arXiv:2602.05470v1 [cond-mat.stat-mech] 5 Feb 2026

# 用于精确基态刻画的分支定界张量网络

Yi-Jia Wang[1,2,*] Xuanzhao Gao[3,*] Pan Zhang[1,2,4,7,†] Feng Pan[5,‡] 和Jin-Guo Liu[6§]

[1] *CAS Key Laboratory for Theoretical Physics, Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China.* [2] *School of Physical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China.*

[3] *Center for Computational Mathematics, Flatiron Institute,Simons Foundation, New York, NY 10010, USA.* [4] *School of Fundamental Physics and Mathematical Sciences,Hangzhou Institute for Advanced Study, UCAS, Hangzhou 310024, China* [5] *Science, Mathematics and Technology Cluster, Singapore University of Technology and Design, 8 Somapah Road, 487372 Singapore*

[6] *Hong Kong University of Science and Technology (Guangzhou), Guangzhou 511453 China and , , ,*（日期：2026年2月6日）

[7] *Beijing Academy of Quantum Information Sciences Beijing 100193 China*

表征自旋玻璃等无序系统以及组合优化问题的基态性质，是科学与工程领域的基础。然而，计算精确基态和统计其简并度，通常分别属于 NP困难和 #P困难问题，对精确算法构成了严峻挑战。近年来，张量网络方法利用高维线性代数并实现大规模硬件并行化，已成为高效解决这些任务的快速发展范式。尽管取得了成功，这些方法仍受到空间复杂度指数增长的根本限制，严重制约了其可扩展性。为解决这一瓶颈，我们提出分支定界张量网络（BBTN）方法，将分支定界的自适应搜索框架与热带张量网络的高效收缩无缝结合，大幅拓展了精确算法的适用范围。我们表明，BBTN 显著超越现有最先进的求解器，为精确计算树立了新的基准。它将可处理性的边界推向以往无法企及的规模，使得能够对规模达 $\pm J$ 的自旋玻璃进行精确基态计数，并求解规模达 $100 \times 100$的 King 子图上的最大独立集问题。对于困难实例，BBTN 大幅降低了标准热带张量网络的计算成本，将数年的运行时间压缩至几分钟。此外，其性能超过领先的整数规划求解器 30×以上，为解决统计物理和组合优化中的困难问题建立了通用且可扩展的框架。

无序系统，包括自旋玻璃 [1,2] 和组合优化问题 [3], , 为理解复杂能量景观 [4–6], 、受挫 [7, 8], 和玻璃态动力学 [9]提供了重要的理论见解。它们也是科学与工程众多应用领域的基础，应用范围从概率推断 [10] 到量子信息科学 [11, 12]。在统计物理中，研究无序系统的基态性质，有助于阐明低能激发的本质以及副本对称性破缺理论 [13–16]。同样，在最大独立集（MIS）问题等组合任务中 [3], , 理解解空间的性质对于确定计算复杂性 [17, 18], 、识别理论相变 [19, 20], 以及界定实际求解器的性能极限 [3, 21]至关重要。

然而，寻找精确基态和统计其简并度分别是 NP困难和#P困难问题 [21, 22]。传统的精确求解器，例如分支定界与割平面 [23–25]和分支定界（B&B）算法 [26–29], , 只能提供最优解而无法统计简并度，并且依赖任务并行。尽管面向计数的分支定界方法 [23, 30]能够枚举所有最优构型，但它们也受类似的基于任务的架构约束。因此，这些方法都无法利用现代硬件（例如图形处理器）强大的数据并行能力，因而难以用于大规模问题的计算。蒙特卡罗 [31] 或模拟退火 [32] 等近似方法无法保证结果精确，并且常常在崎岖景观中失效。张量网络（TN）方法 [33–36]已成为应对统计物理和组合优化核心挑战的强大精确框架。通过利用全局张量网络结构收缩和大规模图形处理器并行计算 [37–39], , TN 相较于传统串行算法可显著加速。然而，其可扩展性面临根本性的内存瓶颈，因为空间复杂度会随收缩树宽呈指数增长 [33]。尽管切片技术 [40]能够缓解内存压力，但代价是难以承受的指数级时间开销。

在本研究中，我们提出了分支定界张量网络（BBTN）方法，该方法将分支定界搜索 [26–28, 41–43]与热带张量网络收缩相结合，同时降低空间和时间复杂度。通过对变量进行自适应分支，并积极剪枝配置——

并利用局部和全局界 [21, 44–46], , BBTN 构建出不平衡但规模显著更小的搜索树。我们在两个典型基准问题上评估了 BBTN：二维和三维晶格上的$\pm J$ 伊辛自旋玻璃，这是受挫和无序的经典模型 [47, 48], ; 以及 King 子图上的最大独立集问题，这为中性原子量子处理器提供了关键测试平台 [38, 49, 50]。这些选择使我们能够展示 BBTN 在物理启发和硬件相关的优化问题领域中的有效性。在这些基准测试中，BBTN 的表现显著优于张量网络切片、分支定界方法 [29, 51, 52]，以及最先进的开源整数规划求解器 [25], , 拓展了当前量子硬件相关的自旋玻璃和组合优化问题的经典精确算法前沿。

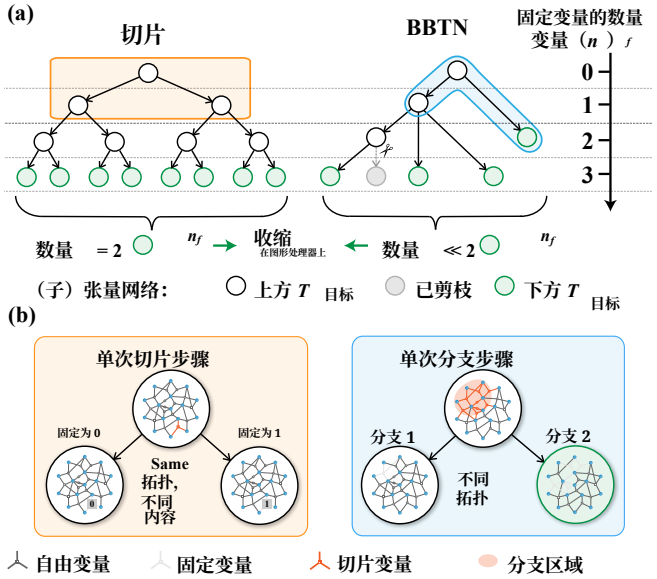



图1. 切片与分支定界张量网络（BBTN）方法的示意比较。(a) 张量网络分解过程。切片（左）穷举固定一组预先计算出的变量，生成满足内存限制的 $2^{n_f}$ 个叶子子张量网络（绿色节点）。BBTN（右）采用带有剪枝和在线分支的分支定界框架，生成一棵不平衡树，其叶子子张量网络数量显著更少。虚线箭头表示在分支前已剪枝、因而从未生成的子张量网络。(b) 单步比较。切片（左）每步固定一个变量，生成两个子张量网络。BBTN（右）考察多个变量，剪去不可行或次优的配置，并自适应地生成数量不等、固定变量子集各异的分支。

热带张量网络（*TN*）。– 我们考虑定义在图 $G = (V,\ E)$ 上的自旋玻璃模型，其能量函数为

$$H(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{(i,j)\in E} -J_{ij}\sigma_i\sigma_j + \sum_{i\in V} -h_i\sigma_i, \qquad (1)$$

其中，$\sigma_i \in \{-1, +1\}$ 编码第 $i$ 个自旋，$J_{ij}$ 和 $h_i$ 分别表示耦合常数和外场。根据 $G$的图结构，我们在每条边 $(i,\ j)$ 上放置一个矩阵 $\boldsymbol{B}^{ij} = \begin{pmatrix} -J_{ij} & J_{ij} \\ J_{ij} & -J_{ij} \end{pmatrix}$，并在每个顶点 $i$ 上放置一个向量 $\boldsymbol{w}^i = (h_i,\ -h_i)^T$，其键指标 $s_i$ 编码 $\sigma_i$的取值。根据这些定义，基态能量 $H^*$ 可使用带有$x \oplus y = \min(x,\ y)$和 $x \odot y = x + y$的最小和热带代数，表示为张量网络 [35, 36]：

$$H^* = \bigoplus_{\boldsymbol{s}\in\{0,1\}^{|V|}} \left[ \left( \bigodot_{(i,j)\in E} B^{ij}_{s_i s_j} \right) \odot \left( \bigodot_{i\in V} w^i_{s_i} \right) \right]. \qquad (2)$$

此外，由于实数条目张量网络可用于计算解的数量 [53], , 我们将其与热带张量网络结合，以计算基态简并度 [35]。

对于最大权独立集（MWIS）问题，这一形式体系可以直接扩展；对于优化问题，硬约束可用热带数 $\infty$ 表示，而对于计数问题，则可用元组 $(\infty,\ 0)$ 表示。图 $G$ 上的 MWIS 大小遵循与式 2 相同的结构，其中独立性约束 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \infty \end{pmatrix}$ 和顶点张量 $\boldsymbol{w}^i = (0 \quad -w_i)^T$用于编码顶点权重。类似地，MWIS 的计数也可以用相似的方式处理。

上述各种代数下的张量网络统称为 $\mathcal{T}(G)$，其收缩结果为 contract($\mathcal{T}(G)$)。计算成本从两个维度衡量：时间复杂度（浮点运算总数）和空间复杂度（最大中间张量所需的内存）；二者都随张量网络线图 [33], 的树宽呈指数级增长，其中后者尤其会造成严重瓶颈。

带切片的张量网络。– 缓解这一瓶颈的一种标准技术是切片，即通过遍历所选变量子集的各种配置，将原始问题分解为多个子问题：

$$V_f := \bigoplus_{\boldsymbol{x}\in\{0,1\}^{|V_f|}} \left( \texttt{contract}(\mathcal{T}(G)\,|_{\boldsymbol{s}_{V_f}=\boldsymbol{x}}) \right), \qquad (3)$$

其中，$\mathcal{T}(G)\ |_{\boldsymbol{s}_{V_f}=\boldsymbol{x}}$ 表示将 $V_f$ 中的变量固定为配置 $\boldsymbol{x}$ 后得到的约化张量网络，其空间复杂度低于阈值。子集 $V_f$ 由动态切片 [54] 等算法预先计算，以在最大限度降低空间复杂度的同时尽量减少 $|V_f|$。然而，如图1左图所示，每增加一个固定变量，具有相同拓扑但内容不同的子张量网络数量就会翻倍，因此必须将收缩执行 $2^{|V_f|}$ 次，并带来指数级的时间开销。这种权衡使切片技术除了用于非常小的切片集合外并不实用。

分支定界张量网络。– 为了克服这一瓶颈，我们提出了 BBTN，将分支定界（B&B）框架 [46] 融入张量网络收缩。如图1右图所示，BBTN 通过固定一组变量，将张量网络分解为多个较小的子张量网络，这与切片技术类似。然而，BBTN 有两个关键区别。第一是剪枝：切片会穷尽处理所有子张量网络，而 BBTN 则通过评估一组变量 $R \subseteq V$ 上的局部能量贡献（称为分支区域），剪除不可行或次优的子张量网络。第二是分支：BBTN 对切片技术进行了推广，允许自适应变量赋值，即在不同分支中固定不同的 $R$ 子集。因此，BBTN 构建出一棵非均匀搜索树，其规模远小于切片技术所构建的搜索树，从而有望将收缩成本降低数个数量级。

具体而言，剪枝步骤利用 B&B 框架推导出的全局界和局部界，系统地挖掘解空间的稀疏性。全局剪枝根据目前发现的最低能量维持基态的上界；任何下界超过此阈值的分支都会被舍弃。相反，局部剪枝作用于子张量网络 $\mathcal{T}_R$，并依据两个准则：边界等价原理，即每个唯一边界状态仅保留最优配置；以及逻辑推理规则 [55]，用于剔除可证明为次优的配置。这些机制共同形成一个最小的可行局部构型集合，$\mathcal{F}(R) \subseteq \{0,1\}^{|R|}$，其中 $R$ 中的每个变量都被赋予一个二进制值。

剪枝后，可行集合 $\mathcal{F}(R)$ 表示搜索空间中的有效配置。将 $\mathcal{F}(R)$ 直接划分为均匀子空间，会产生数量难以处理的分支 [55]。因此，BBTN 采用非均匀分支策略，定义一组分支 $\mathcal{D}(R) \subseteq \{(R_f,\ \boldsymbol{x}) \mid R_f \subseteq R,\ \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^{|R_f|}\}$，其中固定变量子集 $R_f \subseteq R$ 会发生变化。要实现精确计数，这种分解必须是完备的，即覆盖 $\mathcal{F}(R)$ 中的所有可行配置；同时还必须是正交的，以避免重复计数。最终结果通过对各分支的收缩结果求和得到。为优化 $\mathcal{D}(R)$，我们采用在线分支（OB）方案 [46] 来尽量减小分支因子 $\gamma$。这种方法基于传统 B&B 框架中的常见假设：时间复杂度关于 $\gamma$ 和问题规模 $\rho$ 呈指数增长，即 $O(\gamma^{\rho})$。关键的是，为解决空间复杂度瓶颈，我们将问题规模 $\rho$ 定义为累积内存溢出：

$$\rho(\mathcal{T}) = \sum_{\mathbf{T}} \max\left(0,\ \log_2 |\mathbf{T}| - \log_2 T_{\text{target}}\right), \qquad (4)$$

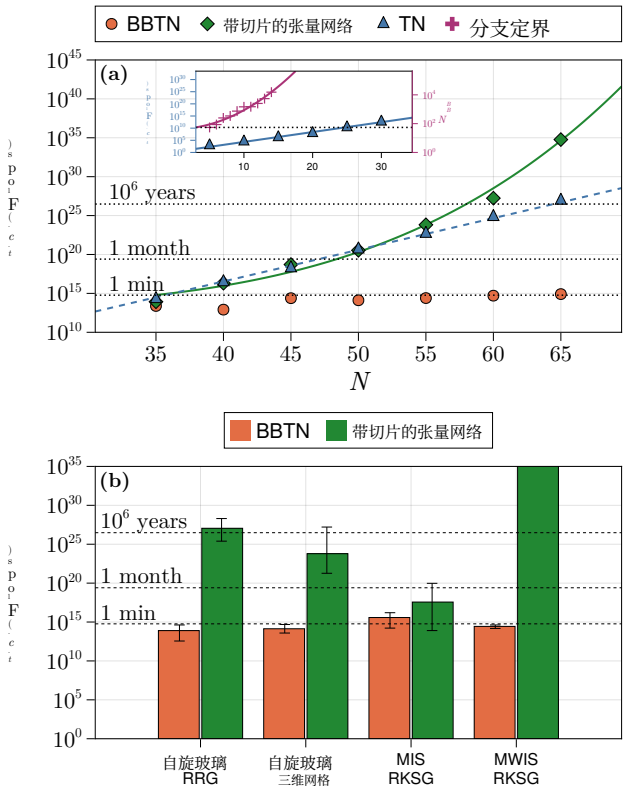
其中，$|\mathbf{T}|$ 表示张量大小，$T_{\text{target}}$ 表示内存阈值。通过在满足特征方程的条件下最小化 $\gamma$，可以找到最优分支规则 $\gamma^{\rho(\mathcal{T})} = \sum_i \gamma^{\rho(\mathcal{T}_i)}$，从而系统地减少子张量网络的数量。

应用。– 我们在两类实例上评估 BBTN： $\pm J$ 自旋玻璃——一种典型模型，作为自旋玻璃理论中的基础基准已得到广泛研究；以及 King 子图（KSG）上的最大独立集问题（MIS），该问题近期已成为评估中性原子量子处理器的关键基准 [38]。对于自旋玻璃模型，我们将耦合常数 $J$ 随机设为 $+1$ 或$-1$，并将外场固定为 0。5；目前尚无已知的解析解。KSG 实例包括填充率为 0。8 的随机 KSG（RKSG），这一填充率在实验硬件中较为典型 [56], ；以及映射KSG（MKSG），它将整数分解问题编码为 [57], ：将一个 $n$ 位合数 $m = pq$ 分解为素因子 $p$ 和 $q$。

对于这两类问题，我们首先考虑基态解的计数。由于会破坏基态简并的变换不适用，因此唯一可行的经典算法是分支定界 [30]。因此，我们采用两种基线进行比较：带切片的热带张量网络，其切片集合由动态切片算法生成 [36], ；以及采用与 BBTN 相同定界策略的分支定界算法。为确保公平比较，我们将切片和 BBTN 都限制在单个图形处理器上运行，并将其空间复杂度目标固定为 $2^{31}$ [55]。此外，我们还纳入普通热带张量网络方法作为指数级基线，但它超出了内存目标 $N = 31$。如图 2（上）所示，对于 $\pm J$ D 晶格上的自旋玻璃模型，分支定界（见插图）和切片的时间复杂度都呈超指数增长：分支定界只能处理 $N \leq 15$的实例，而这些实例可由热带张量网络轻松计算；切片则预计需要 10，000+ 年才能达到 $N = 60$。相比之下，随着 $N$ 增大，BBTN 的复杂度增长缓慢得多，并能求解规模达 65 的 $N$ 实例。图 2（下）还表明，对于自旋玻璃的各种图拓扑，以及最大独立集和最大权独立集问题，BBTN 的表现始终优于切片方法，展现了广泛的适用性。

基态搜索中，BBTN 融合了先进的分支割界，在求解最大独立集和最大权独立集问题时表现出极高的效率。我们将其性能与切片和 SCIP 进行基准比较 [24], ，由于传统的基于图的分支定界算法无法扩展到这些系统规模，因此未将其纳入比较 [51, 52, 55, 58]。

我们首先考察填充率为 0.8 且采用单位权重的随机 KSG，并在图3（顶部）中展示了 BBTN、热带张量网络和切片的时间复杂度对比。与基态简并度计算中一样，热带张量网络方法很快就超出内存限制而变得不可行，而切片的运行时间则呈指数增长，使其对于 $N > 70$ 不切实际。相比之下，BBTN 将时间和内存都控制在可管理的范围内，成功处理了



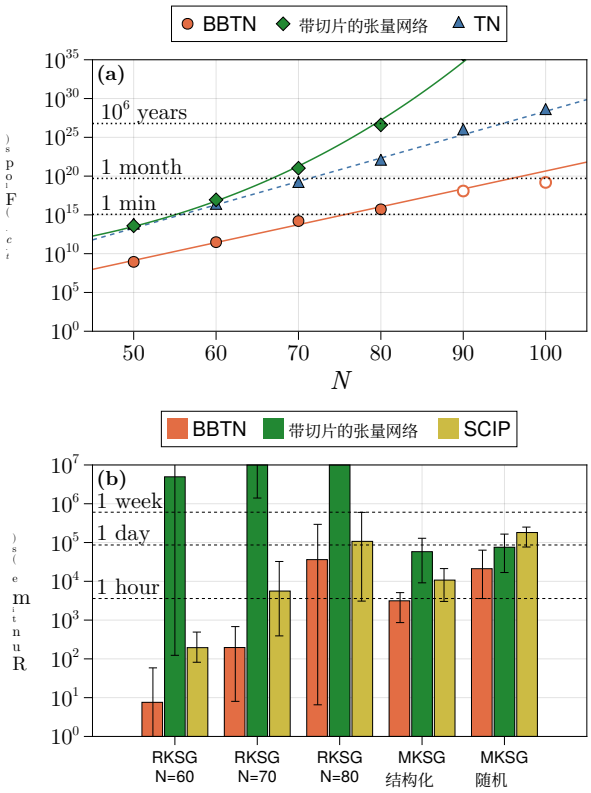




图 2。（*Top*）BBTN、带切片和不带切片的热带张量网络，以及原始分支定界方法（见插图）在 $N \times N$ 2D 晶格自旋玻璃基态计数问题上的性能比较（$J = \pm 1$，$h = 0.5$）。实心点的平均值取自全部 10 个实例。张量网络运行时间根据 NVIDIA A100 GPU 的理论时间复杂度和峰值浮点运算次数进行校准。插图中的时间参考线表示两种方法的实际运行时间均为秒量级。（*Bottom*）BBTN 和切片方法在四类问题上的基态计数性能：自旋玻璃（$J = \pm 1$，$h = 0.5$）、随机规则图（$n = 600$，$d = 3$）和 $8 \times 8 \times 8$ 3D 晶格上的自旋玻璃，RKSG 上的 MIS（$n = 60$，填充率为 $= 0.8$），以及 RKSG 上的 MWIS（$n = 60$，填充率为 $= 0.8$，权重从整数 1 到 10 中均匀采样）。柱状图表示每类 10 个实例的平均运行时间，误差线覆盖各实例的最小值至最大值。

规模和内存均在可管理范围内的系统，最大可达 $N = 100$ （对应 8000 个顶点）。

图3（下）展示了 BBTN、切片和 SCIP 在最大独立集和最大权独立集问题上的实际运行时间对比。前三根柱表示 RKSG 实例的结果，其中 $N = 60$、70、80。切片再次表现出指数级的运行时间增长，预计需要数月甚至数年才能完成，而 BBTN 始终能在数秒内找到解，实现了相对于 SCIP 的 $30\times$ 加速。接下来的两根柱展示了 BBTN 在 MKSG 上求解整数因数分解问题时，面对不同优化景观的稳健性；这类问题只有两个简并最优解，因此相比具有高简并度的 RKSG，对景观结构更为敏感。

图3。（*Top*）在 $N \times N$ RKSG（填充率为 0.8）上求解最大独立集问题时，BBTN 与采用和未采用切片的热带张量网络的性能比较。实心点的平均值基于全部 10 个实例计算。对于 BBTN，空心点表示仅对能在时限内求解的实例计算的平均值（ $N = 90$ 为 4/10，$N = 100$为 2/10），其中缩放曲线是对实心点进行拟合得到的。（*Bottom*）BBTN、切片和 SCIP 的运行时间比较。我们在两类问题上进行基准测试：RKSG 上的最大独立集问题，以及 MKSG 上的最大权独立集。具体而言，对于切片，我们收缩单个切片以估算总运行时间，因为所有切片都相同。

我们研究了两类素数集合：最高有效位固定为 1 的随机 16 位素数，以及最高九位均为 1 的结构化素数。随机集合会产生崎岖的优化景观，对局部搜索算法构成挑战 [55]，；而结构化集合则会形成内在的结构化景观，这源于部分因数分解的对数复杂度 [59]。在这两类景观中，BBTN 的表现都显著优于切片和 SCIP：在崎岖景观上，相较于 SCIP 的加速比接近 $10\times$；在结构化景观上，相较于切片的加速比接近 $20\times$。

讨论。– BBTN 在自旋玻璃和最大独立集问题上的成功——分别是典型的和特定的 NP困难模型——证明了它可立即应用于多种组合优化问题，包括

支配集、图着色和 $k$-SAT。除了优化之外，该框架还能够处理稀疏张量网络收缩，因此可用于量子电路模拟和量子纠错等基础任务。通过将底层代数扩展到一般半环，BBTN 还可以刻画复杂的解空间性质，例如解的构型和 $k$ 个最大谱。此外，放宽精确性约束可自然地将该框架扩展到高保真近似收缩。

BBTN所建立的范式可以与人工智能驱动的框架以及数学优化框架协同整合，从而实现更高的效能。具体而言，当前对局部启发式度量逐步优化的依赖——这种方法计算密集且缺乏全局前瞻性——可以被深度强化学习和蒙特卡罗树搜索所取代，从而以战略性的全局策略替代短视的决策。此外，引入数学规划领域的先进技术，如分支定界与割平面和分支定价，能够提供精巧的解空间变换，以补充张量网络收缩。

致谢– 本工作部分得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12325501、12404568、12047503和12247104）、中国国家重点研发计划（项目编号：2024YFB4504004）以及广州市科技计划项目（编号：2024A03J0607）的资助。FP感谢新加坡教育部（项目编号：SKI 2021 07 03）以及国家量子计算中心转化基金的支持。作者还感谢Zisong Shen、Cheng Ye、Yan Mi和Xiwei Pan就文稿进行的有益讨论。

我们的算法的 Julia [60] 实现可在 [61] 获取。对于热带张量网络和动态切片，我们使用 GenericTensorNetworks.jl [36,62]。通过 JuMP.jl [64, 65]调用 SCIP [25, 63] 。所有 CPU 实验均在 Intel Xeon Platinum 8268（2.90GHz）上运行，GPU 实验则在 NVIDIA A100 上运行。

* 这些作者对本研究的贡献相同。† panzhang@itp.ac.cn ‡ feng pan@sutd.edu.sg § jinguoliu@hkust-gz.edu.cn

[1] K. Binder 和 A. P. Young, 《自旋玻璃：实验事实、理论概念与未解问题》, 《现代物理评论》58, 801（1986）。[2] K. H. Fischer 和 J. A. Hertz, *Spin glasses*, 1（剑桥大学出版社, 1993）。[3] D.-Z. Du 和 P. M. Pardalos, *Handbook of combinatorial optimization* 3 , 第（施普林格科学与商业媒体, 1998）。[4] Q. Zhou 和 W. H. Wong, 《自旋玻璃模型的能量景观：探索与表征》, 《物理评论E：统计、非线性与软物质物理》79, 051117（2009）。[5] E. S. Rodrigues 和 P. M. C. de Oliveira, 《自旋玻璃能量景观》, 《统计物理学杂志》74, 1265（1994）。[6] V. Ros 和 Y. V. Fyodorov, 《高维景观范式：自旋玻璃及其他》, 载于 *Spin Glass Theory and Far Beyond: Replica Symmetry Breaking After 40 Years* 2023 95 114 （世界科学出版社, ）第 – 页。[7] G. Toulouse *et al.*, 《自旋玻璃中挫折效应理论：I》, 《自旋玻璃理论及更远：复制法及其应用导论》9, 99（1987）。[8] S. Kirkpatrick, 《自旋玻璃中的受挫与基态简并》, 《物理评论B》16, 4630（1977）。[9] L. F. Cugliandolo, 《玻璃态系统动力学》, arXiv 预印本 cond-mat/0210312 11（2002）。[10] D. Koller 和 N. Friedman, *Probabilistic graphical models: principles and techniques* 2009 （麻省理工学院出版社, ）。[11] H. Cao、S. Zhao、D. Feng、Z. Shen、H. Yan、T. Su、W. Sun、H. Xu、F. Pan、H. Yu、*et al.*, 《量子纠错码的精确解码》, 《物理评论快报》134, 190603（2025）。[12] A. Dutta, *Quantum Phase Transitions in Transverse Field Models* 2015 （剑桥大学出版社, ）。[13] D. Sherrington 和 S. Kirkpatrick, 《可解的自旋玻璃模型》, 《物理评论快报》35, 1792（1975）。[14] A. Auffinger、W.-K. Chen 和 Q. Zeng, 《SK模型在零温下具有无限步副本对称性破缺》, 《纯粹与应用数学通讯》73（2020）。[15] G. Parisi, 《自旋玻璃的无限多个序参量》, 《物理评论快报》43, 1754（1979）。[16] M. M´ezard, G. Parisi 和 M. A. Virasoro, *Spin glass theory and beyond: An Introduction to the Replica Method and Its Applications* 9 , 第 Vol. 卷（世界科学出版公司, 1987 ）。[17] D. Gamarnik 、E. C. Kızılda˘g、W. Perkins 和 C. Xu, 《对称二元感知机模型中的算法与障碍》, 载于 *2022 IEEE 63rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*（IEEE, 2022）第576–587页。[18] G. Bresler 和 B. Huang, 《低次多项式随机k-SAT的算法相变》, 载于2021 *IEEE 62nd annual symposium on foundations of computer science (FOCS)* 2022 298 309 （IEEE, ）第 – 页。[19] F. Krzaka-la、A. Montanari、F. Ricci-Tersenghi、G. Semerjian 和 L. Zdeborov´a, 《吉布斯态与随机约束满足问题的解集》, 《美国国家科学院院刊》104, 10318（2007）。[20] H. Daud´e、M. M´ezard、T. Mora 和 R. Zecchina, 《随机布尔公式中的SAT赋值对》, 《理论计算机科学》393, 260（2008）。[21] C. Moore 和 S. Mertens, *The Nature of Computation*（牛津大学出版社, 2011）。[22] F. Barahona, 《伊辛自旋玻璃模型的计算复杂性》, 《物理学杂志A：数学与一般物理》15, 3241（1982）。[23] C. De Simone、M. Diehl、M. J¨unger、P. Mutzel、G. Reinelt 和 G. Rinaldi, 《伊辛自旋玻璃的精确基态》

自旋玻璃：分支割算法的新实验结果，《统计物理学杂志》80，487（1995）。[24] R. S. Andrist、M. J. A. Schuetz、P. Minssen、R. Yalovet- zky、S. Chakrabarti、D. Herman、N. Kumar、G. Salton、R. Shaydulin、Y. Sun、M. Pistoia 和 H. G. Katzgraber，《单位圆盘图上最大独立集问题的难度及量子加速前景》，arXiv:2307.09442（2023）。[25] T. Achterberg，《SCIP：求解约束整数规划》，数学规划计算 1，1（2009）。[26] F. V. Fomin、F. Grandoni 和 D. Kratsch，《测度与征服：一种简单的 $O(2^{0.288n})$ 独立集算法》，载于 *Proceedings of the Seventeenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithm*（工业与应用数学学会，2006）第18–25页。[27] C. M. Li、F. Many`a 和 J. Planes，《利用单元传播在最大可满足性分支定界求解器中计算下界》，载于 *Principles and Practice of Constraint Programming - CP 2005*（Springer Berlin Heidelberg，2005）第403–414页。[28] A. Abrame 和 D. Habet，《Ahmaxsat：分支定界最大可满足性求解器的描述与评估》，《SAT与布尔模型计算杂志》9，89（2015）。[29] T. Akiba 和 Y. Iwata，《实践中的分支归约指数/FPT算法：顶点覆盖案例研究》，《理论计算机科学》609，211（2016）。[30] A. Hartwig、F. Daske 和 S. Kobe，《用于求解伊辛自旋玻璃模型精确基态的递归分支定界算法》，《计算物理通讯》32，133（1984）。[31] R. Y. Rubinstein 和 D. P. Kroese，*Simulation and the Monte Carlo method* 2016（John Wiley & Sons，）。[32] S. Kirkpatrick、C. D. Gelatt Jr 和 M. P. Vecchi，《模拟退火优化》，《科学》220，671（1983）。[33] I. L. Markov 和 Y. Shi，《通过收缩张量网络模拟量子计算》，《SIAM计算杂志》38，963（2008）。[34] U. Schollw¨ock，《矩阵乘积态时代的密度矩阵重整化群》，《物理学年鉴》326，96（2011）。[35] J.-G. Liu、L. Wang 和 P. Zhang，《用于自旋玻璃基态的热带张量网络》，《物理评论快报》126，090506（2021）。[36] J.-G. Liu、X. Gao、M. Cain、M. D. Lukin 和 S.-T. Wang，《通过通用张量网络计算组合优化问题的解空间性质》，《SIAM科学计算杂志》45，A1239（2023）。[37] M. Roa-Villescas、X. Gao、S. Stuijk、H. Corporaal 和 J.-G. Liu，《张量网络与可微编程时代的概率推断》，《物理评论研究》6，033261 2024（）。[38] S. Ebadi、A. Keesling、M. Cain、T. T. Wang、H. Levine、D. Bluvstein、G. Semeghini、A. Omran、J.-G. Liu、R. Samajdar、*et al.*，《利用里德堡原子阵列进行最大独立集量子优化》，《科学》376，1209 2022（）。[39] M. Roa-Villescas 和 J.-G. Liu，《Tensorinference：用于基于张量的概率推断的Julia软件包》，《开源软件杂志》8，5700（2023）。[40] J. Gray 和 S. Kourtis，《超优化张量网络收缩》，《Quantum》5，410（2021）。[41] J. Argelich、C. M. Li、F. Many`a 和 J. R. Soler，《最大可满足性与最小可满足性中的子句分支》，载于 *Artificial Intelligence Research and Development*（IOS Press, 2018）第17–26 页。[42] D. Eppstein，三次图上的旅行商问题，《图算法及应用》**11**，307（2003）。[43] G. Carpaneto 和 P. Toth，针对非对称旅行商问题的一些新分支与界定准则，《管理科学》**26**，736（1980）。[44] T. Achterberg，*Constraint integer programming*，博士论文（2007）。[45] D. R. Morrison、S. H. Jacobson、J. J. Sauppe 和 E. C. Sewell，分支定界算法：搜索、分支与剪枝领域近期进展综述，《离散优化》**19**，79（2016）。[46] X. Gao、Y.-J. Wang、P. Zhang 和 J.-G. Liu，为最大独立集问题自动发现具有最优复杂度的分支规则，arXiv:2412.07685（2024），2412.07685。[47] B. A. Cipra，伊辛模型导论，《美国数学月刊》**94**，937（1987）。[48] P. Godoy、M. Schmidt 和 F. Zimmer，层状 j**1384**，126687 2 2020 -j 方晶格上的伊辛模型，《物理快报 A》（）。[49] H. Pichler、S.-T. Wang、L. Zhou、S. Choi 和 M. D. Lukin，利用里德堡原子阵列进行最大独立集量子优化，arXiv:1808.10816（2018），arXiv:1808.10816 [量子物理]。[50] M. Kim、K. Kim、J. Hwang、E.-G. Moon 和 J. Ahn，用于最大独立集问题的里德堡量子线，《自然·物理》**18**，755（2022）。[51] M. Xiao 和 H. Nagamochi，约束集与避免瓶颈情形：一种简单的三次图最大独立集算法，《理论计算机科学》（**469**，92 2013）。[52] M. Xiao 和 H. Nagamochi，最大独立集精确算法，《信息与计算》**255**，126（2017）。[53] S. Kourtis、C. Chamon、E. Mucciolo 和 A. E. Ruck-enstein，利用张量网络快速计数，《SciPost物理》**7**，060（2019）。[54] J. Chen、F. Zhang、C. Huang、M. Newman 和 Y. Shi，中等规模量子电路的经典模拟，arXiv:1805.01450（2018），1805.01450。[55]参见补充材料，内容包括：(1) 算法细节，(2) 直接分支与非均匀分支的性能比较，(3) BBTN 随目标空间复杂度变化的开销，以及 (4) 较小规模 ksg 实例上不同方法求解最大独立集问题时的扩展性。[56] H. J. Manetsch、G. Nomura、E. Bataille、X. Lv、K. H. Leung 和 M. Endres，拥有 6,100 个高度相干原子量子比特的光镊阵列，《自然》10.1038/s41586-025-09641-4（2025）。[57] M.-T. Nguyen、J.-G. Liu、J. Wurtz、M. D. Lukin、S.-T. Wang 和 H. Pichler，利用里德堡原子阵列实现任意连通性的量子优化，《物理评论 X：量子》**4**，010316（2023）。[58] D. Hespe、S. Lamm、C. Schulz 和 D. Strash，Wegotyoucovered：PACE 2019 挑战赛顶点覆盖赛道的获胜求解器，载于 *2020 Proceedings of the SIAM Workshop on Combinatorial Scientific Computing*（SIAM，2020），第 1–11 页。[59] D. Coppersmith，求双变量整数方程的小根：利用已知高位进行因数分解，载于 *International Conference on the Theory and Applications of Cryptographic Techniques* 1996 178 189（Springer，）第 – 页。[60] J. Bezanson

，A. Edelman ，S. Karpinski ，和 V. B. Shah ，

Julia：数值计算的新方法，《SIAM评论》**59**，65（2017）。[61] X. Gao、Y.-J. Wang 和 J.-G. Liu，《TensorBranching.jl：用于分支定界张量网络方法的 Julia 软件包》（2025）。[62] X. Gao、X. Li 和 J. Liu，《使用张量网络求解约束满足问题的编程指南》，《中国物理B》**34**，050201（2025）。[63] T. Achterberg、T. Berthold、T. Koch 和 K. Wolter，《约束整数规划：整合约束规划与混合整数规划的新方法》，载于 *Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems* (施普林格·柏林·海德堡，2008) 第6–20页。[64] I. Dunning、J. Huchette 和 M. Lubin，《JuMP：一种用于数学优化的建模语言》，SIAM评论 **59**，295（2017）。[65] M. Lubin、O. Dowson、J. Dias Garcia、J. Huchette、B. Legat 和 J. P. Vielma，《JuMP 1.0：数学优化建模语言的最新改进》，数学规划计算 **15**，581（2023）。