arXiv:2602.05457v1 [math.OC] 5 Feb 2026

斯莱特型正则条件下无限凸规划的松弛

RafaelCorrea[1†], Abderrahim Hantoute[2*†], Marco A. López[2†]1数学工程系，智利大学，圣地亚哥，智利。2,3*数学系，阿利坎特大学，阿利坎特，西班牙。

*通讯作者。电子邮箱：hantoute@ua.es；贡献作者：rcorrea@dim.uchile.cl；marco.antonio@ua.es；
†这些作者对本研究作出了同等贡献。

摘要

本文的主要目的是弥合无限维凸规划的最优值与其双共轭松弛的最优值之间的间隙。研究表明，斯莱特条件和连续性型条件可以保证零对偶间隙。所采用的方法使用了和运算及逐点上确界运算的共轭变换与双共轭变换的微积分法则。本文的第二个重要目标是利用这些关于松弛的结果，将其应用于对偶理论背景下。

关键词： 无限优化、凸性、双共轭松弛、对偶理论、共轭微积分、斯莱特条件

数学主题分类（2010）： 26B05, 26J25 , 49H05

1 引言

通过双共轭函数进行松弛的过程，亦称弱*下半连续正则化，广泛应用于鲁棒优化、控制理论、变分法、均衡理论及其他课题（例如，参见 [1], [2],[16], [15], [21], 等）。在变分法的背景下，使用双共轭松弛可以扩大可行集并降低其最优值

原始优化问题。于是，松弛（或弱）解的存在有助于获得关于原始解之解的更多信息。

给定定义在巴拿赫空间 X, 上的任意一族真凸函数 $f_t: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $t \in T \cup \{0\}$, 我们考虑如下凸优化问题

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \inf & f_0(x) \\ \text{s.t.} & f_t(x) \leq 0, \ t \in T, \\ & x \in X. \end{cases} \tag{1}$$

当 T 为无限集且 X 为欧几里得空间时，我们处于半无限凸规划的框架内（参见例如 [18] 及其中的参考文献）。$(\mathcal{P})$ 的最优值记为 $v(\mathcal{P})$，并约定若 $(\mathcal{P})$ 不可行（即 $(\mathcal{P})$ 的可行集 $F(\mathcal{P})$ 为空），则 $v(\mathcal{P}) = +\infty$。对于 $(\mathcal{P})$，我们在二重对偶空间 X^{**} 中引入其双共轭松弛

$$(\mathcal{P}^{**}) \begin{cases} \inf & f_0^{**}(z) \\ \text{s.t.} & f_t^{**}(z) \leq 0, \ t \in T, \\ & z \in X^{**}, \end{cases} \tag{2}$$

其中 f_t^{**} 表示 $f_t, t \in T.$ 的芬切尔双共轭

由于对于所有 $t \in T \cup \{0\}$, 都有 $f_t^{**} \leq f_t$，因此 $(\mathcal{P})$ 与 $(\mathcal{P}^{**})$ 之间总成立类似弱对偶的不等式,即

$$v(\mathcal{P}^{**}) \leq v(\mathcal{P}). \tag{3}$$

若 X 是自反的，且此外每个 f_t 都是下半连续的，则 Fenchel-Moreau-Rockafellar 定理保证，对于所有 $t \in T \cup \{0\}$，都有 $f_t^{**} = f_t$，因此 $(\mathcal{P})$ 与 $(\mathcal{P}^{**})$ 等价。显然，只有在非自反情形下，这个优化问题才有意义。

然而，不等式（3）可能是严格的，我们将在第 $(\mathcal{P})$节中通过非平凡的实例加以展示。 6此外，例3 表明，在任何非自反对偶巴拿赫空间中，都存在一个带有无限个约束的线性规划，其与双共轭松弛之间存在间隙。

我们的分析重点在于确保原优化问题与适当的松弛问题具有相同的最优值。为此，我们引入对 $(\mathcal{P}^{**})$ 的一个强化替代形式，即 $(\mathcal{P}_\infty^{**})$。我们证明，在满足斯莱特条件和连续性条件的情况下，$(\mathcal{P})$ 与 $(\mathcal{P}_\infty^{**})$之间不存在间隙。我们还将展示，$(\mathcal{P}_\infty^{**})$ 的其他变体同样有助于实现我们的目标。

等式

$$v(\mathcal{P}_\infty^{**}) = v(\mathcal{P}). \tag{4}$$

也可以视为一个对偶结果，因此它与凸规划中的Fenchel对偶性相关。事实上，双共轭松弛 $(\mathcal{P}_\infty^{**})$ 为优化问题 $(\mathcal{P})$的许多芬切尔型对偶问题提供了一个下估计。 由此，我们证明，保证等式（4）成立的条件，同时也构成 $(\mathcal{P})$ 与这些Fenchel对偶之间零对偶间隙的充分条件。

本文结构如下。记号与预备结果汇集于第2节。第3 节包含确立若干双共轭松弛零对偶间隙的主要结果。这些结果随后应用于第4节中涉及类凹约束族的优化模型。在第5节中，我们探讨双共轭松弛与无限凸规划中Fenchel对偶性之间的联系。第6 节给出一些示例，说明采用不同双共轭松弛的动机，并指出标准松弛的局限性。最后，结论性评述见第7节。

2 记号与预备结果

本文中， X 是一个实巴拿赫空间， X^* 是其对偶空间， X^{**} 是其双对偶空间。给定 $x \in X$和 $x^* \in X^*$，我们采用记号 $\langle x^*, x\rangle \equiv \langle x, x^*\rangle := x^*(x)$。通过将 $X \ni x \leftrightarrow \langle \cdot, x\rangle \in X^{**}$. 等同，我们考虑包含关系$X \subset X^{**}$ 。零向量记为 θ，而B_X 表示 X. 的闭单位球。在不存在歧义时，我们用 $\|\cdot\|$ 表示任意巴拿赫空间中的范数。例如， ℓ_1 是由实数序列 $(x_n)_n$ 构成的巴拿赫空间，满足 $\|(x_n)_n\| := \sum_{n\geq 1} |x_n| < +\infty$；而 ℓ_∞ 是 ℓ_1的对偶空间，其范数定义为 $\|(x_n)_n\| := \sup_{n\geq 1} |x_n|$。我们用 ℓ_1^+和 ℓ_∞^+ 分别表示 ℓ_1 和 ℓ_∞中的非负数列集合。我们记 $\mathbb{R} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$和 $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$，约定$0 \cdot (+\infty) = +\infty$.

给定集合 $A \subset X$，用 co(A)，int(A)，和 cl(A)（或 $\overline{A}$）分别表示 A 的凸包、内部和闭包。令 $\overline{\text{co}}(A) :=$cl(co($A$))。

给定函数 $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$，集合 $\overline{\text{dom}}\, f := \{x \in X\colon f(x) < +\infty\}$ 和 epi $f := \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}\colon f(x) \leq \lambda\}$ 分别是 f 的（有效）定义域和上图集。令 $[f \leq \alpha] := \{x \in X\colon f(x) \leq \alpha\}, \alpha \in \mathbb{R}$。 f 的正部是函数 $f^+ := \max\{f, 0\}$.。特别地， A 的示性函数定义为 $\text{I}_A(x) = 0$ 当 $x \in A$ 时，以及 $\text{I}_A(x) = +\infty$ 在其他情况下。若 $f \not\equiv +\infty$ 且 $f > -\infty$，则函数 f 是真函数；若 epi f 是闭集，则称其下半连续（简称 lsc）；若 epi f 是凸集，则称其为凸函数。 f 的闭包和闭凸包分别是函数 $\overline{\text{cl}}\, f$（或 $\overline{f}$）和 co$f$，满足 epi $\overline{f} =$ cl(epi f) 且 epi($\overline{\text{co}} f$) $=$co(epi f)。定义在 X 上的真凸下半连续函数族记为 $\Gamma_0(X)$。

f 的共轭函数是下半连续凸函数 $f^*\colon X^* \to \mathbb{R}$，其定义为

$$f^*(x^*) := \sup\{\langle x^*, x\rangle - f(x),\ x \in X\},$$

而 f 的双共轭是 f^*的共轭函数；也就是说，

$$f^{**}(z) := \sup\{\langle z, x^*\rangle - f^*(x^*),\ x^* \in X^*\},\ z \in X^{**}.$$

非空集 $A \subset X$ 的支撑函数为 $\sigma_A := (\text{I}_A)^*$. 根据 Fenchel-Moreau-Rockafellar 定理（[8, 定理 3.2.2(ii)]），若凸函数 f 存在连续仿射下界（例如，当 $f \in \Gamma_0(X)$时），则有

$$f^{**}(z) = \overline{f}^{w^{**}}(z) := \liminf_{x \to z,\ x \in X} f(x),\ \text{for all } z \in X^{**}, \tag{5}$$

其中，“$\rightharpoonup$”表示 X^{**} 的弱-*拓扑收敛，记作 w^{**} （通常表示为 $\sigma(X^{**},\ X^{*})$），并且

$$\liminf_{x\rightharpoonup z,\ x\in X} f(x) := \sup_{x^*\in X^*,\ \varepsilon>0}\ \inf_{x\in B_{x^*}(z,\varepsilon)} f(x),$$

其中 $B_{x^*}(z,\ \varepsilon) := \{x \in X\colon\ |\langle x^*,\ x\rangle - \langle z,\ x^*\rangle| \le \varepsilon\}$. 有时我们用 $\mathrm{cl}^{w^{**}}(f)$ 代替 $f^{w^{**}}$. 当 f为下半连续时，在 X中有 $f = f^{**}$.

对于每个非空闭集 $A \subset X\ (\subset X^{**})$，我们有

$$\mathrm{I}_A^{**} = \mathrm{cl}^{w^{**}}(\mathrm{I}_A) = \mathrm{I}_{\overline{A}^{w^{**}}},$$

其中 $A^{w^{**}}$ 表示 A在 X^{**}. 中的 w^{**}-闭包。因此，由此可得

$$\overline{\mathrm{dom}\, f^{**}}^{w^{**}} = \overline{\mathrm{dom}\, f}^{w^{**}}. \tag{6}$$

给定凸函数 $f_0,\ f_1,\ \cdots,\ f_m\colon\ X \to \mathbb{R}_\infty$ 满足 $f_1,\ \cdots,\ f_m$ 在 定义域 f_0中的某一点处连续，则有（[19], [21]）

$$(f_0 + f_1 + \cdots + f_m)^{**} = f_0^{**} + f_1^{**} + \cdots + f_m^{**}. \tag{7}$$

相同的假设保证

$$(\max\{f_0, f_1, \cdots, f_m\})^{**} = \max\{f_0^{**}, f_1^{**}, \cdots, f_m^{**}\}. \tag{8}$$

最后一个关系在 Brézis-Attouch条件（[11]）下也成立。文献 [3, 10, 22]中还提出了其他条件。特别是，结合（8）和（6），上述连续性假设意味着（[9, 推论 7]）

$$\mathrm{cl}^{w^{**}}(\mathrm{dom}(f^{**})) = \mathrm{cl}^{w^{**}}(\mathrm{dom}\, f) = \cap_{k=1}^m \mathrm{cl}^{w^{**}}(\mathrm{dom}\, f_k) = \cap_{k=1}^m \mathrm{cl}^{w^{**}}(\mathrm{dom}\, f_k^{**}). \tag{9}$$

最后，设 $f_0,\ f\colon\ X \to \mathbb{R}_\infty$ 为两个凸函数，满足 μ ：=下确界$_{f(x)\le 0} f_0$（x）$\in \mathbb{R}$，且 f（x_0）< 0对于某个 x_0 $\in$定义域 f_0成立（即满足 Slater条件）。那么，实数 $\alpha \in \mathbb{R}$ 满足

$$0 = \inf_{x\in X} \max\{f_0(x) - \alpha,\ f(x)\} \tag{10}$$

当且仅当 $\alpha = \mu$. 我们可参见，例如， [7, 引理 3。7] 关于有限维情形的证明；该论证可直接推广到我们的框架。

3 松弛理论

本节将介绍本文的主要结果，研究凸优化问题 $(\mathcal{P})$ （定义于 (1)）的松弛。我们给出若干结果，说明$(\mathcal{P})$的最优值与各种松弛的最优值之间的关系。

我们假设 T 是可数的，记作 $T:=\{1,2,\cdots\}$，此时优化问题 $(\mathcal{P})$ 具有如下形式

$$(\mathcal{P})\quad \begin{cases} \inf & f_0(x) \\ \text{s.t.} & f_k(x)\le 0,\ k\ge 1, \\ & x\in X, \end{cases}$$

其中 $f_k: X\to\mathbb{R}_\infty$, $k\ge 0$, 均假设为真凸函数。我们进一步假设最优值 $v(\mathcal{P})<+\infty$; 等价地，可行集 $F(\mathcal{P})$ 非空。**注1**。若 T 不可数，但 X 可分，则 $v(\mathcal{P})$ 在将 T 替换为适当的可数子集后仍保持不变（例如参见 *[14,*引理 *3*。*1])* 。

A正如人们所预期的 t, the following Slat其下界dition w将会 至关重要ial i在我们的分析中 lysis.**定义 1.** 我们称约束系统 $\{f_t(x)\le 0,\ t\in T\}$ 满足（强）*Slater*条件，如果存在 $x_0\in X$ 使得

$$\sup_{t\in T} f_t(x_0)<0.$$

点 x_0 称为系统 $\{f_t(x)\le 0,\ t\in T\}$. 的斯莱特点。当另外有 $x_0\in$ 定义域 f_0时，我们称优化问题 $(\mathcal{P})$ 满足*Slater*条件。

$(\mathcal{P})$ 的一个自然松弛候选形式为

$$(\mathcal{P}^{**})\quad \begin{array}{ll} \inf & f_0^{**}(z) \\ \text{s.t.} & f_k^{**}(z)\le 0,\ k\ge 1, \\ & z\in X^{**}. \end{array} \tag{11}$$

显然，$v(\mathcal{P}^{**})\le v(\mathcal{P})$。此外，根据 Fenchel-Moreau-Rockafellar 定理（5），当 X 是自反的且 f_k均为下半连续时，显然有零间隙，$v(\mathcal{P}^{**})=v(\mathcal{P})$，因为两个优化问题相同。

以下命题表明，当 $(\mathcal{P})$ 中的约束数量有限时，$(\mathcal{P})$ 与 $(\mathcal{P}^{**})$ 之间也存在零间隙。

命题 1. 假设凸函数 f_k, $k=1,\cdots,m$ 在 定义域 f_0. 中某一点处有限且连续。那么，在 *Slater* 条件下，我们有

$$v(\mathcal{P})=v(\mathcal{P}^{**}).$$

证明. 我们不妨假设 $v(\mathcal{P})\in\mathbb{R}$；否则，由于关系式$f_0^{**}\le f_0$和 $f_k^{**}\le f_k^{**}$,对 $k\ge 1$,成立，因此结论显然成立

$$v(\mathcal{P}^{**})\le \inf_{f_k^{**}(x)\le 0,\ k\ge 1,\ x\in X} f_0^{**}(x)\le \inf_{f_k(x)\le 0,\ k\ge 1,\ x\in X} f_0(x)=v(\mathcal{P}).$$

定义性能函数

$$g:=\max\{f_0-v(\mathcal{P}),\ f_k,\ k=1,\cdots,m\}.$$

那么，根据 [8, 命题 5.2.4(ii)],

$$\operatorname{cl} g:=\max\{(\operatorname{cl} f_0)-v(\mathcal{P}),\ \operatorname{cl} f_k,\ k=1,\cdots,m\}.$$

利用（8），当前假设意味着

$$\begin{aligned} g^{**} = (\mathrm{cl}\, g)^{**} &= \max\{(\mathrm{cl}\, f_0)^{**} - v(\mathcal{P}),\ (\mathrm{cl}\, f_k)^{**},\ k = 1, \cdots, m\} \\ &= \max\{f_0^{**} - v(\mathcal{P}),\ f_k^{**},\ k = 1, \cdots, m\}, \end{aligned}$$

并且，因此，

$$\begin{aligned} 0 = \inf_X g(x) = \inf_{X^{**}} g^{**}(z) &= \inf_{X^{**}} \max\{f_0^{**}(z) - v(\mathcal{P}),\ f_k^{**}(z),\ k = 1, \cdots, m\} \\ &= \inf_{X^{**}} \max\{f_0^{**}(z) - v(\mathcal{P}),\ \max_{1 \le k \le m} f_k^{**}(z)\}. \end{aligned} \tag{12}$$

根据 Slater 假设，存在 $x_0 \in \mathrm{dom}\ f_0 \subset \mathrm{dom}\ f_0^{**}$使得

$$\max_{k \ge 1} f_k^{**}(x_0) \le \max_{k \ge 1} f_k(x_0) < 0.$$

因此，将（10）应用于优化问题 $\inf_{\max_{1 \le k \le m} f_k^{**}(z) \le 0,\ z \in X^{**}} f_0^{**}(z)$,（12）可得 $v(\mathcal{P}) = v(\mathcal{P}^{**})$。 ■

如第 3节的例 6所示，当优化问题$(\mathcal{P})$包含无限多个约束时，上文引入的双共轭松弛 $(\mathcal{P}^{**})$ 需要进一步强化，才能消除其与$(\mathcal{P})$之间的间隙。为解决这一问题，我们为$(\mathcal{P})$ 关联一个强化松弛问题，

$$(\mathcal{P}_\infty^{**}) \begin{cases} \inf & f_0^{**}(z) \\ \text{s.t.} & f_k^{**}(z) \le 0,\ k \ge 1, \\ & f_\infty^{**}(z) \le 0, \\ & z \in \overline{\mathrm{dom}(f^{**})}^{w^{**}}, \end{cases} \tag{13}$$

其中 $f := \sup_{k \ge 1} f_k$，函数 $f_\infty : X \to \mathbb{R}_\infty$ 定义为

$$f_\infty(x) := \limsup_{k \to \infty} f_k(x), \tag{14}$$

而 f_∞^{**} 是其双共轭函数。当（$\mathcal{P}$）中的约束数量有限时，我们令$f_\infty \equiv -\infty$。

接下来我们将证明，对于具有有限个约束的凸优化问题，这一表述可化为在（$\mathcal{P}^{**}$）中引入的松弛（11）。

命题 2。若（）$\mathcal{P}$）中的约束数量是有限的，设为 m，且函数f_k、 $k = 1$、$\cdots$、m 在 定义域 f_0中的某一点处均为有限且连续，则 （$\mathcal{P}_\infty^{**}$）与 （$\mathcal{P}^{**}$）重合。

证明。一方面，我们有 $f_\infty \equiv -\infty$，因此 $f_\infty^{**} \equiv -\infty$ 且不等式$f_\infty^{**}(z) \le 0$在 $(\mathcal{P}_\infty^{**})$ 中显然成立。另一方面，连续性假设意味着 $f^{**} = \mathrm{cl}^{w^{**}}(f)$，由（5）可得，且

$$\mathrm{cl}^{w^{**}}(\mathrm{dom}(f^{**})) = \mathrm{cl}^{w^{**}}(\mathrm{dom}\, f) = \mathrm{cl}^{w^{**}}(\cap_{k=1}^m \mathrm{dom}\, f_k).$$

因此，由（9）可得

$$\mathrm{cl}^{w^{**}}(\mathrm{dom}(f^{**})) = \cap_{k=1}^{m} \mathrm{cl}^{w^{**}}(\mathrm{dom}\, f_k) = \cap_{k=1}^{m} \mathrm{cl}^{w^{**}}(\mathrm{dom}\, f_k^{**}), \tag{15}$$

并且，$(\mathcal{P}_\infty^{**})$ 中的约束 $z \in \mathrm{cl}^{w^{**}}(\mathrm{dom}(f^{**}))$ 是冗余的。这表明 $(\mathcal{P}_\infty^{**})$ 与优化问题 $(\mathcal{P}^{**})$ 一致。 ■

如预期，最优值 $v(\mathcal{P}_\infty^{**})$ 不超过 $v(\mathcal{P})$；这一点将在下面的引理中证明。

引理 3. 我们有

$$v(\mathcal{P}_\infty^{**}) \le v(\mathcal{P}).$$

证明。 由于对于所有 $x \in X$ 和 $k \ge 0$, $X \subset X^{**}$ and $f_k^{**}(x) \le f_k(x)$，因此可得

$$\begin{aligned} v(\mathcal{P}_\infty^{**}) &\le \inf_{\substack{f_k^{**}(x)\le 0,\ k\ge 1,\ f_\infty^{**}(x)\le 0 \\ x\in\overline{\mathrm{dom}\, f^{**}}^{w^{**}},\ x\in X}} f_0^{**}(x) \\ &\le \inf_{\substack{f_k(x)\le 0,\ k\ge 1,\ f_\infty^{**}(x)\le 0 \\ x\in\overline{\mathrm{dom}\, f^{**}}^{w^{**}},\ x\in X}} f_0(x) = \inf_{f_k(x)\le 0,\ k\ge 1,\ x\in X} f_0(x) = v(\mathcal{P}). \end{aligned}$$

上面的第一个等式源于这样一个事实：若 x 是 $(\mathcal{P})$ 的可行解，则 $x \in \mathrm{dom}\, f \subset \mathrm{dom}\, f^{**} \subset \mathrm{dom}\, f^{**}\overline{^{w^{**}}}$ and $f_\infty^{**}(x) \le f_\infty(x) = \limsup_{k\to\infty} f_k(x) \le 0$. ■

我们首先证明在 Slater条件以及上确界函数 $\sup_{k\ge 1} f_k$. 的连续性条件下，$(\mathcal{P})$ 的最优值与其松弛形式 $(\mathcal{P}_\infty^{**})$ 的最优值相等，上和函数族 f_k 的概念如下：$X \to \mathbb{R}_\infty$, $k \ge 1$：

$$\left(\sum_{k\ge 1} f_k\right)(x) := \limsup_{m\to+\infty} \sum_{k=1,\cdots,m} f_k(x),\ x \in X. \tag{16}$$

引理 4。 假设 $(\mathcal{P})$ 满足 *Slater*条件，且 $v(\mathcal{P}) \in \mathbb{R}$。则存在 $\lambda := (\lambda_1、\ \lambda_2、\ \cdots) \in \ell_1^+$、$\hat{}\lambda := (\hat{}\lambda_1、\ \hat{}\lambda_2、\ \cdots) \in \ell_\infty^+$ 以及 $\lambda_\infty \ge 0$，使得

$$v(\mathcal{P}) = \inf_{x\in X} \left(f_0(x) + \sum_{k\ge 1} \lambda_k f_k^+(x) + \lambda_\infty f_\infty(x)\right) \tag{17}$$

$$= \inf_{x\in X} \left(f_0(x) + \sum_{k\ge 1} \hat{\lambda}_k f_k^+(x)\right). \tag{18}$$

证明。 关系式（18）由 [14,引理3.1(ii)]得出。此外，根据 [14, 定理 3。1]，，Slater 条件意味着存在某些 $\lambda \in \ell_1^+$和 $\lambda_\infty \ge 0$，使得

$$v(\mathcal{P}) = \inf_X (f_0 + \textstyle\sum_{k\ge 1} \lambda_k f_k + \lambda_\infty f_\infty), \tag{19}$$

其中 $\sum_{k\ge 1} \lambda_k f_k$ 是式（16）中定义的上和。因此，由于 $\sum_{k\ge 1} \lambda_k f_k \le \sum_{k\ge 1} \lambda_k f_k^+$，我们得到

$$v(\mathcal{P}) \le \inf_X (f_0 + \textstyle\sum_{k\ge 1} \lambda_k f_k^+ + \lambda_\infty f_\infty)$$

$$\leq \inf_{f_k(x)\leq 0,\ k\geq 1} (f_0(x)+\lambda_\infty f_\infty(x)) \leq \inf_{f_k(x)\leq 0,\ k\geq 1} f_0(x) = v(\mathcal{P}),$$

由此得出式（17）。■

我们还需要以下引理，它将（7）中的双共轭和规则推广到上和。

引理 5。考虑一个非负凸函数的可数族 $f_k: X\to\mathbb{R}_\infty$，并令 $\alpha_k>0$, $k\geq 1$，使得 $(\alpha_k)_k\in\ell_1$。记 $f:=\sup_{k\geq 1} f_k$，并假设每个 f_k 在定义域 $f.$ 中的某一点处连续。则

$$\left(\sum_{k\geq 1}\alpha_k f_k\right)^{**}(z) = \sum_{k\geq 1}\alpha_k f_k^{**}(z),\ \textit{for all } z\in \operatorname{dom} f^{**}. \tag{20}$$

证明。记 $g=\sum_{k\geq 1}\alpha_k f_k.$ $f_k\geq f_k^{**}$ $k\geq 1$ $g\geq$: 由 $\sum_{k\geq 1}\alpha_k f_k^{**}.$ f_k^{**} 于，对于每个，我们有。由于这些函数也都是非负的，因此有

$$\sum_{k\geq 1}\alpha_k f_k^{**} = \sup_{m\geq 1}\sum_{k=1,\cdots,m}\alpha_k f_k^{**},$$

且函数 $\sum_{k\geq 1}\alpha_k f_k^{**}$是凸且下半连续的。此外，对于每个 $x\in$定义域 $f,$ 我们有

$$\sum_{k\geq 1}\alpha_k f_k^{**}(x) \leq \sum_{k\geq 1}\alpha_k f_k(x) \leq \sum_{k\geq 1}\alpha_k f(x) < +\infty,$$

因此 $\sum_{k\geq 1}\alpha_k f_k^{**}\in\Gamma_0(X^{**})$，从而得到

$$g^{**}\geq (\textstyle\sum_{k\geq 1}\alpha_k f_k^{**})^{**} = \sum_{k\geq 1}\alpha_k f_k^{**},$$

即，不等式“$\geq$”在（20）中。

为证明反向不等式，我们固定 $\varepsilon>0$，并选取足够大的 $k_0\geq 1$，使其满足

$$\textstyle\sum_{k>m}\alpha_k \leq \sum_{k>k_0}\alpha_k \leq \varepsilon,\ \text{for all } m\geq k_0.$$

固定 $m\geq k_0.$，我们有

$$g:=\limsup_{n\to\infty}\textstyle\sum_{1\leq k\leq n}\alpha_k f_k = \sum_{1\leq k\leq m}\alpha_k f_k + \sum_{k>m}\alpha_k f_k \leq \sum_{1\leq k\leq m}\alpha_k f_k + \varepsilon f. \tag{21}$$

对于每个 $k\geq 1$，令 $x_k\in\operatorname{dom} f(\subset\cap_{j\geq 1}\operatorname{dom} f_j)$ 为 $f_k.$ 的一个连续点。那么

$$\bar{x}=\textstyle\sum_{1\leq k\leq m}\dfrac{x_k}{m}\in\cap_{j=1,\cdots,m}\operatorname{int}(\operatorname{dom} f_j),$$

且函数 $\sum_{1\leq k\leq m}\alpha_k f_k$ 在 $\bar{x}\in\operatorname{dom} f.$ 处连续。因此，（21）与（7）结合可得

$$g^{**}(z)\leq \textstyle\sum_{1\leq k\leq m}\alpha_k f_k^{**}(z)+\varepsilon f^{**}(z),\ \text{for all } m\geq k_0.$$

最后，当 ε 趋于零且 $z\in\operatorname{dom} f^{**}.$ 时，结论成立 ■

现在我们可以给出本节的主要结果了。

定理6. 假设$(\mathcal{P})$ 满足 *Slater*条件。若函数 $f:=\sup_{k\geq 1} f_k$ 在定义域 f_0中的某一点处连续，则

$$v(\mathcal{P}_\infty^{**}) = v(\mathcal{P}).$$

证明。我们可以假设 $v(\mathcal{P}) \in \mathbb{R}$；否则， $v(\mathcal{P}) = -\infty$，由引理 3 可知 $v(\mathcal{P}_\infty^{**}) \leq v(\mathcal{P})$，因此结论成立。此外，根据同一个引理 3，我们只需证明不等式 $v(\mathcal{P}) \leq v(\mathcal{P}_\infty^{**})$。根据引理 4，Slater条件推出存在某个 $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \cdots) \in \ell_1^+$和 $\lambda_\infty \geq 0$，使得

$$v(\mathcal{P}) = \inf_X (f_0 + \textstyle\sum_{k\geq 1} \lambda_k f_k^+ + \lambda_\infty f_\infty).$$

等价地，由于一个函数及其双共轭具有相同的下确界，我们得到

$$v(\mathcal{P}) = \inf_{X^{**}} (f_0 + \textstyle\sum_{k\geq 1} \lambda_k f_k^+ + \lambda_\infty f_\infty)^{**}. \tag{22}$$

因此，证明归结为分解最后一个等式中各项之和的双共轭。

令 $\bar{x} \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} f_0$为 f的一个连续点，并记 $g := \sum_{k\geq 1} \lambda_k f_k^+$.由于 $g \leq (\sum_{k\geq 1} \lambda_k) f^+$且 $f_\infty \leq f$， g和 f_∞在 $\bar{x} \in \operatorname{dom} f_0$.处均连续。因此，当 $\lambda_\infty > 0$. 时，$\lambda_\infty f_\infty$ 显然在 $\bar{x}$ 处连续。此外，当 $\lambda_\infty = 0$时，我们的约定 $0 \cdot (+\infty) = +\infty$意味着 $\lambda_\infty f_\infty = \mathrm{I}_{\operatorname{dom} f_\infty} \leq \mathrm{I}^{\operatorname{dom} f}$，因此 $\lambda_\infty f_\infty$在 $\bar{x}$. 处也连续。于是，利用 (7)，(22) 推出

$$v(\mathcal{P}) = \inf_{X^{**}} (f_0^{**} + g^{**} + (\lambda_\infty f_\infty)^{**}). \tag{23}$$

注意到 $(\lambda_\infty f_\infty)^{**} = \lambda_\infty f_\infty^{**}$当 $\lambda_\infty > 0$. 此外，当 $\lambda_\infty = 0$ 时，我们有

$$(\lambda_\infty f_\infty)^{**} = (\mathrm{I}_{\operatorname{dom} f_\infty})^{**} = \mathrm{I}_{\overline{\operatorname{dom} f_\infty}^{w^{**}}} \leq \mathrm{I}_{\operatorname{dom} f_\infty^{**}} = 0 \cdot f_\infty^{**}.$$

因此，在所有情况下我们都有 $(\lambda_\infty f_\infty)^{**} \leq \lambda_\infty f_\infty^{**}$且 (23) 得出

$$v(\mathcal{P}) \leq \inf_{X^{**}} (f_0^{**} + g^{**} + \lambda_\infty f_\infty^{**}). \tag{24}$$

为简化 g^{**}，注意到，由于定义域 $f \subset$ 定义域 f_k 对所有 $k \geq 1$均成立，

$$g = \textstyle\sum_{k\geq 1,\ \lambda_k > 0} \lambda_k f_k^+ + \sum_{k\geq 1,\ \lambda_k = 0} \mathrm{I}_{\operatorname{dom} f_k} \leq \sum_{k\geq 1,\ \lambda_k > 0} \lambda_k f_k^+ + \mathrm{I}_{\operatorname{dom} f}.$$

再次应用（7），我们得到

$$g^{**} \leq (\textstyle\sum_{k\geq 1,\ \lambda_k > 0} \lambda_k f_k^+ + \mathrm{I}_{\operatorname{dom} f})^{**} = (\sum_{k\geq 1,\ \lambda_k > 0} \lambda_k f_k^+)^{**} + \mathrm{I}_{\overline{\operatorname{dom} f}^{w^{**}}}. \tag{25}$$

此外，根据引理 5 以及 dom $f \subset \text{dom}(\sup_{k\geq 1,\ \lambda_k>0} f_k^+)$，我们有 dom $f^{**} \subset \text{dom}(\sup_{k\geq 1,\ \lambda_k>0} f_k^+)^{**}$，对所有 $z \in \text{dom } f^{**}$，均成立，并且

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k\geq 1,\ \lambda_k>0}\lambda_k f_k^+\right)^{**}(z) &= \sum_{k\geq 1,\ \lambda_k>0}\lambda_k (f_k^+)^{**}(z)\\ &= \sum_{k\geq 1,\ \lambda_k>0}\lambda_k (f_k^{**})^+(z) \leq \sum_{k\geq 1}\lambda_k (f_k^{**})^+(z),\end{aligned}$$

其中我们用到了如下事实：$0 \leq (f_k^+)^{**} = (f_k^{**})^+$ 由（8）得。结合（24）、（25）以及最后一个关系，并考虑到 定义域 $f^{w^{**}}$ =定义域 $f^{**^{w^{**}}}$，我们得出

$$\begin{aligned}v(\mathcal{P}) &\leq \inf_{X^{**}} (f_0^{**} + \textstyle\sum_{k\geq 1}\lambda_k (f_k^{**})^+ + \lambda_\infty f_\infty^{**} + \mathrm{I}_{\overline{\text{dom } f}^{w^{**}}})\\ &\leq \inf_{\substack{f_k^{**}(z)\leq 0,\ k\geq 1,\\ f_\infty^{**}(z)\leq 0,\ \ z\in\overline{\text{dom } f}^{w^{**}}}} (f_0^{**}(z) + \textstyle\sum_{k\geq 1}\lambda_k (f_k^{**})^+(z) + \lambda_\infty f_\infty^{**}(z) + \mathrm{I}_{\overline{\text{dom } f}^{w^{**}}}(z)),\end{aligned}$$

由此可得

$$v(\mathcal{P}) \leq \inf_{\substack{f_k^{**}(z)\leq 0,\ k\geq 1,\\ f_\infty^{**}(z)\leq 0,\ z\in\overline{\text{dom } f^{**}}^{w^{**}}}} f_0^{**}(z) = v(\mathcal{P}_\infty^{**}).$$

■

还可以考虑其他相关的双共轭型松弛，以此提供替代方案，不再使用函数 f_∞ 和集合 定义域 $f^{**^{w^{**}}}$.

推论7. 在定理 6的假设下，有

$$v(\mathcal{P}_1^{**}) = v(\mathcal{P}_2^{**}) = v(\mathcal{P}),$$

其中

$$(\mathcal{P}_1^{**})\begin{cases}\inf & f_0^{**}(z)\\ s.t. & f_k^{**}(z)\leq 0,\ k\geq 1,\\ & f_\infty^{**}(z)\leq 0,\\ & z\in \text{dom } f^{**},\end{cases} \quad \textit{and } (\mathcal{P}_2^{**})\begin{cases}\inf & f_0^{**}(z)\\ s.t. & f_k^{**}(z)\leq 0,\ k\geq 1,\\ & z\in \overline{\text{dom}(\sum_{k\geq 1} f_k^+)}^{w^{**}}.\end{cases}$$

证明。 首先，我们证明以下不等式

$$v(\mathcal{P}_\infty^{**}) \leq v(\mathcal{P}_1^{**}) \leq v(\mathcal{P}) \text{ and } v(\mathcal{P}_\infty^{**}) \leq v(\mathcal{P}_2^{**}) \leq v(\mathcal{P}), \tag{26}$$

其中 $(\mathcal{P}_\infty^{**})$ 是式（13）中的松弛；之后，定理 6 将给出所需的等式。

不等式 $v(\mathcal{P}_\infty^{**}) \leq v(\mathcal{P}_1^{**})$ 是显然的。为证明不等式 $v(\mathcal{P}_\infty^{**}) \leq v(\mathcal{P}_2^{**})$，我们首先注意到，每个满足 $x \in \text{dom}(\sum_{k\geq 1} f_k^+)$ 的对象都有 $\lim_{k\to\infty} f_k^+(x) = 0$. 因此，$x \in \text{dom } f$，且 $f_\infty(x) \leq \limsup_{k\to\infty} f_k^+(x) = 0$. 由此可得，$\text{dom}(\sum_{k\geq 1} f_k^+) \subset \text{dom } f$，且 $\text{dom}(\sum_{k\geq 1} f_k^+) \subset [f_\infty \leq 0]$. 取 w^{**}-闭包

得到

$$\overline{\mathrm{dom}(\sum_{k\geq 1} f_k^+)}^{w^{**}} \subset \overline{\mathrm{dom}\, f}^{w^{**}} = \overline{\mathrm{dom}\, f^{**}}^{w^{**}},$$

and

$$\overline{\mathrm{dom}(\sum_{k\geq 1} f_k^+)}^{w^{**}} \subset \overline{[f_\infty \leq 0]}^{w^{**}} \subset \overline{[f_\infty^{**} \leq 0]}^{w^{**}} = [f_\infty^{**} \leq 0].$$

换言之，$F(\mathcal{P}_2^{**}) \subset F(\mathcal{P}_\infty^{**})$，因此可得 $v(\mathcal{P}_\infty^{**}) \leq v(\mathcal{P}_2^{**})$。

为证明不等式 $v(\mathcal{P}_1^{**}) \leq v(\mathcal{P})$，我们取一个可行点 $x \in F(\mathcal{P})$。于是

$$f_k^{**}(x) \leq f_k(x) \leq 0, \text{ for all } k \geq 1,$$

从而 $x \in$ 定义域 $f \subset$ 定义域 f^{**} 且 $f_\infty(x) \leq 0$. 因此,

$$v(\mathcal{P}_1^{**}) \leq \inf_{\substack{f_k^{**}(x)\leq 0,\ k\geq 1,\ f_\infty^{**}(x)\leq 0 \\ x\in \mathrm{dom}\, f^{**},\ x\in X}} f_0^{**}(x) \leq \inf_{f_k(x)\leq 0,\ k\geq 1} f_0(x);$$

也就是说，$v(\mathcal{P}_1^{**}) \leq v(\mathcal{P})$。同样，每个可行点 $x \in F(\mathcal{P})$，都满足$\sum_{k\geq 1} f_k^+(x) \leq 0$. 因此，$F(\mathcal{P}) \subset$ 定义域 $(\sum_{k\geq 1} f_k^+)$，由此可得

$$F(\mathcal{P}) \subset \overline{F(\mathcal{P})}^{w^{**}} \subset \overline{\mathrm{dom}(\sum_{k\geq 1} f_k^+)}^{w^{**}}.$$

这表明 $v(\mathcal{P}_2^{**}) \leq v(\mathcal{P})$，证毕。 ■

现在我们考虑第三种松弛:

$$(\mathcal{P}_3^{**}) \quad \begin{cases} \inf \quad f_0^{**}(z) \\ \text{s.t. } f_k^{**}(z) \leq 0,\ k \geq 1, \\ \qquad z \in \overline{\mathrm{dom}\, f^{**}}^{w^{**}}. \end{cases}$$

以下推论涉及一种强化 Slater 条件，要求存在某个 $x_0 \in$ 定义域 f_0 和 $(\alpha_k)_k \in \ell_1$，使得 $\alpha_k > 0$，对所有 $k \geq 1$，并且

$$\sup_{k\geq 1} \alpha_k f_k(x_0) < 0. \tag{27}$$

请注意，当优化问题 $(\mathcal{P})$ 只有有限个约束时，该性质等价于通常的 Slater 条件。在线性半无限优化中，(27) 可由在 [12] 和 [6, 第 3]节中引入的所谓强化约束系统的强 Slater 条件推出。

推论 8. 假设强化 *Slater* 条件成立。若 $f := \sup_{k\geq 1} f_k$ 在定义域 f_0中的某处连续，则

$$v(\mathcal{P}_3^{**}) = v(\mathcal{P}).$$

证明. 令 $x_0 \in$ 定义域 f_0 且 $(\alpha_k)_k \in \ell_1^+$ 如（27）所示。注意到 $(\mathcal{P})$ 与该优化问题具有相同的最优值

$$(\mathcal{P}') \begin{cases} \inf \ f_0(x) \\ \text{s.t. } g_k(x) := \alpha_k f_k(x) \le 0, \ k \ge 1. \end{cases}$$

由于后一优化问题依假设满足（通常的）Slater条件，且函数 $\sup_{k\ge1} g_k$ 在 定义域 f_0 中某处连续，推论 7 蕴含

$$v(\mathcal{P}) = v(\mathcal{P}') = \inf_{g_k^{**}(z)\le 0, \ k\ge1, \ z\in \overline{\operatorname{dom}\left(\sum_{k\ge1} g_k^+\right)}^{w^{**}}} f_0^{**}(z). \tag{28}$$

注意到$g_k^+ = \alpha_k f_k^+$ 与 $g_k^{**} = \alpha_k f_k^{**}$，对所有 $k \ge 1$. 成立。下面我们证明

$$\overline{\operatorname{dom} f^{**}}^{w^{**}} \subset \overline{\operatorname{dom}\left(\sum_{k\ge1} g_k^+\right)}^{w^{**}}. \tag{29}$$

事实上，对任意 $x \in$ 定义域 f，我们得到

$$\sum_{k\ge1} g_k^+(x) \le \sum_{k\ge1} \alpha_k f_k^+(x) \le \left(\sum_{k\ge1}\alpha_k\right) f^+(x) < +\infty,$$

这表明定义域 $f \subset$ 定义域 $\left(\sum_{k\ge1} g_k^+\right)$.。因此，取 w^{**}-闭包可得

$$\overline{\operatorname{dom} f^{**}}^{w^{**}} = \overline{\operatorname{dom} f}^{w^{**}} \subset \overline{\operatorname{dom}\left(\sum_{k\ge1} g_k^+\right)}^{w^{**}},$$

且（28）蕴含

$$v(\mathcal{P}) \le \inf_{g_k^{**}(z)\le 0, \ k\ge1, \ z\in \overline{\operatorname{dom} f^{**}}^{w^{**}}} f_0^{**}(z) = v(\mathcal{P}_3^{**}).$$

因此，我们即告完成，因为不等式 $v(\mathcal{P}_3^{**}) \le v(\mathcal{P})$是显然的。 ∎

作为前述结果的推论，我们得到上确界函数的双共轭公式，该公式将在第6节中使用。

定理9。 给定函数 $f_k \in \Gamma_0(X)$ $k \ge 1$，假设 $f :=$ 上确界$_{k\ge1} f_k$ 在某处连续。则

$$f^{**} = \max\left\{\sup_{k\ge1} f_k^{**}, \ f_\infty^{**}\right\} + \mathrm{I}_{\overline{\operatorname{dom} f}^{w^{**}}}. \tag{30}$$

证明。 首先假设 $\inf_{x\in X} f(x) < +\infty$. 记

$$\inf_{x\in X} f(x) = \inf_{f_k(x)-y\le 0, \ k\ge1, \ x\in X, \ y\in\mathbb{R}} y \equiv \inf_{g_k(x,y)\le 0, \ k\ge1, \ x\in X, \ y\in\mathbb{R}} g_0(x,y), \tag{31}$$

其中 $g_k \in \Gamma_0(X \times \mathbb{R})$ $k \geq 0$, 定义为

$$g_0(x,y) := y \text{ and } g_k(x,y) := f_k(x) - y, \text{ for } k \geq 1.$$

记 $g := \sup_{k\geq 1} g_k$. 于是，对于所有 $(x,y) \in X \times \mathbb{R}.$，有 $g(x,y) = \sup_{k\geq 1}(f_k(x) - y) = f(x) - y$。对于所有 $(z,y) \in X^{**} \times \mathbb{R}$，由（5）可得

$$g^{**}(z,y) = \liminf_{x \rightharpoonup z,\ u\to y,\ x\in X,\ y\in\mathbb{R}} g(x,u),$$

and

$$g_k^{**}(z,y) = \liminf_{x \rightharpoonup z,\ u\to y,\ x\in X,\ y\in\mathbb{R}} g_k(x,u), \text{ for all } k \geq 1;$$

记住，“$\rightharpoonup$”表示 X^{**}的弱-拓扑收敛。因此，$g^{**}(z, y) = f^{**}(z) - y$,

$$g_0^{**}(z,y) = y, \text{ and } g_k^{**}(z,y) = f_k^{**}(z) - y, \text{ for all } k \geq 1.$$

注意， g 在形如（x, y）的每一点处都连续，其中 x 是 f. 的连续点。此外，任意 $x_0 \in \operatorname{dom} f$的点以及任意 $y_0 > f(x_0)$均满足

$$g(x_0,y_0) = f(x_0) - y_0 < 0,$$

这表明（x_0, y_0）是问题（31）的一个斯莱特点，其中函数为 g_k, $k \geq 0$. 因此，定理6 给出

$$\begin{aligned}\inf_{g_k(x,y)\leq 0,\ k\geq 1,\ x\in X,\ y\in\mathbb{R}} g_0(x,y) &= \inf_{\substack{f_k^{**}(z)-y\leq 0,\ k\geq 1,\ z\in X^{**},\ y\in\mathbb{R}\\ f_\infty^{**}(z)-y\leq 0,\ z\in\overline{\operatorname{dom}(f^{**})}^{w^{**}}}} y\\ &= \inf_{z\in X^{**}} \sup_{k\geq 1}\{f_k^{**}(z), f_\infty^{**}(z)\} + \mathrm{I}_{\overline{\operatorname{dom}(f^{**})}^{w^{**}}}(z),\end{aligned}$$

这表明

$$\inf_{x\in X} f(x) = \inf_{z\in X^{**}} \sup_{k\geq 1}\{f_k^{**}(z), f_\infty^{**}(z)\} + \mathrm{I}_{\overline{\operatorname{dom}(f^{**})}^{w^{**}}}(z). \tag{32}$$

现在固定 $x^* \in X^*.$。由于 $f \in \Gamma_0(X)$, f^* 是真函数，并且我们有

$$-f^*(x^*) = \inf_{x\in X} \sup_{k\geq 1}(f_k(x) - \langle x^*, x\rangle) < +\infty.$$

设 $\tilde{f}_k := f_k(\cdot) - \langle x^*, \cdot\rangle$, $k \geq 1$. 于是，对于所有 $k \geq 1$，有 $\tilde{f}_k \in \Gamma_0(X)$，并且 $\tilde{f} := \sup_{k\geq 1} \tilde{f}_k = f(\cdot) - \langle x^*, \cdot\rangle$ 在某处连续。此外，利用（5），我们有 $\tilde{f}_k^{**} = f_k^{**}(\cdot) - \langle x^*, \cdot\rangle$ 以及 $\limsup_k \tilde{f}_k = f_\infty(\cdot) - \langle x^*, \cdot\rangle$。接下来，将（32）中的 $f_k(\cdot) - \langle x^*, \cdot\rangle$ 替换为 $\tilde{f}_k$，我们得到

$$-f^*(x^*) = \inf_{z\in X^{**}} \left(\sup_{k\geq 1}\{f_k^{**}(z), f_\infty^{**}(z)\} + \mathrm{I}_{\overline{\operatorname{dom}(f^{**})}^{w^{**}}}(z) - \langle x^*, z\rangle\right),$$

这将我们引向

$$f^*(x^*) = \left(\sup_{k\geq 1} \{f_k^{**}, f_\infty^{**}\} + \mathrm{I}_{\overline{\mathrm{dom}(f^{**})}^{w^{**}}} \right)^* (x^*), \text{ for all } x^* \in X^*.$$

因此，对两边取共轭函数，并再次利用（5），可得

$$f^{**} = \left(\sup_{k\geq 1} \{f_k^{**}, f_\infty^{**}\} + \mathrm{I}_{\overline{\mathrm{dom}(f^{**})}^{w^{**}}} \right)^{**} = \sup_{k\geq 1} \{f_k^{**}, f_\infty^{**}\} + \mathrm{I}_{\overline{\mathrm{dom}(f^{**})}^{w^{**}}},$$

证明至此完成。 ■

4 凹性类情形

本节着重讨论约束函数族为凹性类的情形。**定义 2**。 若族 $\{f_t,\, t \in T\} \subset \Gamma_0(X)$ 满足以下条件，则称其为凹性类：对于每个t_1，$\cdots$，$t_m \in T$以及 λ_1，$\cdots$，$\lambda_m \in \mathbb{R}_+$，$m \geq 1$，存在 $t \in T$使得

$$\textstyle\sum_{k=1}^m \lambda_k f_{t_k} \leq (\sum_{k=1}^m \lambda_k) f_t.$$

根据约定 $0 \cdot (+\infty) = +\infty$，凹性类性质等价于对凸组合的闭性（见 [8, 定义 5.1.3]）。

下面的注释强调了凹性类情形的两个重要特征。**注 2**。 设 $\{f_t,\, t \in T\} \subset \Gamma_0(X)$ 为一个类凹族，并记 $f := \sup_{t\in T} f_t$。假设 T 是紧的，且映射 $t \mapsto f_t(x)$ $x \in$ 定义域 f均为上半连续函数。

(i) 若 $v(\mathcal{P})$ 有限且 $(\mathcal{P})$ 满足斯莱特条件，则引理 4 可具体表述为：

$$v(\mathcal{P}) = \max_{t\in T,\ \lambda\geq 0} \inf_{x\in \mathrm{dom}\, f} (f_0(x) + \lambda f_t(x)).$$

按照 [9, 推论 6]中的论证，可以得到该结果的证明。(ii) 根据 [9,推论 6],, 以下双共轭上确界法则成立：

$$(\sup_{t\in T} f_t)^{**} = \sup_{t\in T} (f_t + \mathrm{I}_{\mathrm{dom}\, f})^{**}. \tag{33}$$

在这种凹性类情形下，我们引入如下松弛问题：

$$(\mathcal{P}_c^{**}) \quad \begin{cases} \inf \ (f_0 + \mathrm{I}_{\mathrm{dom}\, f})^{**}(z) \\ \text{s.t. } (f_t + \mathrm{I}_{(\mathrm{dom}\, f_0)\cap(\mathrm{dom}\, f)})^{**}(z) \leq 0,\ t \in T,\ z \in X^{**}. \end{cases} \tag{34}$$

此外，当 f 在 $\operatorname{dom} f_0$ 中某处连续时，我们还证明最后一个优化问题可化简为

$$\begin{cases} \inf & f_0^{**}(z) \\ \text{s.t.} & f_t^{**}(z) \le 0,\ t \in T, \\ & z \in \overline{\operatorname{dom} f}^{w^{**}}. \end{cases} \tag{35}$$

定理10。给定一个类凹族 $\{f_t,\ t \in T\} \subset \Gamma_0(X)$，假设 T是紧集，且映射 $t \mapsto f_t(x)$ $x \in$ 定义域 f （假设非空）是上半连续的。那么，只要$(\mathcal{P})$ 满足 *Slater*条件，我们就有

$$v(\mathcal{P}_c^{**}) = v(\mathcal{P}). \tag{36}$$

此外，若 f 在 定义域 f_0中的某处连续，则 *36)* 仍然成立，只要 $(\mathcal{P}_c^{**})$表示（*35*）中的优化问题。

证明。首先注意到

$$\begin{aligned} v(\mathcal{P}_c^{**}) &\le \inf_{(f_t + \mathrm{I}_{(\operatorname{dom} f_0)\cap(\operatorname{dom} f)})^{**}(x) \le 0,\ x \in X,\ t \in T} (f_0 + \mathrm{I}_{\operatorname{dom} f})^{**}(x) \\ &\le \inf_{f_t(x) \le 0,\ x \in (\operatorname{dom} f_0)\cap(\operatorname{dom} f),\ t \in T} f_0(x) + \mathrm{I}_{\operatorname{dom} f}(x) = v(\mathcal{P}). \end{aligned}$$

因此，$v(\mathcal{P}_c^{**}) \le v(\mathcal{P})$，我们可以假设 $v(\mathcal{P}) \in \mathbb{R}$；事实上，若 $v(\mathcal{P}) = -\infty$，那么弱不等式意味着 $v(\mathcal{P}_c^{**}) = v(\mathcal{P}) = -\infty$，结论即得。

接下来，我们写出

$$\begin{aligned} 0 &= \inf_{x \in X} \sup\{f_0(x) - v(\mathcal{P});\ f_t(x),\ t \in T\} \\ &= \inf_{z \in X^{**}} (\sup\{f_0 - v(\mathcal{P});\ f_t,\ t \in T\})^{**}(z), \end{aligned}$$

因为一个函数与其双共轭具有相同的下确界。因此，将（36）应用于紧集 $T \cup \{0\}$，得到

$$0 = \inf_{z \in X^{**}} \sup\{(f_0 + \mathrm{I}_{\operatorname{dom} f})^{**}(z) - v(\mathcal{P});\ (f_t + \mathrm{I}_{(\operatorname{dom} f_0)\cap(\operatorname{dom} f)})^{**}(z),\ t \in T\}. \tag{37}$$

此外，由于（$\mathcal{P}$）满足Slater条件，存在 $x_0 \in$ 定义域 f_0 使得f（x_0） < 0.特别地， $x_0 \in$（定义域 f_0） $\cap$（定义域 f），并且

$$(f_0 + \mathrm{I}_{\operatorname{dom} f})^{**}(x_0) \le (f_0 + \mathrm{I}_{\operatorname{dom} f})(x_0) = f_0(x_0) < +\infty;$$

也就是说， $x_0 \in$定义域（$f_0 + \mathrm{I}^{\operatorname{dom} f}$）**.此外，我们有

$$\sup_{t \in T}(f_t + \mathrm{I}_{(\operatorname{dom} f_0)\cap(\operatorname{dom} f)})^{**}(x_0) \le \sup_{t \in T}(f_t + \mathrm{I}_{(\operatorname{dom} f_0)\cap(\operatorname{dom} f)})(x_0) \le f(x_0) < 0,$$

因此 x_0 也是 $(\mathcal{P}_c^{**})$ 的斯莱特点。因此，根据（37），利用（36）可由（10）推出。

最后，假设 f 在定义域 f_0中的某一点处连续。然后，根据（7）中的双共轭和规则，我们有

$$(f_0 + \mathrm{I}_{\mathrm{dom}\, f})^{**} = f_0^{**} + \mathrm{I}^{**}_{\mathrm{dom}\, f} = f_0^{**} + \mathrm{I}_{\overline{\mathrm{dom}\, f}^{w^{**}}}$$

并且，对于所有 $t \in T$,

$$(f_t + \mathrm{I}_{(\mathrm{dom}\, f_0)\cap(\mathrm{dom}\, f)})^{**} = f_t^{**} + \mathrm{I}_{\overline{(\mathrm{dom}\, f_0)\cap(\mathrm{dom}\, f)}^{w^{**}}} = f_t^{**} + \mathrm{I}_{\overline{\mathrm{dom}\, f}^{w^{**}}} + \mathrm{I}_{\overline{\mathrm{dom}\, f_0}^{w^{**}}}.$$

同时，关系式（9）确保 $(\mathrm{dom}\ f_0) \cap (\mathrm{dom}\ f)^{w^{**}} = \mathrm{dom}\ f_0^{w^{**}} \cap \mathrm{dom}\ f^{w^{**}}$. 因此，

$$\begin{aligned} v(\mathcal{P}_c^{**}) &= \inf_{(f_t + \mathrm{I}_{(\mathrm{dom}\, f_0)\cap(\mathrm{dom}\, f)})^{**}(z) \le 0,\ t\in T} (f_0 + \mathrm{I}_{\mathrm{dom}\, f})^{**}(z) \\ &= \inf_{f_t^{**}(z)\le 0,\ t\in T\ ,\ z\in \overline{\mathrm{dom}\, f_0}^{w^{**}} \cap \overline{\mathrm{dom}\, f}^{w^{**}}} f_0^{**}(z) + \mathrm{I}_{\overline{\mathrm{dom}\, f}^{w^{**}}}(z) \\ &= \inf_{f_t^{**}(z)\le 0,\ ,\ t\in T,\ z\in \overline{\mathrm{dom}\, f}^{w^{**}}} f_0^{**}(z), \end{aligned}$$

因此，当 36 式中的条件 $(\mathcal{P}_c^{**})$ 按式（35）定义时，式（36）成立。 ■

5 与凸规划中对偶性的关系

本节强调前几节研究的双共轭松弛与无限维凸优化中的 Fenchel 对偶性之间的联系。

考虑如下（原始）凸优化问题

$$(\mathcal{P}) \quad \inf_X (f+g)(x),$$

其中，$f, g : X \to \mathbb{R}_\infty$ 是两个真凸函数。相应的（Fenchel）对偶空间优化问题为

$$(\mathcal{D}) \quad \sup_{x^*\in X^*} (-f^*(x^*) - g^*(-x^*)). \tag{38}$$

我们将 $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ 称为对偶对，并假设 $v(\mathcal{P}) < +\infty$. 经典强对偶性定理（参见例如 [19]）断言，若 f 或 g 在另一函数有效定义域中的某一点处有限且连续，则

$$v(\mathcal{P}) = v(\mathcal{D}). \tag{39}$$

此外，优化问题$(\mathcal{D})$存在最优解，从而使$(\mathcal{P})$与$(\mathcal{D})$之间具有所谓的强对偶性。进一步地，将$(\mathcal{D})$本身视为原问题，其 Fenchel 对偶恰好是$(\mathcal{P})$的双共轭松弛；即，

$$(\mathcal{D}^*) \quad \inf_{z\in X^{**}} (f^{**}(z) + g^{**}(z)).$$

将弱对偶定理应用于对偶对$(\mathcal{P},\ \mathcal{D})$和$(\mathcal{D},\ \mathcal{D}^*)$，，我们得到

$$v(\mathcal{D}^*) \le v(\mathcal{D}) \le v(\mathcal{P}). \tag{40}$$

因此，对 $(\mathcal{P},\mathcal{D})$ 与 $(\mathcal{D},\mathcal{D}^*)$ 具有零对偶间隙，等价于 $(\mathcal{P})$ 与 $(\mathcal{D}^*)$ 之间存在零间隙。

本节的下述预备结果表明，$(\mathcal{P})$ 与 $(\mathcal{D}^*)$ 的最优值在上述仅对原始函数施加的同一连续性条件下重合 f 与 $g.$。根据莫罗–罗克菲拉尔定理（5），该问题仅在非自反巴拿赫空间中才有意义。

命题 11. 设 f 与 g 为凸函数。假设其中之一在另一个的有效定义域中的某一点处有限且连续。则

$$v(\mathcal{D}^*) = v(\mathcal{P}).$$

因此，$(\mathcal{P})$ 与 $(\mathcal{D})$ 之间存在零对偶间隙。

证明。 由于 $v(\mathcal{D}^*) \le v(\mathcal{P})$，我们可以假设 $v(\mathcal{P}) \in \mathbb{R}$。根据 [13],，我们有 $\mathrm{cl}(f+g) = (\mathrm{cl}\ f) + (\mathrm{cl}\ g)$。因此，由于

$$v(\mathcal{P}) = \inf_X (f+g) = \inf_X \mathrm{cl}(f+g) = \inf_X ((\mathrm{cl}\, f) + (\mathrm{cl}\, g)),$$

由此可得 $\mathrm{cl}\ f,\ \mathrm{cl}\ g \in \Gamma_0(X)$。将 (7) 应用于函数 $(\mathrm{cl}\ f)$ 和 $(\mathrm{cl}\ g)$，当前假设保证

$$(f+g)^{**} = (\mathrm{cl}(f+g))^{**} = ((\mathrm{cl}\, f) + (\mathrm{cl}\, g))^{**} = (\mathrm{cl}\, f)^{**} + (\mathrm{cl}\, g)^{**} = f^{**} + g^{**}.$$

因此，

$$v(\mathcal{P}) = \inf_X (f+g) = \inf_{X^{**}} (f+g)^{**} = \inf_{X^{**}} (f^{**} + g^{**}) = v(\mathcal{D}^*),$$

第一个结论成立。第二个断言由 (40) 得出。 ∎

上述证明中的关键步骤是连续性假设，它确保 $(f+g)^{**} = f^{**} + g^{**}.$ 如下例所示，这一假设不能省略。

例 1. 设 $X = c_0$，并设 $L \subset c_0$ 为一个非平凡的有限维子空间，满足 $L \cap c_{00} = \{\theta\}$，其中 c_{00} 表示仅含有限个零的实数序列所构成的子空间。定义凸函数 $f :=\mathrm{I}_{c_{00}}$ 和 $g :=\mathrm{I}_L.$ 那么，由 (5) 可得 $f^{**} = \mathrm{I}_{\mathrm{cl}^{w^*}(c_{00})} = \mathrm{I}_{\ell_\infty}$ 和 $g^{**} := \mathrm{I}_L$，因此

$$f + g = (f+g)^{**} = \mathrm{I}_{\{\theta\}} \ \textit{and}\ f^{**} + g^{**} = \mathrm{I}_L.$$

因此，等式 $(f+g)^{**} = f^{**} + g^{**}$ 不成立。

我们回到无限维凸规划

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \inf & f_0(x) \\ \text{s.t.} & f_k(x) \le 0,\ k \ge 1, \\ & x \in X, \end{cases} \tag{41}$$

其中 $f_k:\ X\to\mathbb{R}_\infty,\ \ k\geq 1$，均为真且凸。我们假设 $v(\mathcal{P})<+\infty$，且 $(\mathcal{P})$ 满足Slater条件。注意到

$$v(\mathcal{P})=\inf_{x\in X}\ f_0(x)+\mathrm{I}_{[f\leq 0]}(x)=\inf_{x\in X}\ f_0(x)+\mathrm{I}_C(x),$$

其中 $f:=\sup_{k\geq 1}f_k$ and

$$C:=[f\leq 0]\cap[f_\infty\leq 0]\cap\operatorname{dom}f.$$

集合 C 非空，因为 $v(\mathcal{P})<+\infty$. 由于 $(\mathrm{I}_C)^*=\sigma_C$，Fenchel对偶（参见优化问 (38)）题 $(\mathcal{P})$ 可写为

$$(\mathcal{D})\quad\sup_{x^*\in X^*}\ -f_0^*(x^*)-\sigma_C(-x^*).\tag{42}$$

由于对所有 $f\geq f_k\ k\geq 1,\ \ f_\infty\geq f_\infty^{**}$，且 $\mathrm{I}_{\operatorname{dom}f}\geq\mathrm{I}_{\overline{\operatorname{dom}f}^{w^{**}}}$，该系统

$$\{f_k^{**}\leq 0;k\geq 1,f_\infty^{**}\leq 0,\mathrm{I}_{\overline{\operatorname{dom}f}^{w^{**}}}\leq 0\}$$

从系统 $\{f_k\leq 0,\ k\geq 1\}$. 继承了斯莱特条件。因此，考虑到

$$C\subset C':=[\sup_{k\geq 1}f_k^{**}\leq 0]\cap[f_\infty^{**}\leq 0]\cap\overline{\operatorname{dom}f}^{w^{**}},$$

我们得到

$$\sigma_C\leq\sigma_{C'}=\min_{\alpha>0}(\alpha(\max\{\sup_{k\geq 1}f_k^{**},f_\infty^{**},\mathrm{I}_{\overline{\operatorname{dom}f}^{w^{**}}}\}))^*,$$

其中，最后一个等式由 [8,定理 3.3.4] 得出。因此，新的对偶问题

$$(\mathcal{D}')\quad\sup_{x^*\in X^*}\ -f_0^*(x^*)-\min_{\alpha>0}(\alpha(\max\{\sup_{k\geq 1}f_k^{**},f_\infty^{**},\mathrm{I}_{\overline{\operatorname{dom}f}^{w^{**}}}\}))^*(-x^*),$$

其最优值为 Fenchel 对偶$(\mathcal{D})$ 在 (42) 中提供了一个下界。与 $(\mathcal{D})$ 相比，优化问题 $(\mathcal{D}')$ 明确涉及数据函数的共轭函数 $f_k,\ \ k\geq 1$. 再次运用 [8, 定理 3.3。1], 我们看到，$(\mathcal{D}')$ 的 Fenchel 对偶与式 ($(\mathcal{P}_\infty^{**})$ 所给出的双共轭松弛 13) 一致，其表达式为

$$(\mathcal{P}_\infty^{**})\ \begin{cases}\inf & f_0^{**}(z)\\ \text{s.t.} & f_k^{**}(z)\leq 0,\ k\geq 1,\\ & f_\infty^{**}(z)\leq 0,\\ & z\in\overline{\operatorname{dom}(f^{**})}^{w^{**}}.\end{cases}$$

于是，根据弱对偶性，我们有

$$v(\mathcal{P})\geq v(\mathcal{D})\geq v(\mathcal{D}')\geq v(\mathcal{P}_\infty^{**}).\tag{43}$$

下面的定理实现了本节所提出的目标，展示了我们的双共轭松弛与无限维凸优化中的Fenchel对偶性之间的强关系。

命题12。 假设 $(\mathcal{P})$ 在 *(41)* 中满足*Slater*条件。如果函数 $f := \text{上确界}_{k\geq 1} f_k$ 在 定义域 f_0中的某一点处连续，那么

$$v(\mathcal{P}) = v(\mathcal{D}) = v(\mathcal{D}^{'}) = v(\mathcal{P}_{\infty}^{**}).$$

证明。 根据定理 6，我们有 $v(\mathcal{P}) = v(\mathcal{P}_{\infty}^{**})$。 然后由（43）可得结论。

■

6 双共轭松弛（$\mathcal{P}^{**}$）并不足够

本节讨论一个例子，它展示了优化问题 $(\mathcal{P})$ 与其双共轭松弛$(\mathcal{P}^{**})$之间的间隙，该松弛在（11）中定义为

$$(\mathcal{P}^{**}) \quad \begin{cases} \inf \quad f_0^{**}(z) \\ \text{s.t. } f_k^{**}(z) \leq 0, \ k \geq 1, \\ \qquad z \in X^{**}, \end{cases}$$

从而说明有必要考虑其他松弛，例如 $(\mathcal{P}_{\infty}^{**})$。**例2**。 令 c_0 为由趋于零的实数序列构成的巴拿赫空间，并赋予上确界范数。其二重对偶空间为 $c_0^{**} = \ell_{\infty}$. 我们考虑以下在 $c_0 \times \mathbb{R}$ 中给出的优化问题:

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \inf \quad f_0(x,y) := y + \sum_{k\geq 1} 2^{-k} |x_k - 1| \\ s.t. \ f_k(x,y) := |x_k - 1| - y \leq 0, \ k \geq 1, \\ \qquad x := (x_k)_k \in c_0, \ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

我们将函数与$(\mathcal{P})$相关联

$$f(x,y) := \sup_{k\geq 1} f_k(x,y) = \sup_{k\geq 1} (|x_k - 1| - y), \ x \in c_0, \ y \in \mathbb{R}.$$

我们接下来验证以下事实:

- 优化问题$(\mathcal{P})$满足 *Slater*条件。令 $0_{\mathbb{N}}$ 为 c_0. 中的零序列。于是$(0_{\mathbb{N}}, 2) \in$ 定义域 $f_0 = c_0 \times \mathbb{R}$ 是$(\mathcal{P})$的一个斯莱特点。

- 函数 f 在 $c_0 \times \mathbb{R}$上连续。由于 $f(x,y) \leq \|x\| + |y| + 1$，对于所有$(x,y) \in c_0 \times \mathbb{R}$，凸函数 f在 $c_0 \times \mathbb{R}$上连续。

- 我们有 $f_k^{**}(z,y) = |z_k - 1| - y$，对于所有 $(z, \ y) \in \ell_{\infty} \times \mathbb{R}$.
事实上，由于 $f_k \in \Gamma_0(c_0 \times \mathbb{R})$，由式（*5*）可得

$$f_k^{**}(z,y) = \liminf_{x \to z, \ u \to y, \ x \in X} (|x_k - 1| - u) = |z_k - 1| - y.$$

- 对于所有 $z \in \ell_{\infty}$和 $y \in \mathbb{R}.$，我们有 $f_0^{**}(z, \ y) = y + \sum_{k\geq 1} 2^{-k} |z_k - 1|$

为说明这一点，我们引入凸函数 g、 g_k： $c_0 \to \mathbb{R}$、 $k \geq 1$，定义如下

$$g_k(x) := |x_k - 1|\,,\ g(x) := \sum_{k\geq 1} 2^{-k} |x_k - 1|\,.$$

每个 g_k 在 c_0. 上都是连续的。此外，由于 $g \leq \|\cdot\| + 1$，我们有 $g^{**} \leq (\|\cdot\|)^{**} + 1 = \|\cdot\| + 1$ 因此，定义域 $g^{**} = \ell_\infty$. 此外， （5） 意味着

$$g_k^{**}(z) = \liminf_{x\to z,\ x\in X} |x_k - 1| = |z_k - 1|\,,\ \textit{for all } z \in \ell_\infty.$$

因此，引理 5 对所有 $z \in \ell_\infty$ = 定义域 g^{**}，给出

$$g^{**}(z) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k} g_k^{**}(z) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k} |z_k - 1|\,.$$

因此，再次根据 （5），

$$\begin{aligned} f_0^{**}(z,y) &= \liminf_{x\to z,\ u\to y,\ x\in X} (u + \textstyle\sum_{k\geq 1} 2^{-k} |x_k - 1|) \\ &= y + g^{**}(z) = y + \textstyle\sum_{k\geq 1} 2^{-k} |z_k - 1|\,. \end{aligned}$$

现在我们可以写出双共轭松弛（$\mathcal{P}^{**}$）：

$$(\mathcal{P}^{**}) \begin{cases} \inf\ \ y + \sum_{k\geq 1} 2^{-k} |z_k - 1| \\ s.t.\ \ |z_k - 1| - y \leq 0,\ \ k \geq 1, \\ \quad\ z := (z_k)_k \in \ell_\infty,\ \ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- （$\mathcal{P}$）与（$\mathcal{P}^{**}$）之间存在间隙。
事实上，一方面，我们有

$$v(\mathcal{P}) = \inf_{x\in c_0} \left(\sup_{k\geq 1} |x_k - 1| + \textstyle\sum_{k\geq 1} 2^{-k} |x_k - 1| \right).$$

考虑序列 $x_n = (1, \overset{n}{\cdots}, 1, 0, 0, \cdots)$，该序列由 n 个 *1* 后接若干个 *0* 组成，并定义

$$h(x) := \sup_{k\geq 1} |x_k - 1| + \textstyle\sum_{k\geq 1} 2^{-k} |x_k - 1|\,,\ x \in c_0.$$

于是，

$$v(\mathcal{P}) \leq \liminf h(x_n) = \liminf (1 + \textstyle\sum_{k\geq n+1} \frac{1}{2^k}) = 1.$$

同时， $v(\mathcal{P}) \geq$ 下确界$_{x\in c_0}$ (上确界$_{k\geq 1} |x_k^n - 1|$) $= 1$，于是得到 $v(\mathcal{P}) = 1$.另一方面，由于 $1_{\mathbb{N}} := (1,1,\cdots) \in \ell_\infty$，我们得到

$$v(\mathcal{P}^{**}) = \inf_{x\in \ell_\infty} \left(\sup_{k\geq 1} |x_k - 1| + \textstyle\sum_{k\geq 1} 2^{-k} |x_k - 1| \right) \leq 0.$$

但我们有 $v(\mathcal{P}^{**}) \geq 0$，因此 $v(\mathcal{P}^{**}) = 0 < 1 = v(\mathcal{P})$。这证明了 $(\mathcal{P})$ 与 $(\mathcal{P}^{**})$之间存在对偶间隙。

因此，我们需要一种替代性的双共轭松弛，使其与 $(\mathcal{P})$ 之间的对偶间隙为零。为此，我们考虑松弛 $(\mathcal{P}_\infty^{**})$，其定义见（13），即

$$(\mathcal{P}_\infty^{**}) \begin{cases} \inf & f_0^{**}(z) \\ s.t. & f_k^{**}(z) \leq 0, \ k \geq 1, \\ & f_\infty^{**}(z) \leq 0, \\ & z \in \overline{\mathrm{dom}(f^{**})}^{w^{**}}. \end{cases}$$

接下来，我们计算函数 f_∞^{**}，并确定集合 $\overline{\mathrm{dom}(f^{**})}^{w^{**}}$.

- 我们有 $f_\infty(x,y) = 1-y$，对所有 $(x,y) \in c_0 \times \mathbb{R}$.均成立。事实上，$f_\infty(x,y)$ $=$上极限$_{k\to\infty}$ $f_k(x,y) =$极限$_{k\to\infty}(|x_k - 1| - y) = 1-y$.
- 我们有 $f_\infty^{**}(z,y) = 1-y$，对所有 $(z,y) \in \ell_\infty \times \mathbb{R}$.均成立。由于 $f_\infty \in \Gamma_0(c_0 \times \mathbb{R})$，（5）蕴含 $f_\infty^{**}(z,y) =$下极限$_{x\to z,\ u\to y,\ x\in X}$ $f_\infty(z,u) =$极限$_{u\to y}(1-u) = 1-y$.
- 我们有 定义域 $\overline{f}^{w^{**}} = \ell_\infty \times \mathbb{R}$.我们已在上文证明 定义域 $f = c_0 \times \mathbb{R}$. 因此，根据 *Goldstein*定理，我们得到定义域 $\overline{f}^{w^{**}} = c_0 \times \mathbb{R}^{w^{**}} = \ell_\infty \times \mathbb{R}$.因此，$(\mathcal{P}_\infty^{**})$ 具有如下形式

$$(\mathcal{P}_\infty^{**}) \begin{cases} \inf & y + \sum_{k\geq 1} 2^{-k} |z_k - 1| \\ s.t. & |z_k - 1| - y \leq 0, \ k \geq 1, \\ & 1 - y \leq 0, \\ & z \in \ell_\infty, \ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- $(\mathcal{P})$ 与$(\mathcal{P}_\infty^{**})$之间没有间隙。

事实上，这是定理 6的推论。为完整起见，我们验证这一结论。我们有

$$v(\mathcal{P}_\infty^{**}) = \inf_{z\in\ell_\infty} (\max\{\sup_{k\geq 1} |z_k - 1|, 1\} + \sum_{k\geq 1} 2^{-k} |z_k - 1|).$$

特别地，将最后一个目标函数在 $1_{\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ 处取值，得到

$$v(\mathcal{P}_\infty^{**}) \leq 1.$$

因此，由于 $v(\mathcal{P}_\infty^{**}) \geq 1$，我们得到 $v(\mathcal{P}_\infty^{**}) = v(\mathcal{P}) = 1$. 换言之，$(\mathcal{P})$ 与$(\mathcal{P}_\infty^{**})$之间没有间隙。

上面的例子并非例外；事实上，在任何作为某个巴拿赫空间之对偶空间的非自反巴拿赫空间中，都可以构造一个优化问题（$\mathcal{P}$），使其与双共轭松弛之间存在非零间隙。

例3. 假设 $X = Y^*$ 是某个巴拿赫空间 $Y.$。我们定义函数 f、 f_y： $X \to \mathbb{R}$，如下

$$f_y := \langle \cdot, y \rangle\,,\ y \in B_Y,\ and\ f := \sup_{y \in B} f_y = \|\cdot\|_{Y^*} = \|\cdot\|_X\,.$$

我们有

$$f^{**} = (\mathrm{I}_{B_{X^*}})^* = \sigma_{B_{X^*}} = \|\cdot\|_{X^{**}}\,.$$

同时，对于每个 $y \in B_Y \subset B_{Y^{**}} = (B_{X^*}$ 和 $z \in X^{**})$，由 *(5)* 可得

$$f_y^{**}(z) = \liminf_{x \rightharpoonup z,\ x \in X} f_y(x) = \langle y, z \rangle\,,$$

由此我们推得

$$\sup_{y \in B_Y} f_y^{**} = \sup_{y \in B_Y} \langle y, \cdot \rangle = \sigma_{B_Y}.$$

现在考虑凸问题 $(\mathcal{P}_{x^*})$ $x^* \in X^*$，其定义为

$$(\mathcal{P}_{x^*}) \quad \begin{array}{c} \inf\ (u - \langle x^*, x \rangle) \\ s.t.\ f_y(x) - u \le 0,\ y \in B_Y, \\ (x, u) \in X \times \mathbb{R}. \end{array}$$

其双共轭松弛为

$$(\mathcal{P}_{x^*}^{**}) \quad \begin{array}{c} \inf\ (u - \langle x^*, z \rangle) \\ s.t.\ f_y^{**}(z) - u \le 0,\ y \in B_Y, \\ (z, u) \in X^{**} \times \mathbb{R}. \end{array}$$

注意到

$$v(\mathcal{P}_{x^*}) = \inf_{x \in X}\ (f(x) - \langle x^*, x \rangle) = -f^*(x^*),$$

而

$$v(\mathcal{P}_{x^*}^{**}) = \inf_{x \in X}\ (\sup_{y \in B_Y} f_y^{**}(x) - \langle x^*, x \rangle) = -(\sup_{y \in B_Y} f_y^{**})^*(x^*).$$

若对所有 $x^* \in X^*$ 都有 $v(\mathcal{P}_{x^*}) = v(\mathcal{P}_{x^*}^{**})$，那么对所有 $x^* \in X^*.$ 都有 $f^*(x^*) = (\sup_{y \in B_Y} f_y^{**})^*(x^*)$。对偶 (X^*, X^{**}) 取共轭函数，得

$$f^{**}(z) = \sup_{y \in B_Y} f_y^{**}(z),\ for\ all\ z \in X^{**};$$

也就是说，$\|\cdot\|_{X^{**}} = \sigma_{B_Y}.$ 因此，

$$B_Y = B_{X^*} = B_{Y^{**}},$$

由此我们得出 $Y^{**} = Y$；换言之， Y是自反的。因此， $X = Y^*$也是自反的。我们得出，若在此例中 X 是非自反的，则必定存在某个 $x_0^* \in X^*$ 使得

$$v(\mathcal{P}_{x_0^*}^{**}) < v(\mathcal{P}_{x_0^*}).$$

因此，尽管函数 f 连续且满足 *Slater*条件， $v(\mathcal{P}^{**}_{x^*_0})$ 与 $v(\mathcal{P}_{x^*_0})$ 之间仍存在间隙。

7 结论

1. 对于约束数量有限的凸优化问题，双共轭松弛（$\mathcal{P}^{**}$）是适用的，因为在满足Slater条件且约束函数上确界连续时，它能保证零对偶间隙。

2. 对于涉及（$\mathcal{P}^{**}$）的无限多个约束的无限维优化问题，可能无法达到零间隙，如第6节所示。事实上， c_0 给出了一个非平凡示例：其双共轭松弛存在非零间隙。此外，文中证明，在任何非自反对偶巴拿赫空间中，都存在一个具有无限多个约束且与其双共轭松弛之间存在间隙的线性规划。在该示例中，约束函数的上确界处处连续，且满足 Slater条件。

3. 为克服这一局限，我们提出了（$\mathcal{P}^{**}$）的一种强化替代方案，即（$\mathcal{P}^{**}_{\infty}$）。我们证明了（$\mathcal{P}$）与（$\mathcal{P}^{**}_{\infty}$）之间存在零对偶间隙。与（$\mathcal{P}^{**}_{\infty}$）相关的其他变体也被证明有助于实现我们的目标。

4. 本文定理所依据的假设简单而自然，即 Slater条件以及约束函数的上确界的连续性。

5. 本文在具有可数约束族的无限优化问题框架下进行分析。当底层巴拿赫空间 X 可分时，约束集合可能不可数的一般无限优化问题可归约为本文所研究的情形。

6. 通过应用双共轭松弛，我们为一种新的 Fenchel 型对偶（$\mathcal{D}'$）($\mathcal{P}$)。建立了零对偶间隙。

7. 零间隙问题与上确界和双共轭运算的可交换性密切相关，即:

$$\left(\sup_{t\in T} f_t\right)^{**} = \sup_{t\in T} f_t^{**}, \tag{44}$$

对于给定的一族凸函数 $f_t,\ t \in T$. 这一恒等式在凸分析中发挥着重要作用（例如，参见 [20]），并使得针对上确界函数 $\sup_{t\in T} f_t$ 的诸多次微分演算成为可能（例如，参见 [13], [17]; 另见 [8]及其中的参考文献）。近期， [9], 从次微分演算的角度研究了上述关系，并证明它等价于针对上确界函数的强次微分演算规则。 [4]基于闭性类正则性条件给出了其他刻画。有限族的情形已在 [3, 10, 11, 22]中得到研究。

致谢。本研究由西班牙科学、创新与大学部/西班牙国家研究署/10.13039/501100011033资助的项目 PID2022-136399NB-C21，以及欧洲区域发展基金/欧盟和 Basal CMM FB210005 资助。

声明

- 利益冲突/竞争性利益。不适用。
- 伦理审批和参与同意。不适用。
- 数据可用性。不适用。

参考文献

[1] Aubin J.-P., Ekeland I.：应用非线性分析，Wiley（1984）[2] Bouchitt G., Valadier M.：测度空间上凸泛函的积分表示。《泛函分析杂志》80, 398–420 (1988)[3] Bot R.I., Wanka G.：两个凸函数逐点最大值的共轭函数再探。《全球优化杂志》41, 625–632 (2008)[4] Bot R.I., Grad S. M.：双共轭函数公式的正则性条件。《台湾数学杂志》12, 1921–1942 (2008)[5] Buttazzo G., Giaquinta M., Hildebrandt S.：一维变分问题导论，牛津（1998）[6] Cánovas, M.J.、López, M.A. 与 Parra, J.：线性不等式系统可行集映射的上半连续性。《集值分析》10, 361–378 (2002)[7] Caro, S. 半无限优化中的离散化—约简及上确界函数的次微分演算。博士论文，智利大学，智利（2023）[8]Correa R., Hantoute A., López M.A.：凸分析与优化基础：上确界函数方法。Springer 运筹学与金融工程丛书。S pringer Cham（2023）[9]Correa, R., Hantoute, A., López, M.A.：论二重对偶空间中上确界函数的正则化。《优化理论与应用杂志》208, 67 (2026). https://doi.org/10.1007/s10957-025-02886-z[10]Correa, R., Hantoute, A., López, M.A.：凸正则化与次微分演算。《西班牙皇家精确、物理与自然科学学院杂志 A辑：数学》119 (2025). https://doi.org/10.1007/s13398-025-01750-z.[11] Fitzpatrick S.P., Simons S.：论凸函数的逐点最大值。《美国数学会会刊》128, 3553–3561 (2000)[12] Goberna, M.A., López, M.A., Todorov, M.I.：线性不等式系统的稳定性理论 II：解集映射的上半连续性。《工业与应用数学学会优化杂志》7 1138–1151 (1997)[13] Hantoute A., López M.A., Zălinescu C.：凸分析中的次微分演算规则：经由逐点上确界函数的统一方法。SIAM J Optim. 19, 863–882 (2008)[14] Hantoute A., López M.A., Kruger A.：无限凸优化中的强对偶性。《应用数学与优化》2026.[15] Hiriart-Urruty, J.-B., López, M.A., Volle, M.：变分分析中的 ε-策略：以函数的闭凸化为例。《伊比利亚美洲数学评论》27, 449–474 (2011)[16] Ekeland, I., Temam, R.：凸分析与变分问题。应用数学经典丛书，第28卷。工业与应用数学学会，费城（1999）。

[17] Li Ch., Ng K.F.：凸分析中上确界函数的次微分演算规则。SIAM J Optim 21, 782–797 (2011)[18] López, M.A., Still, G.：半无限规划。《欧洲运筹学杂志》, 180, 491-518 (2007)[19]Moreau J. J.：凸泛函，载于：偏微分方程研讨会。法兰西公学院（1966）[20] Robinson, S.M.：上确界函数之共轭函数的一个简短推导。J Convex Anal 19, 569–574 (2012).[21] Rockafellar R. T.：论次微分映射的极大单调性。Pacific J Math. 33, 209–216 (1970)[22] Zălinescu C.：一般赋范向量空间中若干凸函数的双共轭。J Global Optim. 40, 475–487 (2008)