中性原子阵列上 k-独立集实例的量子增强确定性推断

Juyoung Park、Junwoo Jung 和 Jaewook Ahn *
Department of Physics, KAIST, Daejeon 34141, Republic of Korea
（日期：2026年2月6日）

在里德堡原子阵列上进行的含噪量子退火实验会产生偏离理想分布的测量结果，使性能评估变得复杂。为建立一种数据驱动的量子器件基准测试方法，同时考虑解质量以及从含噪测量结果中进行推断的经典计算成本，我们提出了确定性误差缓解（DEM），这是一种利用实验表征噪声的逐次测量推断程序。我们使用 k-独立集问题的判定版本展示了这一方法。在汉明壳层框架下，DEM 候选体量由比特翻转错误率的二元熵决定，因此经典后处理成本受熵控制。利用实验测量数据，与经典推断基线相比，DEM 降低了后处理开销。中性原子器件的数值模拟和实验结果验证了系统规模和错误率所决定的预测标度。这些标度表明，在有效错误率下，使用英特尔 i9 处理器进行一小时经典计算所对应的中性原子实验规模最高可达 $N = 250$–450 个原子，从而能够以成本为基础，直接比较含噪量子实验与经典算法。

arXiv:2602.05432v1 [quant-ph] 5 Feb 2026

一、引言

近期量子优化平台的一项重要前景，是制备相互作用多体哈密顿量的低能态，以编码困难的组合问题 [1–3]。然而在实践中，此类实验在推断解这一层面的性能，根本上受到噪声的限制：有限的相干时间、控制误差，以及不完美的态制备与测量（态制备与测量误差） [4–8]。这些因素掩盖了实际实现的量子动力学与预期优化任务之间的联系。因此，即使制备的多体态与目标构型有较大的重叠，噪声仍会严重扭曲观测到的比特串分布，并压低表观成功概率。故而，从实验数据中提取可行且高质量的候选解需要经典后处理；在进行公平的量子—经典比较时，必须将其计算开销纳入考量。

里德堡原子平台 [9–13] 的一个显著特点是，其测量结果具有高度结构化的特征。误差会使理想配置偏移若干个汉明距离，而这种偏移可由围绕底层解 [14–19]的二项分布很好地近似。因此，输出分布集中在一个汉明壳层中——即与解的汉明距离固定为 [20] 的比特串集合——且其概率权重会随着汉明距离的增加而迅速衰减。这种结构促使我们将误差缓解视为一个在受约束且高度偏置的构型流形上进行的推断问题。从基准测试的角度来看，汉明壳层图景也提供了一种自然的方法，用于量化执行此类推断所需的相关经典后处理成本。

针对近期设备，人们已开发出多种量子误差缓解（QEM）技术。其中一类重要方法是基于期望值的统计协议，例如零噪声外推（ZNE） [21–27] 和概率误差抵消（PEC） [28–31], ，旨在从含噪测量统计中重构无噪声可观测量，通常需要付出额外采样开销。第二类方法包括对称性辅助和约束辅助技术，通过强制满足守恒定律或投影到有效子空间来抑制误差 [32, 33]。这两类方法通常都是在可观测量或概率分布层面进行表述。相比之下，量子优化实验往往依赖于针对单个测量比特串的后处理；在评估性能时，若主要关注解质量，相关的经典计算成本常常被隐去或忽略。

在这一背景下，一个互补且相关的方向是测量比特串级误差缓解，即对单个测量结果进行后处理，以恢复可行或质量更高的配置 [34–36]。代表性示例包括门模型实验中的贪心翻转修复策略 [37] ，以及里德堡原子最大独立集（MIS）实验中基于投影的修复方法，将结果修复至可行投影 [38, 39]。这些方法能够以极低的额外硬件成本显著提升解质量；近期采用测量配置作为经典模拟退火初始种子的混合量子-经典工作流，也已展现出显著的性能增益 [17, 18, 40, 41]。尽管取得了这一实际成功，但含噪样本所引入的经典后处理成本——即噪声如何重塑有效候选空间，以及这种重塑如何转化为经典推断

* jwahn@韩国科学技术院.ac.kr

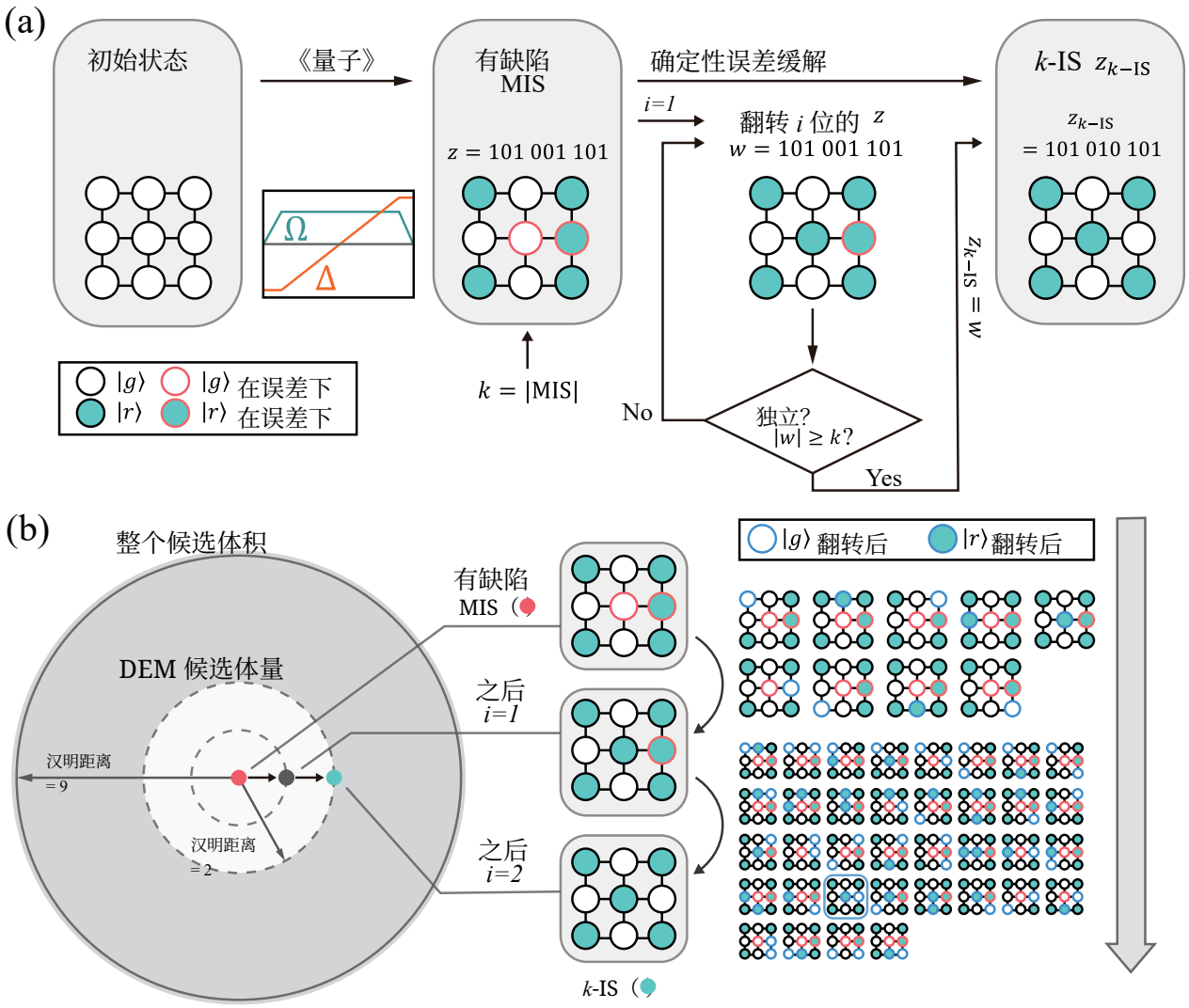

图 1。（a）里德堡原子 MIS 实验中的投影测量会产生一个有缺陷的比特串 z，它可能违反独立性约束。确定性误差缓解（DEM）在以 z 为中心、汉明距离逐渐增大的壳层中搜索候选比特串。在距离 i 处，通过翻转 z 中的 i 位生成候选项 w，并检查其是否满足独立性约束以及目标规模 k。对于一个 3×3（$N = 9$ 和 $k = 5$），测量比特串 $z = 101\,001\,101$ 得到有效解 $w = 101\,010\,101$，从而为 k-独立集判定问题返回 YES 实例。（b）从几何角度看，DEM 以 z 为中心扩展汉明壳层，在 $i = 1$ 处将候选空间规模扩大 $\binom{9}{1} = 9$，并在 $i = 2$ 处扩大 $\binom{9}{2} = 36$，直至找到有效的 k-独立集。

成本——仍仅得到部分刻画。

随着设备规模扩大和有效噪声水平升高，轻量级局部修复策略可能不再足以从实验测量中可靠地推断高质量解。这促使人们采用确定性错误缓解（DEM）：对每个测量比特串进行结构化、模型驱动的搜索处理，系统地探索与设备噪声输出分布一致的候选配置。不同于启发式修复方案 [39]或随机重采样方法 [17]，，DEM具有解析表征：每个含噪样本定义了一个汉明距离壳层，从而划定出结构良好的搜索空间 [42]。这一框架建立了噪声与诱导汉明结构、经典推断复杂度，以及对实验输出进行后处理的有效计算成本。

解析式 DEM 模型使量子优化实验能够进行与硬件相关的成本核算。通过将噪声输出建模为围绕底层配置的汉明壳层，可以推导出 DEM 主导搜索空间的闭式估计，从而将测得的错误率直接关联到经典后处理成本。这一视角与近期采用经验运行时间模型、通过经典模拟对标量子设备的方法相呼应 [43]，同时专门针对组合优化，并凸显实验比特串所隐含的推断成本。

本文的总体目标是以统一的计算基准衡量含噪量子动力学及其所需的经典后处理。在这项工作中，我们对中性原子量子处理器上的独立集实验中，与确定性误差缓解（DEM）相关的经典后处理成本进行分析和实验表征。我们聚焦于 k独立集问题的判定版本，该问题为 NP完全 [44], ; 具体而言，我们研究阈值情形 $k = |\text{MIS}|$，它对应于该问题中最难的实例 [45]。我们的主要成果是一个由二元熵决定的明确成本模型，它将实验观测到的测量结果汉明壳层结构与 DEM 候选搜索空间的规模联系起来。

II. 确定性错误缓解

我们对将确定性错误缓解（DEM）应用于 k-独立集（k-IS）问题 [44]的判定版本时所需的经典计算成本进行了定量描述。给定一个图 G和目标规模 k，任务是判断是否存在大小至少为 k 的独立集。在含噪中性原子量子退火实验中，测得的比特串可能违反独立性约束，或低估集合大小。DEM 对单个测量结果进行经典后处理，以推断是否存在一个与观测样本一致、大小为 k 的有效独立集。我们聚焦于阈值情形 $k = |\text{MIS}|$，并假设噪声模型能够刻画输出分布的汉明壳层结构。在此模型下，我们估算 DEM 主导搜索体积随系统规模 N 及有效错误率的变化，其中包括对称 $P(0|1) = P(1|0)$和非对称 $P(0|1) \neq P(1|0)$。由此得到的成本模型为经过后处理的量子输出提供了经典参照，并可用于比较实验结果。

为对噪声和汉明距离结构进行建模，我们考虑一个 N 顶点图 $G(V,\ E)$，其 MIS 比特串为 $z_{\text{MIS}} \in \{0,1\}^N$，对应的计算基态为

$$|z_{\text{MIS}}\rangle = \left|(z_{\text{MIS}}^{(1)}, \ldots, z_{\text{MIS}}^{(N)})\right\rangle, \tag{1}$$

其中 $|0\rangle$ 与 $|1\rangle$分别表示原子基态 $|g\rangle$和里德堡激发态 $|r\rangle$，且$z^{(i)}{}_{\text{MIS}} = 1$ 表示节点 i属于该 MIS。一次含噪声的实验采样在量子退火序列之后经投影测量得到测量比特串$|z\rangle = |\ (z^{(1)}, \ldots, z^{(N)})\ \rangle$。作为一种最简噪声模型，我们假设在每个位点 [42], 上以概率 p 发生相互独立的二元对称比特翻转错误，通常称为制备与测量误差率 [4, 5]。测量构型与理想 MIS 构型

$$HD(z, z_{\text{MIS}}) = \sum_{i=1}^{N} |z^{(i)} - z_{\text{MIS}}^{(i)}| \tag{2}$$

随后服从均值为 Np 、方差为 $Np(1-p)$ 的二项分布。因此，实验采样的配置在统计上集中于 z_{MIS} 周围的一个汉明壳层内，而不是均匀分布在整个配置空间中。

为了量化推断 k-独立集判定问题的经典后处理成本，我们首先考虑一种蛮力确定性误差缓解（BF-DEM）过程。该过程在图1(a)中以示意图形式呈现，并在算法1（如下）中进行了详细描述。该 BF-DEM 从测量比特串出发，按照递增的汉明距离系统地搜索候选配置，作为 DEM 框架一种最小且透明的实现方式；其设计目标是穷举探索实验可访问的汉明壳层所隐含的候选空间规模，而不是通过更复杂的算法结构来优化计算效率。

算法1 蛮力确定性错误缓解（BF-DEM）

输入： 图 $G(V, E)$，目标解大小 k，
　测量比特串 $z \in \{0,1\}^{|V|}$
输出： 输出比特串 w
$w \leftarrow z$
对于 $i \leftarrow 1$ **到** $2^{|V|}$ **执行**
　汉明距离递增排序中的第$e_i \leftarrow i$个比特串，或——按 0^N排序
　$w' \leftarrow z \oplus e_i$
　如果 w' 在 G 上独立，且 $|w'| > |z|$ **则**
　　$w \leftarrow w'$
　结束 if
　如果 $|w| \geq k$，**则**
　　跳出
结束条件判断
结束循环
返回 w

BF-DEM 按照与测量输出 z 的汉明距离递增的顺序枚举候选配置，如图 1(b) 所示。在最坏情况下，该过程可能会遍历几乎整个大小为 2^N 的配置空间。平均而言，搜索范围被限制在一个汉明球内，其半径由独立比特翻转错误率 p 所确定的汉明距离设定。由于 $HD(z,\ z_{\text{MIS}})$ 通常为 Np 量级，因此对候选配置数量的期望可由累积二项式和很好地近似

$$\begin{aligned} T(N,p) &= \sum_{k=0}^{\lceil Np \rceil} \binom{N}{k} = 2^N I_{1/2}(N - \lceil Np \rceil, \lceil Np \rceil + 1) \\ &\approx \frac{2^{NH_2(p)}}{\sqrt{2\pi Np(1-p)}}, \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $I_{1/2}$ 表示正则化不完全贝塔函数，并且

$$H_2(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p) \qquad (4)$$

是二元熵。方程（3）表明，确定性误差缓解搜索空间的主导指数标度由一个有效底数 $2^{H_2(p)} < 2$（等价地，$T(N,\ p) \propto (2^{H_2(p)})^N$）决定，该底数对应于编码理论中汉明球的体积 [20, 42]。随着 p 从 0 增至 $1/2$，$H_2(p)$ 单调地从 0 增至 1，在搜索空间趋于消失与完全暴力枚举之间连续变化。

在实际实验中，读出通道是不对称的，其条件错误概率 $p_{01} = P(1|0)$ 和 $p_{10} = P(0|1)$ 各不相同。设 f_0 和 f_1 分别表示理想 k-IS 配置中 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 位点所占的比例。因此，翻转比特总数是两个独立二项变量之和，且 HD 的均值和方差均随 N线性增长。为将这一非对称模型与方程（3）中的对称表达式联系起来，我们通过熵匹配条件定义有效错误率 p_{eff}

$$H_2(p_{\text{eff}}) = f_0 H_2(p_{01}) + f_1 H_2(p_{10}). \qquad (5)$$

对于较弱的不对称性，p_{eff} 与加权平均误差率在 $|p_{01} - p_{10}|$的二阶近似下相一致，因此，主导性的确定性误差缓解缩放遵循相同的熵控制形式 $T(N,\ p_{\text{eff}}) \propto 2^{NH_2(p_{\text{eff}})}$。图 2(c) 验证了这一关系：将不同 p_{10} 和 p_{01} 条件下的数值模拟数据（箱线图）与基于 p_{eff} 的理论预测进行比较，结果显示二者吻合良好。此后，在通过 p_{eff} 隐式体现对 $(p_{01},\ p_{10})$ 的依赖时，我们将 $T(N,\ p_{01},\ p_{10})$ 简写为：$=T(N,\ p_{\text{eff}})$。

III. 确定性误差缓解的实验演示

现在，我们使用从中性原子量子处理器获得的实验测量比特串，对确定性误差缓解（DEM）进行基准测试，重点关注实验所涉及的经典后处理操作数量。我们的目标是检验实验数据中观察到的 DEM 所需经典计算成本是否符合上一节建立的理论模型，并阐明与纯经典基线相比所需的计算成本。为此，我们将测得的经典后处理成本（以操作次数表示）随系统规模 N 的变化情况，与解析缩放关系 $T(N,\ p_{\text{eff}}) \propto 2^{NH_2(p_{\text{eff}})}$ 进行比较。

本研究所采用的实验装置和参数如下。我们使用由铷原子（^{87}Rb）组成的中性原子阵列，将其放置在尺寸为 3×3, 3×4, 4×4, 4×5, 5×5 和 4×7 的方形晶格中如图 2(a)所示。这些阵列在 Pasqal Fresnel 机器 [46] 和 QuEra Aquila 机器 [47]，上实现，这两台设备采用相近的实验设置。在 Fresnel 机器上，原子在磁光阱中经激光冷却至 20 μK，并使用由空间光调制器控制的光镊进行单独俘获。每个原子均被光学泵浦至超精细基态 $|0\rangle = |5S_{1/2}, F=2, m_F=2\rangle$，态制备误差为 $\eta = 0.01$(1)，随后耦合至里德堡态 $|1\rangle = |60S_{1/2}, m_J = 1/2\rangle$。用于 MIS 类实验的绝热脉冲序列由恒定的拉比驱动 $\Omega = 1.0$MHz 和线性失谐扫描组成，在 $T = 3.0$ μs 的持续时间内，失谐从 $\Delta_i = -2.0$ MHz 扫描至 $\Delta_f = +1.0$ MHz。原子以 $a = 5.4(1)$ μm 的晶格间距排列，使得最近邻位于里德堡阻塞半径 $R_b = 7.2(1)$ μm 以内，而次近邻位于 R_b 之外。该几何结构施加了与方形晶格上的 MIS 相对应的里德堡阻塞约束。QuEra Aquila 机器采用了类似的实验装置，主要区别在于使用了$70S_{1/2}$ 里德堡态。

我们将第 II 节所述的 BF-DEM 程序直接应用于实验测量比特串，并使用了如图 2(a) 所示的正方晶格原子阵列。图 2(b) 中的绿色（红色）误差条图展示了从 Fresnel（Aquila）实验测量中提取的 DEM 操作次数随图规模N变化的情况，并以灰色误差条作为与纯经典蛮力求解器比较的参照。 y轴刻度在双对数尺度上等间距，而 x轴刻度在对数尺度上等间距，从而突出了 DEM 操作次数对系统规模 N 的指数依赖关系。观测到的随 N 呈指数增长的趋势，与解析模型所预测的由二元熵控制的标度关系一致；拟合得到的有效对称比特翻转参数分别为 Fresnel 的 $p_{\text{fit}} \approx 0.35$ 和 Aquila 的 $p_{\text{fit}} \approx 0.30$，与独立校准的实验比特翻转错误率相符（见附录 A）。

综合来看，这些结果表明，当前 Rydberg 平台上确定性误差缓解的经典成本按照熵控制的汉明壳层模型进行扩展，其随系统规模增长的主导指数依赖性由有效误差率通过 $H_2(p_{\text{eff}})$ 所决定。此外，在实验测量的比特串上执行 DEM 搜索，平均而言产生的后处理成本低于不利用实验数据的纯经典基线。这些发现确立了 DEM 作为一种自然的参考框架，用于量化和比较含噪量子优化输出所隐含的经典后处理成本。

到目前为止，我们已经表明，经典后处理的主要成本由汉明球的体积决定，其规模为 $2^{NH_2(p)}$，相差次指数因子。现在，我们将这一标度置于具体背景中，通过将实验测量结果所隐含的后处理开销与经典计算基准进行比较，

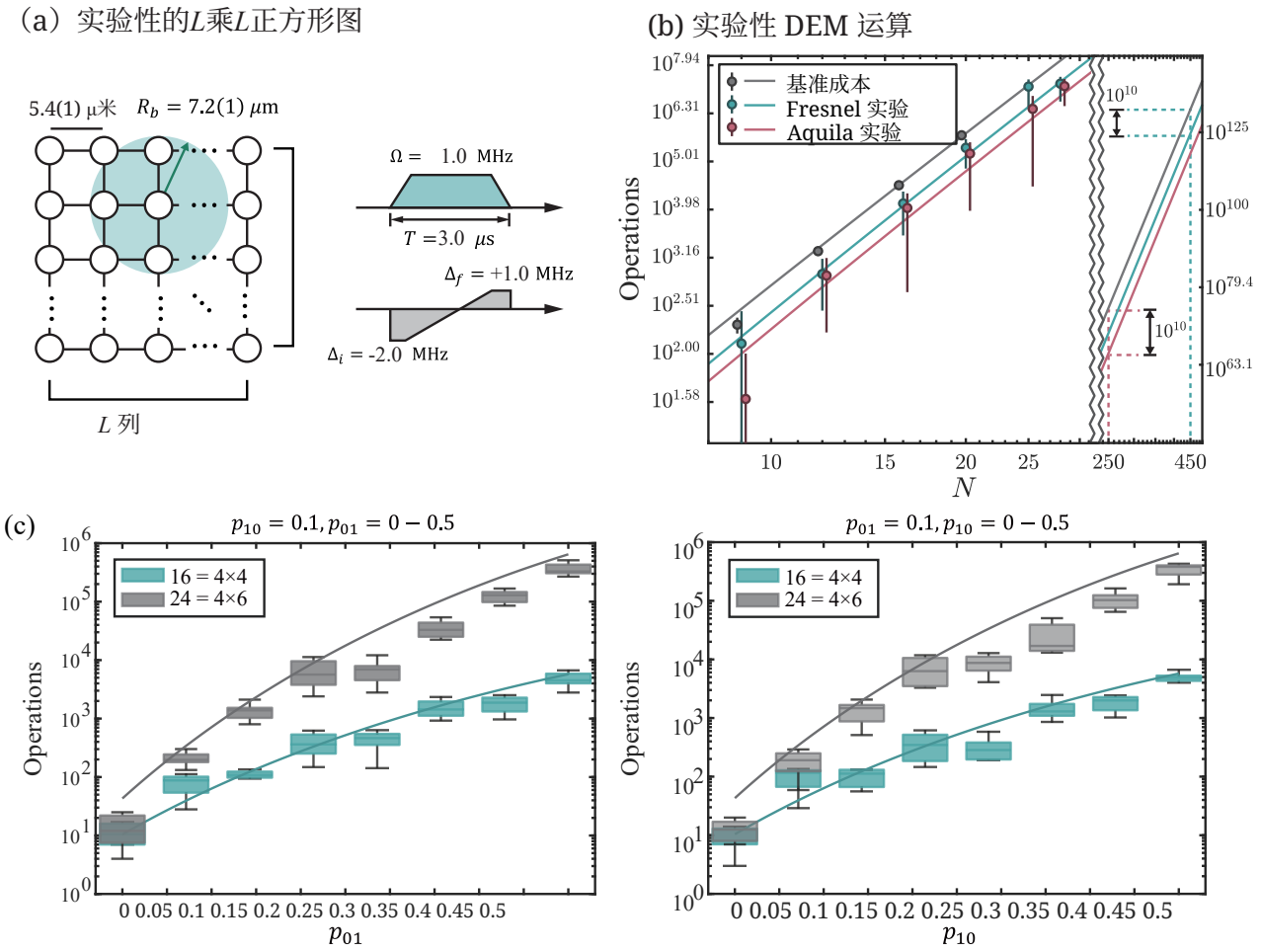

图 2. (a) 实验实现的 $L \times L$ 方形里德伯原子阵列的几何结构，间距为 5.4(1) μm，阻塞半径为 $R_b = 7.2(1)$ μm。MIS 实验采用恒定的拉比频率 $\Omega = 1.0$ MHz，并在 $T = 3.0$ μs 内将失谐从 $\Delta_i = -2.0$ MHz 线性扫描至 $\Delta_f = +1.0$ MHz。(b) 实测 DEM 后处理成本随系统规模 $N = L^2$ 的变化。彩色标记表示实验数据（Pasqal Fresnel、QuEra Aquila）中的成本，灰色标记表示经典基准，实线表示根据校准后的比特翻转错误率得出的理论成本预测。(c) 模拟 DEM 后处理成本随非对称比特翻转错误概率 p_{01} 和 p_{10} 的变化，适用于 4×4 和 4×6 晶格。箱线图展示数值模拟结果，实线表示解析成本模型 $T(N, p_{01}, p_{10})$。

作为参考，我们考虑在现代台式机 CPU（Intel i9）上运行一小时，这相当于约10^{10} 次基本运算。根据图 2(b) 中实验测得的运算次数进行理论外推，我们估算出中性原子系统规模 N 达到何值时，相对于经典基准，后处理成本的降低幅度 $T(N, 0.5) - T(N, p_{\text{eff}}) = 10^{10}$恰好与这一计算预算相当。由此得到的特征系统规模为：有效错误率$p_{\text{eff}} = 0.36(11)$ 时为 $N \approx 450(280)$，而 $p_{\text{eff}} = 0.30(13)$ 时为 $N \approx 250(150)$。这些估算表明，只需数百个原子，现今的中性原子器件即可超越当代台式机 CPU 基于 BF-DEM 的后处理能力。

IV. 讨论

我们将 BF-DEM 用作 DEM 框架的主要设备校准参考，发现渐近经典后处理成本的主导因素，是测量结果所隐含的熵定义的汉明球体积。一个自然的问题是，这种行为是否仅限于 BF-DEM 中的暴力枚举。为了检验这种缩放关系是否也适用于更高效的算法后端，我们考虑了一种改进的、具备剪枝能力的实现，称为“Tarjan-DEM”。它采用基于标准图论剪枝的精确 MIS 搜索算法 [51]。Tarjan-DEM 算法的伪代码如下（见下文算法 2）。

算法 2 Tarjan-DEM（熵信息剪枝） 1：输入：图 $G = (V, E)$, 有效比特翻转错误率 p2：输出：剪枝后的最大独立集大小 $S^{\star}_{\mathrm{DEM}}$3： $H_2(p) \leftarrow -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$ 4： $K \leftarrow \lceil |V| \cdot H_2(p) \rceil$ {熵信息剪枝预算}5：函数 Solve-DEM(G, V_{curr}, depth) 6：如果 $V_{\mathrm{curr}} = \emptyset$ 或 depth $\geq K$ 则 7：返回 基于熵约束的子空间剪枝 0 {}8：结束如果 9：根据 Tarjan 最大度规则选择 $v \in V_{\mathrm{curr}}$ 10： $S_{\mathrm{in}} \leftarrow 1 +$ Solve-DEM(G, $V_{\mathrm{curr}} \setminus (\{v\} \cup N(v))$, depth $+1$) 11： $S_{\mathrm{out}} \leftarrow$ Solve-DEM(G, $V_{\mathrm{curr}} \setminus \{v\}$, depth) 12：返回 max($S_{\mathrm{in}}, S_{\mathrm{out}}$) 13：结束函数 14：返回 Solve-DEM(G, V, 0)

我们将这种 Tarjan-DEM 应用于大小为 $L \times L$、具有 $L = 4, \ldots, 8$ ($N = L^2$) 的二维方格晶格 MIS 实例，以生成参考 MIS 构型 x^*，并通过误差率为 p的独立对称比特翻转信道来模拟含噪测量结果 z_0，即$P(z_0[i] \neq x^*[i]) = p$。该算法将搜索限制在 z_0周围的 DEM 隐含邻域内，也就是一个典型半径按 N_p 缩放的汉明球。这一构造明确展现了 DEM 的实际作用：测量比特串定义了一个在统计上受限的子空间，其体积按 $2^{NH_2(p)}$ 缩放，并在其中执行确定性经典推断。

图 3(a) 比较了 Tarjan-DEM 和 BF-DEM 对来自 Pasqal Fresnel 设备的实验比特串进行后处理时的操作计数。后处理成本以大小为 K [45, 48, 51] 的搜索树中计入的逻辑分支数量来衡量。对于每个 p，我们将随机实例上的中位成本拟合为

$$\ln K(N, p) \approx N \ln c_{\mathrm{emp}}(p) + \mathrm{const.}, \tag{6}$$

因此，$\ln c_{\mathrm{emp}}(p)$ 是图 3(a) 中所示的有效斜率。该表示分离出了运行时间的指数部分，并可与 BF-DEM 参考底数 $2^{H_2(p)}$直接比较。图 3(b) 显示，$c_{\mathrm{emp}}(p)$ 可由插值捕捉。

$$c_{\mathrm{th}}(p) = c_0^{H_2(p)}, \qquad c_0 \equiv 2^{1/3}, \tag{7}$$

在所探索的 p 全范围内。这表明，确定性错误缓解约束提供了熵指数 $H_2(p)$，从而将有效搜索指数从 N 降至 $NH_2(p)$。算法剪枝的作用在于，分支与约简剪枝步骤在最大无信息极限 $p = 1/2$ 下提供了较低的内在分支底数 $c_0 < 2$ 。相比之下，BF-DEM 基准对应相同的熵指数，但暴力枚举底数为 2。尽管 Tarjan-DEM 的总体成本有所降低，且其成本指数底数在各种误差率 $p \in [0, 0.5]$ 下均低于 BF-DEM，但总体图景依然不变。因此，依赖于熵定义的汉明球体积的运行成本缩放行为并非 BF-DEM 所独有。因此，依赖于熵定义的汉明球体积的运行成本缩放行为并非 BF-DEM 特有，也可能在效率更高的算法中持续存在。

另一个自然的问题是，确定性错误缓解的尺度行为是否取决于底层图几何，还是无论图的连通性和填充率如何都始终成立。图4(a,b)通过考察不同晶格几何——(a) 中的方形晶格和 (b) 中的 King晶格——以及不同填充率 (FF) 下，确定性错误缓解成本随比特翻转错误率的变化，回答了这一问题。通过将同一个16顶点子图嵌入尺寸逐渐增大的晶格，可得到不同的填充率；这一做法在保持系统规模不变的同时，改变了局部连通性和顶点密度。在方形晶格和 King晶格这两种几何结构中，确定性错误缓解成本对误差率均呈现相同的定性依赖关系。对于固定的比特翻转错误率 p，尽管图结构有所不同，所有填充率下的成本增长都符合理论预测。这表明，晶格几何的变化对确定性错误缓解成本的主导尺度关系影响极小。因此，确定性错误缓解成本随误差率增加而增长，是由噪声水平所定义的汉明壳层大小决定的，而非图的微观细节。

最后，我们迄今对确定性误差缓解（DEM）的定位，依赖于与受限经典基线的比较。一种自然的反驳是，恰当的参照对象应当是最佳多项式时间经典算法 [52], ，例如先用经典方法生成种子候选比特串，再将 DEM 用作后处理步骤。然而，量子实验操作与经典计算步骤之间并不存在已确立的一一对应关系，对于 NP难优化问题 [53]，也没有公认的“最佳”经典算法定义。尽管如此，仍可依据标准的复杂性理论界限进行有意义的比较。对于一个含有 N个顶点的图，若要将最大独立集的近似比做到优于 $\alpha \gtrsim 0.73$ ，则属于 NP 难问题 [49, 50], ；对于方形晶格，这对应于有效比特翻转错误率 $p \simeq 0.27$。这为多项式时间经典算法所能达到的种子配置质量设定了上界。若缺乏详细的几何结构，随着 N 增大，经典生成种子的有效错误率预计将趋近于无信息极限 $p = 0.5$。在我们的熵控制模型中，这意味着 DEM 搜索体积将趋近于整个配置空间，后处理成本则按经典指数基线增长，即 BF-DEM 的 $T(N, p = 0.5) = O(2^N)$，以及 Tarjan-DEM 的 $O(2^{N/3})$。因此，虽然小规模系统可能存在更强的经典基线，但渐近情况下由 $p = 0.5$主导；而实验产生的比特串若具有 $p_{\mathrm{eff}} < 0.27$ ，便是降低推断成本的真正资源。

(a) 使用不同算法的实验性确定性错误缓解　　(b) 使用模拟数据实现一致的基准改进

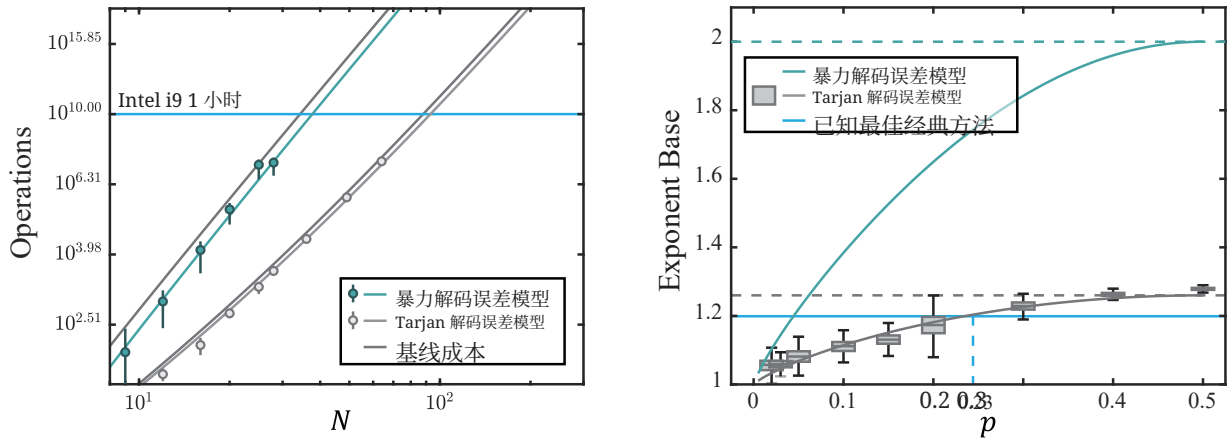

图 3。(a) BF-DEM 与 Tarjan-DEM 的运算次数随图规模 N 的变化，在 Pasqal 的 Fresnel 设备上测得。Tarjan-DEM（浅灰色标记与线条）相较 BF-DEM 展现出显著改善的标度行为。(b) 由节点 $\propto c^N$ 定义的经验指数底 c，绘制为有效错误率 p 的函数，针对二维方格晶格（$L \times L$，其中 $L = 4, \ldots, 8$）。藏青色虚线表示 BF-DEM 参考 $c_{\mathrm{BF}}(p) = 2^{H_2(p)}$；黑色虚线表示剪枝感知插值 $c_{\mathrm{th}}(p) = c^{H_2(p)}{}_0$，其中 $c_0 \equiv 2^{1/3}$。灰色实线为从分支与归约搜索树提取的拟合 Tarjan-DEM 底数 $c_{\mathrm{emp}}(p)$。

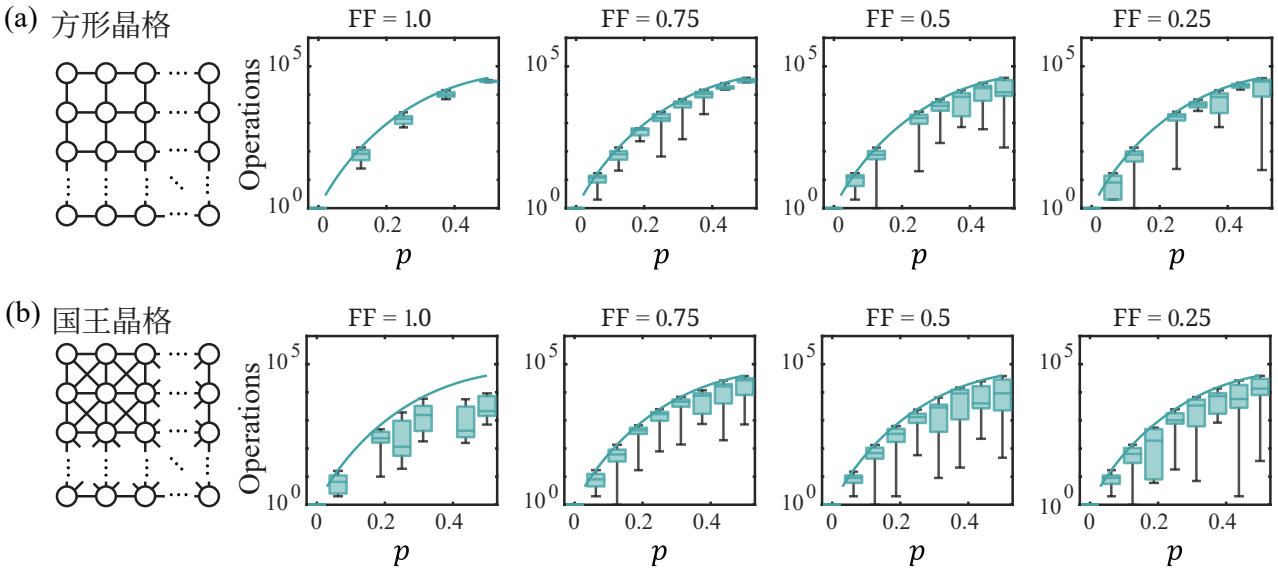

图 4。（a）在不同填充率（FF）下，方形晶格上 MIS 实例的确定性错误缓解操作成本与对称比特翻转错误率 p 的关系；这些实例通过将固定的 16顶点子图嵌入更大的晶格中实现。箱线图显示模拟的操作成本，实线表示理论预测。（b）不同填充率下 King 晶格图的确定性错误缓解成本。对 p 的相同依赖关系依然存在，表明确定性错误缓解成本主要由有效错误率决定，而不是由详细的图几何决定。

V. 结论

我们为 MIS 类中性原子量子退火实验中的 k-独立集问题的判定版本，构建了一个确定性误差缓解（DEM）框架，并明确聚焦于量化含噪实验输出所隐含的经典后处理成本。我们将比特串级误差缓解表述为一项受实验启发的汉明结构约束的确定性推断任务，并推导出一个熵控制模型，用于描述主要的 DEM 候选体量及其相关的

经典后处理成本。数值模拟以及当代里德堡原子量子处理器上观察到的实验成本趋势，验证了由此得到的尺度关系。除了提供定量估算外，该框架还将后处理成本的主导尺度关系与求解器和实现方式的具体细节分离开来。这使得我们能够依据硬件相关的指标，对经过后处理的量子优化输出与经典基线进行比较，并在统一的计算基础上衡量解质量和经典推断成本。

致谢

本研究得到韩国国家研究基金会（NRF）项目资助，项目编号为 RS-2024-00340652 和 RS-2025-25464441；同时得到信息通信技术规划评估院（IITP）项目资助，项目编号为 IITP-2025-RS-2024-00437191，资金由韩国政府（MSIT）提供。作者感谢通过 Pasqal Cloud 服务使用 Pasqal Fresnel 硬件，以及通过 Amazon Braket 服务使用 QuEra Aquila 硬件，获得本文报告的实验结果。我们还感谢 Changhun Oh 进行富有成效的讨论。

附录 A：实验比特翻转错误率的校准

我们将中性原子实验中独立校准的比特翻转错误率与根据 DEM 缩放推断出的有效错误率进行比较，以验证拟合参数。对于 Pasqal Fresnel，将理想 MIS 解与大小为 $N = 16 - 100$ 的图的测量比特串进行比较，可得非对称错误率 $p_{10} = 0.40(7)$和$p_{01} = 0.33(9)$，对应于 $p_{\text{eff}} = 0.36(11)$。相比之下，单原子态制备与测量误差校准得出的错误率较低，为$p_{10} = 0.20(11)$和 $p_{01} = 0.19(9)$，即 $p_{\text{eff}} = 0.20(14)$。多体 $p_{\text{eff}} = 0.36(11)$与 DEM 操作计数缩放结果相符，这表明 DEM 成本由多体有效噪声主导，与累积的控制误差 $p_{\text{control}} = 0.11(6)$ [16], 相一致，而非仅由单量子比特错误决定。对于 QuEra Aquila，我们提取出 $p_{10} = 0.46(18)$、$p_{01} = 0.13(12)$和 $p_{\text{eff}} = 0.30(13)$。

附录 B：非对称态制备与测量误差噪声下的有效错误率

在正文中，SPAM 噪声由一个控制基于熵的 DEM 缩放的有效比特翻转概率表示。实际情况下，读出错误是不对称的，其中 $p_{01} \neq p_{10}$。我们将这种不对称性映射为一个有效的对称错误率 p_{eff}。设 $p_{01} = P(1|0)$、$p_{10} = P(0|1)$和 f_0 (f_1)分别为理想 MIS 中 $|0\rangle$ ($|1\rangle$)位点所占的比例，其中 $f_0 + f_1 = 1$。利用二元熵 $H_2(p)$，通过令熵代价相等，可得 p_{eff}：

$$H_2(p_{\text{eff}}) = f_0 H_2(p_{01}) + f_1 H_2(p_{10}). \tag{B1}$$

写出 $\bar{p} = f_0 p_{01} + f_1 p_{10}$ 和 $\Delta p = p_{01} - p_{10}$，二阶泰勒展开得到

$$p_{\text{eff}} \simeq \bar{p} + \frac{1}{2}\frac{H_2''(\bar{p})}{H_2'(\bar{p})} f_0 f_1 (\Delta p)^2 + \mathcal{O}((\Delta p)^4), \tag{B2}$$

其中 $H_2'(p) = \log_2\left(\frac{1-p}{p}\right)$和 $H_2''(p) = -\frac{1}{\ln 2}\frac{1}{p(1-p)}$。由于 H_2 是凹函数，修正项为负：$p_{\text{eff}} < \bar{p}$，偏差随 $f_0 f_1 (\Delta p)^2$ 缩放，并在 MIS 配置均衡且 SPAM 噪声不对称性较大时达到最大值。

附录 C：熵约束下 Tarjan-DEM 的时间复杂度。

确定性错误缓解将候选项限制在以测量比特串 z_0 为中心的汉明球 $\mathcal{B}(z_0, r)$ 内。对于翻转率为 p [42]的独立同分布伯努利比特翻转（二元对称信道），典型半径为 $r \simeq Np$，因此有效搜索空间为

$$M_{\text{eff}} := |\mathcal{B}(z_0, Np)| = \sum_{k=0}^{Np} \binom{N}{k} \approx \frac{2^{N H_2(p)}}{\sqrt{2\pi N p(1-p)}}. \tag{C1}$$

因此， $M_{\text{eff}} \sim 2^{N H_2(p)}$ </style>至多相差次指数因子 。
Tarjan-Trojanowski MIS 求解器的运行时间为0 0，其中； 对于 和 log(0,1)，则为 $T_{\text{TT}} = \tilde{\mathcal{O}}(M^\gamma)$。将搜索空间限制为 M_{eff} 后，可得

$$T_{\text{TT}}(N) = \tilde{\mathcal{O}}\big(M^\gamma\big) = \tilde{\mathcal{O}}\big(c_0^{N H_2(p)}\big). \tag{C2}$$

对于非对称读出噪声， p 将替换为与熵匹配的有效速率 p_{eff}。

[1] A. Lucas，“许多 NP 问题的伊辛表述”，*Front. Phys.* **2**, 5（2014）。[2] T. Albash 和 D. A. Lidar，“绝热量子计算”，*Rev. Mod. Phys.* **90**，015002（2018）。

[3] J. Preskill，《NISQ 时代及之后的量子计算》，*Quantum* **2**，79（2018）。[4] S. de Leseleuc、D. Barredo、V. Lienhard、A. Browaeys 和 T. Lahaye，《单原子相干光激发至里德伯态过程中的缺陷分析》，

Phys. Rev. A **97**, 053803（2018）。[5] W. Lee、M. Kim、H. Jo、Y. Song 和 J. Ahn，《里德伯原子纠缠少体系统的相干与耗散动力学》，*Phys. Rev. A* **99**, 043404（2019）。[6] P. Scholl、M. Schuler、H. Williams、A. Eberharter、D. Barredo、K.-N. Schymik、V. Lienhard、L.-P. Henry、T. Lang、T. Lahaye、A. Lauchli 和 A. Browaeys，《利用数百个里德伯原子模拟二维反铁磁体》，*Nature* **595**, 383（2021）。[7] L. Henriet、L. Beguin、A. Signoles、T. Lahaye、A. Browaeys、G.-O. Reymond 和 C. Jurczak，《利用中性原子进行量子计算》，*Quantum* **4**, 327（2020）。[8]M. Morgado 和 S. Whitlock，《利用里德伯相互作用用量子比特进行量子模拟与计算》，*Quantum Sci.* **3** 023501 2021 *AVS* ，（）。

[9] M. Saffman、T. G. Walker 和 K. Mølmer，《利用里德伯原子实现量子信息》，*Rev. Mod. Phys.* **82**, 2313（2010）。[10] H. Pichler、S.-T. Wang、L. Zhou、S. Choi 和 M. D. Lukin，《利用里德伯原子阵列优化最大独立集》，arXiv:1808.10816（2018）。[11] A. Browaeys 和 T. Lahaye，《利用单独操控的里德伯原子研究多体物理》，*Nat. Phys.* **16**, 132（2020）。[12] M.-T. Nguyen、J.-G. Liu、J. Wurtz、M. D. Lukin、S.-T. Wang 和 H. Pichler，《利用里德伯原子阵列实现任意连接性的量子优化》，*Quantum* **4** 010316 2023 *PRX* ，（）。

[13] R. Andrist、M. J. A. Schuetz、P. Minssen、R. Yalovetzky、S. Chakrabarti、D. Herman、N. Kumar、G. Salton、R. Shaydulin、Y. Sun、M. Pistoia 和 H. G. Katzgraber，《单位圆盘图上最大独立集问题的难度及量子加速前景》，*Phys. Rev. Res.* **5**, 043277（2023）。[14] A. Byun、M. Kim 和 J. Ahn，《利用里德伯原子求解柏拉图图的最大独立集》，*PRX Quantum* **3**, 030305（2022）。[15] C. Dalyac、L.-P. Henry、M. Kim、J. Ahn 和 L. Henriet，《探索图局部性对利用中性原子器件求解最大独立集问题的影响》，*Phys. Rev. A* **108**, 052423（2023）。[16] K. Kim、M. Kim、J. Park、A. Byun 和 J. Ahn，《包含百余个里德伯原子的国王晶格最大独立集问题量子计算数据集》，*Sci. Data* **11**, 111（2024）。[17] S. Jeong、J. Park 和 J. Ahn，《利用里德伯原子实现量子增强模拟退火》，*Adv. Quantum* , e（）。*Technol.* **2025** 2500070 2025

[18] S. Jeong、J. Park 和 J. Ahn，《〈利用里德伯原子实现量子增强模拟退火〉的代码、数据和图表》，Figshare（2025），doi:10.6084/m9.figshare.c.7639259.v1。[19] R. Tsai、X. Sun、A. Shaw、R. Finkelstein 和 M. E. Endres，《高保真里德伯纠缠门的基准测试与保真度响应理论》，*PRX Quantum* **6**, 010331（2025）。[20] I. Csisz´ar 和 J. K¨orner, *Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems*（剑桥大学出版社，剑桥，2011）。[21] T. Giurgica-Tiron、Y. Hindy、R. LaRose、A. Mari 和 W. Zeng，《用于量子误差缓解的数字零噪声外推》,” 在 *2020 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE)*, 306 2020( )。[22] P. Mohammadipour 和 X. Li，“零噪声外推的直接分析：多项式方法、误差界以及同步物理—算法误差缓解”，arXiv:2502.20673 (2025)。[23] Y. Kim、A. Eddins、S. Anand、K. Wei、E. van den Berg、S. Rosenblatt、H. Nayfeh、Y. Wu、M. Zalatel、K. Temme 和 A. Kandala，“容错之前量子计算实用性的证据”，*Nature* **618**, 500 2023( )。[24] J. Raymond、M. Amin、A. King、R. Harris、W. Bernoudy、A. Berkley、K. Boothby、A. Smimov、F. Altomare、M. Babcock、C. Baron、J. Connor、M. Dehn、C. Enderud、E. Hoskinson、S. Huang、M. Johnson、E. Ladizinsky、T. Lanting、A. MacDonald 等，“量子退火中的量子误差缓解”，*npj Quantum Inf.* **11**, 38 (2025)。[25] K. Temme、S. Bravyi 和 J. M. Gambetta，“浅层量子电路的误差缓解”，*Phys. Rev.* , ( )。*Lett.* **119** 180509 2017

[26] S. Endo、S. C. Benjamin 和 Y. Li，“面向近期应用的实用量子误差缓解”，*Phys. Rev.* , ( )。*X* **8** 031027 2018

[27] A. Kandala、K. Temme、A. Corcoles、A. Mezzacapo、J. Chow 和 J. Gambetta，“误差缓解拓展了含噪量子处理器的计算*Na-*能力”，*ture* **567** 491 2019 ，( )。[28] B. Nachman 、 M. Urbanek 、 W. A. de Jong 和 C. W. Bauer，“量子计算机读出噪声的展开”，*npj Quantum Inf.* **6**, 84 (2020)。[29] Y. Suzuki、S. Endo、K. Fujii 和 Y. Tokunaga，“量子误差缓解作为通用误差降低技术：从含噪中等规模量子时代到容错量子计算时代的应用”，*PRX Quantum* **3**, 010345 (2022)。[30] E. van den Berg、Z. K. Minev、A. Kandala 和 K. Temme，“在含噪量子处理器上使用稀疏泡利–林德布拉德模型进行概率误差抵消”，*Nat. Phys.* **19**, 1116 (2023)。[31] Y. Chen，“更快速率的概率误差抵消”，arXiv:2506.04468 (2025)。[32] X. Bonet-Monroig、R. Sagastizabal、M. Singh 和 T. E. O'Brien，“通过对称性验证实现低成本误差缓解”，*Phys. Rev. A* **98**, 062339 (2018)。[33] G. Gonzalez-Garcia、J. I. Cirac 和 R. Trivedi，“超越平均情形的含噪量子电路泡利路径模拟”，*Quantum* **9**, 1730 (2025)。[34] S. Bravyi、S. Sheldon、A. Kandala、D. C. McKay 和 J. M. Gambetta，“缓解多量子比特实验中的测量误差”，*Phys. Rev. A* **103**, 042605 (2021)。[35] L. Funcke、T. Hartung、K. Jansen、S. K¨uhn、P. Stor- nati 和 X. Wang，“通过经典比特翻转纠正缓解量子计算机中的测量误差”，*Phys. Rev. A* **105**, 062404 (2022)。[36] Z. Cai、R. Babbush、S. Endo、W. Huggins、Y. Li、J. McClean 和 T. O'Brien，“量子误差缓解”，*Rev. Mod. Phys.* **95**, 045005 (2023)。[37] M. Dupont、B. Evert、M. Hodson、B. Sundar、S. Jef- frey、Y. Yamaguchi、D. Feng、F. Maciejewski、S. Hadfield、M. Alam、Z. Wang、S. Grabbe、P. Lott、E. Rieffel、D. Venturelli 和 M. Reagor，“量子增强贪心组合优化求解器”，*Sci. Adv.* **9**, eadi0487 (2023)。

[38] C. de Correc、T. Ayral 和 C. Bertrand，“利用里德伯原子进行近似组合优化：可解释性的障碍”， *Phys. Rev. A* **112**, 042441 (2025)。[39] S. Ebadi、A. Keesling、M. Cain、T. Wang、H. Levine、D. Bluvstein、G. Semeghini、A. Omran、J.-G. Liu、R. Sama- jdar、X.-Z. Luo、B. Nash、X. Gao、B. Barak、E. Farhi、S. Sachdev、N. Gemelke、L. Zhou、S. Choi、H. Pichler、S.-T. Wang、M. Greiner、V. Vuletic 和 M. Lukin，“使用里德堡原子阵列进行最大独立集量子优化”， *Science* **376**, 1209 (2022)。[40] J. Wurtz、S. H. Sack 和 S.-T. Wang，“使用量子—经典混合算法求解非原生组合优化问题”， *IEEE Trans. Quantum* , ( )。 *Eng.* **5** 1 2024

[41] E. Wybo、J. Ronkko、O. Hirviniemi、J. Finzgar 和 M. Leib，“用于最大独立集问题的可扩展量子增强贪心算法”， arXiv:2601.21923v1 (2026)。[42] T. M. Cover 和 J. A. Thomas， *Elements of Information Theory* 2 2006 ，第版（Wiley，霍博肯，）。[43] J. Vovrosh、T. Mendes-Santos、H. Mamann、K. Bidzhiev、F. Hayes、B. Ximenez、L. Beguin、C. Dalyac 和 A. Dauphin，“淬火后动力学中经典与量子硬件的资源评估”，arXiv:2511.20388v1 (2025)。[44] M. R. Garey 和 D. S. Johnson， *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* （Freeman，纽约，1990）。[45] F. V. Fomin、F. Grandoni 和 D. Kratsch，《用于分析精确算法的测度与征服方法》， *J. ACM* **56**，1（2009）。[46] M. D’Arcangelo、L.-P. Henry、D. Loco、N. Gouraud、S. Angebault 和 J.-P. Piquemal，《利用中性原子的模拟量子计算预测药物发现中的溶剂构型》， *Phys. Rev. Res.* ，（ ）。 **6** 043020 2024

[47] J. Wurtz *et al.*，《QuEra 的 256 量子比特中性原子量子计算机》， arXiv:2306.11727（2023）。[48] F. V. Fomin 和 D. Kratsch， *Exact Exponential Algorithms* 2010 （施普林格，柏林，海德堡，）。[49] J. H 。 *J.* astad， *ACM* **48** 798 2001 《一些最优的不可近似性结果》， ，（ ）。[50] I. Dinur 和 S. Safra，《关于最小顶点覆盖近似的困难性》， *Ann. Math.* **162**，439（2005）。[51] R. E. Tarjan 和 A. E. Trojanowski，《寻找最大独立集》， *SIAM J. Comput.* **6**，537（1977）。[52] T. F. Rønnow、Z. Wang、J. Job、S. Boixo、S. V. Isakov、D. Wecker、J. M. Martinis、D. A. Lidar 和 M. Troyer，《定义并检测量子加速》， *Science* **345** 420 2014 ，（ ）。

[53] D. H. Wolpert 和 W. G. Macready，《优化中的无免费午餐定理》， *IEEE Trans. Evol. Comput.* **1**，67 1997（）。