omega_\alpha)\right). \tag{4.16}$$

利用归纳法，可将 (4.16) 推广到任意如下形式的权函数

$$w(u) = w_0(u)|u-u_j|^m, \tag{4.17}$$

其中 m 是正 整数。同样，如果 m 是正整数，且权函数具有如下形式 m

$$w(u) = w_0(u)|u-u_j|^{-m},$$

由此可得

$$T_{n+m}^w(u,u_0) = \begin{cases} (u-u_j)^m (u_0-u_j)^{-m} T_n^{w_0}(u,u_0), & u_0 \ne \infty, \\ (u-u_j)^m T_n^{w_0}(u,\infty), & u_0 = \infty. \end{cases}$$

Hence，经过简短计算可确认 (4.16) 在此情形下同样成立。

为完成证 明，还需验证 (4.16) 对形式为 m

$$w(u) = w_0(u)|u-u_j|^s, \tag{4.18}$$

其中 $0 < s < 1$。为此，我们引入由 $\delta > 0$ 参数化的权函数：

$$w_l(u) = \begin{cases} w_0(u)|u-u_j|, & |u-u_j| < \delta, \\ w(u), & |u-u_j| \ge \delta, \end{cases}$$

and

$$w_u(u) = \begin{cases} w_0(u), & |u-u_j| < \delta, \\ w(u), & |u-u_j| \ge \delta. \end{cases}$$

这是一个简单的 ma 可验证，对于所有 $u \in \Gamma_\alpha$， $w_l(u) \le w(u) \le w_u(u)$ 均成立，因此 ，

$$\|w_l T_n^{w_l}(\cdot,u_0)\|_{\Gamma_\alpha} \le \|wT_n^w(\cdot,u_0)\|_{\Gamma_\alpha} \le \|w_u T_n^{w_u}(\cdot,u_0)\|_{\Gamma_\alpha}.$$

由此可得

$$k_{\Omega_\alpha}(u_0,u_0)^{-1} \exp\left(\int_{\Gamma_\alpha} \log w_l(x)\,\omega(u_0,dx,\Omega_\alpha)\right) \le \liminf_{n\to\infty} \|wT_n^w(\cdot,u_0)\|_{\Gamma_\alpha} e^{ng_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)}$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} \|wT_n^w(\cdot,u_0)\|_{\Gamma_\alpha} e^{ng_{\Omega_\alpha}(u_0,\infty)} \le k_{\Omega_\alpha}(u_0,u_0)^{-1} \exp\left(\int_{\Gamma_\alpha} \log w_u(x)\,\omega(u_0,dx,\Omega_\alpha)\right).$$

由于

$$\int_{\Gamma_\alpha} \log w_l(x)\,\omega(u_0,dx,\Omega_\alpha) \le \int_{\Gamma_\alpha} \log w(x)\,\omega(u_0,dx,\Omega_\alpha) \le \int_{\Gamma_\alpha} \log w_u(x)\,\omega(u_0,dx,\Omega_\alpha),$$

单调收敛定理表明，当 $\delta \to 0$ 时，上界和下界收敛到同一个极限。证明至此完成。□

定理 4.1 给出了圆弧上一大类加权切比雪夫多项式的加权范数渐近公式。据我们所知，这是经典区间情形之外，关于若尔当弧此类结果的首个例子。

有趣的是，使我们能够将结果从正连续权函数推广到具有零点的权函数的关键论证，并非区间或圆弧所特有；相反，它适用于任意若尔当弧，事实上也适用于更一般的紧集。更准确地说，设 K 是一个正则（关于位势理论的）紧集，并且存在常数 C_K 使得

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{W}_n(K, w_0) = C_K \exp\left(\int_K \log w_0(x)\, d\mu_K(x)\right) \tag{4.19}$$

对每个连续正权函数 w_0，都有：$K \to (0, \infty)$。那么，证明定理 4.1 所用的方法可以加以改造，从而证明 (4.19) 对以下形式的更一般权函数仍然成立：

$$w(x) = w_0(x) \prod_{j=1}^{m} |x - x_j|^{s_j}, \tag{4.20}$$

其中 $s_j \in \mathbb{R}$ 和 $x_j \in K$ 分别满足 $j = 1, \dots, m$。

致谢

这些结果是在帕萨迪纳（加利福尼亚州）的美国数学研究所（AIM）举行的一次 SQuaRE 会议期间取得的。我们衷心感谢 AIM 热情周到的接待，并为我们营造了如此鼓舞人心的科学氛围。

参考文献

[1] N. I. Achieser. 《逼近论》. Frederick Ungar publishing co. 纽约，1956年。[2] L. V. Ahlfors. 《复分析》. 纯粹与应用数学国际丛书。McGraw–Hill Book Co.，纽约，第3版，1978年。单复变解析函数理论导论。[3] G. Alpan. 若尔当弧上的极值多项式。*J. Approx. Theory*，276:105708，2022年。[4] D. Armitage 和 S. J. Gardiner. 《经典位势理论》. 施普林格出版社，伦敦，2001年。[5] A. Bergman 和 O. Rubin. 与消失权函数对应的切比雪夫多项式。*J. Approx. Theory*，301:106048，2024年。[6]S. N. Bernstein. 关于有限线段上的正交多项式。*J. Math.*，90:127–177，1930年。[7] S. N. Bernstein. 关于有限线段上的正交多项式（续篇）。*J. Math.*，10:219–286，1931年。[8]B. Buchecker. 若尔当曲线或圆弧上极值多项式的渐近性质。硕士论文，维也纳工业大学，2025年。[9] B. Buchecker、B. Eichinger 和 M. Zinchenko. 若尔当区域上的 L^r 极值多项式$0 < r \leq \infty$ 的渐近性质。**arXiv** 预印本，2502.17616。[10] J. S. Christiansen、B. Eichinger 和 O. Rubin. 极值多项式与最小容量集。*Constr. Approx.*，62:523–563，2025年。

[11] J. S. Christiansen、B. Simon、P Yuditskii 和 M. Zinchenko. 切比雪夫多项式的渐近性质，II： $\mathbb{R}$的 DCT 子集。Duke Math. J.，168(2):325–349，2019年。[12] J. S. Christiansen、B. Simon 和 M. Zinchenko. 切比雪夫多项式的渐近性质，I： $\mathbb{R}$的子集。Invent. Math.，208:217–245，2017年。[13] J. S. Christiansen、B. Simon 和 M. Zinchenko. 切比雪夫多项式的渐近性质，V：剩余多项式。Ramanujan J.，61:251–278，2023年。[14]J. B. Conway.《单复变函数 I》。数学研究生教材。Springer New York，1978年。[15] T. A. Driscoll、K.-C. Toh 和 L. N. Trefethen. 从位势理论到矩阵迭代的六个步骤。《SIAM评论》，40:547–578，1998年。[16]B. Eichinger. 圆弧上切比雪夫多项式的 Szegő–Widom 渐近。J. Approx. Theory，217:15–25，2017年。[17] S. I. Fedorov. 关于切博塔廖夫在平面集容量理论中的一个变分问题以及单叶共形映射的覆盖定理。《苏联数学文集》，52:115–133，1985年。[18] B. Fischer.《对称线性方程组的多项式迭代方法》。Wiley，纽约，1996年。[19] R. Freund. 关于复多项式的一些逼近问题。Constr. Approx.，4:111–121，1988年。[20] R. Freund 和 S. Ruscheweyh. 关于一类与共轭梯度型方法相关的切比雪夫逼近问题。Numer. Math.，48:525–542，1986年。[21] J. B. Garnett 和 D. E. Marshall. 调和测度。新数学专著。剑桥大学出版社，2005年。[22] H. Grötzsch. 关于共形映射的一个变分问题。Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Phys.-Math. Kl.，82:251–263，1930年。[23] M. He. m重对称区域的法贝尔多项式。J. Comput. Appl. Math.，54:313–324，1994年。[24] A. Kuijlaars. 用位势理论方法分析 Krylov 子空间迭代的收敛性。《SIAM评论》，48:3–40，2006年。[25] G. V. Kuz'mina. 曲线族模与二次微分。Tr. V. A. Steklov Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR，139，1980年。[26]N. S. Landkof.《现代位势理论基础》。施普林格出版社，纽约-海德堡，1972年。[27] G. G. Lorentz.《函数逼近》。Chelsea 出版公司，纽约，1986年。[28] W. Markoff. 关于在给定区间内偏离零值尽可能小的多项式。Math. Ann.，77:213–258，1916年。[29] A. Martínez-Finkelshtein 和 E. A. Rakhmanov. 斯蒂尔吉斯多项式的临界测度、二次微分与零点弱极限。Commun. Math. Phys.，302:53–111，2011年。[30] E. Miña-Díaz. 复平面区域上的法贝尔多项式与正交多项式的渐近性质。博士论文，范德堡大学，2006年。[31] G. Novello、K. Schiefermayr 和 M. Zinchenko. 复平面紧子集上的加权切比雪夫多项式。载于《从算子理论到正交多项式、组合学与数论》，第357–370页。Springer，2021年。[32] J. Ortega-Cerdá 和 B. Pridhnani. 波利亚–切博塔廖夫问题。arXiv，0809.2483，2008年

.

[33]F. Peherstorfer 和 R. Steinbauer。多项式映射逆像上的正交多项式与 L_q极值多项式。*J. Comput. Appl. Math.*，127:297–315，2001年。[34] T. Ransford。复平面中的位势理论。伦敦数学会学生文本丛书。剑桥大学出版社，1995年。[35] E. B. Saff 和 V. Totik，带外场的对数位势。第316卷。数学科学基础丛书 [数学科学基本原理]。附录B由 Thomas Bloom 撰写。施普林格出版社，柏林，1997年，xvi+505 页。[36]K. Schiefermayr。波利亚–切博塔廖夫问题与多项式逆像。*ActaMath. Hung.*，142:80–94，2014年。[37] K. Schiefermayr。佐洛塔廖夫共形映射与切博塔廖夫问题。*Integral Trans-forms Spec. Funct.*，26:118–133，2015年。[38]K. Schiefermayr 和 M. Zinchenko。切比雪夫多项式的范数估计，I。*J.Approx. Theory*，265:105561，2021年。[39] V. I. Smirnov 和 N. A. Lebedev。复变函数：构造理论。麻省理工学院出版社，麻省理工学院，马萨诸塞州剑桥，1968年。[40] H. Stahl。与解析函数相关的极值域，I–II。*Complex Variables,Theory Appl.*，4:311–324；325–338，1985年。[41] H. Stahl。与解析函数相关的极值域的结构。*ComplexVariables, Theory Appl.*，4:339–354，1985年。[42] H. Stahl。最小容量集与极值域。**arXiv**，1205.3811，2012年。[43] J.-P. Thiran 和 C. Detaille。圆弧上及复平面中的切比雪夫多项式。载于《逼近理论进展》，第771–786页。学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1991年。[44] J. L. Ullman。法贝尔多项式研究。I。*Trans. Am. Math. Soc.*，94:515–528，1960年。[45] H. Widom。与复平面中曲线系相关的极值多项式。*Adv. Math.*，3:127–232，1969年。[46] P. Yuditskii。一个切比雪夫型复极值问题。*J. Anal. Math.*，77:207–235，1999年。