arXiv:2602.05466v1 [cs.NE] 5 Feb 2026

优化还不够：为何问题建模同样值得重视

Iván Olarte Rodríguez[1 [0009−0005−0748−9069]]、Gokhan Serhat[2 [0000−0001−9928−0521]]、Mariusz Bujny[3 [0000−0003−4058−3784]]、Fabian Duddeck[4 [0000−0001−8077−5014]]、Thomas Bäck[1 [0000−0001−6768−1478]]和Elena Raponi[1 [0000−0001−6841−7409]]

[1] LIACS，莱顿大学，荷兰莱顿 {i.olarte.rodriguez, t.h.w.baeck, e.raponi}@liacs.leidenuniv.nl[2] 鲁汶大学机械工程系，比利时布鲁日 gokhan.serhat@kuleuven.be[3] NUMETO，波兰米科武夫 mariusz.bujny@numeto.eu[4] 慕尼黑工业大学工程与设计学院，德国慕尼黑 duddeck@tum.de

摘要。 黑箱优化日益广泛地应用于工程设计问题，这类问题的仿真评估成本高昂，且无法获得梯度。在此背景下，优化领域主要在无上下文设置中分析算法性能，却未充分关注问题建模和领域知识可能如何影响优化结果。我们通过一个层合复合材料结构拓扑优化的案例研究来弥补这一不足，并将其建模为黑箱优化问题。具体而言，我们研究受体积约束的悬臂梁设计，旨在最小化柔度，同时优化结构拓扑和纤维取向。为评估问题建模的影响，我们明确区分拓扑设计变量与材料设计变量，并比较两种策略：一种并行方法在不利用物理洞见的情况下同时优化所有变量；另一种序贯方法则分阶段优化性质相同的变量。结果表明，上下文无关策略始终会产生次优或非物理解。相比之下，顺序策略能够得到性能更优且更可解释的解。这些发现凸显了在条件允许时将领域知识融入优化过程的价值，并推动开发能够鼓励基于物理知识和结合上下文的优化策略的新型黑箱基准。

关键词： 黑箱优化 · 问题定义 · 拓扑优化 · 纤维路径规划 · 悬臂梁 · 序贯优化 · 并发优化 · 纤维增强复合材料

1 引言

优化是工程设计中的基础工具 [29]。结合物理依据充分的模型，它能够借助日益先进的算法框架，系统地搜索高性能解决方案。然而，这些方法的有效性在很大程度上取决于优化问题本身是否定义良好、是否符合物理规律。正如我们在本文中所论证的，无论优化算法多么复杂，如果没有基于适当的建模假设和结构考量对问题进行谨慎定义，它们本身并不能保证得出有效或具有实际价值的解决方案。

在黑箱优化领域，大量研究致力于通过为给定的优化景观选择合适的算法（即算法选择问题，ASP） [3,24],，或调整算法配置（即算法配置问题，ACP），来提升优化性能。这两项任务的一种常见方法是探索性景观分析（ELA），它基于对目标函数的有限采样，提取能够描述问题景观的特征 [30,32,23]。随后，通常借助机器学习方法，利用这些特征为算法选择或配置策略提供依据，从而相应地适应问题的底层结构。然而，尽管这些框架在合成基准测试中相对成功，例如连续优化器比较（COCO）平台的黑箱优化基准测试（BBOB）测试套件 [16], ，但由于评估预算有限且计算受到约束，将其应用于现实世界问题时，往往会产生难以承受的成本。因此，只有少数研究（如 Long 等人[27] ）将这一方法应用于昂贵的现实世界优化问题。尽管如此，与合成或抽象的基准函数不同，现实世界的优化问题通常包含结构化的领域知识：变量并非单纯的任意输入，而是对应于有意义的物理量，且具有已知约束，其对系统性能的影响也得到充分理解。这些先验知识涵盖从类别差异到变量影响力估计等内容，因此需要转换视角。与其将变量视为纯黑箱景观中的单元，不如将领域特定的洞见整合到流程中，以免进行成本高昂的特征分析。

本研究探讨了问题建模在层合复合材料结构的拓扑与纤维路径优化中的作用。我们考虑一个典型但具有说明性的基准问题：承受向下集中端部载荷的线弹性悬臂梁。我们提出一个采用全新设计空间的基准问题，该设计空间使用移动可变形组件（MMC）方法进行参数化，可提供紧凑且显式的几何表示。为对采用曲线纤维增强的复合材料的空间可变各向异性进行建模，我们采用层合参数（LPs），以紧凑形式表示纤维取向。该建模方式使结构拓扑与纤维取向的空间分布能够统一优化，从而实现几何设计参数与材料设计参数的创新性结合。

我们在函数评估预算有限的情况下，采用基于种群的算法和基于代理模型的算法进行优化。我们比较顺序优化与同步优化所得的结果，以说明即使使用先进的优化器，后者也可能导致不可行或结构无效的解。

本研究强调了一个关键见解：如果问题定义明确且符合物理实际，优化过程的有效性便会提高。通过采用一个看似简单的悬臂梁设置，我们展示了从一开始就融入领域知识（通过序贯优化方法）如何改善结果，并比纯粹采用黑箱方法更有效地指导算法选择。

2 相关工作

本节回顾了与复合材料结构设计相关的优化技术的重要进展。我们首先介绍用于目标函数计算成本高昂或不可微问题的黑箱优化方法。接着，讨论拓扑优化的进展，重点介绍 MMC技术。随后，考察纤维取向优化，包括用于变刚度设计的层合参数和几何列式。最后，介绍结合拓扑优化与纤维取向优化的集成策略。

2.1 黑箱优化

黑箱优化（BBO）是指对目标函数进行优化的过程，其中目标函数的解析形式被视为未知。因此，这类方法不考虑局部梯度的计算，适用于目标函数评估成本高昂，且可能表现出噪声和非光滑特性的情形。这类情况常见于工程设计领域，目标值通常通过高保真仿真或物理实验计算得出。传统上，人们会采用经典的无导数方法解决此类问题，例如 Nelder-Mead方法、模式搜索或遗传算法。这些方法具有较强的鲁棒性，但往往需要大量函数评估次数。

近年来，基于模型的方法（如贝叶斯优化（BO））日益受到欢迎，因为它们能够通过代理模型（对于连续搜索空间上的优化任务，通常采用高斯过程（GP） [22]）和量身定制的候选点选择策略，在探索与利用之间取得平衡。借助代理模型，这类方法在函数评估次数昂贵的低维问题上尤其有效。为了解决贝叶斯优化在高维或具有结构的问题中的局限性，研究者提出了多种可扩展的变体。信赖域贝叶斯优化（TuRBO）算法 [7] 会动态调整信赖域，以在高维空间中保持样本效率。采用自适应扩展子空间的贝叶斯优化（BAxUS） [35] 则通过随机嵌入引入低维子空间建模，以利用问题的稀疏性，而

异方差进化贝叶斯优化（HEBO）算法 [5]结合了输入扭曲与分层代理建模，以提升可扩展性。这些方法体现了在贝叶斯优化中整合利用结构的策略、以克服维数灾难的趋势。

协方差矩阵自适应进化策略（CMA-ES） [17,18] 等基于种群的算法，因配置简单、计算成本低，且比基于模型的方法更善于处理优化景观中的分岔和不连续性 [6]，已应用于工程设计流程。不过，这类算法通常更倾向于开发已有解，且需要更大的评估预算才能收敛到令人满意的解。

2.2 拓扑优化

拓扑优化（TO）是一种关键方法，用于在既定载荷条件和结构性能标准下确定最优材料布局。诸如带惩罚的固体各向同性材料（SIMP） [54] 和水平集方法 [1,62]等经典方法已实现自动化设计，但也存在缺陷，分别可能导致密度分布模糊和数值处理复杂。所谓的双向渐进结构优化（BESO）方法 [20]通过移除低应力单元来提高结构定义的清晰度，但仅适用于基于柔顺度的目标。为缓解维数灾难并使参数化与网格脱钩，Guo 等人 [12]提出了移动可变形组件（MMC）方法，该方法将几何参数作为设计变量，通过构件的移动、变形、重叠和删除来构造结构 [34]。尽管 MMC 效果显著，但其设计空间受初始组件集合的限制。Bujny 等人 [4] 和 Raponi 等人 [41] 近期将进化优化和基于代理模型的优化策略应用于 MMC 表述，证明了无梯度方法适用于车辆耐撞性等非线性问题；在这类问题中，移动渐近线法（MMA） [56]等传统基于梯度的技术可能效果较差。

2.3 纤维取向优化

纤维增强复合材料因其优异的刚度重量比特性，被广泛应用于对性能要求严苛的行业。对这些材料中纤维路径的优化，可通过定制各向异性刚度属性来提升结构性能。早期分析方法将纤维与主应力方向对齐 [36,37]。这些研究后来通过基于能量的公式得到改进 [28], ，指出了主应力对齐可能无法产生唯一最优取向的条件。

较新的数值方法，尤其是采用有限元分析（FEA）的方法，使得能够通过

连续纤维角优化（CFAO）等方法实现单元级纤维取向优化 [39,47], ，支撑平滑且空间变化的纤维分布。相比之下，基于层合参数的方法 [11,31], 可降低设计维数，但大多仅适用于刚度恒定的层合板。层合参数插值法（LPIM）[44,45] 支持无网格变刚度设计，并可扩展以处理几何不连续 [49,50,51]和可制造性约束 [13,40]。

其他技术采用多项式、 [19],样条[33], 流线 [60], 和水平集 [58],等参数化表示，从而构建闭式纤维路径，以更好地控制曲率和间距 [53,59,63]。

在优化策略方面，基于梯度的方法很常见，但容易收敛到局部极小值 [52],; 而混合方法和无导数方法（例如粒子群优化） [25] 已被证明对 LP 和几何列式均有效。另一方面，元启发式算法和遗传算法（如 [48], ）已用于某些问题建模，在这些问题中，纤维角度参数化（例如 NURBS）不允许计算灵敏度。

2.4 拓扑优化与纤维取向优化的混合技术

在纤维增强复合材料的设计中，拓扑优化和纤维取向优化传统上是分别处理的。然而，近年来的研究日益关注二者的整合，以充分利用复合材料的各向异性特性。有关这一主题的更多信息，读者可参阅 [34]。

早期研究主要采用顺序优化策略，即分两个不同阶段分别对结构拓扑和纤维取向进行优化。这种解耦方式简化了问题建模，并提高了数值稳定性。例如，Peeters等 [38],基于SIMP与LPs相结合的改进方法，先确定最优拓扑，然后确定LPs，最后构建相应的纤维路径。其他方法，例如基于元胞自动机的方法 [46], ，旨在提高计算效率和稳健性。

相比之下，同步优化方法因其实现更优结构性能的潜力而日益受到关注。将SIMP与纤维取向变量相结合的技术 [42], ，或基于均匀化理论的方法 [26], ，能够同时优化材料分布和各向异性。其中一种典型方法由Sun 等人 [55],提出，该方法通过采用MMC的联合建模，并将每个组件定义为具有固定纤维取向，从而对拓扑和纤维取向进行优化。

然而，上述大多数方法通常涉及大量设计变量，尤其是在以高分辨率定义拓扑和方向场时。为解决这一问题，我们提出了一种混合方法，将用于TO的MMC与用于纤维导向的层合参数相结合。该方法降低了设计空间的维数，并实现了无梯度同步优化；在本文中，我们将其与顺序策略和上下文感知策略进行了基准比较。

3 问题建模

本节概述了层合复合材料结构的拓扑优化问题 formulation，其中材料分布和局部刚度属性可同时进行优化。该区域采用基于水平集的几何表示进行描述，而层合复合材料的各向异性行为则通过由经典层合板理论推导出的层合参数来表示。该方法的一个关键方面是集成层合参数插值法（LPIM），从而能够使刚度属性在整个结构中连续变化，并满足物理可行性。由此得到的优化问题旨在确定结构材料的最优布局以及层合参数的空间分布，使结构性能目标在制造约束和物理约束下得以满足。

3.1 设计域与有限元公式

本研究考察的结构区域由一块悬臂矩形层合板构成，其右边缘中点承受向下集中力，如图1所示。该区域采用由 100×50 个单元组成的有限元网格进行离散，从而保持与既有基准 [4,12,41]一致的2:1长宽比。该离散化决定了后续拓扑优化中设计场的空间分辨率。

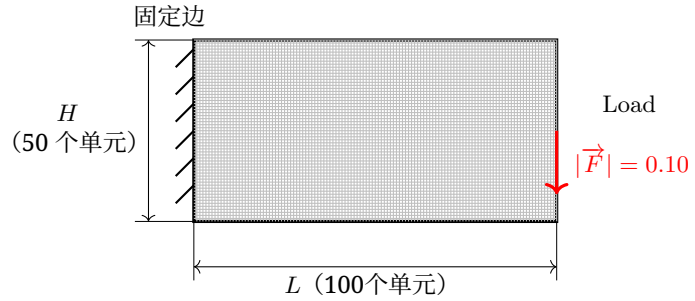


图 1：悬臂梁测试算例示意图。图中单元在 x 和 y 方向上的长度均为 1。

采用线弹性理论模拟复合层合板的力学响应。具体而言，使用厚度为单位厚度的四节点矩形等参 Reissner-Mindlin 壳单元。根据 LP 分布的定义，使用第 3.2 节中给出的公式（3）计算每个单元的面内刚度矩阵，其具体形式详见同一节。采用自编有限元求解器进行模拟。

3.2 参数化

移动可变形组件。 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为一个有界设计域（如图1所示），其中包含所有可行布局。记 $\Omega \subset D$ 为材料占据的子区域。全局水平集函数（LSF） Φ: $D \to \mathbb{R}$ 通过以下符号约定表征材料分布：

$$\begin{cases} \Phi(\mathbf{q}) > 0, & \mathbf{q} \in \Omega, \\ \Phi(\mathbf{q}) = 0, & \mathbf{q} \in \partial\Omega, \\ \Phi(\mathbf{q}) < 0, & \mathbf{q} \in D \setminus \Omega, \end{cases}$$

其中， $\partial\Omega$ 表示材料-空隙界面。因此， Φ 的零水平集界定了不同材料相之间的界面，确保在任意位置 $\mathbf{q} = (x, y)^\top \in D$都具有清晰的边界表示，且不存在中间密度。

全局 LSF Φ 由局部水平集函数$\phi_i : D \to \mathbb{R}$组合构成，每个函数对应一个独立且可变形的梁状结构组件，称为 MMC。

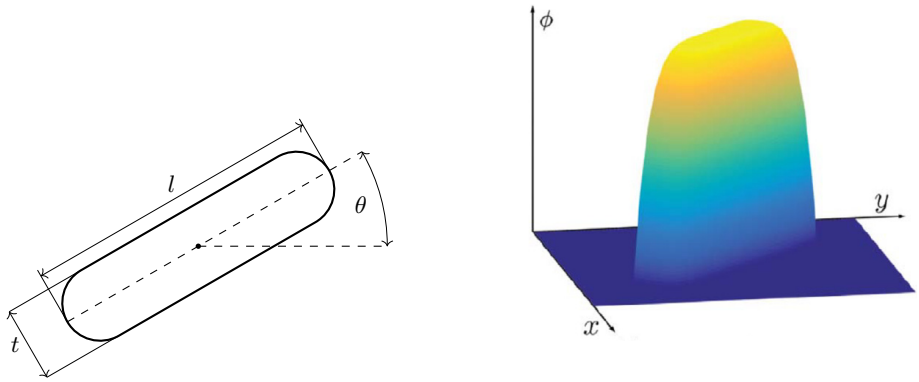
对于二维情形，每个组件由以下形式的局部水平集函数表示：

$$\begin{aligned} \phi_i(\mathbf{q}) = -\Bigg[& \left(\frac{\cos\theta_i (x - x_{c,i}) + \sin\theta_i (y - y_{c,i})}{l_i/2} \right)^m \\ & + \left(\frac{-\sin\theta_i (x - x_{c,i}) + \cos\theta_i (y - y_{c,i})}{t_i/2} \right)^m - 1 \Bigg], \end{aligned} \tag{1}$$

其中，$(x_{c,i}, y_{c,i}) \in D$ 表示第 i 个组件的中心， l_i 和 t_i 分别表示其长度和厚度，θ_i 表示其面内取向角。指数 m 取相对较大的偶整数；按照文献中的常见做法 [4,12,41]，本文将其设为 $m = 6$ 。

每个组件均由向量 $(x_{c,i}, y_{c,i}, \theta_i, l_i, t_i)$ 进行参数化，从而简洁地表示其几何形状。图 2 分别展示了 MMC 的参数化及其对应的局部 LSF。

层合参数。 层合参数方法为表示层合复合材料的刚度特性提供了一种简洁方式 [61]。层合参数可作为设计变量，取代铺层数量、铺层厚度和纤维取向等显式属性。这种公式的一项主要优势是往往能够形成凸设计空间，通常可以避免局部最优解带来的问题 [10,44]。



(a) 个体的参数化 MMC.

(b) 个体对应的 LSF 组件。

图 2：单个 MMC 的参数化和 LSF。改编自 [41]。

根据经典层合板理论，层合复合板的本构关系如下 [14]:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^0 & \mathbf{B}^0 \\ \mathbf{B}^0 & \mathbf{D}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \tag{2}$$

其中， N_x、 N_y 和 N_{xy} 是单位宽度的面内力合力， M_x、 M_y 和 M_{xy} 是相应的弯矩合力。 ε_x^0、 ε_y^0 和 ε_{xy}^0 表示中面应变，而 κ_x、 κ_y 和 κ_{xy} 表示曲率。矩阵$\mathbf{A}^0$, $\mathbf{B}^0$, 和$\mathbf{D}^0$ 分别对应面内刚度、弯曲-拉伸耦合和弯曲刚度。这些矩阵可以用层合参数和材料不变量表示。

对于对称且平衡的层合板，归一化面内刚度矩阵可用两个层合参数（V_1 和 V_3）表示:

$$\frac{\mathbf{A}^0}{h} = \begin{bmatrix} U_1 & U_4 & 0 \\ U_4 & U_1 & 0 \\ 0 & 0 & U_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_2 & 0 & 0 \\ 0 & -U_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V_1 + \begin{bmatrix} U_3 & -U_3 & 0 \\ -U_3 & U_3 & 0 \\ 0 & 0 & -U_3 \end{bmatrix} V_3. \tag{3}$$

V_1 和 V_3 定义如下:

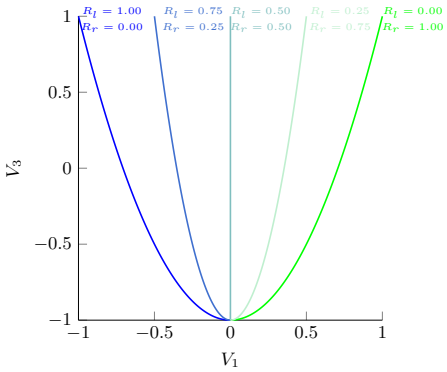
$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{N_l} \varsigma_k \begin{Bmatrix} \cos(2\alpha_k) \\ \cos(4\alpha_k) \end{Bmatrix}, \tag{4}$$

其中， N_l 为铺层数， ς_k 为第 k个单层的厚度， α_k 为其纤维取向角， h 为层合板的总厚度，而 U_j 为

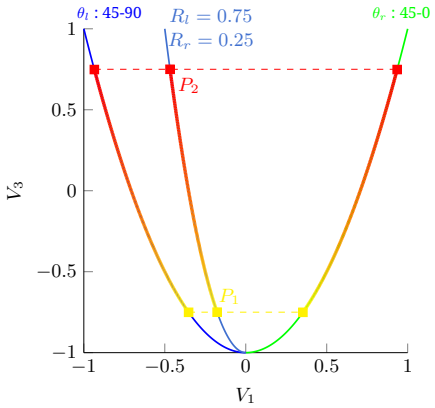
根据材料属性计算得出的材料不变量（更多详情请参见 [14]）。

对于对称层合板，耦合矩阵$\mathbf{B}^0$ 为零。此外，对于包含许多均匀分布铺层的层合板，弯曲刚度矩阵$\mathbf{D}^0$ 近似呈正交各向异性，并满足关系$\mathbf{D}^0 = \mathbf{A}^0 h^2/12$[8]。这种近似使$\mathbf{D}^0$ 能够用层合参数表示。

层合参数插值法。 层合参数插值法使复合材料结构中的纤维取向能够沿空间变化，同时通过由Miki图 [31]推导出的连续设计空间确保可行性。尽管该图为单个面板或板提供了离散的可行刚度配置，但连续变刚度（VS）描述要求对区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 进行离散化，使每个单元都具有独立的LP描述。按照Serhat和Basdogan [43], 提出的方法，插值过程包括以下步骤：(1) 生成层合参数分布；(2) 计算相应的纤维角度场；(3) 重构纤维路径。下文将重点讨论第一步，因为就优化问题定义而言，这一步最为相关：它决定了我们所构建问题中设计变量的最优值。



(a) 不同体积比下设计点的若干条曲线。



(b) 体积分数为$R_l = 0.75$、$R_r = 0.25$的两种层合板之间的插值示例。设计点：$P_1(V_1, V_3) = (-0.1768, -0.75)$，$P_2(V_1, V_3) = (-0.4677, 0。75)$。

图 3：使用层合参数插值法生成的插值曲线示例。改编自 [43]。

当使用至多两组独特的纤维取向时，LP 设计空间由（V_1，V_3）平面中的曲线刻画，每条曲线对应一个特定的体积比 $R_r \in [0,1]$，表示Miki图右侧边界处各铺层角度对应的体积分数（即铺层中取向介于 $45°$ 和 $0°$之间的比例）。相应的左侧体积分数为$R_l = 1 - R_r$。图3a展示了这类曲线，呈现了不同 R_r对应的可行设计空间。 V_1，V_3，和 R_r 之间的关系如下：

$$V_1 = (2R_r - 1)\sqrt{\frac{V_3 + 1}{2}}, \tag{5}$$

这一约束确保生成的铺层序列在物理上可实现。

为实现结构内平滑的空间变化，我们使用距离加权方案，在这些曲线上选定的设计点 P_1 和 P_2 之间插值层合参数。插值点满足弧长比例条件 $(\overset{\frown}{P_eP_1}/\overset{\frown}{P_eP_2} = d_1/d_2)$，从而确保几何一致性和可制造性（见图3b）。

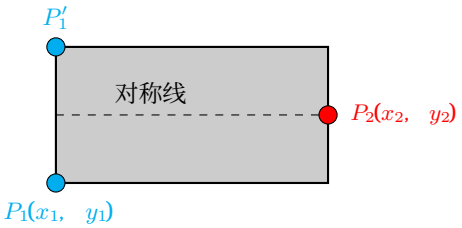


图4：用于插值层合参数的主节点。

4 优化问题

设计变量。 我们将设计向量定义为 $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_{\mathrm{MMC}}, \mathbf{x}_{\mathrm{LP}}\} \in \mathbb{R}^n$其中，$\mathbf{x}_{\mathrm{MMC}} \in \mathbb{R}^{n_1}$ 是用于定义材料在多个 MMC 中分布的参数，而 $\mathbf{x}_{\mathrm{LP}} \in \mathbb{R}^{n_2}$ 是用于编码面内刚度属性的层合参数，即由 $(R_r, V_{3,1}, V_{3,2})$ 组成的向量，其中 R_r 为体积比，$V_{3,1}$ 和 $V_{3,2}$ 对应于图4所示主节点处固定的 V_3 值。本研究考虑具有对称性假设的三个 MMC，因此得到 $n_1 = 15$。加上三个额外的层合参数，设计变量总数为 $n = 18$。

目标函数。 目标是最小化结构柔度：

$$\min_{\mathbf{x}} \ C(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{\top}\mathbf{u}_{\mathrm{global}} = \sum_{k}^{n_{\mathrm{elements}}} \mathbf{u}_{(k)}^{\top}\mathbf{K}_{(k)}\mathbf{u}_{(k)}. \tag{6}$$

其中，$\mathbf{u}^{(k)}$ 和 $\mathbf{K}^{(k)}$ 分别表示单元 k的位移向量和刚度矩阵。

约束。优化受以下约束限制：

1. 体积约束：

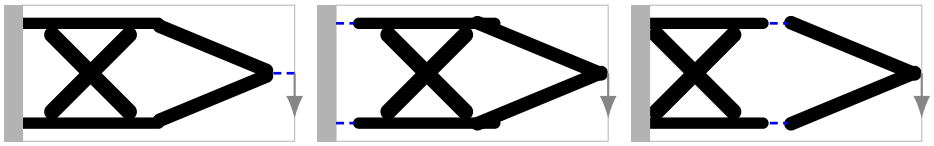
$$V(\mathbf{x}) - V_{\max} \leq 0 \tag{7}$$

此处，$V(\mathbf{x})$ 是由 MMC 几何形状定义的体积。对于这项工作，我们只施加一个体积约束 $V_{\max}$，将其设为设计域的 50%。函数 $V(\mathbf{x})$ 通过计数被归类为 Ω 一部分的离散单元来计算。

2. 连通性约束：

$$\Psi(\mathbf{x}) = \psi_1(\mathbf{x}) + \psi_2(\mathbf{x}) + \psi_3(\mathbf{x}) \leq 0 \tag{8}$$

此处，Ψ 作为惩罚函数，用于量化结构的断连程度。我们采用图 5 所示的三种不同且相互独立的度量。由于它们是基于距离的量，所有单项均满足 $\psi_i \geq 0$。在数值计算这些度量时，我们使用了 Python 软件包 shapely [9]。



(a) 与载荷的连接，ψ_1。(b) 与支座的连接，ψ_2。(c) 结构自身的连接，ψ_3。

图5：悬臂梁测试算例中连通性约束的典型违反情况。阻碍设计满足连通性准则的间隙以蓝色虚线标示。改编自 [41]。

修正目标函数。为纳入这些约束，我们采用如下修正柔顺度目标函数：

$$\tilde{C}(\mathbf{x}) = \begin{cases} C(\mathbf{x}) + \gamma_1 \max\big(V(\mathbf{x}) - V_{\max}, 0\big), & \Psi(\mathbf{x}) \leq 0, \\ \gamma_1 \max\big(V(\mathbf{x}) - V_{\max}, 0\big) + \gamma_2 \Psi(\mathbf{x}), & \Psi(\mathbf{x}) > 0, \end{cases} \tag{9}$$

其中 $\gamma_1 = 0.02$ 和 $\gamma_2 = 200$。

该表述有两个主要目的。首先，它通过避免对柔度 $C(\mathbf{x})$的评估次数来提高计算效率，当

结构不连通时。在此类情况下，有限元求解器可能得出数值不稳定或无信息量的结果，从而在搜索过程中引入随机性。通过基于不可行性度量 $\Psi(\mathbf{x})$进行惩罚，优化器可以更有效地将搜索引导至可行且连通的设计。

其次，这一修改将约束优化问题转化为无约束问题，这对基于种群的优化算法尤其有利。这些算法通常缺乏处理硬约束的内在机制，而方程（9）中的惩罚公式等方法则提供了一种实用的替代方案。然而，这种转化可能会给基于模型的优化器（例如贝叶斯优化中使用的优化器）带来潜在缺点。由此得到的目标函数可能存在不连续性和非平滑行为，从而使代理模型训练和采集函数优化变得复杂。不过，为了保持通用性，并便于比较不同类别优化器的性能，我们最终采用了上述公式。

5 实验设置

我们在固定的总函数评估预算 B （本文所述实验中为 $B = 1000$ ）下，评估了两种不同的求解策略（并发和顺序）。对于这两种策略，我们使用了以下材料属性：纵向杨氏模量 $E_1 = 25$、横向杨氏模量 $E_2 = 1$、面内剪切模量 $G_{12} = 0.5$ 和泊松比 $\nu_{12} = 0.25$。这些数值与 [43] 中给出的比例一致。

并行方法。 完整的 $n = 18$ 设计变量集合（15 个拓扑变量和 3 个层合参数）会被同时优化。每种算法都直接在这个联合的 18 维搜索空间中运行，并获得完整的预算。

序贯方法。 优化被分解为两个阶段：

1. 使用部分预算优化 $n_1 = 15$ 拓扑变量。我们将部分预算 B_1 计算为$\mathbf{x}_{\mathrm{MMC}}$ 与$\mathbf{x}_{\mathrm{LP}}$ 维度的加权比例，具体如下：

$$B_1 = B\frac{n_1}{n} = B\frac{n_1}{n_1 + n_2}. \tag{10}$$

   在这一部分中，我们将向量$\mathbf{x}_{\mathrm{LP}}$固定为（$R_r = 0.5,\ V_{3,\,1} = 0,\ V_{3,\,2} = 0$），使材料呈准各向同性。Peeters等 [38]也采用了这种特定方法。

2. 固定阶段 1 获得的最佳拓扑，并使用剩余预算 $B_2 = B - B_1$ 优化 3 个 LP 变量。

5.1 算法

对于并行和顺序策略，我们比较以下黑箱优化算法：1) CMA-ES；2) BAxUS；3) HEBO；4) 原始贝叶斯优化；5) TuRBO-1；6) TuRBO-m；7) 差分进化（DE）。

CMA-ES. 在该算法中，子代种群规模 λ 定义为： $\lambda = 4 + \lfloor 3\ln\ d \rfloor$，其中 d 为问题维度， $\lfloor \cdot \rfloor$ 为向下取整运算符。该值会根据并发和顺序优化问题设置中的维数进行调整。父代种群规模设为 $\mu = \lambda/2$，遵循 PyCMA 库的默认配置 [15]。此外，由于主动式 CMA-ES 变体 [21] 在多峰优化问题上表现出色，因此采用该变体。

差分进化. 对于该算法，我们将种群规模设为 $10d$。这一选择确保了足够的多样性，从而能够有效探索搜索空间，尤其是在更高维度下。我们采用了二项式交叉策略（"bin"），并使用 scipy.optimize.differential_evolution 实现中的默认参数设置：交叉概率 $CR = 0.7$ 和差分权重$F = 0.8$。

贝叶斯优化。 对于贝叶斯优化方法，初始样本集大小设为 $3d$。为确保所有方法的评估过程一致且按序进行，未考虑并行性。除 BAxUS 外，所有优化器均采用 Matérn $5/2$ 核的高斯过程代理模型；同时使用自动相关性确定（自动相关性确定），针对每个输入维度单独调整长度尺度。

表 1 列出了这些算法、各自对应的采集函数，以及其实现所采用的 Python 库。

表 1：贝叶斯优化方法列表，展示其采集函数和实现框架。

优化器	采集函数	库
TuRBO-1	汤普森采样 [57]	BoTorch
TuRBO-m	汤普森采样 [57] （包含 3 个多目标信赖域版 TuRBO-1）	BoTorch
HEBO	多目标采集集成 (MACE) [5]	HEBO
BAxUS	汤普森采样 [57]	BoTorch
原始贝叶斯优化	对数期望改进 (logEI) [2]	BoTorch

6 结果

6.1 收敛与全局结果

图 6 展示了若干优化器在顺序和并发评估模式下的收敛表现。纵轴表示迄今为止的最佳目标值（越低越好），横轴表示函数评估次数。

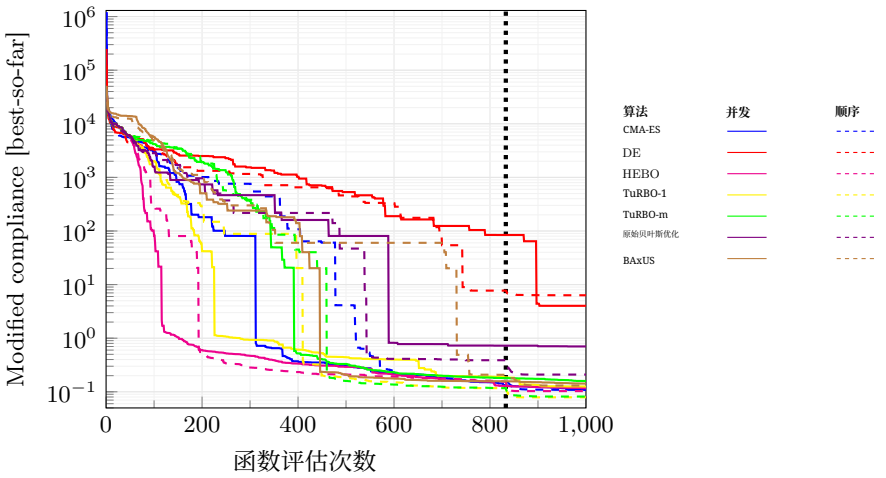


图 6：并发（实线）和顺序（虚线）方法下算法的收敛图，为 20 次运行的平均结果。黑色点线标示顺序策略两个阶段之间的转换。

总体而言，除 DE 外，顺序版本始终比并发版本取得更优的最终解。值得注意的是，并行策略在评估次数较少时表现出更好的收敛性。鉴于准各向同性材料的定义对于大多数拓扑结构而言并非最优，这一结果并不令人意外。在此背景下，并行策略能够调整纤维取向，从而改善柔度。对于较小的预算，尤其是在前 400 次评估中，HEBO 优化器表现最佳。在这一范围内，HEBO 的顺序版本和并发版本均优于其他方法，表明 HEBO 能够快速引导搜索进入设计空间的可行域。然而，随着评估次数增加，其相对性能会下降。具体而言，在较大预算下，TuRBO-1 和 TuRBO-m 的顺序版本展现出最佳的平均性能。此外，顺序版本的收敛曲线表明，为第二阶段分配的预算可能超过了实际所需。大部分改进都发生在早期，接近末尾时仅观察到边际性的细化。这种行为反映了优化

问题仅用层合参数进行表述时所具有的凸性，使优化器更容易找到近似最优配置。为补充上述观察

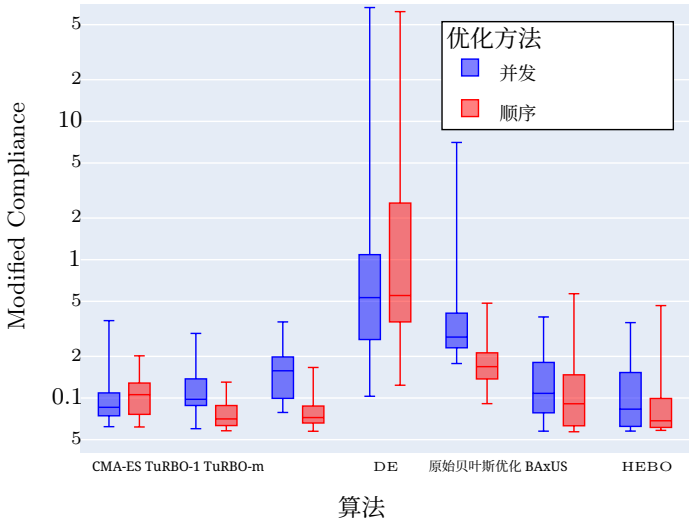


图 7：在完整评估预算下，各优化算法采用顺序策略和并行策略时修正后的合规值箱线图。数值越低，表示性能越好。

如图 6 所示，图 7 展示了按优化策略和算法分组的最佳表现结构的修正后柔度值分布。图中清楚地表明，与并行策略相比，顺序策略通常具有更低的柔度中位数和更小的变异性，TuRBO-1、TuRBO-m 和原始贝叶斯优化尤为明显。为统计检验各算法采用并行方法和顺序方法所得的中位数是否存在差异，我们进行了 Wilcoxon符号秩检验。表 2 汇总了检验结果，结果显示，在 5% 的显著性水平下，关于两种方法的中位数相等的零假设被拒绝。

TuRBO-1 和 TuRBO-m 的顺序变体与并发变体之间显著的性能差距，凸显了本研究的核心算法层面的考量。在并发形式中，采集/赌博机策略往往优先调整与 MMC 相关的变量，因为这些变量对目标景观的影响更大，从而使搜索实际上偏离了合适的 LP 配置。这种不平衡限制了优化器充分探索和利用 LP 设计空间的能力。相反，在顺序设置中，当 LP 变量被独立优化时，算法便能将其

表 2：Wilcoxon符号秩检验结果，比较并发与顺序策略在最优合规性的中位数方面的表现。统计显著结果（$p < 0.05$）以粗体标出。

算法	并行中位数	顺序中位数	p-值
CMA-ES	$8.565\,75 \times 10^{-2}$	$1.057\,49 \times 10^{-1}$	0.7012
TuRBO-1	$9.786\,79 \times 10^{-2}$	$7.058\,95 \times 10^{-2}$	**0.0107**
TuRBO-m	$1.573\,28 \times 10^{-1}$	$7.222\,93 \times 10^{-2}$	**0.0003**
DE	$5.319\,94 \times 10^{-1}$	$5.507\,49 \times 10^{-1}$	0.2774
原始贝叶斯优化	$2.757\,78 \times 10^{-1}$	$1.685\,49 \times 10^{-1}$	**0.0107**
BAxUS	$1.080\,34 \times 10^{-1}$	$9.086\,90 \times 10^{-2}$	0.3683
HEBO	$8.308\,44 \times 10^{-2}$	$6.845\,99 \times 10^{-2}$	0.1231

建模能力和采样预算完全用于层合参数，从而实现更有效的探索并得到更优的配置。

6.2 定性比较

本节将从最终材料布局和层合参数分布的角度，分析 TuRBO-1、BAxUS、CMA-ES 和 HEBO 算法。我们的目标是根据评估所得的修正柔度指标，考察性能最佳结构和中位表现结构。表 3 和表 4 展示了由此得到的纤维布局，以及 V_1 和 V_3的分布。

从这些表中可以看出，各算法在序贯方法下的 V_1 和 V_3 分布高度一致。采用并行策略得到的性能最佳结构也呈现出相似的层合参数分布，尤其是 TuRBO-1、HEBO 和 BAxUS。然而，考察并行方法下的中位表现结构时，层合参数分布则显得更加多样，表明这些情况下的 LP 配置范围更广。如上所述，性能上的多样性可能源于拓扑参数在推动收敛过程中起主导作用。由于材料布局主要影响修正柔度，调整层合参数往往只是被动的微调步骤，而非性能提升的重要驱动因素；当底层拓扑不理想时，尤其如此。一个例子是采用并行设置时，TuRBO-1 得到的中位表现结构。在这种情况下，与序贯情形相比，V_3 分布似乎呈现反转。为了进一步说明这一点，图 8 展示了相应的纤维角度分布。如图所示，在固定边界附近，α_l 和 α_r 的纤维取向相似。相比之下，在载荷作用点附近，α_l 主要沿水平方向排列，而 α_r 则沿垂直方向排列。这一差异表明，对于给定拓扑，局部主应力方向与坐标轴对齐。这种现象与该区域存在一条垂直材料带相吻合，该区域的弯矩小于轴向载荷。不过，也明显存在

表3：并行设置下不同算法的最佳和中位表现结构。

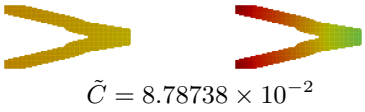
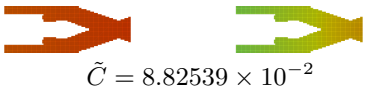
算法	最佳表现结构		中位表现结构	
	V_1	V_3	V_1	V_3
CMA-ES	 $\tilde{C} = 6.20583 \times 10^{-2}$		 $\tilde{C} = 8.78738 \times 10^{-2}$	
TuRBO-1	 $\tilde{C} = 6.00057 \times 10^{-2}$		 $\tilde{C} = 9.78883 \times 10^{-2}$	
HEBO	 $\tilde{C} = 5.76630 \times 10^{-2}$		 $\tilde{C} = 8.82539 \times 10^{-2}$	
BAxUS	 $\tilde{C} = 5.75949 \times 10^{-2}$		 $\tilde{C} = 1.11891 \times 10^{-1}$	
	-1.000 -0.500 0.000 0.500 1.000			

表4：顺序设置下不同算法的最佳表现结构和中位表现结构。

算法	最佳表现结构		中位表现结构	
	V_1	V_3	V_1	V_3
CMA-ES	 $\tilde{C} = 6.17188 \times 10^{-2}$		 $\tilde{C} = 1.09087 \times 10^{-1}$	
TuRBO-1	 $\tilde{C} = 5.79513 \times 10^{-2}$		 $\tilde{C} = 7.13461 \times 10^{-2}$	
HEBO	 $\tilde{C} = 5.83527 \times 10^{-2}$		 $\tilde{C} = 6.91426 \times 10^{-2}$	
BAxUS	 $\tilde{C} = 5.70230 \times 10^{-2}$		 $\tilde{C} = 1.06861 \times 10^{-1}$	
	-1.000 -0.500 0.000 0.500 1.000			

在所受应力可忽略不计的区域存在多余材料。此类构造对承载能力的贡献极小，并对整体结构效率产生负面影响。

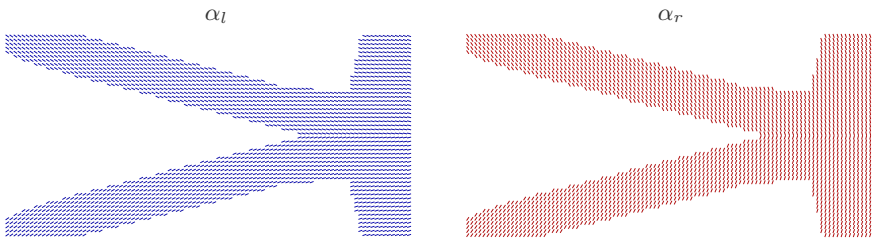


图8：采用并行策略、由TuRBO-1算法得到的性能中位结构的纤维角度分布。纤维取向分布 α_l 和 α_r 分别对应于设置 $R_l = 1$ 和$R_r = 1$时的分布。在此情况下 $R_r = 0.582$。

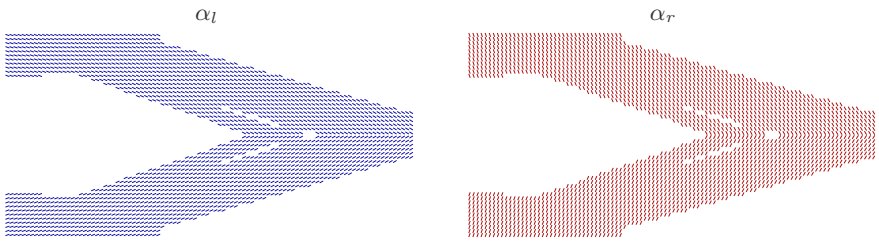


图9：采用顺序策略、由BAxUS算法得到的性能最佳结构的纤维角度分布。 α_l 和 α_r的含义与图8中相同。在此情况下 $R_r = 0.953$。

另一方面，图9给出了采用顺序优化策略、由BAxUS算法得到的性能最佳配置所对应的纤维角度分布。在此情况下， R_r 的值接近1，表明铺层序列为 $\pm[\alpha_r]$。聚焦于 α_r的分布，纤维取向呈现出明显模式：纤维在固定边界附近几乎呈垂直取向，而在载荷作用点附近，取向转变为约 $\pm 60^\circ$ 。该配置与图8所示的配置形成对比。

通过检查图 9 中 α_r 的下半部分可以发现，纤维取向会受到下层 MMC 具体配置的影响。因此，Sun 等人 [55] 提出的为每个 MMC 设置独立纤维取向的想法或许值得采用。这一观察表明，可以通过更新基准——

如 Serhat 和 Basdogan [43] 所提议的，引入位置可调整的额外主节点，从而更有效地插值层合参数，以适应下层 MMC 的变形。

6.3 比较顺序与并发设置下的解

结合图 7 与表 3 和表 4 进行考察，可以发现优化景观似乎具有高度多模态特征，这一点体现在所获得的多种拓扑结构上。TuRBO-1 的平均表现最佳，因此值得进一步考察它在两种优化设置下的变量行为（图 10–11 分别对应并发设置和顺序设置）。在并发与顺序两种设置下，

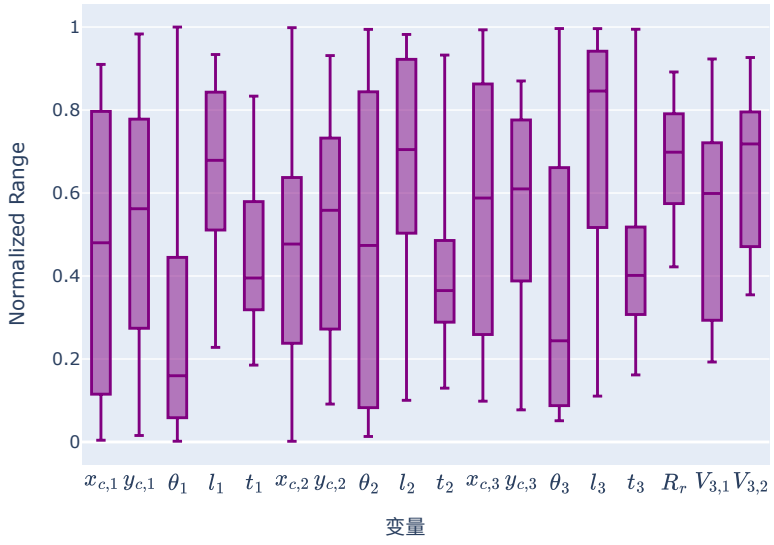


图 10：展示 TuRBO-1 算法和并行方法所得最优设计变量分布的箱线图。

在优化设置中，与三个 MMC 相关的变量始终遍布整个可行设计空间。这种行为表明目标景观具有高度多峰性，局部最优解分布广泛。相比之下，铺层参数向量$\mathbf{x}_{\mathrm{LP}}$呈现出更为细致的模式。在并发形式下，层合参数的变化幅度更大。相反，在序贯方法中，最优解在$\mathbf{x}_{\mathrm{LP}}$处表现出明显的聚集趋势，这表明对有利 LP 配置的利用更有针对性且更有效

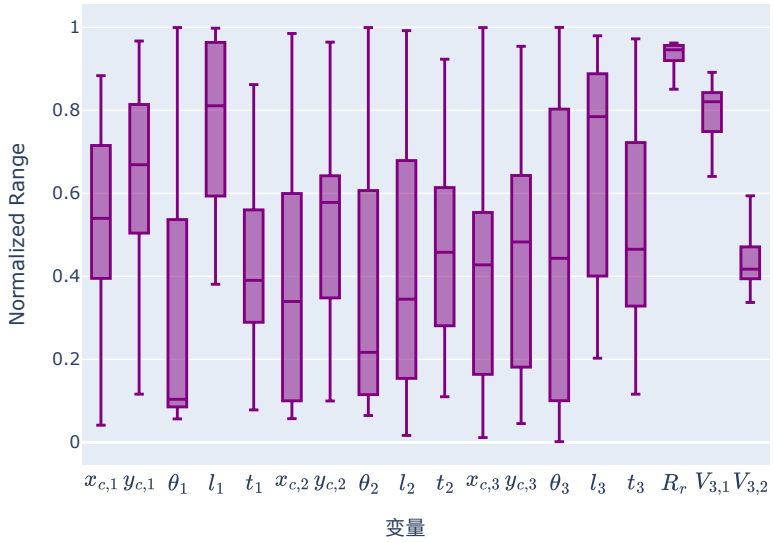


图11：展示 TuRBO-1 算法和序贯方法的最优设计变量分布的箱线图。

。为使呈现更清晰，我们仅展示了 TuRBO-1 的箱线图，但在本研究使用的所有优化算法中都始终观察到相同趋势，差分进化（DE）除外，其表现最低。

7 结论

本研究提出了一种用于可变刚度复合材料结构的新型拓扑优化框架，采用铺层参数插值，使纤维取向能够在整个设计域内平滑变化。通过结合材料布局（拓扑）与铺层参数优化，所提出的方法有效提高了结构的刚度。

本研究的核心目标之一，是考察优化问题的定义，尤其是拓扑变量和材料变量的分离，如何与算法选择相互作用。我们研究了顺序形式与并发形式之间的选择，以及计算预算的分配方式，如何影响最终设计的质量和真实性。这一视角强调，工程设计中的优化能否成功，不仅取决于算法选择，也取决于问题建模以及领域知识的融入。当我们掌握物理洞见，例如设计变量性质的差异，或目标景观中可识别的结构时，

便可以利用这些洞见来指导问题建模，而不是默认采用纯粹的黑箱方法。

未来的工作将通过增加用于铺层参数插值的主节点数量，并纳入其他拓扑构造，进一步拓展所提出的方法。这项研究将有助于深入了解材料布局与纤维导向之间的相互作用；本研究探讨的这两个子问题紧密耦合。此外，我们还计划将该框架应用于更贴近实际的工程场景，从而推动开发更丰富、更具代表性的黑箱优化基准问题。我们认为，缺乏此类测试平台是当前基准测试实践的一项局限，而这也会影响算法选择与配置问题任务的制定和评估方式。

参考文献

1. Allaire, G., Jouve, F., Toader, A.M.：利用敏感性分析和水平集方法进行结构优化。《计算物理学杂志》**194**(1), 363–393（2004年2月）。https://doi.org/ . /j.jcp. . . . Ament, S., Daulton, S., Eriksson, D., Balandat, M., Bakshy, E.：贝叶斯优化中期望改进方法的意外改进（2025年1月）。https://doi.org/10.48550/arXiv.2310.20708, http://arxiv.org/abs/ 2310 20708, 2310 20708 [ ] 。arXiv: . cs . Bischl, B., Mersmann, O., Trautmann, H., Preuss, M.：基于探索性景观分析和成本敏感学习的算法选择。第14届遗传与进化计算年度会议（GECCO）论文集，第313–320页（2012年） 4. Bujny, M., Aulig, N., Olhofer, M., Duddeck, F.：采用进化水平集方法识别耐撞性的最优拓扑。《国际耐撞性杂志》**23**(4), 395–416（2018年7月）。https://doi.org/10.1080/13588265. 2017.1331493 5. Cowen-Rivers, A.I., Lyu, W., Tutunov, R., Wang, Z., Grosnit, A., Grif- fiths, R.R., Maraval, A.M., Jianye, H., Wang, J., Peters, J., Ammar, H.B.：HEBO：突破样本高效超参数优化的极限（2022年5月）。https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.03826, http://arxiv.org/abs/ 2012 03826, 2012 03826 [ ] 。arXiv: . cs . Duddeck, F.：汽车车身的多学科优化。《结构与多学科优化》**35**(4), 375–389（2008年4月）。https://doi.org/10.1007/ s00158-007-0130-6 7. Eriksson, D., Pearce, M., Gardner, J.R., Turner, R., Poloczek, M.：通过局部贝叶斯优化实现可扩展的全局优化（2020年2月），http://arxiv.org/abs/ 1910.01739, arXiv:1910.01739 [cs, stat]8. Fukunaga, H., Vanderplaats, G.N.：利用层合参数对正交各向异性层合复合材料进行刚度优化。《AIAA期刊》**29**(4), 641–646（1991年4月）。https://doi.org/10.2514/3.59931, https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/3. 59931 9. Gillies, S., Contributors：Shapely 2.0.2（2024年）。https://doi.org/10.5281/zenodo. 10526315, https://doi.org/10.5281/zenodo.10526315

10. Grenestedt, J.L., Gudmundson, P.：复合材料结构的铺层优化。载于：Pedersen, P.（编），《先进材料优化设计》，IUTAM先进材料优化设计研讨会论文集，第311–336页。爱思唯尔科学，阿姆斯特丹（1993年）11. Grenestedt, J.L.：复合材料板基频的铺层优化与敏感性分析。《复合材料结构》**12**(3), 193–209（1989年1月）。https://doi.org/10.1016/0263-8223(89)90022-6 12. Guo, X., Zhang, W., Zhong, W.：基于移动可变形组件（mmc）和曲线骨架的显式结构拓扑优化。《计算机辅助力学与工程方法》**310**, 711–748（2016年）13. Guo, Y., Gil Pérez, M., Serhat, G., Knippers, J.：纤维缠绕结构部件纤维铺层优化的设计方法。《结构》**38**, 1125–1136（2022年4月）。https://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.02.048 14. Gürdal, Z., Haftka, R.T., Hajela, P.：《层合复合材料的设计与优化》。威立，纽约（1999年）15. Hansen, N.：CMA进化策略：比较综述。载于：《模糊性与软计算研究》，第75–102页。施普林格柏林海德堡，柏林，海德堡（2006年）。https://doi.org/10.1007/3-540-32494-1_416. Hansen, N., Auger, A., Ros, R., Mersmann, O., Tušar, T., Brockhoff, D.：COCO：用于黑箱环境下比较连续优化器的平台。《优化方法与软件》**36**(1), 114–144（2021年1月）。https://doi.org/10.1080/ 10556788.2020.1808977, http://arxiv.org/abs/1603.08785, arXiv:1603.08785 [cs]17. Hansen, N., Müller, S.D., Koumoutsakos, P.：利用协方差矩阵自适应（CMA）降低去随机化进化策略的时间复杂度。《进化计算》**11**(1), 1–18（2003年3月）。https://doi.org/10.1162/ 106365603321828970 18. Hansen, N., Ostermeier, A.：进化策略中完全去随机化的自适应。《进化计算》**9**(2), 159–195（2001年6月）。https: //doi.org/10.1162/106365601750190398 19. Honda, S., Igarashi, T., Narita, Y.：采用NSGA-II对层合复合材料板的曲线纤维形状进行多目标优化。《复合材料B辑：工程》**45**(1), 1071–1078（2013年2月）。https://doi.org/10.1016/j.compositesb. 2012.07.056 20. Huang, X., Xie, Y.M.：对ESO类拓扑优化方法的进一步综述。《结构与多学科优化》**41**(5), 671–683（2010年5月）。https://doi.org/10.1007/s00158-010-0487-9 21. Jastrebski, G., Arnold, D.：通过主动协方差矩阵自适应改进进化策略。载于：2006年IEEE进化计算国际会议。第2814–2821页（2006年7月）。https://doi.org/10.1109/CEC.2006. 1688662, iSSN: 1941-0026 22. Jones, D.R., Schonlau, M., Welch, W.J.：昂贵黑箱函数的高效全局优化。《全局优化期刊》**13**(4), 455–492（1998年12月）。https://doi.org/10.1023/A:1008306431147 23. Kerschke, P., Trautmann, H.：用于探索性景观分析的R软件包flacco及其在多目标优化问题中的应用。《IEEE进化计算汇刊》**20**(2), 229–243（2016年）24. Kerschke, P., Trautmann, H.：结合探索性景观分析与机器学习，在连续黑箱问题上进行自动算法选择。《进化计算》**27**(1), 99–125（2019年）

25. Khandar Shahabad, P., Rafiei Anamagh, M., Serhat, G., Basdogan, I., Bediz, B.：用于设计可制造变刚度层合板的先进层合参数插值与外推方法。《复合材料结构》**326**（2023年12月，117608，26，10，1016，2023）。https://doi.org/ . /j.compstruct. . . Kim, D., Lee, J., Nomura, T., Dede, E.M., Yoo, J., Min, S.：采用均匀化设计方法对功能梯度各向异性复合材料结构进行拓扑优化。《计算机辅助力学与工程方法》**369**（2020年9月，113220，27，10，1016，2020）。https://doi.org/ . /j.cma. . . Long, F.X., Van Stein, N., Frenzel, M., Krause, P., Gitterle, M., Bäck, T.：为高计算成本的汽车碰撞性能优化生成廉价的代表函数。《ACM进化学习与优化汇刊》43646554 28 2 1 26 2024 10 1145（），–（6月）。https://doi.org/ . / . Luo, J.H., Gea, H.C.：采用基于能量的方法确定正交各向异性材料的最优取向。《结构优化》**15**(3), 230–236（1998年6月）。https://doi. org/10 01203536 29 1007. /BF . Martins, J.R.R.A., Ning, A.：《工程设计优化》。剑桥大学出版社（2021年）30. Mersmann, O., Bischl, B., Trautmann, H., Preuss, M., Weihs, C., Rudolph, G.：探索性景观分析。载于：第13届遗传与进化计算年度会议（GECCO）论文集。第829–836页。ACM（2011年）31. Miki, M., Sugiyama, Y.：《利用层合参数进行层合复合材料板的最优设计》。《AIAA期刊》**31**(5), 921–922（1993年5月）。https://doi. org/10 49033 32 2514 3. / . . Muñoz, M.A., Kirley, M., Halgamuge, S.K.：利用信息含量对连续空间优化问题进行探索性景观分析。《IEEE进化计算汇刊》**19**(1), 74–87（2015年）33. Nagendra, S., Kodiyalam, S., Davis, J., Parthasarathy, V.：复合材料设计中的纤维束路径优化。载于：第36届结构、结构动力学与材料会议。美国航空航天学会，新奥尔良，路易斯安那州，美国（1995年4月，1275，34，10，2514，6，1995）。https://doi.org/ . / . - . Nozawa, S., Serhat, G.：复合材料结构的拓扑与纤维路径优化：批判性综述。《材料与设计》（2025年2月）。https://doi.org/10.1016/ j.matdes.2025 113699 35 . . Papenmeier, L., Nardi, L., Poloczek, M.：随着学习不断拓展范围：嵌套子空间中的自适应贝叶斯优化（2023年4月），http://arxiv.org/abs/ 2304 11468, 2304 11468 [ ]。arXiv: . cs . Pedersen, P.：关于正交各向异性材料的最优取向。《结构优化》101637666 37 2 101 106 1989 10 1007（），–（6月）。https://doi.org/ . /BF . Pedersen, P.：正交各向异性材料的厚度与取向设计。《结构优化》**3**(2), 69–78（1991年6月）。https://doi.org/10.1007/ BF01743275 38. Peeters, D., van Baalen, D., Abdallah, M.：结合拓扑与层合参数优化。《结构与多学科优化》**52**(1), 105–120 7 39 2015 10 1007 00158 014 1223（7月）。https://doi.org/ . /s - - - . Petrovic, M., Nomura, T., Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S.：复合材料层合板中的正交各向异性材料取向优化方法。《结构与多学科优化》**57**(2), 815–828（2018年2月）。https://doi.org/10.1007/ s00158-017-1777-2 40. Rafiei Anamagh, M., Khandar Shahabad, P., Serhat, G., Basdogan, I., Bediz, B.：采用谱切比雪夫方法和层合参数对可制造变刚度层合板进行特征频率优化

和层合参数。《先进材料与结构力学》**31**(16), 3595–3606（2024年8月）。https://doi.org/10.1080/ 15376494.2023.2180554 41. Raponi, E., Bujny, M., Olhofer, M., Aulig, N., Boria, S., Duddeck, F.：克里金辅助的碰撞结构拓扑优化。《计算机辅助力学与工程方法》**348**, 730–752（2019年5月）。https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.02.002 42. Schmidt, M.P., Couret, L., Gout, C., Pedersen, C.B.W.：采用平滑变化的纤维取向进行结构拓扑优化。《结构与多学科优化》**62**(6), 3105–3126（2020年12月）。https://doi.org/10.1007/ s00158-020-02657-6 43. Serhat, G., Basdogan, I.：用于可制造变刚度复合材料板设计的层合参数插值法。《AIAA期刊》**57**(7), 3052–3065（2019年7月）。https://doi.org/10.2514/1.J057902 44. Serhat, G., Basdogan, I.：利用层合参数对复合材料板进行多目标优化。《材料与设计》**180**, 107904（2019年10月）。https://doi. org/10.1016/j.matdes.2019.107904 45. Serhat, G., Bediz, B., Basdogan, I.：将层合参数与谱切比雪夫方法相结合，用于变刚度复合材料板设计。《复合材料结构》**242**, 112183（2020年6月）。https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112183 46. Setoodeh, S., Abdalla, M., Gürdal, Z.：利用元胞自动机进行复合材料层的拓扑与纤维路径设计。《结构与多学科优化》**30**(6), 413–421（2005年12月）。https://doi.org/10.1007/s00158-005-0528-y 47. Setoodeh, S., Abdalla, M.M., IJsselmuiden, S.T., Gürdal, Z.：以最大化屈曲载荷为目标的变刚度复合材料板设计。《复合材料结构》**87**(1), 109–117（2009年1月）。https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.01.008 48. Shafei, E., Faroughi, S., Rabczuk, T.：采用等几何分析和遗传算法优化纤维引导层合复合材料的纤维路径，以提高参数稳定性。《复合材料结构》**331** （2024年3月）。https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2024.117917 49. Shafighfard, T., Cender, T.A., Demir, E.：通过沿曲线路径排列短纤维，增材制造柔度优化的变刚度复合材料。《增材制造》**37**, 101728（2021年1月）。https://doi.org/10. 1016/j.addma.2020.101728 50. Shafighfard, T., Demir, E., Yildiz, M.：针对不同开孔几何形状、满足纤维连续性和曲率约束的纤维增强变刚度复合材料设计。《复合材料结构》**226**, 111280（2019年10月）。https://doi.org/10. 1016/j.compstruct.2019.111280 51. Sheikhi, M., Rafiei Anamagh, M., Bediz, B., Tunc, L.T.：采用谱切比雪夫方法和归一化割分割法设计可制造变刚度复合材料层合板。《复合材料结构》**330** （2024年2月）。https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117836 52. Shen, Y., Branscomb, D.：采用梯度下降法优化各向异性材料的取向。《复合材料结构》**234** （2020年2月）。https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111680 53. Shimoda, M., Tsukihara, R., Shima, K.：CFRP壳体结构中分布式材料取向优化对频率响应影响的数值与实验研究。《复合材料结构》**294**, 115697（2022年8月）。https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115697

54. Sigmund, O.：使用拓扑优化设计柔顺机构。《结构与机器力学》**25**(4)，493–524（1997）。https://doi.org/10. 1080 08905459708945415 55 / 。Sun, Z., Song, Z., Song, J., Li, H.：基于移动可变形组件（MMC）的纤维增强材料结构优化。《固体力学学报》**35**0 56 4 632 646 2022 10 1007 10338 021 00305 ( )，– (Aug)。https://doi.org/ . /s - - - 。Svanberg, K.：移动渐近线法——一种新的结构优化方法。《工程数值方法国际期刊》**24**(2)，359 1620240207 57 373 1987 10 1002 – (Feb)。https://doi.org/ . /nme. . Thompson, W.R.：根据两组样本的证据，一个未知概率大于另一个的似然。《生物统计学》**25**(3/4)，285（1933年12月）。https://doi.org/10.2307/2332286，出版方：JSTOR 58. Tian, Y., Shi, T., Xia, Q.：采用参数化水平集方法优化含曲线纤维的复合材料结构。《计算机辅助力学与工程方法》**388**（2022年1月）。https://doi.org/10.1016/j.cma.2021. 114236 59. Tian, Y., Shi, T., Xia, Q.：采用参数化水平集方法，对曲线纤维增强复合材料层合板进行带制造约束的优化。《复合材料结构》**321**，117310（2023年10月）。https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023 117310 60 . . Tosh, M.W., Kelly, D.：碳纤维复合材料层合板轨迹式纤维导向的设计、制造与测试。《复合材料A辑：应用科学与制造》**31**(10)，1047–1060（2000年10月）。https://doi.org/10.1016/ S1359 4 61 835 00 00063 - X( ) - . Tsai, S.W., Hahn, H.T.：《复合材料导论》。Technomic 出版公司，兰卡斯特，宾夕法尼亚州（1980）62. Wang, M.Y., Wang, X., Guo, D.：一种用于结构拓扑优化的水平集方法。《计算机辅助力学与工程方法》**192**(1)，227 5 63 246 2003 10 1016 0045 7825 02 00559 – (Jan)。https://doi.org/ . /S - ( ) - . Zhang, X., Xie, Y.M., Wang, C., Li, H., Zhou, S.：一种基于非均匀有理B样条（NURBS）的纤维路径设计优化方法。《计算机辅助力学与工程方法》**425**（2024年5月）。https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.116963