arXiv:2602.05433v1 [math.DS] 5 Feb 2026

离散动力学的有理解释器：p-进域上的存在性、精确性与分解

J. Rogelio Pérez-Buendía（ORCID 0000-0002-7739-4779）[1*]

[1*]SECIHTI，数学研究中心（CIMAT）梅里达分部，梅里达，尤卡坦，墨西哥。

通讯作者。电子邮箱：rogelio.perez@cimat.mx；

摘要

我们研究非阿基米德动力学中的一个逆问题：给定一个有限离散动力系统（等价地，定义在 N 个状态上的函数图），构造一个连续的 p-进动力系统，使其剩余类层面的行为复现指定的转移。利用 $\mathcal{O}_K$ 的柱划分（对于非分歧 $K/\mathbb{Q}_p$，将其视为*Witt*圆柱），我们用两两不交的闭球编码状态，并将**解释器**形式化为一种把每个状态球映射到其目标球的映射。我们的主要存在性结果构造了有理解释器，它们在指定的状态柱集上解析（因此无极点），其构造结合了刚性解析Runge逼近与有限插值约束。在每个柱集上满足线性占优条件时，球像是显式且局部仿射的，从而可以稳健地将离散行为分类为压缩、中性型和扩张情形。良约化为自然解释器提供了选择原理；一般有理解释器的有效次数与高度界仍是开放问题。

对于复合字母表，我们证明了保持同余系统的**动态中国剩余定理**：中国剩余定理同构 $\Theta : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \prod_i \mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z}$（对于 $m = \prod p_i^{k_i}$）将 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 上的动力学（等价地，函数图）分解为素数幂分量上的动力学，且与约化相容。最后，我们讨论逆极限（有限剩余）扩展：相容塔在 $\mathbb{Z}_p$ 上定义一个1-利普希茨映射，而在各层级间选取相容的解析/有理解释器则是另一个独立问题。

关键词： 非阿基米德动力学；p进动力系统；离散动力系统；函数图；Witt 向量；刚性解析几何；Runge逼近；良约化；中国剩余定理；保同余映射；逆提升问题；球动力学

MSC 2020： 37P20（主要），11S80，13K05，14G22，37B10（次要）

目录

1 引言 31.1 离散动力学与提升问题 .31.2 科学背景：从Berkovich空间到约化理论 . . . . 41.3 主要贡献 .51.4 函数图中的算术信息 .51.5 结构安排 .6

2 函数图与 p-进层级编码 7

3 超度量预备知识 7
3.1 p-进球与基本几何 .73.2 仿射映射与球像 .83.3 非阿基米德柯西估计 .8

4 解释的语义 9
4.1 一般设定 .94.2 解释与三种解释类型 .94.3 解释的障碍.10

5 有理解释器的存在性 11
5.1 分段仿射模型 .115.2 全局有理逼近（Runge） .125.3 含包含关系的解释的存在性 .13

6 通过线性支配实现稳健精确性 156.1 线性支配与球映射 .156.2 稳健性定理 .16

7 算术扩张：Witt 向量与拟有限相容性17
7.1 动机：超越素数大小的字母表.177.2 从多状态字母表到 Witt 圆柱.177.3 相容塔与逆有限动力学.197.4 垂直细化：精确周期的亨泽尔提升.197.5 语义作为同余控制.217.6 通过动态中国剩余定理进行全局分解.227.7 两种正交分解：水平与垂直.267.8 Pro-p 塔与示例.267.9 约化理论与约化-逻辑联系.28**8 闭环：离散系统的分析综合29**

8.1 解析不变量与组合状态.298.2 最优解释器与 ε精度.308.3 良约化作为选择启发式（讨论）. 318.4 模空间的必要性.328.5 层级等价与模空间.34

9 算例与算术应用 35

9.1 具体案例研究：循环与暂态动力学 . . . . . 35 9.1.1 离散动力学.35 9.1.2 p-进制编码.36 9.1.3 解析解释器构造.36 9.1.4 全局有理解释器.36 9.1.5 鲁棒性与乘子.36 9.2 Witt 向量上的动力学：$GF(4)$ 的情形.37 9.3 算术案例研究：Frobenius 与 Verschiebung.37 9.3.1 例子 A：Frobenius 作为精确解释器.37 9.3.2 例子 B：Verschiebung 作为移位寄存器解释器 . . . . . 37 9.4 模平方与解析稳定性.38 9.5 参数空间：p-进制 $z^2 + c$ 族.38 9.6 代数系统：中国剩余定理与 PDS.38 9.6.1 DCRT“前往”（约化）.39 9.6.2 DCRT“返回”（提升）.39 9.6.3 插值与约化.40 9.6.4 与 p-进制解释器的关系.41

10 讨论与未来展望 42

10.1 结果的结构意义 .4210.2 与其他工作的关系 .4210.3 局限性与开放方向 .4210.4 零半径解释 .43

A 逆有限 e 动力学与零半径解释 n 43

A.1 范围 .43A.2 两种解释概念 .43A.3 水平与垂直 .44A.4 逆有限动力学与唯一连续提升（路径1） . . . . . 44A.5 何时能得到解析逐点解释器？（路径 2） . . 44

1 引言

1.1 离散动力学与提升问题

函数图——每个顶点的出度均为一的有向图——是有限离散动力系统（DDS）的标准组合表示 [1]。它们可用于建模元胞自动机、调控网络以及有限域上有理映射的轨道，处于离散动力学、算术动力学与

p-adic 分析。这个提升问题是：给定一个有限离散系统，能否在某个局部域上构造一个连续动力系统，使其在选定分辨率下的“影子”恰好就是该离散系统？用代数术语来说：给定有限环F 上的离散映射 R (例如 $R = \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$)，求赋值环 ϕ 上的连续映射，使得深度为k 的约化 $\pi^{(k)}$ 满足 $\pi^{(k)} \circ \phi = F \circ \pi^{(k)}$。根据球语义（含包含关系的解释），在 $K = \mathbb{C}_p$上存在这样的映射（定理5.2、定理5.6）；其构造方法是先使用分段仿射解释器，再进行 Runge 逼近。Runge 步骤无法给出明确的次数或高度界；参见第10 节及注5.5。在线性支配条件下，精确球映射是一种开性质。

有限非分歧扩张的整数环 $\mathcal{O}_K$ （其剩余域为 $\mathbb{F}_q$），通过非分歧情形下的 Witt 同构与 Witt 向量 $\mathcal{O}_K \cong W(\mathbb{F}_q)$ 对应，提供了仅靠 $\mathbb{F}_q$ 上的多项式插值无法实现的度量与层级结构，并且与生物学中的多值逻辑和 p-进模型相契合 [2–6]。

离散构型被编码为 *Witt*柱（一个 p-进球），位于 $\mathcal{O}_K$ 中。离散更新规则 F 通过一个全局有理映射或解析映射 ϕ 来解释，该映射将柱集映射到柱集。Witt 向量的层级结构确保动力学在不同分辨率层次之间保持兼容：细化或粗化离散网格对应于改变球的半径。

我们将 *Witt*柱一词用于 $\mathcal{O}_K \simeq W(\kappa)$ 中的柱球（对于非分歧情形K），即 $\mathcal{O}_K$ 中深度为 n 的同余球（模 p^n 的剩余类，可视为半径为 p^{-n} 的闭球）。

将离散系统视为球到球动力学，便可运用p-进分析的全套工具——乘子、吸引子和稳定性理论。组合结构相同的状态由此呈现出不同的解析特征：压缩态对扰动具有稳健性，而扩张态则对扰动敏感。因此，连续提升为离散图增添了一个定量层面。

1.2 科学背景：从 Berkovich空间到约化理论

非阿基米德动力学因Berkovich射影直线 [7]和Fatou-Julia理论 [8]而焕然一新。文献主要关注正问题：给定 $\phi \in K(z)$，描述其在剩余环上的作用（例如Jones-Manes [9], Hsiao [10]）。我们研究逆问题：给定一个有限函数图 G，构造一个有理映射 ϕ，使其球动力学在选定的分辨率下实现 G。这个逆提升问题与约化理论密切相关：Benedetto [11] 证明了具有良约化的映射在剩余域上的行为具有一致性；Pérez-Buendía [12] 将这一结果推广到树形表示。在我们的设定中，**含包含关系的解释**（球像包含在目标中）与良约化密切相关：严格良约化（保次数约化）可防止连续映射“压扁”离散状态；当存在多个解释器时，它还提供一种选择原理（第7.9节）。[1]

[1]当我们将约化用作选择原理时，采用的是严格良约化；参见第 7.9 节和例子 7.28。

同一设定还带来拟有限相容性：离散系统可以视为相容映射塔，而逆极限则在非分歧基底上诱导出全局连续动力学$\mathcal{O}_{K_0}$（将其视为包含于$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$之中，见注释7.1），这与 p-进生物模型 [13] 及逆有限动力学 [14]相符。

1.3 主要贡献

逆提升问题可解，且解可分解；精确柱映射在线性支配下具有稳定性（第 6节）。主要贡献如下。

- **维特向量语义：**多状态字母表通过非分歧的 p-进基（$\mathcal{O}_{K_0} \cong W(\mathbb{F}_p)$ 的有限层截断）进行编码，并将离散状态对应为 Witt 柱集。
- **解释：**基本概念是解释器（球像与目标相交），每个球有三种类型（压缩型、中性型、扩张型），全局条件（含包含关系的解释、精确解释）则表述为维特环中的同余关系。
- **通过 Runge 逼近实现存在性：**仿射域上有理函数的稠密性（刚性龙格定理）保证，对于任意有限函数图，都存在定义在有限个互不相交的球之并上的有理解释器；构造过程为先构造分段仿射解释器，再进行 Runge 逼近（无有效界）。
- **稳健精确性：**“线性支配”准则保证精确柱映射是解析映射空间中的开性质，且具有稳定性。
- **动态中国剩余定理与全局乘积合成：** 对于复合字母表，解释会提升为局部域的乘积。命题 7.22 确立了大小为 $m = \prod p_i^{k_i}$的系统的连续相空间是乘积空间 $\prod_i \mathcal{O}_i$（每个 $\mathcal{O}_i \cong \mathbb{Z}_{p_i}$ 或一个非分歧扩张）；由此产生的水平与垂直分解将在第 7.7节讨论。
- **约化原理：** 良约化为在存在多个解释器时选择首选解释器提供了一个选择原理。

1.4 函数图中的算术信息

剩余环／域上的函数图编码了多项式方程和有理方程的可解性模式。球／柱集上的解释器约束强制规定了预先设定的有限层可解性／分支模式，而垂直细化则要求不同深度之间保持相容。

入度作为解的数量。
令 $q = p^f$，并令 $f\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ 为一个函数（例如由 $\mathbb{F}_q[x]$ 中的多项式诱导）。在 f 的函数图中，节点 $a \in \mathbb{F}_q$ 的入度为

$$\#f^{-1}(a) = \#\{x \in \mathbb{F}_q : \ f(x) = a\},$$

因此，叶节点（入度为 0 的节点）恰好是 f 未取到的值；等价地，它们衡量了 f 在 $\mathbb{F}_q$ 上的满射性失效程度，即方程 $f(x) = a$ 在 $\mathbb{F}_q$ 中的可解性障碍。

例子： $x \mapsto x^2$ 与二次剩余。
对于奇数 p 和 $\mathbb{F}_p$ 上的 $f(x) = x^2$，叶节点恰好是非二次剩余。等价地，如果 a 是平方数，则每个 $a \in \mathbb{F}_p^\times$ 的入度为 2；否则入度为 0，而 0 的入度为 1。

例子： $x \mapsto x^2 + 1$ 与标量扩张。
对于奇数 p 和 $= x^2 + 1$ 上的 $f(x)$， $f(x) = 0$ 可解，当且仅当 $x^2 = -1$ 可解；这取决于 p 模 4 的情况：若 $p \equiv 1$ （模 4），则 0 在 $\mathbb{F}_p$ 中的入度为 2；若$p \equiv 3$ （模 4），则 0 在 $\mathbb{F}_p$ 中是叶节点，但经过 $\mathbb{F}_{p^2}$ 后会变成非叶节点。更一般地，扩大剩余域可以为先前作为叶节点的节点附加新的原像，这反映了非分歧扩张下可解性数据的细化。

通向 ***Witt*** 圆柱与提升
有限字母表与同余类由非分歧基底 $\mathcal{O}_{K_0} \cong W(\mathbb{F}_p)$ 中的 Witt 圆柱来建模（见注 7.1）。因此， $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ 上的离散转移系统就是有限分辨率数据，而垂直细化（动力学 Hensel 型提升）关注预先指定的循环／分支何时能在不同深度间持续存在。在 $\mathbb{C}_p$ 上的存在性会产生解析／有理映射，其行为受这些柱集约束，从而将有限算术动力系统与非阿基米德解析动力系统联系起来。

水平细化与垂直细化
函数图所编码的分支／可解性数据有两种不同的算术细化。水平细化将剩余域 $\kappa = \mathbb{F}_p$ 扩张为$\kappa' = \mathbb{F}_{p^f}$ （非分歧扩张）；这可能产生新的原像，因为方程在标量扩张后可能获得解（参见例子 1.4）。垂直细化则提高截断塔 n 中的深度 $W_{n+1}(\kappa) \to W_n(\kappa)$ （模 $p^n \to p^{n+1}$提升），考察预先指定的分支／循环是否具有 Hensel 持续性。这两种操作在逻辑上相互独立：剩余域扩张对应于改变 Witt 基底 $W(\kappa)$，而深度细化则是通过截断来细化柱集。

1.5 章节安排

记号与预备知识见第 2–3 节。解析核心——语义（第 4 节）、通过 Runge 实现存在性（第 5 节）以及稳健精确性（第 6 节）——引出第 7 节中的算术扩张：Witt 向量、动态中国剩余定理、水平与垂直分解（第 7.7 节），以及由动力学 Hensel 引理导出的 pro-p 塔。第 8 节讨论约化与筛选准则；第 9 节给出算例。第 10 节探讨与其他研究的关系、开放问题，以及向半径为零（有限生成）解释的过渡（附录 A）；另见第 1.4 节关于算术信息的小节。

2 函数图与 p-进层次编码

函数图——有向图 $G_F=(X,\ E)$，其中 $E=\{(x,\ F(x)):\ x\in X\}$——是有限离散动力系统 $F:X\to X$ 的组合表示。每个顶点恰有一条出边；特别地，**不动点**（具有 $F(x)=x$ 的顶点 x）由一个**自环**（边 $(x,\ x)$）表示。本文及所有图示均采用这一约定。在多尺度模型中，X 通常具有乘积结构 $X=\Sigma^n$，其中 $\Sigma=\{0,\ \ldots,\ p-1\}$。

固定坐标顺序后，我们通过编码映射将 $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)\in\Sigma^n$ 识别为一个 p-进整数：

$$\mathrm{enc}_n(x)=\sum_{i=1}^{n}x_ip^{i-1}. \tag{1}$$

每个构型都对应一个状态柱集 $B_x:=B(\mathrm{enc}_n(x),\ p^{-n})\subset\mathbb{C}_p$。

引理 2.1 (柱集划分与嵌套) *(i)* 球 $\{B_x\}_{x\in\Sigma^n}$ 构成 $\mathbb{Z}_p$ 的一个划分，划分为半径为 p^{-n}的两两不交的闭球 p^n 。
(ii) 对于 $m<n$，截断映射 $\pi_{n\to m}:\ \Sigma^n\to\Sigma^m$ (保留前 m 个 m p-进位数字) 满足 $B_x\subseteq B_{\pi_{n\to m}(x)}$。

半径 p^{-n} 充当分辨率参数。状态柱集 B_x 是深度为n 的约化 $\pi^{(n)}:\ \mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$的纤维；含包含关系的解释与该约化的交换性之间的等价性见第7 节（引理 7.21）。Witt 向量与动态中国剩余定理将在该节中展开。

3 超度量预备知识

3.1 p-adic 球与基本几何

设 K 是一个完备代数闭非阿基米德域（例如 $K=\mathbb{C}_p$），其绝对值 $|\cdot|$ 经过归一化，使得 $|p|=p^{-1}$。对于 $a\in K$ 和 $r>0$，我们将闭球记作 $B(a,r)=\{z\in K:\ |z-a|\le r\}$。该域的超度量性质推出以下基本嵌套性质。

引理 3.1 (嵌套性质) 若两个球 $B(a,r)$ 和 $B(b,s)$ 有非空交集，则其中一个必包含另一个。

证明 这是超度量三角不等式的标准推论（参见例如 [15] 或 [16]）。若 $|a-b|\le\max(r,s)$，则半径较大的球包含另一个球。□

注 *3.2* （嵌套性质与原有限塔）嵌套性质（引理 3.1）是层级结构的基础。在第 2 节中，我们使用半径为 p^{-n} 的球来编码离散构型。嵌套结构 $\{B_x\}_{x\in\Sigma^n}$ 自然形成一个逆系统：对于 $m<n$，每个球 B_x （半径为 p^{-n}）都包含在唯一一个球 $B_{\pi_{n\to m}(x)}$ （半径为 p^{-m}）中。

这一层级结构是第 7 节所发展的有限剩余相容性的几何基础；在该节中，离散映射的相容塔在非分歧基底 $\mathcal{O}_{K_0} \cong W(\kappa)$ 上诱导出全局连续动力学（参见注 7.1）。

3.2 仿射映射与球像

要理解解析映射作用下球的行为，最好从仿射模型入手。

引理 3.3 (仿射像) 设 $\psi(z) = \beta + u(z-\alpha)$ 是一个仿射映射，且 $u \neq 0$。则 $\psi(B(\alpha, r)) = B(\beta, |u|r)$。

证明 对任意 $z \in B(\alpha, r)$，有 $|\psi(z) - \beta| = |u(z-\alpha)| = |u||z-\alpha| \leq |u|r$，因此 $\psi(B(\alpha, r)) \subseteq B(\beta, |u|r)$。反过来，对任意 $w \in B(\beta, |u|r)$，点 $z = \alpha + u^{-1}(w-\beta)$ 满足 $|z-\alpha| = |u|^{-1}|w-\beta| \leq r$，因此 $z \in B(\alpha, r)$ 且 $\psi(z) = w$。□

3.3 非阿基米德柯西估计

对泰勒系数的控制对于我们关于稳健精确性的结果至关重要。设$f \in \mathcal{O}(B(a, r))$为一个解析函数，其展开式为 $f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k (z-a)^k$。

引理 3.4 （柯西界）对所有 $k \geq 0$, $|c_k| r^k \leq \|f\|_{B(a,r)}$，其中 $\|f\|$ 表示球上的上确界范数。

证明 这是刚性解析几何以及 p-进动力学中的核心非阿基米德柯西估计（参见 [17], 和 [13]中的命题 3.17 和推论 3.21；关于刚性解析情形，另见 [15] [2]）。根据超度量性质，界由 $|c_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} \, dz \right| \leq r^{-k} \|f\|_{B(a,r)}$ 得出。□

引理 3.5 （系数稳定性）若 f、g 是定义在 $B(a, r)$ 上的解析函数，且满足$\sup_{B(a,r)} |f - g| \leq \varepsilon$，那么对于每个 $k \geq 0$，我们有

$$|c_k(f) - c_k(g)| r^k \leq \varepsilon.$$

特别地，$|f'(a) - g'(a)| r \leq \varepsilon$ 以及 $|f(a) - g(a)| \leq \varepsilon$。

证明 这可由将引理 3.4 应用于差 $h = f - g$得到，注意到 h 的系数恰为 $c_k(f) - c_k(g)$。□

[2]阿基米德类比是圆盘上全纯函数的柯西不等式。

4 解释语义

4.1 一般设定

这里通过球动力学，将解释离散转移规则的连续映射这一概念形式化。

定义 4.1（球系）一个球系是一个三元组（$\mathcal{B}$ τ，$\mathcal{B}'$），其中：

1. $\mathcal{B}$ $=\{B_i = B(a_i,\ r_i)\}_{i=1}^{N}$ 是 $\mathbb{C}_p$中的有限个两两不交的闭球。2. τ：$\{1,\ .....,\ N\}$ $\to\{1,\ .....,\ N\}$ 是一个离散转移规则。3. $\mathcal{B}' = \{B_i' = B(b_i,\ t_i)\}_{i=1}^{N}$ 是一个目标闭球族。

在第 2 节讨论的层次编码背景下，B_i 是柱集 B_x，而 τ 是作用于构型上的更新规则 F。

4.2 解释与三种解释类型

当映射的解释器球像与规定的目标相交（交集非空）时，该映射便是解释器。超度量嵌套性质保证每个球都具有唯一的包含关系，由此得到三种解释类型。

定义4.2（解释器）设 ($\mathcal{B}$ τ,$\mathcal{B}'$) 是一个球系。若映射 ϕ 在 $U = \bigcup B_i$ 的某个邻域内解析，且解释 τ，则对每个 i,

$$\phi(B_i) \cap B'_{\tau(i)} \neq \varnothing.$$

特别地，若 ϕ 是有理的，则“在 U 的某个邻域内解析”意味着 ϕ 在 U 的某个开邻域内没有极点（因此在 U 上也没有极点）。我们称 ϕ 在球 i 处具有

（i）**压缩型解释**，若 $\phi(B_i) \subsetneq B'_{\tau(i)}$（像严格包含于目标内）；（ii）**等距型解释**，若 $\phi(B_i) = B'_{\tau(i)}$（像等于目标）；（iii）**扩张型解释**，若 $B'_{\tau(i)} \subsetneq \phi(B_i)$（目标严格包含于像内）。

注 4.3（线性支配下的像结构）对于在第 5–6 节中构造的解释器，ϕ 在每个 B_i 上都解析且无极点，并满足线性支配（定义 6.1），因此 $\phi(B_i)$ 恰好是一个球。线性支配意味着局部可逆性（项 $|\phi'(a_i)|$ 支配高阶项）；由超度量反函数定理（例如参见 [15] 或 [17]），[3] $\phi(B_i) = B(\phi($ $a_i)$ $|\phi'(a_i)|r_i)$。于是引理 3.1 给出，对于每个 i，$\phi(B_i)$ 和 $B'_{\tau(i)}$ 其中之一包含另一个，因此上述三种解释类型均适用。等价地，若 $\phi(B_i) = B(\phi(a_i)\ s_i)$ 且 $s_i = |\phi'(a_i)|\, r_i$，则 i 处的三种类型由比值决定

$$\sigma_i := \frac{s_i}{t_{\tau(i)}} = \frac{|\phi'(a_i)|\, r_i}{t_{\tau(i)}}: \quad \begin{aligned} &\sigma_i < 1 \iff \text{contractive},\\ &\sigma_i = 1 \iff \text{indifferent},\\ &\sigma_i > 1 \iff \text{expansive}. \end{aligned}$$

[3]阿基米德类比是经典反函数定理。

注 *4.4*（包含与精确解释）若 ϕ 解释 τ 且具有包含性，我们称其为ϕ 解释 τ，并且在每个 i 处，解释都是压缩的或中性型的，即对所有 i，$\phi(B_i) \subseteq B'_{\tau(i)}$。若 ϕ 精确解释 τ，我们称其为 ϕ 解释 τ，并且在每个 i 处，解释都是中性型的，即对所有 i，$\phi(B_i) = B'_{\tau(i)}$。因此：精确解释器必为包含解释器；反之则一般不成立。

概念	**条件**
解释器	$\phi(B_i) \cap B'_{\tau(i)} \neq \varnothing$ 对所有 i
压缩的（在 i处）	$\phi(B_i) \subsetneq B'_{\tau(i)}$
中性型（在 i处）	$\phi(B_i) = B'_{\tau(i)}$
扩张的（在 i 处）	$B'_{\tau(i)} \subsetneq \phi(B_i)$
包含解释器	$\phi(B_i) \subseteq B'_{\tau(i)}$ 对于所有 i （处处压缩或中性型）
精确解释器	$\phi(B_i) = B'_{\tau(i)}$ 对于所有 i （处处中性型）

表1 解释：基本概念与每个球的三种类型；包含关系和精确性作为全局条件。

关键等价性（语义）。
我们始终如一地使用以下术语： 含包含关系的解释 表示 $\phi(B_i) \subseteq B'_{\tau(i)}$ 对所有 i；精确解释器 表示 $\phi(B_i) = B'_{\tau(i)}$ 对所有 i。当状态柱集是深度为 k 的商映射 $\pi^{(k)}$ 的纤维时（如第 2节和第 7节所述），几何条件与代数条件一致：对所有 x,

$$\phi(B_x) \subseteq B_{F(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad \pi^{(k)} \circ \phi = F \circ \pi^{(k)} \quad \text{(see Lemma 7.21)}.$$

这一等价性使得可以通过约化图检验含包含关系的解释，而无须直接检查球像。

4.3 解释的障碍

对源球不相交的假设并非无关紧要。如果球彼此重叠，转移规则就必须满足严格的相容性约束。

观察 *4.5* 若 $B_1 \subset B_2$，则对任意函数 ϕ，必有 $\phi(B_1) \subseteq \phi(B_2)$。因此，若所指定的目标球 $B'_{\tau(1)}$ 与 $B'_{\tau(2)}$ 不满足相同的包含性质，则不可能存在解释器。

这凸显了为什么 $\mathbb{Z}_p$ 中的柱划分 $\{B_x\}$ 是我们用来解释有限离散动力学的定义域：在固定深度 n（半径 p^{-n}）下，该划分包含

p^n 互不相交的球，因此该深度下任何被解释的系统都必须满足 $|X| \le p^n$；反过来，任何有限 $|X| = N$ 都可以通过选取深度 n 且满足 $p^n \ge N$ 来实现。关于这些语义（同余关系、大小为p^k的字母表、跨分辨率层次的兼容性）的 Witt 与中国剩余定理理论推导见第 7节。

5 有理解释器的存在性

本节讨论存在性结果时，我们在 $K = \mathbb{C}_p$ （代数闭、值群可除）上工作；第7 节中的算术扩张使用非分歧基域 K_0，其$\mathcal{O}_{K_0} \cong W(\kappa)$ （见注7.1）。

5.1 分段仿射模型

构造解释器最简单的方法是使用仿射映射，逐球定义它。以下存在性结果用我们的球系记号重新表述了局部构造块，它是 Pérez-Buendía 和 Nopal-Coello [18] 中 ε-粘合构造的基础。他们的定理 4.2 证明了一个全局有理 ϕ 的存在性：在每个局部映射 f_i 将球并集的像包含于 $B_1(0)$这一假设下，该 ϕ 能在有限个互不相交的球上，以 ε-精度逼近给定的局部解析／有理数据。在我们的应用中，我们选取已经编码预期球到球行为的局部模型 f_i （例如仿射映射或局部占优映射）；随后通过粘合得到具有所需精度的全局 ϕ 。为求完备，我们在本文的设定下给出明确陈述和简短证明。我们先确立一个关于非连通仿射域上解析函数的标准事实。

引理5.1 （不相交仿射域上的函数代数）设 $U = \bigsqcup_{i=1}^{N} U_i$ 是 $\mathbb{P}^1(K)$ 中有限个互不相交的仿射代数域的不交并。则 U 上的解析函数代数分解为如下乘积：

$$\mathcal{O}(U) \cong \prod_{i=1}^{N} \mathcal{O}(U_i).$$

特别地，对每个 i 给出解析函数 $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$，即可唯一确定一个解析函数 $f \in \mathcal{O}(U)$，使得 $f|_{U_i} = f_i$。

证明 这是刚性解析几何中的一个标准结果，在整个 p-adic 动力学中都会用到（参见 [17]；关于刚性解析情形，参见 [16] 或 [15]）。[4] 由于这些仿射域 U_i 两两不相交，因此存在包含 U_i 的互不相交容许开集 V_i，使得 $U = \bigcup V_i$。容许覆盖上的 $\mathcal{O}$ 层性质意味着 $\mathcal{O}(U) = \prod_i \mathcal{O}(U_i)$。□

定理 5.2 （解析存在性）设 $(B\ \tau, B')$ 是一个球系，其中 K 是一个值群可除的完备代数闭非阿基米德域（例如 $K = \mathbb{C}_p$）。假设所有半径 r_i 和 t_i 都属于值群 $|K^\times|$。那么存在一个解析函数

[4]阿基米德类比是：不交圆盘并上的全纯函数由其限制唯一确定。

ψ 定义在仿射体并 $U = \bigcup B_i$ 上，并精确地解释 τ。事实上， ψ 可以取为分段仿射函数：

$$\psi|_{B_i}(z) = b_{\tau(i)} + u_i(z - a_i), \quad where\ |u_i| = \frac{t_{\tau(i)}}{r_i}.$$

证明 由于 K 是代数闭的，且其值群可除，因此对任意 i ，我们都能找到$u_i \in K$ 使得 $|u_i| = t_{\tau(i)}/r_i$。在每个球 B_i上定义 $\psi_i(z) = b_{\tau(i)} + u_i(z - a_i)$。根据引理3.3，我们有 $\psi_i(B_i) = B'_{\tau(i)}$。由于这些球 B_i 两两不相交，引理5.1保证族{ψ_i}唯一确定一个解析函数 $\psi \in O(U)$, 使得对所有 i都有$\psi|_{B_i} = \psi_i$ 。这就精确地解释了 τ。□

注*5.3* （非分歧扩张中的半径）在非分歧扩张中 $K_0/\mathbb{Q}_p$ （其值群为 $p^{\mathbb{Z}}$），所有半径都属于 $|K_0^\times|$ 这一假设将它们限制为 p的幂。这与我们的设定一致，因为第2 节中的状态柱集是用半径 p^{-n} 为 $n \in \mathbb{N}$构造的。代数闭情形 $K = \mathbb{C}_p$ （其值群为 $p^{\mathbb{Q}}$）提供了更大的灵活性，但只要半径属于值群，这种构造仍然成立。

5.2 全局有理逼近（Runge）

我们在 $K = \mathbb{C}_p$ （代数闭）中进行研究，如注7.1所述。分段仿射解释器 ψ 由定理 5.2 构造，在仿射域 $U = \bigcup B_i$上是解析的，但并未在 $\mathbb{P}^1(K)$ 上全局定义。为得到一个全局解释器（例如 $\mathbb{P}^1$上的有理函数），我们需要逼近 ψ ，即用有理函数来逼近。关键工具是龙格逼近定理（刚性解析几何），它表明有理函数在仿射代数域上的解析函数代数中是稠密的。在我们的设定中， U 是两两不交的闭球的有限并（一个魏尔斯特拉斯域），该稠密性在上确界范数拓扑下成立。这使得我们能够任意接近地逼近分段仿射的 ψ （借助有理函数），同时通过第6节的稳健精确性结果保持球动力学语义。

我们使用下述标准稠密性结果。接下来记录一个关于在中心处进行多项式插值的初步事实（在讨论次数界时会用到）。

命题5.4 （中心处的多项式插值）设 a_1，……， $a_N \in K$ 是两两不同的点，并设 y_1，……， $y_N \in K$。则存在唯一的多项式 $P \in K[z]$，满足$\deg(P) \le N - 1$，使得对所有 i都有 $P(a_i) = y_i$。

证明 这是经典的拉格朗日插值定理。明确地说，

$$P(z) = \sum_{i=1}^{N} y_i \prod_{j \neq i} \frac{z - a_j}{a_i - a_j}.$$

□

注 *5.5* （这并不意味着）命题5.4控制了所选代表元（中心）上的离散更新，但其本身并不确保任何球映射性质，例如 $P(B_i) \subseteq B'_{\tau(i)}$（或等式），也不提供 $\|P-\psi\|_U < \varepsilon$对任意小的 ε 且次数被 $N-1$所界定时的一致逼近。仿射域上的一致逼近通过 Runge 型稠密性（定理 5.6）获得，通常不存在与 ε无关的次数界。

定理 5.6 (刚性Runge逼近) 设 $U \subset \mathbb{P}^1(K)$ 是两两不交的闭球的有限并。那么，有理函数 $K(z)$ 在 $O(U)$ 中关于上确界范数稠密（参见 *[16]* 或 *[15]*）。也就是说，对于任意 $\psi \in O(U)$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $\phi \in K(z)$ 使得 $\sup_{z\in U} |\phi(z) - \psi(z)| < \varepsilon$。

引理 5.7 (Runge逼近蕴含有限点控制) 设 $U = \bigsqcup_{i=1}^{N} B_i \subset \mathbb{P}^1(K)$ 是两两不交的闭球的有限并，设 $S = \{s_1, \dots, s_k\} \subset U$ 是有限集，并且 $\psi \in O(U)$。给定 $\varepsilon > 0$，存在 $\phi \in K(z)$ 使得 $\|\phi - \psi\|_U < \varepsilon$，因此对所有 j，均有 $|\phi(s_j) - \psi(s_j)| \le \varepsilon$。

证明 由定理 5.6 存在 $\phi \in K(z)$ 满足 $\|\phi - \psi\|_U < \varepsilon$。于是，对每个 $s_j \in S \subset U$，都有 $|\phi(s_j) - \psi(s_j)| \le \|\phi - \psi\|_U < \varepsilon$。 □

5.3 含包含关系的解释的存在性

有理函数的稠密性立即推出带包含的解释器的存在性。这一构造与连续函数的 p-进插值问题相关，但还额外要求在球上满足动力相容性。

推论 5.8 (含包含关系的有理解释器的存在性) 对于任意球系$(B\ \tau, B')$，都存在一个有理函数 $\phi \in K(z)$，它解释 τ，且满足包含关系。

证明 定义 $\psi \in \mathcal{O}(U)$ 如下：令 $\psi|_{B_i}(z) = b_{\tau(i)}$ 对每个 i成立。根据引理 5.1 这唯一确定了 $U = \bigsqcup_i B_i$上的一个解析函数。

取 $\varepsilon <$ 最小值$_i\, t_{\tau(i)}$。根据定理 5.6，存在 $\phi \in K(z)$ 使得 $|\phi(z) - \psi(z)| < \varepsilon$对所有 $z \in U$均成立。于是对于 $z \in B_i$:

$$|\phi(z) - b_{\tau(i)}| \le \max(|\phi(z) - \psi(z)|,\ |\psi(z) - b_{\tau(i)}|) = |\phi(z) - \psi(z)| \le \varepsilon < t_{\tau(i)}.$$

因此 $\phi(B_i) \subseteq B'_{\tau(i)}$。 □

推论 5.9 (无极点有理解释器) 设 K 是一个完备非阿基米德域，并且设

$$U = \bigsqcup_{i=1}^{N} B_i \subset \mathbb{P}^1(K)$$

是有限个闭球的不交并。令 $\psi \in O(U)$ 为由 $\psi|_{B_i} \equiv b_{\tau(i)}$ 定义的分段常值解析函数（因此 ψ 在 U上有界）。那么：

*1. (*在 上没有极点。 如果 $\phi \in K(z)$ 满足 $\|\phi - \psi\|_U < \infty$ （等价地， $\|\phi\|_U < \infty$ ，因为 U 是紧仿射域），那么 ϕ 在 U上没有极点，即 $\phi \in O(U)$。*2. (*指定极点可能出现的位置。 设 $V \subset \mathbb{P}^1(K)$ 为一个容许开集，使得 $V \cap U = \varnothing$ ，且 V与 $\mathbb{P}^1(K) \setminus U$的每个连通分支都有交集。那么对每个 $\varepsilon > 0$ ，都存在 $\phi \in K(z)$，其所有极点都包含在 V中，且满足 $\|\phi - \psi\|_U < \varepsilon$。特别地，可以选择一个在 U 上解析且极点包含在 V中的有理解释器。

证明 (1) 若 ϕ 在 $x \in U$处有极点，则 $|\phi|$ 在 x的每个邻域内都无界，因此 $\|\phi - \psi\|_U = \infty$ ，因为 ψ 在 U上有界。故 ϕ 在 U上没有极点，即 $\phi \in \mathcal{O}(U)$。

(2) 这是刚性解析射影直线上的标准的龙格逼近命题：在 V与补集的每个连通分支都相交这一假设下，极点位于 V的有理函数所成的子代数，在 U上的上确界范数下于 $\mathcal{O}(U)$ 中稠密。将此应用于 $\psi \in \mathcal{O}(U)$，可得极点位于 V且 $\|\phi - \psi\|_U < \varepsilon$的 ϕ 。□

推论 5.10 (球系统的无极点解释) 对于任意满足 $U = \bigcup B_i$ 的球系 $(B\ \tau, B')$，存在有理函数 $\phi \in K(z)$ ，它通过包含解释 τ，且在 U中没有极点。此外， ϕ 可以选为在 U上解析，即所有极点都位于 $\mathbb{P}^1(K) \setminus U$。

证明这可由推论 5.9 取 $V = \mathbb{P}^1(K) \setminus U$ （这是一个容许开集），并应用推论 5.8中的构造即可得到。□

注 *5.11* （带指定极点的龙格逼近）推论 5.9(2) 中的结论是刚性解析几何中的标准结果，也是 p-进动力学中逼近论证的基础（参见 [17]）。这是适用于龙格对 (U, V)的刚性解析龙格定理；参见 [15]（龙格对与容许开集）或 [16]（仿射域情形）。[5] 关键假设是， V是一个容许开集，并且与 $\mathbb{P}^1(K) \setminus U$的每个连通分支都相交；在此条件下，极点包含于 V 中的有理函数所成的子代数在 $\mathcal{O}(U)$ 中关于上确界范数拓扑是稠密的。

请注意：“极点包含在指定的紧集内”这一说法若没有额外假设（例如龙格对条件）并不成立；自然需要指定的对象是一个与每个补集连通分支相交的容许开集 V。此处的区域 U 是有限个闭球的并，在刚性解析几何意义下构成一个魏尔斯特拉斯域（仿射域）。

注 *5.12* 这一结果为逆提升问题提供了一个定性的回答。经典插值结果（例如马勒定理 [19]）解决的是连续函数的表示问题，而我们的构造则确保连续动力学在给定分辨率 ε下反映函数图的组合转移。局部解析性与全局组合结构之间的这种联系，是算术动力学的核心主题。 [9, 14]

[5]阿基米德类比是关于用极点位于指定集合中的有理函数进行逼近的龙格定理。

注 5.13（通过 ε-粘合的另一种构造） [18]给出了另一种互补的构造。设 $B = \bigcup_i B_{r_i}(a_i)$ 是互不相交的有理球的有限并，且设 f_i 是局部有理映射或解析映射，并满足对每个 i， $f_i(B_{r_i}(a_i)) = B_{t_i}(b_i)$。在对所有 i 均有 $f_i(B) \subset B_1(0)$ 这一假设下， [18] 的定理 4.2 表明，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个全局有理映射 F_ε，使得 $F_\varepsilon(B_{r_i}(a_i)) = B_{t_i}(b_i)$，并且对每个 i，在 $B_{r_i}(a_i)$ 上有 $|F_\varepsilon(z) - f_i(z)| < \varepsilon$。在定理 4.2 的证明中，给出了显式公式 $F_\varepsilon(z) = \sum_i f_i(z)h_i(z)$。精确表述见 [18]。本节的 Runge 方法在最少假设（球两两不相交，且域为任意完备非阿基米德域）下保证了存在性，但无法提供一致的次数界或高度界。

6 通过线性支配实现稳健精确性

通过逼近可实现含包含关系的解释（推论5.8）；精确解释（$\phi(B_i) = B'_{\tau(i)}$）则是一种更微妙的性质。本节将证明，只要映射满足局部线性支配条件，精确性就是稳健的。

6.1 线性支配与球映射

定义 6.1（线性支配）设 f 是定义在 $B(a,r)$ 上的解析函数，其展开式为 $f(z) = \sum_{k\geq 0} c_k(z-a)^k$。若 f 在该球上满足线性支配，则称其在该球上具有线性支配性：

$$\max_{k\geq 2} |c_k| r^{k-1} < |c_1|.$$

注 *6.2*（球上的局部相似性）在线性支配条件下，对于 $x, y \in B(a,r)$，有

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |\phi'(a)|\,|x-y|.$$

因此，该映射在此球上是一个相似映射（Lipschitz 常数为 $|\phi'(a)|$）。这一推论依赖于线性支配；一般而言，高阶项可能改变局部的利普希茨行为。

注 *6.3*（内蕴性质）该条件是球的内蕴性质：它在仿射等距变换下保持不变（通过 $\sigma(z) = \alpha z + \beta$ 与 $|\alpha| = 1$的共轭），因此不依赖于中心的选择；参见第 8 节中的引理 8.9。

引理 6.4（精确性引理）如果 f在 $B(a, r)$上具有线性支配性，那么其像 $f(B(a, r)$恰好是球 $B(f(a) |f'(a)|r)$。该引理为注 *4.3*背后的证明层面机制。

证明 对于任意 $z \in B(a, r)$，令 $\delta = z - a$，其中 $|\delta| \leq r$。于是 $|f(z) - f(a)| = |\sum_{k\geq 1} c_k\delta^k|$。根据定义 6.1，对于 $k \geq 2$:

$$|c_k\delta^k| = |c_k||\delta|^{k-1}|\delta| \leq (|c_k|r^{k-1})|\delta| < |c_1||\delta|.$$

因此， $k = 1$ 项严格支配该和，而超度量等式给出 $|f(z)$ $f\ a\ | = |c_1\delta| = |c_1||z-a|$ $B\ f\ a\ \ |c_1|r$ $()$。这表明包含于 $(())$ 中。为证明满射性，固定 $w \in B(f(a)\ |c_1|r)$，并考虑映射 $T(z) = z - c_1^{-1}(f(z) - w)$。对于任意 $z,\ z' \in B(a,\ r)$，我们有

$$T(z) - T(z') = (z - z') - c_1^{-1}(f(z) - f(z')) = -c_1^{-1}\sum_{k\geq 2} c_k((z-a)^k - (z'-a)^k).$$

对于 $z\ z' \in B\ a\ r$ $|z-a|\ |z'-a| \le r$ $X^k - Y^k = X -$，(,)，我们有，。利用 $Y \sum X^j Y^{k-1-j}$ $|z-a\ ^k - z'-a\ ^k| \le |z-z'|r^{k-1}$ 恒等式 ( )，得到 ( ) ( )。因此，

$$|T(z) - T(z')| \le |c_1|^{-1}|z - z'| \max_{k\ge 2} |c_k| r^{k-1} = \theta|z - z'|,$$

其中 $\theta = |c_1|^{-1}$ 由线性支配性得到 $_{k\ge 2}\, |c_k| r^{k-1} < 1$。因此，$T$ 是严格压缩映射。由于 $|T(a)$ $- a| = |c_1|^{-1}|f(a) - w| \le r$，且 T 在 $B(a, r)$ 上是 θ- 利普希茨的，其中 $\theta < 1$，对于任意 $z \in B(a, r)$，我们有

$$|T(z) - a| \le \max\left(|T(z) - T(a)|,\ |T(a) - a|\right) \le \max(\theta|z - a|, r) \le r.$$

因此，T将 $B(a, r)$ 映射到自身。闭球 $B(a, r)$ 是完备的（因为 K 是完备的，而且超度量空间中的闭球也是完备的）。根据非阿基米德压缩映射原理（参见 [17]；其刚性解析表述见 [15]），[6] T有唯一的不动点 $z^* \in B(a, r)$，它满足 $f(z^*) = w$。□

6.2 稳健性定理

现在我们可以证明，精确性是上确界范数下的开性质。

引理 6.5（超度量球重合）在超度量域中，对于半径相同的球 r，我们有 $B\ (c, r) = B\ (c', r)$ 当且仅当 $|c - c'| \le r$。

证明 (⇒) 若 $B(c,\ r) = B(c',\ r)$，则 $c' \in B(c,\ r)$，因此 $|c - c'| \le r$。

(⇐) 若 $|c - c'| \le r$，则 $c' \in B(c, r)$。对于任意 $z \in B(c, r)$，我们有 $|z - c| \le r$；由超度量不等式，$|z-c'| \le \max(|z-c|, |c-c'|) \le r$，因此 $z \in B(c', r)$。于是 $B(c, r) \subseteq B(c', r)$。同理，$B(c', r) \subseteq B(c, r)$，因此 $B(c, r) = B(c', r)$。□

定理 6.6（稳健精确性）设 $(\mathcal{B}\ \tau,\ \mathcal{B}')$ 是一个球系。设 ψ 为定理 5.2中的分段仿射解释器，其中 $|u_i| = t_{\tau(i)}/r_i$。设 ε 满足

$$\varepsilon < \min_i |u_i| r_i = \min_i t_{\tau(i)}.$$

那么，任意有理函数 ϕ 只要满足 $\|\phi - \psi\|_U < \varepsilon$，就是 τ的精确解释器。

证明 固定 i 并考察 ϕ 在 B_i上的作用。根据引理 3.5:

1. $|\phi'(a_i) - u_i| \le \varepsilon/r_i < |u_i|$。根据超度量三角不等式，$|\phi'(a_i)| = |u_i|$。
2. For $k \ge 2$, $|c_k(\phi)| \le \varepsilon/r_i^k$, so $|c_k(\phi)| r_i^{k-1} \le \varepsilon/r_i < |u_i| = |\phi'(a_i)|$.

因此 ϕ 在 B_i 上满足线性支配。根据引理 64，.

$$\phi(B_i) = B(\phi(a_i), |\phi'(a_i)|r_i) = B(\phi(a_i), t_{\tau(i)}).$$

由于 $\psi(a_i) = b_{\tau(i)}$ 以及 $\|\phi - \psi\|_U < \varepsilon < t_{\tau(i)}$，我们得到

$$|\phi(a_i) - b_{\tau(i)}| = |\phi(a_i) - \psi(a_i)| \le \|\phi - \psi\|_U < \varepsilon < t_{\tau(i)}.$$

特别地，$|\phi(a_i) - b_{\tau(i)}| \le t_{\tau(i)}$ 根据引理 6 5，我们有

$$B(\phi(a_i), t_{\tau(i)}) = B(b_{\tau(i)}, t_{\tau(i)}) = B'_{\tau(i)}.$$

因此 $\phi(B_i) = B'_{\tau(i)}$。 □

[6] 在阿基米德情形下，与之对应的结果是巴拿赫不动点定理。

推论 6.7（乘子稳定性）设 ϕ 是定理 6.6中的一个精确解释器。若 x是 F 的不动点（因此 $\tau(i) = i$），且 $\alpha \in B_i$ 是 ϕ的不动点，则 p-adic 乘子$\lambda = \phi'(\alpha)$ 满足：

$$|\lambda| = |u_i| = \frac{t_i}{r_i}.$$

特别地，不动点 α 的稳定性类型（压缩的、扩张的或中性型）仅由仿射模型 ψ 决定，并且在 ε-扰动下保持不变。

证明 由定理 6.6 中已证明的线性支配，我们有 $|\phi'(z)| = |u_i|$ 对所有 $z \in B_i$。由于 $\alpha \in B_i$，$|\phi'(\alpha)| = |u_i|$。□

推论 6.8（通过带插值的龙格定理存在精确解释器）对任意球系 (B, τ, B')，在 $U = \bigcup B_i$的条件下，存在有理函数 $\phi \in K(z)$，它精确解释 τ（即 $\phi(B_i) = B'_{\tau(i)}$ 对所有 i）。

证明 设 ψ为定理 5.2 中的分段仿射解释器，并设 $S = \{a_1, \dots, a_N\}$为中心集合。选取 $\varepsilon < \min_i t_{\tau(i)}$。由引理 5.7，存在 $\phi \in K(z)$使得$\|\phi - \psi\|_U < \varepsilon$，因此对所有 i有 $|\phi(a_i) - \psi(a_i)| < \varepsilon$。由于按构造有 $\psi(a_i) = b_{\tau(i)}$，故对所有 i有 $|\phi(a_i) - b_{\tau(i)}| < \varepsilon \le t_{\tau(i)}$。由定理 6.6，$\phi$是 τ的精确解释器。□

注 *6.9* 放宽后的条件 $|\phi(a_i) - b_{\tau(i)}| \le t_{\tau(i)}$在定理 6.6 中比要求精确相等更为自然。推论 6.8 表明，该条件可经由引理 5.7实现，后者在有限多个点处给出控制（$|\phi(^{s}j) - \psi(^{s}j)| \le \varepsilon$），而无需精确插值。超度量性质保证：若同半径的球的中心位于该半径之内，则这些球重合。

7 算术扩张：Witt 向量与拟有限相容性

7.1 动机：超越素数大小的字母表

到目前为止，我们假定字母表的大小为 p，从而导出 $\mathbb{Z}_p$ 上的动力学。然而，在大多数离散系统中，字母表大小 q 并不一定是素数。我们现在加以推广，证明柱球层级等价于 Witt 向量环中同余类 的层级。

7.2 从多状态字母表到 Witt 圆柱

固定一个素数 p 和 $q = p^k$。设 $K/\mathbb{Q}_p$ 是次数为 k 的非分歧扩张，其赋值环为 $\mathcal{O}_K$，剩余域为 $\kappa \cong \mathbb{F}_q$。局部域论中的一个基本结构性结果（参见 Serre [20] 和 Hazewinkel [21]）是同一化 $\mathcal{O}_K \cong W(\kappa)$（非分歧情形下的 Witt 同一化）：

$$\mathcal{O}_K \;\cong\; W(\kappa), \tag{2}$$

其中 $W(\kappa)$ 是 κ上的 p-典型 Witt 向量环。模 p^N 截断对应于长度为 N的截断 Witt 向量环：

$$\mathcal{O}_K/p^N\mathcal{O}_K \;\cong\; W_N(\kappa). \tag{3}$$

注 *7.1*（底域约定）本节中，我们使用两个相关的域：

- K_0 表示 $\mathbb{Q}_p$ 的最大非分歧完备扩张，其剩余域为 $\kappa = \mathbb{F}_p$，整数环为$\mathcal{O}_{K_0} \cong W(\kappa)$。在本文使用固定的同一化$\mathcal{O}_{K_0} \cong W(\kappa)$（非分歧基域为 $K_0/\mathbb{Q}_p$）下的 Witt 向量描述的部分中，我们通常取 $K = K_0$。

- 在第5节中，我们要求 K 为代数闭域且值群可除，因此我们在 $K = \mathbb{C}_p$中进行讨论，并固定一个嵌入 $K_0 \hookrightarrow \mathbb{C}_p$。这给出嵌入$\mathcal{O}_{K_0} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$（不是同构）。

- 截断映射 $\pi_N\colon \mathcal{O}_{K_0} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{K_0}/p^N\mathcal{O}_{K_0} \cong W_N(\kappa)$ 在非分歧情形下就是约化。在 $K = \mathbb{C}_p$（第5节）中工作时，我们通过固定的嵌入，将$\mathcal{O}_{K_0}$ 视为$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ 的指定子环，并且只有在将 π_N 限制到$\mathcal{O}_{K_0}$ 中的元素后才应用它（特别是限制到位于 Witt 圆柱中的点）。

全局约定：从现在起，我们固定一个嵌入 $K_0 \hookrightarrow \mathbb{C}_p$，并采用非分歧扩张 $K_0/\mathbb{Q}_p$（其中 $\kappa = \mathbb{F}_p$）的固定同一化 $\mathsf{O}_{K_0} \cong W(\kappa)$。对于 $x \in W_N(\kappa)$，Witt 圆柱 $\mathbb{B}_N(x) = \pi_N^{-1}(x)$ 是 O_{K_0} 中深度为 N 的同余球，并通过固定嵌入自然地视为 $\mathbb{C}_p$ 的子集。特别地，虽然第 5 节中的解析构造是在 $\mathbb{C}_p$ 上进行的，但所有圆柱约束都施加在 $\mathsf{O}_{K_0} \subset \mathbb{C}_p$ 的子集上；不会对 $\mathsf{O}_{\mathbb{C}_p}$ 使用约化映射。K_0 与 $K = \mathbb{C}_p$ 之间的关系由交换图概括如下

$$\begin{array}{ccc} K_0 & \hookrightarrow & \mathbb{C}_p \\ \\ \mathcal{O}_{K_0} & \hookrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_N} & & \\ W_N(\kappa) & & \end{array}$$

其中，水平箭头由固定的域嵌入 $K_0 \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ 诱导，而本文中唯一使用的截断映射 π_N 是 $\mathsf{O}_{\mathcal{O}_{K_0}}$ 上的约化（等价地，是 $W(\kappa)$ 上的约化）。

对于每个构型 $x \in W_N(\kappa)$，我们定义相应的 *Witt* 圆柱球$\mathbb{B}_N(x) := \pi_N^{-1}(x)$，它将第 2 节中定义的状态柱集推广到非素数大小的字母表。在特殊情形 $k = 1$（其中 $q = p$）下，我们有 $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}_p$，这些 Witt 圆柱与方程（1）中定义的状态柱集 B_x 一致。这些柱集构成 $\mathcal{O}_K$ 在分辨深度 N下的一个划分。

注 *7.2*（非分歧与分歧）球语义和解释（第 4 节）适用于任意完备非阿基米德域；此处使用的 Witt 圆柱编码和 Teichmüller 代表元是为 非分歧 扩张而设置的。对于分歧扩张，剩余环通常不具有 $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ 的形式；分歧情形留待以后讨论（注 7.24）。

7.3 相容塔与逆有限动力学

离散规则 f_N 往往只是某种机制在更高分辨率下运行时的截断。这可通过相容塔加以形式化。

定义 7.3（相容塔）若映射族 $\{f_N\colon W_N(\kappa) \to W_N(\kappa)\}_{N\ge 1}$ 满足：对所有 $M \le N$，截断映射 $\tau_{N,M}\colon W_N(\kappa) \to W_M(\kappa)$ 满足 $\tau_{N,M}\circ f_N = f_M \circ \tau_{N,M}$，则称其相容。

定理 7.4（拟有限逆极限）根据逆极限的泛性质，*[22]*，任何相容塔 $\{f_N\}$ 都会诱导出唯一的连续映射 $f\colon \mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_K$ 满足相容条件：

$$\pi_N \circ \widehat{f} = f_N \circ \pi_N \quad \textit{for all } N \ge 1. \tag{4}$$

这使我们能够将逆极限视为该动力系统的定义域：离散的 f_N 是全局连续动力学的有限分辨率影像 f，其定义在非分歧基底 $\mathcal{O}_{K_0} \cong W(\kappa)$（见注释7.1）。有理映射 ϕ 解释每个 f_N 并带有包含（引理7.11）会诱导出同一个极限映射 f；在这个意义上，ϕ 它实现了整体动力学。

7.4 垂直细化：精确周期的亨泽尔提升

动态中国剩余定理提供了离散动力学在互素模数上的横向分解。与之互补的现象是沿逆系统 $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_{n\ge 1}$ 进行垂直细化，该系统对应于概形极限 $\mathbb{Z}_p$。沿此方向，在非退化条件 $(\phi^{\circ m})'(\bar{x}) \neq 1$ 下，可以将精确周期环从剩余域提升到 $\mathbb{Z}_p$（定理 7.6）。使约化与复合相容的一个充分条件是：ϕ 由泰特代数 $\mathrm{O}_K z$ 中的严格收敛幂级数给出（或者更一般地，由具有整系数的解析函数给出，从而逐系数约化定义了 ϕ）；以下引理使这一条件易于检验。

引理 7.5（与复合相容的约化）设 $\mathcal{O}_K$ 是完备离散赋值域 K 的赋值环，其剩余域为 κ。逐系数约化是从泰特代数 $\mathcal{O}_K\langle z\rangle$（系数属于 $\mathcal{O}_K$ 的严格收敛幂级数）到 $\kappa[z]$ 的环同态；因此，对于 $\phi, \psi \in \mathcal{O}_K\langle z\rangle$，有 $\widetilde{(\phi \circ \psi)} = \widetilde{\phi} \circ \widetilde{\psi}$（从而对所有 $m \ge 1$ 也成立）。刚性解析情形可参见例如 *[15]* 或 *[17]*。

定理 7.6（精确周期点的亨泽尔提升）设 K 是一个完备离散赋值的非阿基米德域，其赋值环为 $\mathcal{O}_K$，极大理想为 $\mathfrak{m}$，剩余域为 $\kappa = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}$。设 $\phi\colon \mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_K$ 是由 $\mathcal{O}_K\langle z\rangle$ 中的幂级数诱导的解析映射（因此约化 $\widetilde{\phi}\colon \kappa \to \kappa$ 有定义，且引理 *7.5* 适用）。固定 $m \ge 1$，并假设 $\bar{x} \in \kappa$ 在 ϕ 作用下具有精确周期 m：

$$\widetilde{\phi}^{\circ m}(\bar{x}) = \bar{x}, \qquad \widetilde{\phi}^{\circ d}(\bar{x}) \neq \bar{x} \ \textit{for all } d \mid m,\ d < m.$$

此外，假设满足非退化条件

$$(\widetilde{\phi}^{\circ m})'(\bar{x}) \neq 1 \quad in\ \kappa.$$

（等价地， $\bar{x}$ 是 $\widetilde{F}(z) = \widetilde{\phi}^{\circ m}(z) - z$的单根，因为 $\widetilde{F}'(\bar{x}) = (\widetilde{\phi}^{\circ m})'(\bar{x}) - 1$。）于是，存在唯一的唯一 $x \in O_K$，其约化为 $\bar{x}$，且满足 $\phi^{\circ m}(x) = x$。此外， x 在 ϕ作用下具有精确 周期 m。

证明 定义 $F(z) = \phi^{\circ m}(z) - z$于$\mathsf{O}_K$上。由于 $\phi(\mathsf{O}_K) \subseteq \mathsf{O}_K$，我们有 $F(\mathsf{O}_K) \subseteq \mathsf{O}_K$，因此 F 约化为映射 $\widetilde{F}\colon \kappa \to \kappa$。由引理 7.5,

$$\widetilde{F}(\bar{z}) = \widetilde{\phi^{\circ m}}(\bar{z}) - \bar{z} = \widetilde{\phi}^{\circ m}(\bar{z}) - \bar{z}.$$

因此 $\widetilde{F}(\bar{x}) = 0$。

求导得 $F'(z) = (\phi^{\circ m})'(z) - 1$，故约化后，

$$\widetilde{F}'(\bar{x}) = (\widetilde{\phi}^{\circ m})'(\bar{x}) - 1 \neq 0$$

根据非退化假设。因此 $\bar{x}$ 是 $\widetilde{F}$的单根 。由适用于单根的经典亨泽尔引理（例如，参见 [15]或 [17]），存在唯一的 $x \in \mathcal{O}_K$，满足 x 模 $\mathfrak{m} = \bar{x}$ 且 $F(x) = 0$，即 $\phi^{\circ m}(x) = x$。

为证明周期恰好 为 m，假设对于某个真因子 $d \mid m$，有 $\phi^{\circ d}(x) = x$ $d < m$。模 $\mathfrak{m}$ 约化后得到 $\widetilde{\phi}^{\circ d}(\bar{x}) = \bar{x}$，这与精确周期的假设矛盾。因此，没有真因子 $d < m$ 满足 $\phi^{\circ d}(x) = x$，而 x 的周期为 m。□

注 7.7 （方程 $\phi^{\circ m}(x) = x$ 能保证和不能保证什么）方程 $\phi^{\circ m}(x) = x$ 只能说明 x 的最小周期整除 m。要得到精确性还需要额外条件。在定理 7.6 中，精确性继承自剩余类动力学：如果在上方存在更短的周期，那么约化后该周期仍然存在，这与 $\bar{x}$ 在 κ中的精确周期矛盾。

注 7.8 （退化情形）如果在 κ中$(\widetilde{\phi}^{\circ m})'(\bar{x}) = 1$，那么 $\bar{x}$ 不是 $\widetilde{F}$ 的单根，单根亨泽尔引理不适用。在这种退化情况下，提升可能不存在，也可能不唯一，而且周期结构可能在更高层分裂。要系统处理这一问题，需要进行超出本文范围的高阶分析。

注 7.9 （为何这不能同时提升所有循环）该定理是 局部的 （针对每个周期点或每个周期轨道），并且依赖于 $F(z) = \phi^{\circ m}(z) - z$ 在所选剩余类处满足单根条件。同时提升给定层级的所有周期点，通常需要额外的全局分离假设（例如球彼此分离，且提升之间不会发生碰撞）。因此，将完整塔实现为逆极限被留作一个研究方向（附录 A中的路径 2），而非定理的自动推论。

推论 7.10（ $\mathbb{Z}_p$中的循环塔与极限）设 $K = \mathbb{Q}_p$ 和 $\phi\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ 为解析函数。假设 $\bar{x} \in \mathbb{F}_p$ 对于某个 $m \geq 1$满足定理 7.6 的假设。那么存在唯一的序列 $(x_n)_{n\geq 1}$，满足 $x_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$，使得 $x_{n+1} \equiv x_n$ (模 p^n)， $\phi^{\circ m}(x_n) \equiv x_n$ (模 p^n)，且 $x_1 = \bar{x}$。极限 $x = \lim_n x_n \in \mathbb{Z}_p$ 存在，并且是提升 $\bar{x}$的精确周期为 m 的唯一周期点。

证明 在每一层应用定理 7.6 n：非退化条件确保 $F'(x) \in \mathbb{Z}_p^{\times}$在唯一提升处成立，因此迭代亨泽尔法（或牛顿–亨泽尔法）给出相容序列 (x_n) 及其在 $\mathbb{Z}_p$中的极限。 □

在第2–6节的解释器设定中，状态柱集（半径为 p^{-n}的球）在每个分辨率 $\mathbb{Z}_p$ 下构成划分 n；随着 $n \to \infty$ 这些球缩小为点。定理7.6和推论7.10 形式化了在垂直细化过程中精确周期结构得以保持的条件：在乘子非退化的情况下，一个剩余 m-周期轨道唯一地提升为 m中的一个 $\mathbb{Z}_p$-周期轨道。这些保证相当有限（每次只涉及一个周期轨道；排除退化情形），且论证逻辑自成一体。

7.5 语义作为同余控制

解释语义可以改写为关于商上诱导映射的条件。设 $f_N\colon W_N(\kappa) \to W_N(\kappa)$ 是一条离散规则，其中 $\pi_N\colon \mathcal{O}_K \to W_N(\kappa)$ 是模 p^N 的截断映射。

引理 7.11 (带包含与交换的解释等价性) 设 $\phi\colon \mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_K$ 是一个连续映射，且 $f_N\colon W_N(\kappa) \to W_N(\kappa)$ 是一条离散规则。那么，当且仅当 $\pi_N \circ \phi = f_N \circ \pi_N$ 在 $\mathcal{O}_K$ 上成立时，ϕ 含包含关系地解释 f_N。

证明 回忆一下，如果 ϕ f_N $x \in W_N$ κ ϕ $\mathbb{B}_N$ x $\subseteq$具有含包含关系的 $\mathbb{B}_N$ f_N x $\mathbb{B}_N$ x $= \pi_N^{-1}$ x 解释，则对于每个 ( )，都有 (( )) (( ))，其中 ( ) ( )。

($\Rightarrow$ ϕ f_N $z \in$ $_K$ $x = \pi_N$ z $z \in$) 假设具有含包含关系的解释。对于任意 $\mathcal{O}$，令 ( )，于 $\mathbb{B}_N$ x ϕ z $\in \mathbb{B}_N$ f_N x $= \pi_N^{-1}$ f_N x 是 ( )。根据含包含关系的解释，( ) (( )) (( ))，这意味着 $\pi_N(\phi(z)) = f_N\, x = f_N(\pi_N(z))$。由于 z 是任意的， $\pi_N \circ \phi = f_N \circ \pi_N$。

($\Leftarrow$) 假设 $\pi_N \circ \phi = f_N \circ \pi_N$。对于任意 $x \in W_N(\kappa)$ 和 $z \in \mathbb{B}_N(x)$，有 $\pi_N(z) = x$，因此 $\pi_N(\phi(z)) = f_N(\pi_N(z)) = f_N(x)$。这意味着 $\phi(z) \in \pi_N^{-1}(f_N(x)) = \mathbb{B}_N(f_N(x))$。由于 z 在 $\mathbb{B}_N(x)$ 中是任意的，我们得出 $\phi(\mathbb{B}_N(x)) \subseteq \mathbb{B}_N(f_N(x))$。□

注 7.12（语义作为同余）根据引理 7.11，第 4 节中的解释概念可改述如下：ϕ 解释 f_N，当且仅当对于每个 x，$\phi(\mathbb{B}_N(x)) \cap \mathbb{B}_N(f_N(x)) \neq \varnothing$；根据超度量嵌套性质，对于每个 x，该柱集上的解释类型分别为压缩的、中性型或扩张的，具体取决于 $\phi(\mathbb{B}_N($ $\mathbb{B}_N$ f_N x $\mathbb{B}_N$ f_N x $\subsetneq \phi$ $\mathbb{B}_N$ x $))$ $\subsetneq \mathbb{B}_N(f_N($ $))$、 $\phi(\mathbb{B}_N($ $)) ($ $))$，或 (( )) (( ))。

1. **含包含关系的解释：** ϕ 解释 f_N 含包含关系（在每个柱集上均为压缩型或中性型）当且仅当 $\pi_N \circ \phi = f_N \circ \pi_N$ 在$\mathcal{O}_{K_0}$。2. **精确解释：** ϕ 精确地解释 f_N （在每个柱集上均为中性型）当且仅当 ϕ 解释 f_N 时含包含关系，且在每个柱集上均为满射。满射性由线性支配准则保证（见第6节）：

$$\max_{k \geq 2} |c_k| r^{k-1} < |c_1|. \tag{5}$$

7.6 通过动态中国剩余定理进行全局分解

设 $m = \prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i}$为字母表大小的素因数分解，并令 $R_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$和 $R_i = \mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z}$。经典中国剩余定理给出一个环同构$\Theta$ ： $R_m \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{s} R_i$。所谓动态中国剩余定理，是指以下内容：对于一个保同余系统 F ： $R_m \to R_m$，其诱导的离散动力学（等价地，F的函数图）经由 Θ 分解为分量动力学 F_i ： $R_i \to R_i$；这一分解正是在下文构造的乘积相空间中提升的分解。

任意映射 f ： $R_m \to R_m$ 不一定尊重中国剩余定理分解，还可能将各个素数幂分量纠缠在一起（例如，任意混合不同素数模数下剩余类的查找表不一定保持同余）。因此，我们将讨论范围限制为与模m的每个因数约化相容的映射；特别地，这一类映射包含所有由多项式诱导的映射（引理 7.14）。这类映射称为保持同余的映射；DCRT 适用于这类映射，但并非适用于 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$上的所有离散动力系统。

定义 7.13（保同余映射）映射 f ： $R_m \to R_m$ 若对每个因数 $d \mid m$ 以及所有 $x,\ y \in R_m$，均满足，则称其为保持同余的

$$x \equiv y \pmod{d} \quad \Rightarrow \quad f(x) \equiv f(y) \pmod{d}.$$

我们用 $\mathrm{End}_{\mathrm{CP}}(R_m)$ 表示 R_m 上所有保持同余的自同态构成的集合。

等价地说，保持同余性意味着 f 可经由对 m 的每个因数取模的约化进行分解。对每个因数 $d \mid m$，令

$$\pi_d : R_m \longrightarrow R_d = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

记约化映射 π_d。当且仅当对每个$d \mid m$，都存在一个（必然唯一的）映射 f，使得

$$f_d : R_d \longrightarrow R_d$$

使得

$$\pi_d \circ f \ = \ f_d \circ \pi_d.$$

特别地，当 $m = \prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i}$和 $\Theta : R_m \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{s} R_i$ 是中国剩余定理同构，且 $R_i = \mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z}$时，记 pr_i 为到第 i 个因子的投影，并令

$$\rho_i := \mathrm{pr}_i \circ \Theta : R_m \longrightarrow R_i.$$

若 f 保持同余，则对每个 i，按以下规则

$$f_i(\rho_i(x)) := \rho_i(f(x))$$

定义良好，并得到一个映射 $f_i : R_i \to R_i$; 此外，

$$f \ = \ \Theta^{-1} \circ (f_1 \times \cdots \times f_s) \circ \Theta.$$

引理 7.14 (多项式映射保持同余) 每个多项式 $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ 都会通过 $f(x) = P(x)$ 模 m诱导一个保同余映射 $f\colon R_m \to R_m$。

证明 固定一个因数 $d \mid m$。如果 $x \equiv y \pmod{d}$，那么 $x - y \in dR_m$，因此

$$x^k - y^k = (x-y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + y^{k-1}) \in dR_m$$

对每个 $k \geq 1$ 都成立，所以 $x^k \equiv y^k \pmod{d}$。将 $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ 写成 $a_k \in \mathbb{Z}$，我们得到

$$P(x) - P(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x^k - y^k) \in dR_m,$$

因此 $P(x) \equiv P(y) \pmod{d}$。所以诱导映射 $f(x) = P(x) \bmod m$ 是保同余的。□

定义 7.15 (函数图的乘积) 对于函数图 $G_{f_1} = (X_1, E_1)$ 和 $G_{f_2} = (X_2, E_2)$，它们的直积 $G_{f_1} \times G_{f_2}$ 是一个顶点集为 $X_1 \times X_2$、边为 $((x_1, x_2), (f_1(x_1)\ f_2(x_2)))$（对所有 $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$）的函数图。

引理 7.16 (中国剩余定理组装保持同余保持性) 设 $m = \prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i}$是互异素数，并记 和 。令 : 为中国剩余同构。假设对每个 ， End() ， 其中“保持同余”意为：对每个因数 $d_i \mid p_i^{k_i}$，

$$x_i \equiv y_i \pmod{d_i} \quad \Longrightarrow \quad f_i(x_i) \equiv f_i(y_i) \pmod{d_i}.$$

定义 $f : R_m \to R_m$ 为

$$f := \Theta^{-1} \circ \left(\prod_{i=1}^{s} f_i \right) \circ \Theta.$$

则 $f \in \mathrm{End}^{\mathrm{cp}}(R_m)$，即对每个因数 $d \mid m$，

$$x \equiv y \pmod{d} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \equiv f(y) \pmod{d}.$$

证明 设 $d \mid m$，并记 $d = \prod_{i=1}^{s} p_i^{e_i}$，其中 $0 \leq e_i \leq k_i$。在 Θ 下，有如下等价关系

$$x \equiv y \pmod{d} \quad \Longleftrightarrow \quad x_i \equiv y_i \pmod{p_i^{e_i}} \text{ for all } i.$$

根据假设，每个 f_i 都保持模 $p_i^{e_i}$ 的同余，因此对所有 i，$f_i(x_i) \equiv f_i(y_i) \pmod{p_i^{e_i}}$。应用 Θ^{-1}，得到 $f(x) \equiv f(y) \pmod{d}$。□

注 *7.17* （记号约定）为避免与 Witt 截断深度混淆，我们用 ℓ （或 N）表示 $W_\ell(\kappa)$，用 m 表示中国剩余定理模数 $R_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$。

定理 7.18 （动态中国剩余定理）设 $\mathrm{End}^{\mathrm{cp}}(R_m)$ 是 R_m （见定义 *7.13*）上保持同余的自态射集合。存在一个双射 $\mathrm{End}^{\mathrm{cp}}(R_m) \cong \prod_{i=1}^{s} \mathrm{End}^{\mathrm{cp}}(R_i)$，由 Θ诱导。对于任意这样的 f，其函数图 G_f 都同构于其各分量的函数图的直积：

$$G_f \cong G_{f_1} \times G_{f_2} \times \cdots \times G_{f_s}.$$

证明 设 $f \in \mathrm{End}_{\mathrm{CP}}(R_m)$。对于每个 i，映射 f 诱导出一个定义良好的映射 $f_i : R_i \to R_i$，其定义为 $f_i(x \pmod{p_i^{k_i}}) = f(x) \pmod{p_i^{k_i}}$。保持同余性质（结合$d = p_i^{k_i}$）保证了 f_i 不依赖于代表元 $x \in R_m$的选取，并且 f_i 本身在 R_i上也保持同余。中国剩余定理保证 f由元组 $(f_1, \ldots, f_s)$ 唯一确定。

反过来，根据引理 7.16，任意一个由分量上的$(f_1, \ldots, f_s)$ 个保持同余映射组成的元组，都可通过 R_m 定义 Θ^{-1}，从而得到一个 R_m 上的保同余映射。

对于图同构，由于在 Θ 下，$f(x)$ 在乘积坐标中对应于 $(f_1(x_1), \ldots, f_s(x_s))$，因此 G_f 中的转移 $(x, f(x))$ 对应于每个 G_{f_i} 中转移 $(x_i, f_i(x_i))$ 的乘积。这就确立了定义 7.15 中所定义的同构 $G_f \cong G_{f_1} \times \cdots \times G_{f_s}$。□

例 *7.19*（非同余保持映射）并非每个映射 $f : R_m \to R_m$ 都是保持同余的。例如，考虑 $m = 6 = 2 \cdot 3$，并将 $R_6 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 与标准代表元集合 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 视为相同。定义映射 $f : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$，使得

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \pmod 6 & \text{if } x \in \{0, 1, 2\}, \\ x + 2 \pmod 6 & \text{if } x \in \{3, 4, 5\}. \end{cases}$$

于是 $0 \equiv 3 \pmod 3$ 但 $f(0) = 1$ 和 $f(3) = 5$ 满足 $1 \not\equiv 5 \pmod 3$。因此 f 不是模 3 保同余映射，定理 7.18 不适用：函数图G_f 不能按照定义 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 的意义分解为图在 7.15上的乘积。

具体而言，函数图 G_f 包含一个 4-循环

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 1,$$

其暂态顶点为 $0 \to 1$ 和 $4 \to 0$。这说明同余保持性是乘积分解的必要条件。

注 *7.20* (DCRT 的范围) 保同余映射这一类范围广泛：它包含所有多项式诱导映射（引理 7.14）以及许多实践中使用的基于规则的系统。在$\mathrm{End}(R_m)$ 中量化这一类映射的普遍程度（例如，以全部自同态中的比例表示，或依据自然测度计算），留待今后研究。

引理 7.21 (作为约化纤维的柱集) 设 $\mathcal{O}$ 为以 p 为一致化元的完备离散赋值环，并固定 $k \geq 1$。设 $R = \mathcal{O}/p^k\mathcal{O}$，并令 $\pi^{(k)} : \mathcal{O} \to R$ 为商映射（深度为 k 处的约化）。对每个 $x \in R$，定义柱集（闭球）$B_x := (\pi^{(k)})^{-1}(x)$。令 $\phi : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ 为任意映射，$F : R \to R$ 为任意映射。以下条件等价：

1. 几何包含：$\phi(\mathcal{B}_x) \subseteq \mathcal{B}_{F(x)}$ 对所有 $x \in R$。
2. 代数交换性：$\pi^{(k)} \circ \phi = F \circ \pi^{(k)}$ 作为映射 $\mathcal{O} \to R$。

证明 (2) $\Rightarrow$ (1)：若 $z \in \mathcal{B}_x$，则 $\pi^{(k)}(z) = x$。由 (2)，$\pi^{(k)}(\phi(z)) = F(\pi^{(k)}(z)) = F(x)$，因此$\phi(z) \in (\pi^{(k)})^{-1}(F(x)) = \mathcal{B}_{F(x)}$。

(1) $\Rightarrow$ (2)：固定 $a \in \mathcal{O}$ 并设定 $x = \pi^{(k)}(a)$。于是 $a \in \mathcal{B}_x$，因此由 (1)，$\phi(a) \in \mathcal{B}_{F(x)}$，即 $\pi^{(k)}(\phi(a)) = F(x) = F(\pi^{(k)}(a))$。□

这种等价关系的维特环表述见引理 7.11 （本节前文已陈述），其中 $\mathcal{O} \simeq W(\kappa)$ 且柱集是截断纤维 $\mathbb{B}_N(x)$。

由引理 7.21可知，当柱集定义为深度为k 的商映射的纤维时，含包含关系的解释（球像包含于目标柱集）等价于约化图交换。下述命题将复合字母表的全局解释器构造形式化为局部解释器的乘积。

命题 7.22 (中国剩余定理乘积实现**)** 设 $m = \prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i}$为模数的素因数分解。令 $R_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 且 $R_i = \mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z}$。设 $\Theta\colon R_m \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{s} R_i$ 为中国剩余同构。假设 $F\colon R_m \to R_m$ 按定理 7.18的含义保持同余，因此可分解为分量映射 $F_i\colon R_i \to R_i$：

$$F \;=\; \Theta^{-1} \circ (F_1 \times \cdots \times F_s) \circ \Theta.$$

对每个 i，取 $K_i = \mathbb{Q}_{p_i}$ 和 $O_i = \mathbb{Z}_{p_i}$ （因此分歧指数为 $e_i = 1$）；于是商映射 $\pi^{(k_i)}{}_i : \mathbb{Z}_{p_i} \to R_i = \mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z}$ 导出识别 $\mathbb{Z}_{p_i}/p_i^{k_i}\mathbb{Z}_{p_i} \cong R_i$。（分歧情形超出本文范围；参见注记 7.24。）令 $\pi^{(k_i)}{}_i : \mathbb{Z}_{p_i} \to R_i$ 表示深度为 k_i 的约化映射。（交换方形无需解析性假设；连续性／解析性仅与别处讨论的非阿基米德动力学有关。）假设存在映射（有理或解析） $\phi_i : \mathbb{Z}_{p_i} \to \mathbb{Z}_{p_i}$，使得

$$\pi_i^{(k_i)} \circ \phi_i \;=\; F_i \circ \pi_i^{(k_i)} \quad on\ \mathbb{Z}_{p_i}.$$

定义乘积相空间$\mathbf{\Omega} := \prod_{i=1}^{s} \mathbb{Z}_{p_i}$、乘积映射 $\Phi := \prod_{i=1}^{s} \phi_i :\ \mathbf{\Omega} \to \mathbf{\Omega}$，以及诱导的全局约化

$$\Pi := \Theta^{-1} \circ (\pi_1^{(k_1)} \times \cdots \times \pi_s^{(k_s)}) : \mathbf{\Omega} \to R_m.$$

于是 $\Pi \circ \Phi = F \circ \Pi$；也就是说，$\Phi$ 通过包含在$\mathbf{\Omega}$上解释 F。

证明 设 $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_s) \in \mathbf{\Omega}$。则

$$\Pi(\Phi(\boldsymbol{z})) = \Theta^{-1}\big(\pi_1^{(k_1)}(\phi_1(z_1)), \ldots, \pi_s^{(k_s)}(\phi_s(z_s))\big).$$

根据局部交换性 $\pi^{(k_i)}{}_i \circ \phi_i = F_i \circ \pi^{(k_i)}{}_i$，这等于$\Theta^{-1}(F_1(\pi^{(k_1)}{}_1(z_1)), \ldots, F_s(\pi^{(k_s)}{}_s(z_s)))$。由于 $F = \Theta^{-1} \circ (\prod_i F_i) \circ \Theta$，右侧为 $F(\Pi(\boldsymbol{z}))$。□

备注 7.23 （合数模数不存在单一局部域/局部环）如果 m 至少有两个互异素数，那么 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 不是局部环，而局部环$\mathcal{O}/\mathfrak{m}^k$ 的每个商$(\mathcal{O}\ \mathfrak{m})$ 都是局部的。因此 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 不可能具有$\mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K^k$的形式。对于离散动力学的乘积分解（DCRT），相应的相空间为 $\prod_i \mathbb{Z}_{p_i}$ （命题7.22）。

注 7.24 （分歧扩张：不在范围内）如果 $K_i/\mathbb{Q}_{p_i}$ 是分歧的（$e_i > 1$），那么 p_i 不是一致化元：极大理想是 $\mathfrak{m}_i = (\pi_i)$，其中 $|\pi_i| = p_i^{-1/e_i}$；而商环 $\mathcal{O}_{K_i}/\mathfrak{m}_i^k$并非具有规范的 $\mathbb{Z}/p_i^k\mathbb{Z}$。特别地，$|\mathcal{O}_{K_i}/\mathfrak{m}_i^k| = |\kappa_i|^k = p_i^{f_i k}$，这已经不同于$|\mathbb{Z}/p_i^k\mathbb{Z}| = p_i^k$ （当 $f_i > 1$时）；即使 $f_i = 1$，这种识别也不是规范的，并且

相关的约化是模 $\mathfrak{m}_i^k$，而不是模 p_i^k。定理 7.18 是在 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 上通过经典中国剩余定理表述的，并依赖于其分解；扩展到分歧局部商将需要不同的表述（例如，适当的局部商以及经过修改的分解假设）。这超出了本文的范围。

7.7 两种正交分解：水平与垂直

我们的构造将有限动力系统中两个彼此独立的复杂性来源区分开来。

水平（中国剩余定理）分解 涉及将复合字母表大小拆分为$m = \prod_i p_i^{k_i}$素数幂分量。命题 7.22 表明，在带包含的解释器层面（引理 7.21），这一分解对应的环境解析对象是乘积 $\prod_i \mathbb{Z}_{p_i}$，而全局离散映射由各分量逐一诱导。第 9.6 节中的例子展示了这一点在离散层面的表现。

垂直（深度/次数）细化涉及在固定素数内提高分辨率。从 p 到 p^k 的过渡，对应于由 $\pi^{(k)}$ 定义的更深层同余柱（引理 7.21）；而将 $\mathbb{F}_p$ 替换为 $\mathbb{F}_{p^f}$ 则对应于由 Witt 向量 $W(\mathbb{F}_{p^f})$（第 7节；[20, 21]）所建模的非分歧次数f提升。满足非退化条件时，精确周期环会沿塔提升（定理 7.6、推论 7.10）；参见推论 7.25 和附录 A。这两个方向彼此正交：中国剩余定理决定素数分解；维特理论与深度k 约化决定 p-进精度。

7.8 Pro-p 塔与示例

沿固定素数通过 $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_{n\geq 1}$ 进行细化，得到相容塔及其在 $\mathbb{Z}_p$中的极限。塔与 1-利普希茨动力学之间的联系总结如下推论；关于 精确 周期轨道的提升（Hensel），请参阅第7.4 节（定理 7.6、推论 7.10、注记 7.7–7.8）。

推论 *7.25*（在 $\mathbb{Z}_p$ 上的相容塔 $\Leftrightarrow$ 1-利普希茨）令 $R_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 和 $\pi_{n+1,n} : R_{n+1} \to R_n$ 为约化映射。映射族 $f_n : R_n \to R_n$ 相容，当且仅当对所有 $n \geq 1$，有 $\pi_{n+1,n} \circ f_{n+1} = f_n \circ \pi_{n+1,n}$。根据 $\mathbb{Z}_p \cong$ 极限$\leftarrow\!\!\!

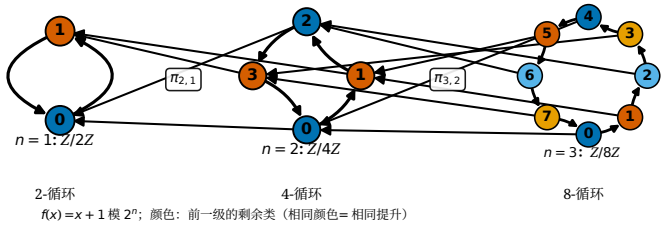

图 1 反例 $f(x) = x + 1$ 模 2^n 下的 $n = 1,\ 2,\ 3$：周期增长（2-循环、4-循环、8-循环）。每条边都是一支单独的箭头；2-循环画成两条曲率相同的弧线，以避免重叠。乘子 $\lambda = f'(x) = 1$（抛物型），因此 Hensel 非退化性不成立，循环长度也不保持不变。垂直方向：约化（向下）。

动力学到唯一的1-Lipschitz 映射 f 在 $\mathbb{Z}_2$ 上诱导该塔（推论7.25）。循环和瞬态出现在每一层级；在定理 7.6 的非退化条件下，周期点（例如在较低层级可见的2-循环）连贯地提升到$\mathbb{Z}_2$ 经由Hensel。

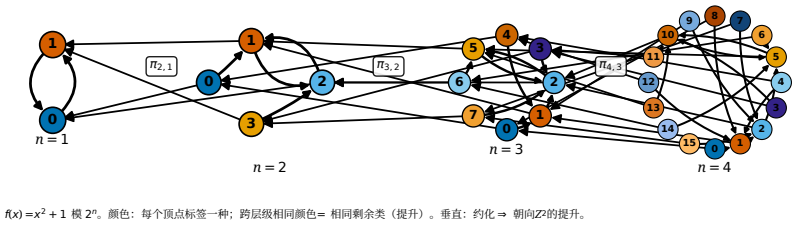

图 2 $f(x)$ 模 2^n 下 $n = 1$、2、3、4 的函数图的四个相容层级。每个面板显示对应模数下的有向图（箭头：$x \mapsto f(x)$）。颜色：每种顶点标签对应一种颜色；不同面板中的相同颜色表示相同的剩余类（提升：层级 n 的顶点投影到层级 $n-1$ 上颜色相同的顶点）。沿着塔向上读取，可编码朝向 $\mathbb{Z}_2$ 上极限映射的提升；交换性 $\pi_{n+1,n} \circ f_{n+1} = f_n \circ \pi_{n+1,n}$ 成立。在定理 7.6 的非退化条件下，周期点提升至 $\mathbb{Z}_2$。

同样的图景可以推广到一般的有限剩余（或 Stone）情形。设 $X = \varprojlim X_n$ 是有限集 X_n 的逆极限，且粘合映射 $\pi_{n+1,n}\colon X_{n+1} \to X_n$ 均为满射。若映射族 $f_n\colon X_n \to X_n$ 满足相容条件 $\pi_{n+1,n} \circ f_{n+1} = f_n \circ \pi_{n+1,n}$，对所有 n 均成立，则存在唯一映射 $f\colon X \to X$，使得其在“第 n 层”上的限制与 f_n 一致（即，动力系统 (X_n, f_n) 的射影系统提升为极限 X 上的动力学 f）。在 $\mathbb{Z}_p$ 中，每一层 n 都由半径为 p^{-n} 的球所构成的划分编码，相容性则体现为球的几何嵌套。当单个有理映射 ϕ（例如在 $\mathbb{Z}_p$ 或 O_K 上）在相应的柱集上解释每个有限层 n 的 f_n（引理 7.11）时，ϕ 会诱导出极限映射 f，此时可以说 ϕ 在极限上解释了 f。反之，若只有一座映射塔 ϕ_n（其中每个映射都解释第 n 层的有限动力系统），要得到一个极限解释器，就需要相容性选择原理；

产生这样相容的 ϕ_n 是一个有趣的研究方向，而 Runge/ε-gluing 并不保证每一层都存在。附录 A 对从球层级解释到逐点（半径为零）解释的过程进行了形式化。

7.9 约化理论与约化-逻辑联系

约定（严格良约化 $=$）。
这里，**“良约化”**始终指严格良约化（保次数约化）。参见备注7.27 和例子7.28；文献中的部分资料所采用的术语有所不同。

Witt 向量的使用使我们能够将解释器与有理映射的约化理论 [11]联系起来。这在$\mathcal{O}_K$ 上的连续动力学与剩余域 κ上的离散动力学之间提供了一座形式化桥梁。

回顾一下，有理映射 $\phi \in K(z)$ 具有良约化（此处指严格的，即保次数的），如果它可以延拓为态射 ϕ： 从$\mathcal{O}_K$上的射影直线出发，并在剩余域上诱导出良定义的映射 $\phi : \mathbb{P}^1_\kappa \to \mathbb{P}^1_\kappa$。这一概念在算术动力学 [11, 23]和算术几何 [24]中是标准的；在 [11], 的意义下，良约化意味着在整数点轨迹上具有一致的不扩张行为，而我们在此将其用作一种选择原理。

引理 7.26 (深度 1 的约化—逻辑联系) 设 $\phi \in K(z)$ 是一个具有严格良约化的有理映射（即，约化映射 ϕ 的次数与 ϕ相同），并设 $F\colon \kappa \to \kappa$ 是一个离散规则。令 $F(\infty) = \infty$，将 F 扩展到 $\mathbb{P}^1(\kappa)$。那么， ϕ 在深度 $N = 1$ （即剩余域 κ上）解释 F 且满足包含，当且仅当约化映射 ϕ 与映射 F 在 $\mathbb{P}^1(\kappa)$ 上一致。

证明 根据引理 7.11， ϕ 在深度 1 解释 F 且满足包含，当且仅当在 O_K 上 $\pi_1 \circ \phi = F \circ \pi_1$，其中 $\pi_1 : \mathrm{O}_K \to \kappa$ 是模 p 的约化映射。由于 ϕ 具有严格良约化，它保持赋值环 O_K，并在 κ 上诱导出次数相同的 ϕ。条件 $\pi_1 \circ \phi = F \circ \pi_1$ 等价于在 κ（仿射直线）上 $\phi = F$。由于根据定义， ϕ 是 $\mathbb{P}^1(\kappa)$ 上的有理映射，且 $F(\infty) = \infty$，这种一致性可扩展到整个 $\mathbb{P}^1(\kappa)$。□

注 *7.27* （良约化约定）我们用“良约化”表示严格良约化（保次数约化），与 Benedetto 一致 [11]。在部分文献中，“良约化”用于任意态射延拓（即使次数在特殊纤维上下降）；我们遵循更严格的约定，以使等价 $\phi = F$ 在引理7.26 中成立，且离散影子与 F 重合，并刻画组合结构。对于约化后次数更低的映射，含包含关系的解释失效（例子7.28）。

例*7.28* （非严格良约化（在某些约定中）不满足含包含关系的解释）在部分文献中，若有理映射 ϕ 可以延拓为 $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}_K}$上的一个态射，即使其约化映射的次数严格小于 $\deg(\phi)$，也称它具有良约化。按照我们的约定（良约化 $=$ 严格），这样的映射不具有“良约化”。

例如，设 $K=\mathbb{Q}_p$，其中 $p\geq 3$ 和 $\phi(z)=z^2/p$。那么 ϕ 可以延拓为一个态射，但约化 $\phi(z)=0$ 的次数为 0，因此 ϕ 不具有严格良约化。

现在考虑离散规则 $F\colon \mathbb{F}_p\to\mathbb{F}_p$，由 $F(0)=0$ 和 $F(x)=x^2$（$x\neq 0$）定义。函数图 G_F 在 0 处有一个不动点，并且在二次剩余处有一个 2-循环。然而，由于 $\phi(z)=0$ 是常数，它将所有 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ 映射到同一个点，从而将整个函数图 G_F 压缩为单个顶点。这违反了含包含的解释条件：对于任意满足 $F(x)\neq 0$ 的 $x\in\mathbb{F}_p$，我们都有 $\phi(x)=0\neq F(x)$，因此 ϕ 无法在深度 1 处含包含地解释 F。

这个例子说明了为什么含包含的解释必须满足严格良约化（次数保持）：若不满足这一条件，约化映射可能会将多个离散状态压缩到同一个点，从而破坏函数图的组合结构。

引理 7.29 (良约化诱导相容塔) 设 $\phi\in K(z)$ 为一个具有良约化的有理映射。那么 ϕ 会诱导一个相容映射塔 $\{\phi_N\colon W_N(\kappa)\to W_N(\kappa)\}_{N\geq 1}$，使得对于所有 $N\geq 1$，约化 $\underline{\phi}_N$ 都有良好定义，并且 ϕ 在深度 N 处含包含地解释 ϕ_N。

证明 由于 ϕ_K 具有良约化，它延拓为射影直线在 $\mathbb{P}^1_K$ 上的态射 $\phi\colon \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}_K}\to\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}_K}$。对每个 $N\geq 1$，这通过截断／商映射 $\pi_N\colon \mathcal{O}_K\to\mathcal{O}_K/p^N\mathcal{O}_K$ 以及标准同一 $\mathcal{O}_K/p^N\mathcal{O}_K\cong W_N(\kappa)$（当 K 非分歧时）诱导出一个良定义的映射 $\phi_N\colon \mathbb{P}^1(\mathcal{O}_K/p^N\mathcal{O}_K)\to(\mathcal{O}_K/p^N\mathcal{O}_K)$。相容性源于模 p^N 约化的函子性：对 $M\leq N$，截断映射 $\tau_{N,M}\colon W_N(\kappa)\to W_M(\kappa)$ 与 ϕ_N 和 ϕ_M 交换，因为 ϕ 在 $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}_K}$ 上整体定义。由引理 7.11，ϕ 在所有深度处以包含进行解释。 ϕ_N N $N\geq 1$ □

观察 *7.30*（约化作为选择原则）引理 7.26 确立：对于具有良约化的映射，剩余域层面上的“离散影子”与 F（引理 7.26）相吻合，而不仅仅是一种逼近。引理 7.29 表明，良约化会自动产生一个相容塔，从而将约化理论与第7.3节的拟有限设置联系起来。此类映射的算术不变量，例如其 Néron–Ogg–Shafarevich 判据与树形表示 [12]，提供了可指导最优解释器选取的不变量（见第8.3节）。

8 闭合循环：离散系统的分析综合

本节从构造 p-adic 解释器回到原始组合系统。p-adic 解析框架提供了一种严谨的方法，用于对离散状态进行分类，并根据稳定性选择“更优”的模型。

8.1 解析不变量与组合状态

在纯组合函数图中 G_F，一个不动点 x（带有 $F(x)=x$）由自环 $(x,\ x)$ 表示（第2节的约定）。然而，解释器 ϕ 将此状态提升为一个球 B_x，其中 $\phi(B_x)\subseteq B_x$。位于 p-adic 乘子 $\lambda=\phi'(\alpha)$ 在一个

不动点 $\alpha \in B_x$ 提供了图 G_F 无法检测的稳定性层级。乘子分类是 p-adic 动力学 [8, 17, 23]中的标准内容。在基于球的解释器用于有限函数图这一特定设定中，将乘子用作离散状态的解析特征，为组合结构提供了定量细化：

1. **收缩不动点（$|\lambda| < 1$，在经典动力系统文献中也称为“吸引型”）：** 这些表示“稳健”的离散状态。如果系统受到满足鲁棒精确性界（定理 6.6）的噪声 ε 扰动，状态 x 仍保持为吸引子。在调控网络的语境中，这对应于一种能够在连续变化下持续存在的稳定生物表型。2. **扩张不动点（$|\lambda| > 1$，也称为“排斥型”）：** 这些表示“敏感”或“暂态”状态。即使 x 在离散模型中是不动点，任何连续的无穷小扰动都会将轨道推出柱集 B_x。从组合角度看，这些状态可能属于某个吸引周期，但从解析角度看它们是不稳定的。3. **中性不动点（$|\lambda| = 1$）：** 这些表示“临界”的稳定性，此时局部行为是等距变换。

固定一个解释器 ϕ 并读取其局部乘子（等价地，读取σ_i 像半径与目标半径之比，如备注4.3所述），即可为每个状态柱集确定一种良定义的局部稳定性类型：压缩型、中性型或扩张型。这样，同一个离散函数图便可融入来自 p进动力学的解析不变量 ϕ，从而将组合模型与经典的非阿基米德概念（Fatou/Julia 分解和 Siegel 圆盘）联系起来；参见 [8, 10]。

观察 *8.1* （Runge逼近与良约化）通过 Runge逼近（定理 5.6）构造的有理解释器并不必然具有良约化。一般而言，通过逼近分段仿射模型 ϕ 得到的有理函数 ψ 可能会出现极点或临界点迁入状态柱集，从而违反良约化条件。若要确保良约化，必须采取以下方法之一：

1. 将逼近限制在系数属于$\mathcal{O}_K$且首项系数为单位的有理函数子空间中（以确保约化映射保持相同次数）；或 2. 执行后处理步骤来调整 ϕ，使其延拓为 $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}_K}$ 上的态射，并具有保次数约化。

基于良约化的选择原理（第 8.3节）因此要求在Runge逼近本身之外增加一项约束。

8.2 最优解释器与 ε精度

上述存在性结果并不唯一：许多有理映射 ϕ 都可以解释同一个离散规则。因此，人们会面临一个选择问题：给定有限个球 $U = \bigsqcup_i B_i$上的目标解析模型 $\psi \in \mathcal{O}(U)$，可以寻求一个有理 ϕ，使其逼近 ψ，同时保留预期的离散分辨率。

一种典型方法是应用 Runge 型逼近（定理 5.6）来构造ϕ，满足 $\|\phi-\psi\|_U<\varepsilon$。参数 ε控制着哪些组合特征在逼近下保持稳定：

- 如果 ε 相对于目标半径足够小（尤其是 $\varepsilon<\min_i t_{\tau(i)}$，且处于定理 6.6的适用范围内），那么逼近会在球的层面保留预期的包含／精确性约束，因此 ϕ 会在给定网格上实现相同的转移规则。
- 如果 ε 较大，那么某些柱集相对于其目标可能变成扩张的（参见注 σ_i-判据，见 4.3），由此诱导的行为可能不再符合原有的离散分辨率。

因此，可以权衡逼近精度、解析约束（例如，在 U 的邻域上无极点）以及 ϕ 的结构复杂度（例如 deg(ϕ)），但不声称该方法具有有效性或提供了构造性的优化过程。

注 *8.2*（开放问题： ε 与次数）给定有限个球的并 ψ 上的分段仿射解释器 U 和 $\varepsilon>0$，定理 5.6 保证存在一个有理 ϕ，满足$\|\phi-\psi\|_U<\varepsilon$，但未给出次数界。是否存在 ϕ，使其满足 $\|\phi-\psi\|_U<\varepsilon$，并且 $\deg(\phi)$ 可由球的数量和 ε 的函数所界（或者能否构造反例证明不存在这样的界）仍是一个开放问题。

8.3 良约化作为选择启发式（讨论）

本文中证明的结果（包括定理6.6 以及深度为 $N=1$ 时的约化逻辑陈述）均在本文中建立。引用 [12,18] 仅用于补充观点（例如替代构造和树状／伽罗瓦刻画）以及展望。

本文证明的约化-逻辑联系处于深度 $N=1$ （剩余域）：引理7.26和7.29 刻画了何时一个具有良约化的有理映射会在剩余域上解释一个带包含关系的离散规则，并导出一个相容塔。证明见第7.9节（引理7.26 和7.29）。更深入的算术刻画（伽罗瓦／树状）见 [12]。在这一基础上，我们讨论如何将良约化作为选择启发式，用于挑选最优解释器。

设 $K/\mathbb{Q}_p$ 为一个非阿基米德局部域，其整数环为$\mathcal{O}_K$，并设$\phi\in K(z)$为一个次数为 ≥ 2 的有理映射。回顾一下，如果 ϕ 具有严格良约化$\widetilde{\ }$，则它可以表示为系数属于$\mathcal{O}_K$ 的形式，且其约化 $\phi\in\kappa(z)$具有相同的次数（等价地， ϕ 可扩张为 $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}_K}$ 上的态射，并且在特殊纤维上的次数相同）。文献中众所周知，良约化会排除动力塔中新野分歧的出现，并在整数点轨迹 [11, 17]上强制保持一致的非扩张行为；我们在此仅将其作为背景使用，而非提出新的论断。关于簇的态射的良约化理论在 [24], 中得到了系统发展，其中表明良约化可确保良好的特化性质。

命题 8.3（基线选择准则） 设 $\phi \in K(z)$ 为具有严格良约化的有理映射，并设 $F\colon \kappa \to \kappa$ 为一个离散规则。则：

1. $\phi(O_K) \subseteq O_K$（即，ϕ 保持赋值环）。*2.* ϕ 当且仅当约化 ϕ 与 F 在 $\mathbb{P}^1(\kappa)$ 上作为映射一致时，才将 F 解释为在深度 $N = 1$ 处的包含（依据引理 *7.26*）。*3.* ϕ 诱导出一个相容塔 $\{\phi_N\colon W_N(\kappa) \to W_N(\kappa)\}_{N\geq 1}$（依据引理 *7.29*）。

特别地，根据引理 *7.26*，剩余域层面的离散影子与 F 一致，而不仅仅是一个逼近。

证明 （1）这就是良约化的定义：ϕ 延拓为 $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}_K}$ 上的态射，因此 $\phi(\mathcal{O}_K) \subseteq \mathcal{O}_K$。

（2）这正是引理 7.26。（3）这正是引理 7.29。 □

注记 *8.4*（树状刻画——展望）在命题8.3所确立的基线之外，良约化沿着一个自然的剩余开轨迹还具有更深层的伽罗瓦/树状刻画：在 [12] 中证明了（在温和情形下），严格良约化等价于惯性群在轨道余极限 $\mathcal{G}_{O^+(x)}$ 上的平凡性；这是一个刻画正向轨道上动力学的定义良好的伽罗瓦对象。对于所有位于非空剩余开集（约化后临界集的补集）中的整基点，该条件等价于约化纤维多项式具有单位首项系数和单位判别式。特别地，对于此类基点，所有逆向原像扩张在每一层都非分歧。

这种更深入的刻画虽未在此证明，却进一步说明了为何应将良约化用作选择准则：它确保诱导的剩余层动力学及相关原像塔在细化过程中保持稳定，不会产生伪分歧。

在固定的有限离散动力系统 $\mathrm{Int}_\star(F)$ 的解释器空间 F 中，我们提出将良约化类型用作选择启发式，并结合几何不变量（次数、高度）和动力学分层（指定球中收缩型、扩张型和中性周期的数量）。命题8.3 为本文背景下的这一启发式提供了理论基础。

8.4 模空间的必要性

定理5.6 给出的构造证明了解的存在性，却未提供分类。所有有理解释器 $\mathrm{Int}_\star(F)$ 构成一个无限维对象。要使模型的选择系统化，我们需要一种组织这一空间的方式。

我们的“稳健精确性”结果（定理 6.6）表明，精确解释器的集合是解析映射空间中的一个开子集。这为解释器空间（在固定中心归一化下）带来了如下结构性结果：

命题 *8.5*（乘子与主导性约束的开性）固定一个球 $B(a,r) \subset K$，并令 $O(B(a,r))$ 赋予上确界范数 $\|h\|_{B(a,r)} = \sup_{z\in B(a,r)} |h(z)|$。令 $u \in K^\times$，并令 $\psi(z) = b + u(z-a)$ 在 $B(a,r)$ 上为仿射映射。则存在 $\delta > 0$，使得对于每个 $g \in O(B(a,r))$，满足 $\|g-\psi\|_{B(a,r)} < \delta$ 时，下列结论成立：

1. $|g'(a)| = |u|$;
2. 写出泰勒展开 $g(z) = \sum_{k\geq 0} c_k (z-a)^k$ 在 $B(a,r)$ 上的展开，有

$$\max_{k\geq 2} |c_k| r^{k-1} < |g'(a)|,$$

因此，g 在 $B(a,r)$ 上具有线性支配性，所以 $g(B(a,r))$ 恰好是半径为 $|g'(a)|r$ 的球。

特别地，约束 $|g'(a)| = |u|$ 和线性支配性在 $O(B(a,r))$ 上的上确界范数拓扑中定义了一个开 条件。

证明 设 $h = g - \psi$。由闭球 $B(a,r)$ 上的非阿基米德柯西估计（引理 3.4；动力系统情形见 [17]）。[7] 若 $h(z) = \sum_{k\geq 0} d_k (z-a)^k$ 则

$$|d_k| \leq \frac{\|h\|_{B(a,r)}}{r^k} \qquad (k \geq 0).$$

取 $\delta > 0$ 使得 $\delta < |u| r$。若 $\|h\|_{B(a,r)} < \delta$，则

$$|g'(a) - u| = |d_1| \leq \frac{\|h\|_{B(a,r)}}{r} < |u|.$$

由超度量性，$|g'(a)| = |u|$，这就证明了 (1)。对于 $k \geq 2$，我们有

$$|c_k| = |d_k| \leq \frac{\|h\|_{B(a,r)}}{r^k} < \frac{|u| r}{r^k} = |u| r^{1-k},$$

因此 $|c_k| r^{k-1} < |u| = |g'(a)|$ 对所有 $k \geq 2$，这就证明了 (2)。最后一个断言（像恰为一个球）由引理 6.4 得出。□

注 *8.6*（值群警告）除非 $K/\mathbb{Q}_p$ 是有限的（即便如此，它也是 $p^{\frac{1}{e}\mathbb{Z}}$），否则不要 援引值群的离散性。对于 $K = \mathbb{C}_p$，值群为 $p^{\mathbb{Q}}$，且在 $\mathbb{R}_{>0}$ 中稠密。上面的开性论证仅用到了超度量性，因此普遍适用。

推论 8.7（解释器空间的分层）对于任意有限函数图 G_F，满足 $|\phi(a_i) - b_{\tau(i)}| \leq t_{\tau(i)}$ 的精确有理解释器空间 $\mathrm{Int}_{\mathrm{exact}}(F)$ 是若干开层 $S\vec{\lambda}$ 的并，其中 $\vec{\lambda} = (|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_k|)$ 是各不动点处乘子模组成的向量。每个层 $S\vec{\lambda}$ 在 ε-扰动下保持稳定。

证明 这由命题 8.5 应用于每个球 B_i，其中 u_i 来自分段仿射模型。通过根据这些不变向量对精确解释器空间进行划分，即可得到该分层。□

[7] 阿基米德类比是圆盘上全纯函数的柯西不等式。

8.5 层级等价与模空间

要对解释器进行分类，我们必须考虑坐标变换。在 p-adic 的情形下，自然的变换群由保持球层级的仿射等距变换 构成。

定义 8.8 （解释器的刚性等距共轭）固定一个有限的球族 $\mathcal{B} = \{B_i = B(a_i,\ r_i)\}_{i=1}^{N}$ 于 K。令 $\mathrm{Iso}(\mathcal{B})$ 为仿射等距变换群

$$\sigma(z) = \alpha z + \beta, \qquad \alpha \in K^{\times},\quad |\alpha| = 1,\quad \beta \in K,$$

使得 σ 置换该族 $\mathcal{B}$（即，$\sigma(B_i) = B_{\pi(i)}$ 对某个置换 π成立）。若存在 $\sigma \in \mathrm{Iso}(\mathcal{B})$ 使得，则称两个解释器 $\phi,\ \psi$ 关于 $\mathcal{B}$ 等距共轭

$$\psi = \sigma^{-1} \circ \phi \circ \sigma.$$

引理 8.9 （仿射等距变换下球动力学与乘子的共轭不变性）设 $\sigma(z) = \alpha z + \beta$ 其中 $|\alpha| = 1$。则：

1. 对每个球 $B(c,\ r)$，都有 $\sigma(B(c,\ r)) = B(\sigma(c)\ \ r)$。
2. 若 $\psi = \sigma^{-1} \circ \phi \circ \sigma$，则对每个导数存在的 x，
$$\psi'(x) = \phi'(\sigma(x)).$$
特别是，$|\psi'(x)| = |\phi'(\sigma(x))|$。
3. 若 ϕ 在 $B(c, r)$ 上满足线性支配，则 ψ 在 $B(\sigma^{-1}(c)\ r)$ 上满足线性支配，并且每个球上的解释类型（压缩型、中性型或扩张型）都保持不变。

证明 ($\underset{|\alpha||z-c|\le r}{1}$ $|\alpha| = 1\ \ |z-c| \le r \ \ \Rightarrow\ |\alpha z+\beta-\ \alpha c+\beta\ |=)$ 由超度量性和：$\Leftarrow()$ 直接得到。

(2) 根据解析映射的链式法则，以及 $\sigma'(x) = \alpha$ 为常数这一事实：

$$\psi'(x) = (\sigma^{-1})'(\phi(\sigma(x))) \cdot \phi'(\sigma(x)) \cdot \sigma'(x) = \alpha^{-1} \cdot \phi'(\sigma(x)) \cdot \alpha = \phi'(\sigma(x)).$$

(3) 将 (1)–(2) 与通过球上的泰勒系数定义的线性支配结合起来。由于 σ 是等距变换，半径保持不变；由于 (2) 保持线性系数的绝对值，严格不等式 $\max_{k\ge 2} |c_k| r^{k-1} < |c_1|$ 在 σ 的共轭作用下保持不变。□

定义 8.10 （层级等价）若两个解释器 $\phi_1,\ \phi_2 \in \mathrm{Int}_{\star}(F)$ 关于状态柱集族 $\mathcal{B} = \{B_i\}$等距共轭，则称它们层级等价。

推论 8.11 (语义的不变性) 层级等价保留每个球上的解释类型（压缩型、中性型或扩张型）以及乘子模 $|\lambda_i|$。

证明 这由引理 8.9立即得出。 □

注 *8.12*（更大的共轭群）如果你想要更大的共轭群（例如，一般的保球同胚），就不要使用导数。若要保留基于导数的不变量（乘子、支配性），应限制为解析等距变换；仿射等距变换是最稳妥的最小选择。

上述定义（等距共轭、层级等价）是迈向 p-adic 解释器模空间理论的初步步骤：它们确定等价的概念以及应予保留的不变量（乘子、支配性）。系统性的发展——例如，将 $\mathrm{Int}_\star(F)/\!\sim$ 描述为几何对象、研究其维数并给出明确的分层——留待今后完成。

9 算例与算术应用

9.1 具体案例研究：循环与暂态动力学

从函数图到其 p-adic 解释及分析综合的过程，通过一个包含四个状态 $X = \{0、1、2、3\}$的系统加以说明。此处采用的存在性与鲁棒性结果已在第 5–6 节中证明；动态中国剩余定理及其因式分解已在第 7 节中证明。本节通过明确的转移图和算术示例对其加以说明。

9.1.1 离散动力学

定义转移映射 $F : X \to X$ 如下：

$$F(0) = 1, \quad F(1) = 0, \quad F(2) = 1, \quad F(3) = 3. \tag{6}$$

函数图 G_F（见图 3）由长度为 2 的极限环 $\{0,1\}$、一个暂态状态 $\{2\}$和一个不动点 $\{3\}$。

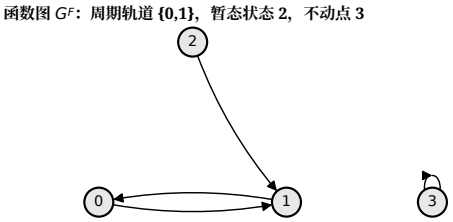

图 3 函数图 G_F 包含一个周期轨道 $\{0,1\}$、一个暂态状态 2和一个不动点 3 (按照第 3 节中的约定，此处有一个自环2)。

9.1.2 p 进制编码

我们使用 $p=2$ 和 $n=2$ 层。这些状态被映射到中心 $\{0,1,2,3\}\subset\mathbb{Z}_2$ 并与半径为 $2^{-2}=1/4$ 的柱集相关联：

$$B_0=4\mathbb{Z}_2,\quad B_1=1+4\mathbb{Z}_2,\quad B_2=2+4\mathbb{Z}_2,\quad B_3=3+4\mathbb{Z}_2. \tag{7}$$

9.1.3 解析解释器构造

利用定理 5.2，我们构造一个分段仿射精确解释器 ψ。为简单起见，我们选择使其在每个球上都是等距的（$|u_i|=1$）：

$$\psi(z)=\begin{cases}1+z & z\in B_0\\ (z-1) & z\in B_1\\ 1+(z-2)=z-1 & z\in B_2\\ 3+(z-3)=z & z\in B_3\end{cases} \tag{8}$$

注意，对于 $z\in B_2$，$|\psi(z)-1|=|z-2|\le 1/4$，因此 $\psi(B_2)=B_1$。

9.1.4 全局有理解释器

由定理 5.6 和引理 5.7，存在一个有理函数 $\phi\in\mathbb{Q}_2(z)$，使得 $\|\phi-\psi\|_U<\varepsilon$ 对于某个 $\varepsilon<1/4$ 在 $U=\bigsqcup_i B_i$ 上成立。特别地，ϕ 满足中心上的相同有限层级约束，并在指定柱集上实现预期的转移（第 5–6 节）。一般而言，Runge 步骤对于次数/高度界并非有效；关于带有显式公式的补充构造，参见 [18]以及第 10节中的讨论。

举一个最简单的例子，取二状态系统 $X=\{0,1\}$ 和交换映射 $F(0)=1, F(1)=0$。令 $p=2$ 和 $n=1$，柱集为 $B_0=2\mathbb{Z}_2$ 和 $B_1=1+2\mathbb{Z}_2$（半径 $1/2$）。分段仿射解释器 $\psi(z)=1-z$ 满足 $\psi(0)=1$ 和 $\psi(1)=0$。在此情形下，ψ 已经是多项式，因此可以直接取 $\phi(z)=1-z$。验证：若 $z\in B_0$，则 z 为偶数，因此 $1-z$ 为奇数，且 $1-z\in B_1$；若 $z\in B_1$，则 z 为奇数，因此 $1-z$ 为偶数，且 $1-z\in B_0$。因此 $\phi(B_0)=B_1$ 且 $\phi(B_1)=B_0$（精确解释）。此外，$\phi'(z)=-1$，因此 $|\phi'(z)|_2=1$（处处中性／等距）。对于较大的系统（例如上文的四状态示例），并非总能得到系数简单的显式公式，因此需要使用 Runge逼近（引理 5.7）；定理 5.6 保证有理解释器的存在。

9.1.5 鲁棒性与乘子

根据定理 6.6，任何与 ψ 相差 $1/4$ 以内且满足 $|\phi(a_i)-b_{F(i)}|\le 1/4$ 的有理函数 ϕ 都是精确解释器，即对所有 i，$\phi(B_i)=B_{F(i)}$。假设我们选择一个解释器 ϕ，使其在 B_3 中的不动点为 $\alpha=3$。乘子 $\lambda=\phi'(3)$ 决定稳定性。若 $|\lambda|_2<1$，则 B_3 是解析吸引子。这说明 p-进提升如何为组合图增添“度量深度”。

9.2 Witt 向量上的动力学： $GF(4)$ 的情形

考虑一个由 4 个状态构成、有限域为 $\mathbb{F}_4$ 的系统。我们使用 Witt 向量环 $W(\mathbb{F}_4)$，它是次数为 2 的 $\mathbb{Q}_2$ 非分歧扩张的整数环 $\mathcal{O}_K$。Teichmüller 代表元 $\mathrm{Teich}(\mathbb{F}_4) = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$，其中 $\omega^2+\omega+1=0$ 属于 $\mathcal{O}_K$，为我们的状态柱集提供了中心。

离散映射 $F:\mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_4$ 由 2-adic 映射 ϕ 在 $\mathcal{O}_K$ 上解释。例如，弗罗贝尼乌斯型映射 $F(\xi) = \xi^2$ 由 $\phi(z) = z^2$ 精确解释。

- **良约化：**映射 $\phi(z) = z^2$ 模 2 良约化，因为其约化 $\bar{\phi}(\xi) = \xi^2$ 是 $\mathbb{F}_4$ 上次数为 2 的良定义映射。
- **稳定性：**2-周期轨道 $\{\omega,\ \omega^2\}$ 是压缩的，因为二次迭代的乘子满足：

$$|(\phi^2)'(\omega)|_2 = |4\omega^3|_2 = |4|_2 = 1/4 < 1. \tag{9}$$

请注意，$|\omega|_2 = 1$ 因为 ω 是特征提升（非分歧扩张中的单位根）。此外，在深度 $N \geq 2$ 处，柱集上的作用是精确的，因为半径为 $r \leq 1/4$ 的球上满足线性支配。

这个例子表明，要求解释器具有**良约化**（按 Benedetto 的定义） [11], 可确保连续动力学完美地“坍缩”为离散逻辑 F，而 p-adic 乘子则为系统抵御连续扰动的鲁棒性提供了严谨的度量。

9.3 算术案例研究：Frobenius 与 Verschiebung

Witt 向量的设定提供了两个本质上纯属算术的解释器例子，却完美地阐释了语义。

9.3.1 例子 A：作为精确解释器的 Frobenius

设 K 为 $\mathbb{Q}_p$ 的非分歧扩张，并设 $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}_p)$ 为弗罗贝尼乌斯自同构。根据 Serre [20]，σ 是 $\mathcal{O}_K$ 的等距变换，并在剩余域上诱导 p 次幂映射 $\xi \mapsto \xi^p$。若将离散规则 F 定义为字母表 κ 上的 p 次幂 Frobenius，则 σ 满足：

$$\pi_N \circ \sigma = F \circ \pi_N$$

对每个深度 N。因此，σ 是适用于所有分辨率层次的**包含解释器**。由于 σ 是等距变换，它保持球的半径，从而使其成为**精确解释器**：$\sigma(\mathbb{B}_N(x)) = \mathbb{B}_N(F(x))$。这是精确跟踪离散规则的连续提升中最清晰的例子。

9.3.2 例子 B：Verschiebung 作为移位寄存器解释器

设 $V:\ W_N(\kappa) \to W_{N+1}(\kappa)$ 为 Verschiebung 算子。在 Witt 向量环中，恒等式 $p \cdot \mathrm{id} = V \circ F$ 成立，其中 F 是 Frobenius 映射。设 $\phi(z) = pz$ 为

在$\mathcal{O}_K$上乘以 p 。则诱导作用在截断向量上满足：

$$\pi_{N+1}(pz) = V(F(\pi_N(z))). \tag{10}$$

就数字展开而言， ϕ 会移动状态序列，并对现有状态应用弗罗贝尼乌斯自同构。这为扭曲的移位寄存器更新规则提供了一种精确解释。

9.4 模平方与解析稳定性

考虑 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 上的模平方映射 $F(x) = x^2$ (模 p^n)。将其提升为柱集 B_x 上的 $\phi(z) = z^2$ 后，解析解释器揭示了图 G_F 中不可见的稳定性结构：

- **位于 0 的压缩不动点**：对于任意 p， $z = 0$ 都是超吸引的（$\lambda = 0$）。柱集 B_0 是一个压缩吸引域。
- **与 $p > 2$ 的二分性：**在 $x = 1$ 处，乘子为 $\lambda = 2$。若 $p = 2$，则 $|2|_2 = 1/2 < 1$（压缩的）；若 $p > 2$，则 $|2|_p = 1$ （中性／等距）。

9.5 参数空间： p进 $z^2 + c$ 族

考虑族 $\phi_c(z) = z^2 + c$ ，其中 $c \in \mathbb{Z}_p$。以下结果揭示了离散结构中的一种基本刚性。

命题 9.1 (组合刚性) 设 $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}_p$。若 $c_1 \equiv c_2$ (模 p^n)，则 ϕ_{c_1} 与 ϕ_{c_2} 在柱集 $\{B_x\}_{x\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$ 上诱导的函数图完全相同。

证明 柱集 $B_x \to B_y$ 之间的转移由条件 $\phi(x) \equiv y$ (模 p^n) 决定。对于任意 $x \in \mathbb{Z}_p$，有 $\phi_{c_1}(x) = x^2 + c_1 \equiv x^2 + c_2 = \phi_{c_2}(x)$ (模 p^n)。因此，x 模 p^n 在两个映射下都映到同一个剩余类。□

然而，内部 动力学可能发生分岔。对于 $p = 3$， $n = 1$，若 $c = 0$，则 $z = 0$是超吸引的。若 $c = 3$，不动点 α 满足 $\alpha^2 - \alpha + 3 = 0$；其乘子$|\lambda|_3 = |2\alpha|_3 = 1/3$ 表明 $c = 3$ 具有不同的解析特征。

9.6 代数系统：DCRT 和 PDS

到目前为止，我们已为剩余环上的系统构建了解释器 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 或者，经由 Witt 向量，在 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 针对单一模数 m （第 2–6 节、第 8 节）。当 m 分解为互素模数时，动态中国剩余定理（第7.6节）将离散动力学水平分解：全局函数图分解为局部图的乘积。这是环论意义上的中国剩余定理在动态假设下的组合影子：中国剩余定理(环) $\rightsquigarrow$ DCRT（函数图）。DCRT 可沿两个方向解读：约化 （全局 $\to$ 局部）与 提升 （局部 $\to$ 全局）。下面两个例子分别说明这两种情形。

9.6.1 DCRT“出发”（约化）

从 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 上的全局映射 $F(x) = x^2+1$ 出发。由于 F保持同余（它由一个多项式诱导），定理 7.18 蕴含 $G_F \cong G_{F_2} \times G_{F_3}$，其中 F_2 与F_3 是由 F 在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 上经模 2 和模 3 约化所诱导的映射。图 4 说明了这一约化： $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 上的图（上方）被分解为两个局部图（下方）。每个顶点 $x \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 约化为（x 模 2， x 模 3）；双色编码（左半部分为 $=$ 模 2 的剩余类，右半部分为 $=$ 模 3 的剩余类）使这一点可见，并且 G_F 中的每条边都投影到 G_{F_2} 与 G_{F_3}中的相应边上。

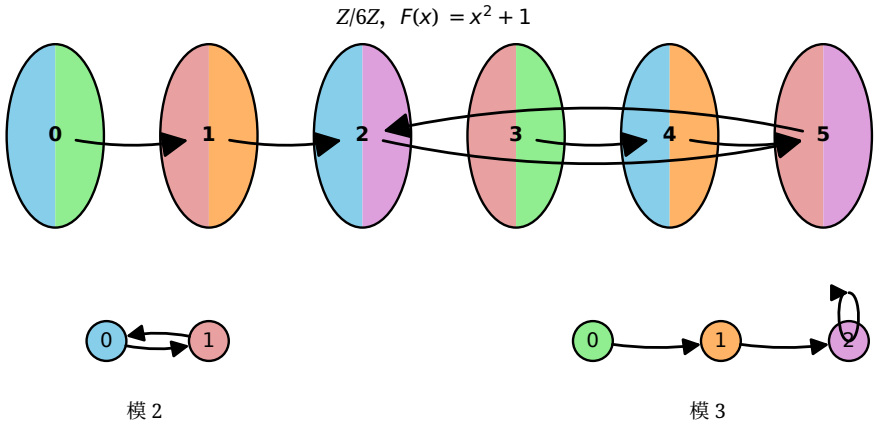

图 4 DCRT“出发”（约化）： G_F 上的全局图 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ （上）约化为局部图 G_{F_2} （模 2）和 G_{F_3} （模 3）（下）。顶点按模 2（左半部分）和模 3（右半部分）的剩余类分别用两种颜色标示，使约化过程 $x \mapsto (x$ 模 2， x 模 3)一目了然。

9.6.2 DCRT“返回”（提升）

反之，从两个任意的局部图出发：一个在 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 上，另一个在 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$上。经典的中国剩余定理通过 Θ给出 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$。对任意 f_3： $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 以及f_4： $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，我们通过定义$f(x) = \Theta^{-1}(f_3(x \bmod 3)\ f_4(x \bmod 4))$，将它们提升为单个映射 f： $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$： 每个 x被送到 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$中的唯一元素，其模 3 的约化是 $f_3(x \bmod 3)$，其模 4 的约化是 $f_4(x \bmod 4)$。图 5 说明了这一提升：两个局部图（下方）被组装成 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 上的全局图 G_f （上方）。 G_f 中的顶点再次为双色（左侧为模 3 的 $=$ 剩余类，右侧为模 4 的 $=$剩余类），而 G_f 中的每条边都是各因子中对应边对的唯一提升。在约化下，不动点映为不动点，周期轨道（循环）映为循环；在提升下，同样成立。在乘积图景中，顶点 (x_1, x_2) 是 f 的不动点，当且仅当 x_1 与 x_2 分别被 f_1 与 f_2 固定；它位于长度为 k 的周期轨道上，当且仅当每个 x_i 位于 f_i 的一条周期轨道上，其长度

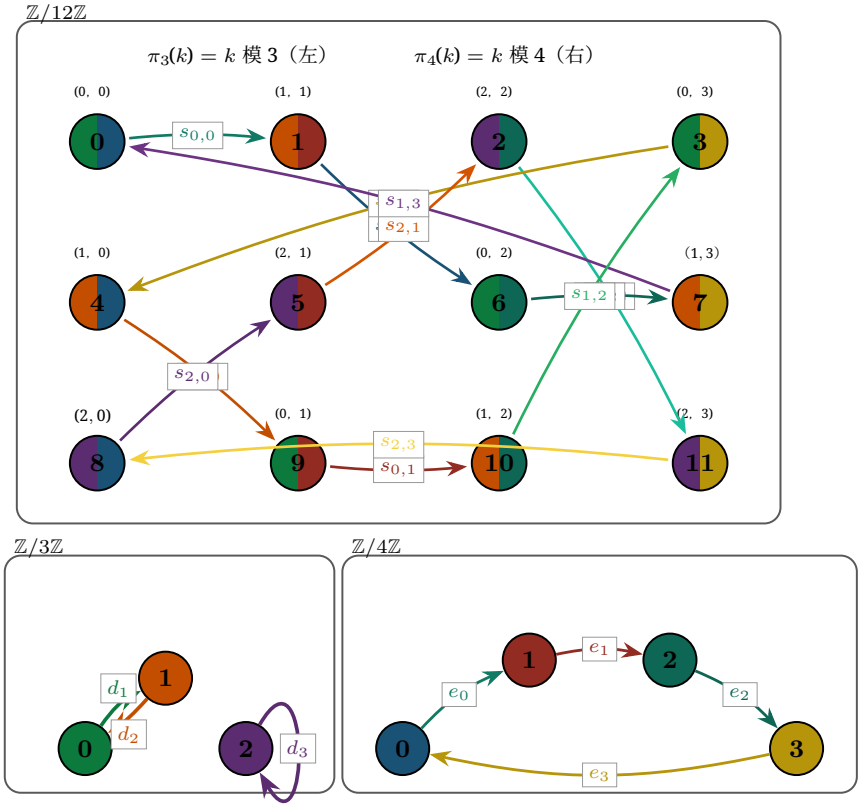

图 5 DCRT“返回”（提升）：局部图 G_{f_3}（模 3）和 G_{f_4}（模 4）（底部）通过 Θ^{-1} 提升为全局函数有向图 G_f（顶部）：每个顶点恰有一条出边 $x \to f(x)$，其中 f 是唯一映射，它模 3 约化为 f_3，模 4 约化为 f_4。顶点按模 3 和模 4 的剩余类用两种颜色标记。$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 中的边分别标记为 d_i 和 e_j；全局图中的每条边都标记为 $s_{i,\ j}$，表示 d_i 和 e_j的唯一公共提升（粘合）。

整除 k（乘积中的周期是局部周期的最小公倍数）。因此，例如，一个因子中的不动点与另一个因子中的 2-循环提升为全局图中的 2-循环。

9.6.3 插值与约化

通过要求多项式映射实现给定的函数图，可以还原多项式表述。对于三个环 $R \in \{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}\}$，存在多项式 $P_R(X) \in \mathbb{Z}[X]$（例如，可通过对顶点进行拉格朗日插值获得），使得诱导映射 $x \mapsto P_R(x) \bmod |R|$ 与规定的转移相一致。对于由 CRT 将 (f_3, f_4) 映射得到的 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 上的保同余映射 f，若多项式 $P_{12}(X)$ 在 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 上诱导出映射 f，则满足 $P_{12}(x) \equiv f_3(x)$

（模 3），且对所有 $x \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$， $P_{12}(x) \equiv f_4(x)$（模 4）；因此，将 P_{12} 对 3（分别对 4）取模，可得到一个多项式，其在 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ （分别在 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$）上诱导的映射恰为 f_3 （分别为 f_4）。这说明，DCRT分解如何反映在多项式解释器层面： $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 上的全局解释器可以正确约化为各局部解释器。

9.6.4 与 p-进解释器的关系

上述例子处于离散层面：剩余环上的图和映射。在本文的设定中，目标是将这类离散动力学实现为柱集或球上的连续 p-进映射（解释器）的影子（第2、4节）。我们在完备非阿基米德域 K 上工作（例如 $K = \mathbb{C}_p$）；中国剩余定理分解用于离散层面，而 p-进解释器的存在性则通过构造一个具有 m 球的球系并应用 Runge（定理 5.6、引理 5.7）来获得。约化随后也有其解释器对应物：一个有理映射 ϕ若在 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ （其中 m 为合数）上解释一个保持同余的映射 F，则通过对整除 m的每个素数幂取模，诱导出解释局部因子 F_i 的映射；引理 7.11和良约化联系（第7.9节）使这一点得到精确表述。在F（x）上的 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 的约化例子中，甚至可以取 φ（z） $= z^2 + 1$ 作为解释器（略述如下）：在$\mathbb{Z}_p$ （$p = 2$ 或 3）上，取球 B（a、 p^{-n}）；由于 φ 具有良约化且在 $\mathbb{Z}_p$上是 1-利普希茨的，我们有 φ（B（a、 p^{-n}）） $\subseteq B$（φ（a） p^{-n}），因此 φ通过包含关系解释了 F的约化；引理 7.29给出了相容塔。提升对应于逆向过程：当 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 上的离散映射 f 通过中国剩余定理由 f_3 和 f_4 组装而成时，在空间 $\prod_i \mathrm{O}_i$ 上的局部 p-进解释器的乘积（每个素因子对应一个）在 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$上诱导出 f （命题 7.22）；对于所选素数 p，定理 5.6仍保证在单个域 $\mathbb{C}_p$ 上存在某个解释器，使其在 f 上成立（例如，在 $\mathbb{C}_p$ 中取 12 个球的并）。因此，DCRT 例子并非孤立存在：它们展示了离散分解（约化与提升）如何与解释器受良约化及第 2 节层级结构约束的方式相一致。下图区分了离散中国剩余定理提升（剩余环的乘积）与 p-进解释器（ K中球上的映射）：

$$\begin{array}{ccc} (\text{balls in } K) & \xrightarrow{\varphi} & (\text{balls in } K) \\ {\scriptstyle \bmod p_i^{k_i}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bmod p_i^{k_i}} \\ \mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z} & \xrightarrow{F_{p_i^{k_i}}} & \mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z} \end{array} \qquad \text{and} \qquad \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \prod_i \mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z}.$$

在这里，DCRT 以关于函数图的命题形式出现：如果 F保持同余，那么全局图与各局部图的乘积同构。这个假设并非可有可无：例子 7.19 (第 7.6节 F 不保持同余时，DCRT 的结论不成立。

上述例子凸显了离散动力学的两种互补算术分解：（1）通过中国剩余定理对互素模数进行分解；（2）沿固定素数通过逆系统$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_{n\geq 1}$进行细化。第二种方向引出了 $\mathbb{Z}_p$ 上的有限剩余（逆极限）动力学，以及如何从球级解释过渡到逐点解释的问题；参见附录A。

在调控建模中常见的多项式动力系统（PDS）中，[8] 选择具有良约化性质的解释器，并且 $|\lambda| < 1$ 可得到一个连续系统，该系统将离散表型保留为稳定吸引子。

10 讨论与未来展望

10.1 结果的结构意义

第 2–6 节的框架确立了：每个有限函数图都可在有限个球的并上拥有一个有理解释器（定理 5.6，推论 6.8），并且在线性支配性成立时，精确柱映射在扰动下保持稳定（定理6.6）。第 7–9 节增加了两个正交轴： 水平 （互素模数上的中国剩余定理分解）与垂直 （Witt/深度塔）。带包含关系的解释等价于与约化映射交换（引理 7.21）；对于复合模数 m， $\prod_i \mathcal{O}_i$ 上的整体动力学是局部动力学的乘积（命题 7.22）。良约化随后在众多可能的解释器中起到选择原理的作用（命题 8.3）。从概念上说，这些结果表明，剩余环和 Witt 向量上的离散动力学可以实现为有理 p-进动力学的约化，并具有定义良好的稳定性结构（压缩的/中性型/扩张的）；当离散映射保持同余时，还具有清晰的分解。

10.2 与其他工作的关系

本文通过对分段仿射模型（定理 5.2）应用 Runge逼近（定理 5.6），从纯组合数据（有限函数图或球系）出发证明了有理解释器的存在性；该证明并未给出构造性或统一的次数/高度界。在 [18] 中， ε-粘合构造了一个全局有理映射，使其在有限个互不相交的球上ε-逼近给定的局部解析或有理映射；其条件是对所有 i， $f_i(B) \subset B_1(0)$，其中 B 是这些球的并集。该文定理 4.2 的证明给出了显式公式 $F_\varepsilon(z) = \sum_i f_i(z)h_i(z)$。注 5.13 概述了 ε-逼近结论。定理 6.6 表明，在满足线性支配时，精确球映射是一个开条件。自动机理论研究定义在 $\mathbb{Z}_p$ 上的 1-利普希茨映射或塔相容映射，这些映射不一定是有理的 [13, 14]；而本文要求有理（或刚性解析）实现，以便定义次数、高度和约化，并应用命题 8.3 和线性支配。本文未提供统一的次数界或高度界（注 5.5）。中国剩余定理也出现在其他图论或几何背景中（例如有向图的对称性 [25], 或动量图，以及等变上同调中的限制映射 [26]）；而本文中的图是单个映射在 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$上的函数图，DCRT 在保持同余的假设下将动力学（因而也将该图）分解，以服务于 p-进解释器的构造。

10.3 局限性与开放方向

以下内容由这些结果或附录 A 中的讨论所蕴含。

[8]此类系统出现在对秀丽隐杆线虫等生物的细胞命运建模中，其中离散变量表示信号水平。

(i) **有效界：** 以 ε 与球的个数表示的有理解释器的一致次数/高度界，并未由存在性证明给出；该问题仍未解决（注5.5，第 8 节）。**(ii) 概形极限：** 附录 A 证明了连续（1-利普希茨）极限的存在性，并在柯西条件下证明了解析逐点解释器的存在性（命题 A.1）。该极限的有理性以及相容有理序列的存在性仍未解决（注 A.3）。**(iii) 解释器模空间：** 空间 $\mathrm{Int}_\star(F)$ 是无穷维的；按乘子向量进行的分层仍未解决（命题 8.5，推论 8.7）。此处尚未建立参数化与维数界。**(iv) DCRT 范围：** 同余保持性对于乘积分解是必要的（例子 7.19）；这对典型离散模型的限制程度仍未解决（注 7.20）。

10.4 零半径解释

主要结果针对有限分辨率：解释器作用于半径为 p^{-n} 的球上，并在该层级实现给定的图。转向 $\mathbb{Z}_p$ 上的逐点（零半径）语义将在附录A中讨论：其中证明了唯一连续极限的存在性，以及在附加假设下解析极限的存在性；极限的有理性仍未解决。本文稿确立了有限分辨率有理解释器的存在性、鲁棒性和结构分解（定理5.6、定理6.6、命题7.22）；有限剩余极限及其有理性将在附录中讨论，文中指出仍未解决之处。

A 有限剩余动力学与零半径解释

A.1 范围

上述核心结果解决了有限分辨率下的一个逆问题：给定一个有限函数图，它由 $\mathbb{Z}_p$ 划分为半径为 p^{-n} 的剩余类球编码而成，我们构造有理或解析映射 ϕ，使其在球上的作用实现所规定的离散动力学（第 5–6 节）。本附录记录了将这种球层面语义转变为逐点（“零半径”）逆有限动力学模型所需的内容，即由模 p^n 下的相容塔所指定的动力学。对每个 n 都存在解释器ϕ_n，这并不必然意味着 $\mathbb{Z}_p$ 上存在极限解释器；见下文。

A.2 两种解释概念

球级解释规定如下形式的包含关系或等式： $\phi(B(a,p^{-n})) \subseteq B(F_n(a)\ p^{-n})$ 这些关系或等式适用于固定半径下有限多个球（第 4 节）。相比之下，半径为零的解释要求在 $\mathbb{Z}_p$上逐点精确相等：

$$\phi(z) = f(z) \quad \text{for all } z \in \mathbb{Z}_p.$$

后者可以看作球语义在半径趋于 $p^{-n} \to 0$时的极限。这已不再是定义4.2意义上的解释器；它是一种**逐点实现**

逆极限动力学。在与塔相容的连续插值意义下，路径1（下文）给出唯一这样的映射 f （由相容塔确定的 1-利普希茨极限）；路径 2 则探讨此映射何时能由$\mathcal{O}(B(0,1))$中的刚性解析函数实现。

A.3 水平与垂直

固定一个相容塔 $(X_n,\ f_n,\ \pi_{n+1,\ n})_{n\geq 1}$，其粘合映射均为满射的，且 $\pi_{n+1,\ n}\circ f_{n+1} = f_n \circ \pi_{n+1,\ n}$。我们将每一层 n 内部的动力学称为 水平，而将映射 $\pi_{n+1,\ n}$ （向下约化）及其可能的提升（在可行时向上）称为 垂直。请注意，除非满足额外假设，否则垂直提升通常 并非全局态射；它是对点或周期轨道的提升（见定理 7.6和第 7.9 节的注释 （第 7.4节）），不一定是逆系统的截面。

A.4 逆有限动力学与唯一连续提升（路径1）

令 $R_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 和 $\pi_{n+1,n}\colon R_{n+1}\to R_n$ 为约化。族 $F_n\colon R_n\to R_n$ 若满足对所有 $n\geq 1$都有 $\pi_{n+1,n}\circ F_{n+1} = F_n\circ\pi_{n+1,n}$，则称为相容。根据泛性质

$\mathbb{Z}_p \simeq \underset{F_n}{\longleftarrow} R_n$ x p^n n f 1 $\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}_p$ f x $x\equiv y$ p^n $p^n=\lim$，这样的塔会诱导一个唯一映射 : 满足对所有 都有 ( ) mod (mod)。此外，该映射是 -利普希茨的: 具体而言，根据相容性，(mod) 意味着$f(x)\equiv f(y)\pmod{p^n}$ 对所有 n成立，因此当$|x-y|_p\leq p^{-n}$时，$|f(x)-f(y)|_p\leq p^{-n}$，进而 $|f(x)-f(y)|_p\leq|x-y|_p$；另见推论 7.25。

定义局部常值提升 $f_n^{\mathrm{lc}}\colon \mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}_p$ 如下

$$f_n^{\mathrm{lc}}(z) := \iota_n(F_n(z \bmod p^n)),$$

其中 $\iota_n\colon R_n,\to\mathbb{Z}_p$ 是标准嵌入，其像为 $\{0,\ 1,\ \ldots,\ p^n-1\}$。于是$f_n^{\mathrm{lc}}$在每个半径为 p^{-n} 的剩余类球上都是常数，而相容性给出

$$\|f_{n+1}^{\mathrm{lc}} - f_n^{\mathrm{lc}}\|_{\infty,\mathbb{Z}_p}\leq p^{-n}.$$

因此 ($f_{\text{局部常值}n}$) 一致收敛到 f。这构造出了该塔唯一的连续（事实上是 1-利普希茨）逐点模型。局部常值函数的一致极限是连续的，但通常处处非解析；因此，路径1无法得到符合本文核心部分所指解析/有理意义上的解释器。

A.5 何时能得到解析逐点解释器？（路径 2）

设 K 为包含 $\mathbb{Q}_p$ 的完备非阿基米德域，并令O(B(0, 1))表示闭单位球上刚性解析函数构成的Banach K-代数，其上确界范数为 $\|\cdot\|_\infty$（参见例如 [15] 或 [17]）。[9] Runge型或 ε-粘合结果（例如定理 5.6，[18]）在每一层给出存在性，但不一定在各层之间相容。因此，障碍并非“逼近”，而是“相容地逼近”。真正困难之处在于在该代数内构造一个序列(ϕ_n)，使其既在第n 层正确，又

[9]阿基米德类比是闭单位圆盘上的全纯函数代数，它在上确界范数下是完备的。

在上确界范数下为柯西的；跨层相容性是额外结构，除非证明了选择原理，否则仍作为一个开放方向留待解决。

命题 A.1（解析的零半径解释的充分柯西判别准则）设在 $R_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 上有一相容塔 (F_n)，其诱导出一个 1-利普希茨极限映射 $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$。假设存在一个序列 $\phi_n \in O(B(0,1))$，满足：

1.（第n 层正确性）对所有 $z \in \mathbb{Z}_p$，均有 $\phi_n(z) \equiv f(z)$（模 p^n）（等价地，ϕ_n在 R_n上诱导出 F_n）；*2.*（一致柯西控制）$\|\phi_{n+1} - \phi_n\|_{\infty,\mathbb{Z}_p} \le C\,p^{-n}$，其中某个常数 C 与 n 无关。

则 (ϕ_n) 在 $\mathbb{Z}_p$ 上一致收敛于一个极限 $\phi \in O(B(0,1))$，且 ϕ 在 $\mathbb{Z}_p$ 上逐点解释 f，即对所有 $z \in \mathbb{Z}_p$，均有 $\phi(z) = f(z)$。

注 *A.2*（为何需要条件 (2)）仅有条件 (1) 可得 $\|\phi_{n+1}-\phi_n\|_{\infty,\mathbb{Z}_p} \le p^{-n}$（因为二者在 $\mathbb{Z}_p$ 上模 p^n 与 f 相同）。要使极限落在 $\mathcal{O}(B(0,1))$ 中，序列必须在整个闭单位球上关于上确界范数构成柯西序列；若条件 (2) 采用 $B(0,1)$ 上的范数，则它能保证这一点，并得到 $\phi \in \mathcal{O}(B(0,1))$。

证明 一致的柯西界意味着 (ϕ_n) 在 $\mathbb{Z}_p$ 上关于上确界范数构成柯西序列。由刚性解析代数 $O(B(0,1))$ 的完备性（见 [15]；在动力系统情形下见 [17]）[10]，该序列收敛到极限 $\phi \in O(B(0,1))$。第 n 级正确性给出对所有 n，$\phi(z) \equiv f(z)$（模 p^n），因此在 $\mathbb{Z}_p$ 上有 $\phi(z) = f(z)$。□

关于有理性的注记。
即使每个 ϕ_n 都可以通过有限个球的并上的 Runge 型构造选为有理的，仅凭一致收敛也不能保证极限仍然是有理的，除非施加一致复杂度界（例如，在固定紧集内具有有界次数和受控极点）。因此，真正的“有理零半径提升定理”需要额外的结构，这里将其留作一个开放方向。

周期、***Hensel*** 与刚性。
对于解析 ϕ，精确周期为 m 的点的提升由 Hensel 应用于 $g_m(x) = \phi^{\circ m}(x) - x$ 所决定。求解 $g_m(x) = 0$ 只能保证 $\mathrm{per}(x) \mid m$；而精确周期的刚性（以及提升整个 m- 周期轨道而不发生坍缩或分裂）通常需要满足非退化条件 $(\phi^{\circ m})'(a) \not\equiv 1$（模 p）。在抛物情形下 $(\phi^{\circ m})'(a) \equiv 1$（模 p），周期轨道长度可能沿着塔增长（例如，$\phi(x) = x+1$ 在$\mathbb{Z}_2$上）；参见推论 7.25。

注*A.3*（极限的正则性与有理性）形式上，该构造给出了一个连续的逐点解释器；满足命题 A.1 的柯西判别准则时，解析性成立；此处并未断言有理性，这仍是一个需要一致复杂度界的开放问题。

[10]在阿基米德情形下，对于圆盘上的全纯函数，同样的结论也成立。

总之，本附录将从球级解释到逐点（半径为零）解释的过渡形式化：路径1给出唯一的连续（1-利普希茨）极限；路径 2 给出了使解释器具备解析性的充分柯西判别准则（命题 A.1）。本文的核心存在性与鲁棒性结果（第 5–6 节）针对的是有限函数图。

致谢

作者感谢曾与 Victor Nopal-Coello 和 Ángela Fuquen 开展合作研究。当时，他们分别以博士后研究人员（Victor）以及该项目的访问学者和博士后（Ángela）身份，在 CIMAT 梅里达进行博士后研究和访问工作；该项目见下文“资助”部分。作者曾接待他们，这段经历也促成了本研究的部分内容。

声明与宣告

资助

本研究部分得到了 SECIHTI“科学前沿”项目“用于研究和分析生物学中相关问题的非常规数学与计算模型”的资助（资助编号 CF 2019/217367）。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

数据可用性

由于本研究期间未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

作者贡献

作者构思了这项工作，进行了分析，并撰写了稿件。

参考文献

[1] Jarrah, A.S., Laubenbacher, R., Stigler, B., Stillman, M.：多项式动力系统的逆向工程。《应用数学进展》**39**(4), 477–489(2007) https://doi.org/10.1016/j.aam.2007.03.002[2] Thomas, R.：《生物结构生成的物理化学过程七篇论述》。Sedes，巴黎（1973）。法文；生物学和基因调控中的逻辑模型[3] Dragovich, B., Dragovich, A.：DNA 序列和遗传密码的 p进模型。《p 进数、超度量分析及其应用》**1**(1), 34–41 (2009) https://doi.org/10.1134/S207004660901004X 。发表于2009年；该期刊的创刊号

[4] Khrennikov, A.：基于2进动力系统的基因表达。斯捷克洛夫数学研究所论文集265，131–139（2009） https://doi.org/10. 1134/S0081543809020114[5] Yurova Axelsson, E., Khrennikov, A.：利用2进密码子代数和自适应动力学生成遗传密码。生物系统240，105230（2024） https: //doi.org/10.1016/j.biosystems.2024.105230[6] Yurova Axelsson, E., Khrennikov, A.：所有遗传密码背后的普适动力函数：P进吸引子动力模型。生物系统246，105353（2024） https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2024.105353[7] Berkovich, V.G.：非阿基米德域上的谱理论与解析几何。数学调查与专著，第33卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯（1990）。https://doi.org/10.1090/surv/033[8] Rivera-Letelier, J.：局部域上有理函数的动力学。《阿斯特里斯克》287，147–230（2003）[9] Jones, R., Manes, M.：二次有理函数的伽罗瓦理论。《瑞士数学评论》89(1)，173–213（2014） https://doi.org/10.4171/CMH/316[10] Hsiao, L.-C.：非阿基米德域上有理映射的法图集结构。《数论杂志》133(10)，3225–3251（2013） https: //doi.org/10.1016/j.jnt.2013.03.011[11] Benedetto, R.L.：具有可解朱利亚集的有理函数的约化。《数论杂志》113(2),171–195(2005)https://doi.org/10.1016/j.jnt.2004.09.007[12] Pérez-Buendía, J.R.：通过轨道树表示得到的动力学Néron–Ogg–Shafarevich判据。arXiv预印本，1–30（2025） https://doi.org/10.48550/ arXiv.2510.23097 。arXiv:2510.23097。已投稿至《数论研究》[13] Anashin, V., Khrennikov, A.：应用代数动力学。数学中的德格鲁伊特论丛，第49卷。Walter de Gruyter，柏林（2009）。https://doi.org/10.1515/9783110214017[14] Poonen, B.： p进迭代的插值。《伦敦数学会会报》46(3)，525–527（2014） https://doi.org/10.1112/blms/bdt102[15] Bosch, S., Güntzer, U., Remmert, R.：非阿基米德分析：刚性解析几何系统方法。数学科学基础丛书，第261卷。施普林格，柏林（1984）。https://doi.org/ 10.1007/978-3-642-52229-1 。https://doi.org/10.1007/978-3-642-52229-1[16] Fresnel, J., Put, M.：刚性解析几何及其应用。数学进展丛书，第218卷。比克豪泽，波士顿（2004）。https://doi.org/10.1007/

978-1-4612-0041-3 . https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0041-3

[17] Benedetto, R.L.: 《一个非阿基米德变量的动力学》。数学研究生教材，第198卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯（2019）。https://doi.org/10.1090/gsm/198[18] Nopal-Coello, V., Pérez-Buendía, J.R.: 粘合动力学：以 ε精度求解非阿基米德逆问题。《墨西哥数学学会公报》31，52（2025）https://doi.org/10.1007/s40590-025-00730-y。文章52；发表于2025年3月15日[19] Mahler，K.：关于 p进变量连续函数的插值级数。《纯粹与应用数学杂志》199，23–34（1958）https: //doi.org/10.1515/crll.1958.199.23[20] Serre，J.-P.：《局部域》。数学研究生教材，第67卷。施普林格，纽约（1979）。https://doi.org/10.1007/978-1-4757-5673-9[21] Hazewinkel，M.：Witt 向量。第一部分。载于：《代数手册》第6卷，第319–473页。爱思唯尔，阿姆斯特丹（2009）。https://doi.org/10.1016/S1570-7954(09)00101-9。https://doi.org/10.1016/S1570-7954(09)00101-9[22]Ribes，L.，Zalesskii，P.：《有限群》。《数学及其边界领域成果》第40卷。施普林格，柏林（2000）。https://doi.org/10.1007/ 978-3-642-56942-5[23]Silverman，J.H.：《动力系统算术》。数学研究生教材，第241卷。施普林格，纽约（2007）。https://doi.org/10.1007/978-0-387-69904-2[24] Poonen, B.：《簇上的有理点》。数学研究生教材，第186卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯（2017）。https://doi.org/10. 1090/gsm/186[25] Foldes，S.：有向图的对称性与中国剩余定理。《组合理论杂志》28(2)，217–222（1980）https://doi.org/10.1016/ 0095-8956(80)90053-2[26] Carrell，J.B.，Kaveh，K.：动量图、中国剩余定理与限制映射的满射性。载于：《逼近理论与数值分析邂逅代数、几何与拓扑》。Springer INdAM丛书，第60卷，第253–264页。施普林格，新加坡（2024）。https://doi.org/10.1007/978-981-97-6508-9_12