热弹性波散射问题的 PML 方法收敛性

Qianyuan Yin* Changkun Wei† Bo Zhang‡

arXiv:2602.05497v1 [math.AP] 5 Feb 2026

摘要

本文研究三维热弹性障碍物散射问题。首先引入单轴完美匹配层（PML）方法，对无界散射问题进行截断，从而得到有界区域上的截断 PML 问题。在对模型参数施加一定约束的条件下，基于解析 Fredholm 理论，证明了截断 PML 问题除可能存在的离散频率集外均适定。此外，还建立了单轴 PML 方法的指数收敛性，并给出了其与 PML 层厚度及吸收参数之间的关系。该证明基于 PML 延拓技术以及修正基本解的指数衰减性质。据我们所知，这是时谐热弹性散射问题中 PML 方法的首个收敛性结果。

关键词： 热弹性波动方程、单轴 PML、适定性、指数收敛

1 引言

本文研究具有狄利克雷边界条件的热弹性障碍物散射问题。在地球物理应用的纯弹性理论中，通常忽略温度对介质的影响，而只考虑弹性固体的机械性质。然而，为了更准确地模拟地下勘探等现实场景，在解读地球物理数据时必须考虑热效应。例如，干热岩地热模型可以通过热弹性波场获取介质的热信息。热弹性模型揭示了热运动和机械运动之间的联系。关于热弹性波散射问题的数学分析和数值模拟，参见 [1,3,9,27,34] 。

在实际求解波散射问题时，通常需要将波传播的无界区域截断为一个有界计算区域。

*数学与系统科学研究院，中国科学院，北京 100190，中国；数学科学学院，中国科学院大学，北京 100049，中国（yin-qianyuan@amss.ac.cn；共同第一作者）。

†北京交通大学数学与统计学院，北京 100044，中国（ckwei@bjtu.edu.cn；共同第一作者、通讯作者）。

‡中国科学院数学与系统科学研究院 SKLMS，北京 100190，中国；中国科学院大学数学科学学院，北京 100049，中国（b.zhang@amt.ac.cn）。

完全匹配层（PML）是一种高效且有效的数值截断技术，最初由 Bérenger 于 1994年提出，用于求解时变麦克斯韦方程 [4]。PML 方法的基本思想是在计算区域周围构造一个人工层，以有效衰减向外传播的波。通常，所设计的介质需要确保散射波在有限厚度的吸收层中迅速（指数级）衰减，而不受波入射角的影响。PML 方法具有出色的数值性能，已广泛应用于各种波散射问题；关于地球物理学中全波形反演问题正演模型的数值求解，参见 [20,29–31] ；关于热弹性和孔隙弹性波散射问题的数值模拟，参见 [23,33,37] 。

关于PML方法收敛分析的研究成果颇为丰富。文献 [2,7,11,13,18,21,28,35], 研究了圆形和球形PML方法的收敛性；关于声波和电磁波散射问题中单轴（笛卡尔）PML方法的收敛性，可参见文献 [5,6,12,14,15,17,26,36]。对于弹性波散射问题，文献 [8], 证明了球形PML方法的指数收敛性，文献 [16]则证明了笛卡尔PML方法的指数收敛性。在文献 [16], 这项具有开创性的工作中，作者研究了截断区域外边界上满足混合边界条件的笛卡尔PML问题，进一步拓展了文献 [5,6]中的反射论证。该工作提出了若干重要的分析技巧与创新，例如带PML的积分表示公式，以及弹性波散射解的极限吸收原理。对于周期结构中的弹性波散射问题，文献 [24,25,38] 证明了所提出的PML方法在一维和二维情形下均具有指数收敛性。据我们所知，目前尚无关于热弹性波散射问题的PML方法收敛性结果，尤其是三维情形。

本文旨在研究三维时谐热弹性波散射问题中单轴 PML 方法的收敛性。我们采用如下形式的复坐标拉伸 [16,19]

$$\widetilde{x}_j(x_j) = x_j + z\int_0^{x_j} \alpha_j(s)ds,\ z = \zeta + \mathbf{i},\ j = 1,2,3,$$

其中， $\zeta \geq 0$ 是一个待确定的常数，$\mathbf{i}$ 表示虚数单位，$\alpha_j(s)$表示PML介质性质。受 [16], 中工作的启发，可以适当选取参数 ζ ，以确保热弹性PML算子弹性部分的椭圆性。我们指出，与纯弹性问题相比，热弹性波散射问题的PML分析更具挑战性，这是因为其中共存着快、慢压缩波和剪切波，且波数既有复数也有实数。为确保完美匹配层方法的适定性和指数收敛性，需要对PML参数施加更多限制。此外，由于热弹性PML变分形式缺乏对称性， [16]中用于分析弹性PML问题适定性的方法无法直接应用于热弹性问题。为此，我们采用解析Fredholm理论并仔细处理参数依赖性，同时适当选取频率，从而证明在特定条件下PML问题的适定性。最后，基于PML 延拓和修正基本解的指数衰减性质，建立完美匹配层方法关于PML 层厚度及其参数的指数收敛性。

本文其余部分安排如下。第2节介绍时谐热弹性散射问题的数学模型，并回顾解的存在唯一性结果。第3节提出适用于热弹性波动方程的完美匹配层方法，并估计经PML 延拓后的热弹性基本解矩阵元素。第4节仔细研究并分析截断区域及PML 层中热弹性PML方程的适定性。第5节对PML延拓势在PML 层外边界上的 $H^{1/2}$ 范数进行严格分析，并进一步给出原散射问题与截断 PML 问题的狄利克雷-诺伊曼算子之间的误差估计。最后，建立完美匹配层方法关于PML 层厚度及其参数的指数收敛性。

2 热弹性散射问题

本节将简要介绍热弹性散射模型的数学描述，并回顾解的存在唯一性结果。

我们先概述模型问题的几何构型。设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域。假设 $\mathbb{R}^3\backslash\Omega$ 内充满均匀各向同性的弹性介质，其特征参数为常数质量密度 ρ 和拉梅参数 λ、 μ，满足 $\mu > 0$ 和 $3\lambda + 2\mu > 0$，热耦合常数 γ和 η 则定义为

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T, \quad \eta = \frac{T_0\gamma}{\lambda_0},$$

其中， α_T 为体积热膨胀系数， T_0 表示参考温度， λ_0 表示热导率系数。

具有齐次狄利克雷边界条件的热弹性散射问题可由以下线性化热弹性理论的时谐比奥线性热弹性系统建模： [27]

$$\Delta^*\boldsymbol{u} + \rho\omega^2\boldsymbol{u} - \gamma\nabla p = \mathbf{Q} \quad \text{in } \mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}, \tag{2.1a}$$

$$\Delta p + qp + \mathbf{i}\omega\eta\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}, \tag{2.1b}$$

$$(\boldsymbol{u}^\top, p)^\top = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{2.1c}$$

其中， $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top$ 为弹性位移向量， p 为温度场， $q = \mathbf{i}\omega/\kappa$，其中 $\kappa > 0$ 表示热扩散率；拉梅算子 Δ^* 定义为

$$\Delta^*\boldsymbol{u} := \mu\Delta\boldsymbol{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \nabla\cdot\sigma(\boldsymbol{u}).$$

这里，对称应力张量 $\sigma(\boldsymbol{u})$ 由广义胡克定律给出

$$\sigma(\boldsymbol{u}) = (\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{u})\mathbb{I} + 2\mu\epsilon(\boldsymbol{u}), \quad \epsilon(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^\top),$$

其中 $\mathbb{I}$ 是单位矩阵， $\nabla\boldsymbol{u}$ 表示位移梯度张量 r:

$$\nabla\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \partial_{x_1}u_1 & \partial_{x_2}u_1 & \partial_{x_3}u_1 \\ \partial_{x_1}u_2 & \partial_{x_2}u_2 & \partial_{x_3}u_2 \\ \partial_{x_1}u_3 & \partial_{x_2}u_3 & \partial_{x_3}u_3 \end{bmatrix}.$$

在全文中，我们始终假设源 $\mathbf{Q}$ 在 $B_1 =\{(x_1,x_2,x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ 内具有紧支撑: $|x_j| < l_j, j = 1,2,3\}$，其中 $l_j > 0, j = 1,2,3$ 为某些常数。问题 (2.1a)-(2.1c) 的矩阵形式也可以通过另一种方式得到

$$\begin{aligned} LU &= (\mathbf{Q}^\top, 0)^\top, \quad \text{in } \mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}, \\ U &= (\boldsymbol{u}^\top, p)^\top = 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中

$$L = \begin{bmatrix} (\Delta^* + \rho\omega^2)\mathbb{I} & -\gamma\nabla \\ q\eta\kappa\nabla\cdot & \Delta + q \end{bmatrix}.$$

对于$\mathbb{R}^3\backslash B_1$中齐次热弹性系统的光滑解 U，利用亥姆霍兹分解可得 $\boldsymbol{u} = \nabla\overline{\phi} + \boldsymbol{\psi}$，且div $\boldsymbol{\psi} = 0$。将其代入齐次热弹性系统(2.2)，可得方程

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\phi + \rho\omega^2\phi - \gamma p = 0, \tag{2.3a}$$

$$-\mu\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\psi} + \rho\omega^2\boldsymbol{\psi} = 0, \tag{2.3b}$$

$$\Delta p + qp + \mathbf{i}\omega\eta\Delta\phi = 0. \tag{2.3c}$$

将方程(2.3a)代入方程(2.3c)，可得

$$\Delta^2\phi + \left(\frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu} + \frac{\mathbf{i}\omega\eta\gamma}{\lambda+2\mu} + q\right)\Delta\phi + \frac{qp\omega^2}{\lambda+2\mu}\phi = 0 \tag{2.4}$$

将方程(2.4)改写为如下形式

$$(\Delta + \lambda_1^2)(\Delta + \lambda_2^2)\phi = 0, \tag{2.5}$$

其中

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu} + \frac{\mathbf{i}\omega\eta\gamma}{\lambda+2\mu} + q, \quad \lambda_1^2\lambda_2^2 = \frac{qp\omega^2}{\lambda+2\mu}. \tag{2.6}$$

注意到 $k_p = \sqrt{\dfrac{\rho\omega}{\lambda+2\mu}}$ 是压缩波的波数，我们将方程(2.6)改写为如下特征关系方程

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{\mathbf{i}\omega}{\kappa} + \frac{\mathbf{i}\omega\gamma\eta}{\lambda+2\mu} + k_p^2, \quad \lambda_1^2\lambda_2^2 = \frac{\mathbf{i}\omega}{\kappa}k_p^2. \tag{2.7}$$

热弹性波场遵循以下分解引理 [3]。

引理2.1。 齐次热弹性系统在 $\mathbb{R}^3\backslash B_1$ 中的解 U 可写成如下形式

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^1 + \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{u}^3, \quad p = p^1 + p^2,$$

其中 $\boldsymbol{u}^1$、$\boldsymbol{u}^2$、$\boldsymbol{u}^3$ 以及 p^1、p^2 满足

$$\begin{aligned} &(\Delta + \lambda_1^2)\boldsymbol{u}^1 = 0, \quad (\Delta + \lambda_2^2)\boldsymbol{u}^2 = 0, \quad (\Delta + \lambda_3^2)\boldsymbol{u}^3 = 0, \\ &\nabla\times\boldsymbol{u}^1 = 0, \quad \nabla\times\boldsymbol{u}^2 = 0, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{u}^3 = 0, \\ &(\Delta + \lambda_1^2)p^1 = 0, \quad (\Delta + \lambda_2^2)p^2 = 0. \end{aligned}$$

其中，波数 λ_1, λ_2 是特征关系方程 (2.7) 的根，而$\lambda_3 = \sqrt{\dfrac{\rho}{\mu}}\omega$ 是剪切波的波数。

此外，假设散射波场 U 满足 Kupradze 辐射条件，其中 $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\to\infty$ 适用于 $i=1,\ 2,\ 3,$ 而 $j=1,\ 2$ （参见 [27]）：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}^j=o(r^{-1}),\quad \partial_{x_i}\boldsymbol{u}^j=O(r^{-2}),\\
&p^j=o(r^{-1}),\quad \partial_{x_i}p^j=O(r^{-2}),\\
&\boldsymbol{u}^3=o(r^{-1}),\quad r(\partial_r\boldsymbol{u}^3-i\lambda_3\boldsymbol{u}^3)=O(r^{-1}).
\end{aligned}\tag{2.8}$$

对于给定的 $\boldsymbol{f}\in H^{\frac{1}{2}}(\partial B_1)^4,$，外部狄利克雷问题

$$\begin{cases}
\Delta^*\boldsymbol{u}+\rho\omega^2\boldsymbol{u}-\gamma\nabla p=0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3\backslash\overline{B}_1,\\
\Delta p+qp+\mathbf{i}\omega\eta\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3\backslash\overline{B}_1,\\
(\boldsymbol{u}^\top,p)^\top=\boldsymbol{f} \quad \text{on } \partial B_1,\\
(\boldsymbol{u}^\top,p)^\top \text{ satisfies the Kupradze radiation conditions (2.8) at infinity,}
\end{cases}\tag{2.9}$$

存在唯一的弱解 $U=(\boldsymbol{u}^\top,\ p)^\top$，其属于空间 $H^1_{loc}(\mathbb{R}^3\backslash\Omega)^4$（参见 [9, 27]）。因此，我们可以为问题 (2.9) 定义狄利克雷到诺伊曼映射 $\mathcal{N}$: $H^{1/2}(\partial B_1)^4\to H^{-1/2}(\partial B_1)^4$，其定义为

$$\mathcal{N}\boldsymbol{f}=\mathcal{R}(\boldsymbol{u}^\top,p^\top)|_{\partial B_1},\text{where } \mathcal{R}(\partial,\nu)U=\begin{bmatrix}T(\partial,\nu) & -\gamma\nu\\ 0 & \partial_\nu\end{bmatrix}U \quad \text{on } \partial B_1.\tag{2.10}$$

这里，牵引算子 $T(\partial,\ \nu)\boldsymbol{u}=\sigma(\boldsymbol{u})\nu$，而 $\nu=(\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3)^\top$ 表示边界 ∂B_1的单位外法向量。(2.9) 的适定性意味着 $\mathcal{N}$ 是一个连续线性算子。

根据 [27], ，矩阵值基本解 $\Phi(x,\ \omega)\ =(\Phi_{ij}(x,\ \omega))$ 定义为

$$\begin{aligned}
\Phi_{ij}(x,\omega)=&\sum_{l=1}^{3}\Bigg[(1-\delta_{i4})(1-\delta_{j4})\Big(\frac{\delta_{ij}}{2\pi\mu}\delta_{3l}-\alpha_l\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Big)\\
&+i\beta_l\omega\eta\delta_{i4}(1-\delta_{j4})\frac{\partial}{\partial x_j}-\beta_l\gamma\delta_{j4}(1-\delta_{i4})\frac{\partial}{\partial x_i}+\delta_{i4}\delta_{j4}\gamma_l\Bigg]\frac{\exp(\mathbf{i}\lambda_l|x|)}{|x|},
\end{aligned}$$

参数为

$$\begin{cases}
\alpha_l=\dfrac{(-1)^l(1-\mathbf{i}\omega\kappa^{-1}\lambda_l^{-2})(\delta_{1l}+\delta_{2l})}{2\pi(\lambda+2\mu)(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}-\dfrac{\delta_{3l}}{2\pi\rho\omega^2},\\
\beta_l=\dfrac{(-1)^l(\lambda_l^2-k_p^2)(\delta_{1l}+\delta_{2l})}{2\pi(\lambda_2^2-\lambda_1^2)},\\
\gamma_l=\dfrac{(-1)^l(\delta_{1l}+\delta_{2l})}{2\pi(\lambda+2\mu)(\lambda_2^2-\lambda_1^2)},
\end{cases}$$

其中，δ_{ab} 表示两个整数变量 a 和 b的克罗内克符号，而 $\lambda_i,\ i=1,\ 2,\ 3$是引理2.1中出现的波数。

条目 $\Phi_{ij}(x,\ \omega)$ 可写成简化形式

$$\Phi_{ij}(x,\omega)=\sum_{l=1}^{3}\left[C_{1l}f_{\lambda_l}(|x|)+\frac{C_{2l}x_i+C_{3l}x_j}{|x|}f'_{\lambda_l}(|x|)+C_{4l}\left(\frac{x_ix_j}{|x|^2}f''_{\lambda_l}(|x|)-\frac{x_ix_j}{|x|^3}f'_{\lambda_l}(|x|)\right)\right],$$

其中 $f_{\lambda_l}(r) = e^{\mathrm{i}\lambda_l r}/r$，$l = 1$，2，3 和 C_{tl}，$t = 1$，2，3，4 均为常数。

在以下内容 中，我们引入适用于 $\boldsymbol{p} \in H^{-1/2}(\partial B_1)^4$ 的热弹性单层势

$$\Psi_{SL}(\boldsymbol{p})(x) = \int_{\partial B_1} \Phi(x-y,\omega)\boldsymbol{p}(y)ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{B}_1$$

以及适用于 $\boldsymbol{q} \in H^{1/2}(\partial B_1)^4$ 的双层势

$$\Psi_{DL}(\boldsymbol{q})(x) = \int_{\partial B_1} [\mathcal{S}(\partial_y,\nu(y),\omega)\Phi^\top(x-y,\omega)]^\top \boldsymbol{q}(y)ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{B}_1$$

其中，4×4 矩阵微分算子 $\mathcal{S}(\partial_y,\nu(y)\ \omega) = (\mathcal{S}_{ij}(\partial_y,\nu(y)\ \omega))$ 定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{ij}(\partial_y,\nu(y),\omega) = (1-\delta_{i4})(1-\delta_{j4})\Big(\delta_{ij}\mu\frac{\partial}{\partial\nu(y)} + \lambda\nu_i(y)\frac{\partial}{\partial x_j} + \mu\nu_j(y)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)\\ + \mathrm{i}\omega\eta\delta_{j4}(1-\delta_{i4})\nu_i(x) + \delta_{i4}\delta_{j4}\frac{\partial}{\partial\nu(y)}.\end{aligned}$$

问题 (2.9) 的唯一解具有如下积分表示 [27]

$$E(\boldsymbol{f}) = \frac{1}{2}\Big[\Psi_{SL}(\mathcal{N}\boldsymbol{f}) - \Psi_{DL}(\boldsymbol{f})\Big] \quad \text{in } \mathbb{R}^3\backslash\overline{B}_1. \tag{2.11}$$

问题 (2.1a)-(2.1c) 在 Kupradze辐射条件 (2.8) 下的适定性可由以下定理得出（参见 [9, 27]）。

定理2.2。 对于给定的$\mathbf{Q} \in H^1(\mathbb{R}^3\backslash\Omega)^3$，若其在 B_1内具有紧支撑，则满足*Kupradze*辐射条件 (2.8) 的热弹性散射问题(2.2) 在空间$H^1_{loc}(\mathbb{R}^3\backslash\Omega)^4$中至多有一个弱解$U = (\boldsymbol{u}^\top, p)^\top$。

引入空间 $H^1_{\partial B_1}(\Omega_1)^4 = \{\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega_1)^4 : \ \boldsymbol{v} = 0$ 定义在具有有界区域$\Omega_1 = B_1\backslash\Omega$的 $\partial\Omega\}$ 上。我们定义平双线性型 $\mathcal{B}_1 : \ H^1_{\partial B_1}(\Omega_1)^4 \times H^1_{\partial B_1}(\Omega_1)^4 \to \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1(\Phi,\Psi) = \int_{\Omega_1} \Big[\sigma(\boldsymbol{u}) : \nabla\overline{\boldsymbol{u}}' - \rho\omega^2\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}' - \gamma p\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{u}}' + \nabla\overline{p}'\cdot\nabla p - qp\overline{p}'\\ - \mathrm{i}\omega\eta\overline{p}'\nabla\cdot\boldsymbol{u}\Big]dx - \langle\mathcal{N}\Phi,\Psi\rangle_{\partial B_1},\end{aligned}$$

其中，$\Phi = (\boldsymbol{u}^\top, p)^\top$、$\Psi = (\boldsymbol{u}'^\top, p')^\top$ 以及 $\langle\mathcal{N}\Phi,\Psi\rangle_{\partial B_1} = \int_{\partial B_1} \mathcal{N}\Phi\cdot\overline{\Psi}ds$ 表示空间 $H^{-1/2}(\partial B_1)^4$ 与 $H^{1/2}(\partial B_1)^4$之间的对偶配对。

我们将散射问题 (2.1a)-(2.1c) 改写为如下变分形式：

$$\mathcal{B}_1(\Phi,\Psi) = -\int_{\Omega_1} \mathbf{Q}\cdot\overline{\Psi}dx, \quad \forall\,\Psi \in H^1_{\partial B_1}(\Omega_1)^4. \tag{2.12}$$

结合散射问题 (2.1a)-(2.1c) 的适定性与开映射定理，可知存在常数 $C > 0$，使得 inf-sup条件成立：

$$\sup_{\Psi\in H^1_{\partial B_1}(\Omega_1)^4\backslash\{0\}} \frac{\mathcal{B}_1(\Phi,\Psi)}{\|\Psi\|_{H^1(\Omega_1)^4}} \geq C\|\Phi\|_{H^1(\Omega_1)^4}, \quad \forall\,\Phi \in H^1(\Omega_1)^4. \tag{2.13}$$

注 2.3 (常数约定)。 下文中，符号 C 表示一个通用的正常数，该常数在不同位置出现时可以取不同的值。

3 热弹性波的完美匹配层方法

设 $B_2=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)^\top\in\mathbb{R}^3\colon\ |x_j|<l_j+d_j,\ \ j=1,\ \ 2,\ \ 3\}$ 为包围 B_1的长方体区域。截断完美匹配层区域和 PML 层分别记为 $\Omega_2:=B_2\backslash\Omega$ 和 $\Omega_{\mathrm{PML}}:=B_2\backslash B_1$。

我们引入偶函数 $\alpha_j(t)\in C^2(\mathbb{R})\ j=1,\ 2,\ 3$，满足 $\alpha_j'(t)\geq 0$ 对于 $t\geq 0,\ \ \alpha_j(t)=0$ 对于 $|t|\leq l_j$，以及 $\alpha_j(t)=\alpha_0$ 对于 $|t|\geq l_j$，其中 α_0 是一个正常数，且 $l_j<l_j\leq l_j+d_j$。在下文中，我们将 $\alpha_j(t)$ 取为以下特定形式，对于 $j=1,\ 2,\ 3$。例如，对于 $j=1,\ 2,\ 3$

$$\alpha_j(t)=\begin{cases}0, & |t|\leq l_j,\\ \alpha_0\dfrac{h\left(\frac{|t|-l_j}{\overline{l_j}-l_j}\right)}{h\left(\frac{|t|-l_j}{\overline{l_j}-l_j}\right)+h\left(\frac{\overline{l_j}-|t|}{\overline{l_j}-l_j}\right)}, & l_j\leq|t|\leq\overline{l_j},\\ \alpha_0, & |t|\geq\overline{l_j},\end{cases}\tag{3.1}$$

其中 $h(s)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{s}}, & s>0,\\ 0, & s\leq 0.\end{cases}$

对于 $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)^\top\in\mathbb{R}^3$，令 $z=\zeta+\mathbf{i}$，其中参数 $\zeta>0$ 固定，并将 PML介质性质定义为 $s_j(x_j)=1+z\alpha_j(x_j)\ j=1,\ 2,\ 3$。现在我们引入复拉伸坐标

$$\widetilde{x}_j(x_j)=x_j+z\int_0^{x_j}\alpha_j(t)dt=\int_0^{x_j}[1+z\alpha_j(t)]dt,\tag{3.2}$$

显然可得

$$\frac{d\widetilde{x}_j}{dx_j}=1+z\alpha(x_j)=s_j(x_j).$$

记 $\nabla F=\mathrm{diag}\{s_1(x_1)\ s_2(x_2)\ s_3(x_3)\}$ 为 $F=(\widetilde{x}_1(x_1)\ \widetilde{x}_2(x_2)\ \widetilde{x}_3(x_3))^\top$.的雅可比矩阵。直接计算可得

$$\begin{aligned}&\widetilde{\nabla}\cdot=J^{-1}\nabla\cdot J(\nabla F)^{-1},\quad J=\det(\nabla F),\\ &\widetilde{\nabla}=\left(\frac{1}{s_1(x_1)}\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{1}{s_2(x_2)}\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{1}{s_3(x_3)}\frac{\partial}{\partial x_3}\right).\end{aligned}\tag{3.3}$$

定义复距离

$$d(\widetilde{x},\widetilde{y})=\left[(\widetilde{x}_1-\widetilde{y}_1)^2+(\widetilde{x}_2-\widetilde{y}_2)^2+(\widetilde{x}_3-\widetilde{y}_3)^2\right]^{1/2},\tag{3.4}$$

其中，$\widetilde{x}=(\widetilde{x}_1,\ \widetilde{x}_2,\ \widetilde{x}_3)^\top$ 和 $\widetilde{y}=(\widetilde{y}_1,\ \widetilde{y}_2,\ \widetilde{y}_3)^\top$ 是由 (3.2) 定义的复拉伸坐标。直接估计可得（另见 [16, 方程 (2.16)]）

$$\mathrm{Im}\,d(\widetilde{x},\widetilde{y})\geq\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\left(|x_j-y_j|\left|\int_{y_j}^{x_j}\alpha_j(t)dt\right|+\zeta\left|\int_{y_j}^{x_j}\alpha_j(t)dt\right|^2\right)}{(1+\zeta\alpha_0)\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}}.\tag{3.5}$$

定义拉伸后的单层势和双层势

$$\widetilde{\Psi}_{SL}(\boldsymbol{p})(x)=\int_{\partial B_1}\widetilde{\Phi}(x-y,\omega)\boldsymbol{p}(y)ds(y),\quad \boldsymbol{p}\in H^{-1/2}(\partial B_1)^4$$

and

$$\widetilde{\Psi}_{DL}(\boldsymbol{q})(x)=\int_{\partial B_1}[\mathcal{S}(\partial_y,\nu(y),\omega)\widetilde{\Phi}^{\top}(x-y,\omega)]^{\top}\boldsymbol{q}(y)ds(y),\quad \boldsymbol{q}\in H^{1/2}(\partial B_1)^4$$

其中，热弹性 PML 修正基本解 $\widetilde{\Phi}(x-y,\omega)=(\Phi_{ij}(x-y,\omega))$ 是一个4×4矩阵值函数，其元素具有以下抽象形式： $i,j=1,2,3$

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_{ij}(x-y,\omega)=\sum_{l=1}^{3}\Bigg[&c_{1l}f_{\lambda_l}(d(\widetilde{x},\widetilde{y}))+c_{2l}\frac{\widetilde{x}_i-\widetilde{y}_i}{d(\widetilde{x},\widetilde{y})}f'_{\lambda_l}(d(\widetilde{x},\widetilde{y}))+c_{3l}\frac{\widetilde{x}_j-\widetilde{y}_j}{d(\widetilde{x},\widetilde{y})}f'_{\lambda_l}(d(\widetilde{x},\widetilde{y}))\\&+c_{4l}\left(\frac{(\widetilde{x}_i-\widetilde{y}_i)(\widetilde{x}_j-\widetilde{y}_j)}{d(\widetilde{x},\widetilde{y})^2}f''_{\lambda_l}(d(\widetilde{x},\widetilde{y}))-\frac{(\widetilde{x}_i-\widetilde{y}_i)(\widetilde{x}_j-\widetilde{y}_j)}{d(\widetilde{x},\widetilde{y})^3}f'_{\lambda_l}(d(\widetilde{x},\widetilde{y}))\right)\Bigg],\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中 c_{kl}为常数，且 $f_{\lambda_l}(z)=e^{\mathbf{i}\lambda_l z}/z$对于 $k=1,2,3,4$和 $l=1,2,3$。

将 $E(\boldsymbol{f})(x)$ 的 PML 延拓定义为 $E(\boldsymbol{f})(x)=E(\boldsymbol{f})(\widetilde{x})$，其定义如下：

$$\widetilde{E}(\boldsymbol{f})=\frac{1}{2}\Big[\widetilde{\Psi}_{SL}(\mathcal{N}\boldsymbol{f})-\widetilde{\Psi}_{DL}(\boldsymbol{f})\Big],\tag{3.7}$$

显然，这是外部狄利克雷问题的一个解

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}\cdot\widetilde{\sigma}(\widetilde{\boldsymbol{u}})+\rho\omega^2\widetilde{\boldsymbol{u}}-\gamma\widetilde{\nabla}\widetilde{p}=0\quad&\text{in }\mathbb{R}^3\backslash\overline{B}_1,\\ \widetilde{\nabla}\cdot\widetilde{\nabla}\widetilde{p}+q\widetilde{p}+\mathbf{i}\omega\eta\widetilde{\nabla}\cdot\widetilde{\boldsymbol{u}}=0\quad&\text{in }\mathbb{R}^3\backslash\overline{B}_1,\\ (\widetilde{\boldsymbol{u}}^{\top},\widetilde{\boldsymbol{p}})^{\top}=\boldsymbol{f}\quad&\text{on }\partial B_1,\end{aligned}\tag{3.8}$$

对于给定的 $\boldsymbol{f}\in H^{\frac{1}{2}}(\partial B_1)^4$。这里

$$\widetilde{\sigma}(\widetilde{\boldsymbol{u}})=2\mu\widetilde{\epsilon}(\widetilde{\boldsymbol{u}})+\lambda\,\mathrm{tr}(\widetilde{\epsilon}(\widetilde{\boldsymbol{u}}))\mathbb{I},\quad \widetilde{\epsilon}(\widetilde{\boldsymbol{u}})=\frac{1}{2}(\widetilde{\nabla}\widetilde{\boldsymbol{u}}+(\widetilde{\nabla}\widetilde{\boldsymbol{u}})^{\top})=\frac{1}{2}(\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}B^{\top}+B(\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}})^{\top}),$$

其中 $B=(\nabla F)^{-1}=\mathrm{diag}\{s_1(x_1)^{-1},\ s_2(x_2)^{-1},\ s_3(x_3)^{-1}\}$。

利用关系式 (3.3)，问题 (3.8) 可化为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\widetilde{\sigma}(\widetilde{\boldsymbol{u}})A)+\rho\omega^2J\widetilde{\boldsymbol{u}}-\gamma A\nabla\widetilde{p}=0\quad&\text{in }\mathbb{R}^3\backslash\overline{B}_1,\\ \nabla\cdot(K\nabla\widetilde{p})+qJ\widetilde{p}+\mathbf{i}\omega\eta\nabla\cdot(A\widetilde{\boldsymbol{u}})=0\quad&\text{in }\mathbb{R}^3\backslash\overline{B}_1,\\ (\widetilde{\boldsymbol{u}}^{\top},\widetilde{\boldsymbol{p}})^{\top}=\boldsymbol{f}\quad&\text{on }\partial B_1,\end{aligned}\tag{3.9}$$

其中，矩阵 A 和 K 定义为

$$A=J(\nabla F)^{-1}=\mathrm{diag}\{s_2(x_2)s_3(x_3),s_1(x_1)s_3(x_3),s_1(x_1)s_2(x_2)\},\tag{3.10}$$

$$K=\mathrm{diag}\left\{\frac{s_2(x_2)s_3(x_3)}{s_1(x_1)},\frac{s_1(x_1)s_3(x_3)}{s_2(x_2)},\frac{s_1(x_1)s_2(x_2)}{s_3(x_3)}\right\}.\tag{3.11}$$

为了获得热弹性完美匹配层修正基本解的指数衰减性质，我们引入以下引理。

引理 3.1. 对于每个 $l=1,2,3,\ \ f_{\lambda_l}(z)=e^{\mathbf{i}\lambda_l z}/z$ 的 n 阶导数可表示为 $f^{(n)}_{\lambda_l}(z)=\dfrac{P(z\ e^{\mathbf{i}\lambda_l z})}{z^{n+1}}$，其中 $P(z)$ 是一个次数为 n 的多项式。此外，在复平面中的单位球 $\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$ 上，我们有估计 $|f^{(n)}_{\lambda_l}(z)|\le\dfrac{C}{|z|^{n+1}}$。

证明. 我们采用数学归纳法证明该引理。
对于 $n=1$，可得 $f'_{\lambda_l}(z) = \dfrac{i\lambda_l z e^{i\lambda_l z} - e^{i\lambda_l z}}{z^2}$。
对于 $n=k$，我们假设 $f_{(k)\lambda_l}(z) = \dfrac{P(z\ e^{i\lambda_l z})}{z^{k+1}}$，其中 $\deg[P(z)]=k$. 对 $f^{(k)}_{\lambda_l}(z)$ 求导，可得

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}_{\lambda_l}(z) &= \frac{[P'(z)e^{i\lambda_l z} + P(z)i\lambda_l e^{i\lambda_l z}]z^{k+1} - P(z)e^{i\lambda_l z}(k+1)z^k}{(z^{k+1})^2} \\ &= \frac{[P'(z)e^{i\lambda_l} + P(z)i\lambda_l e^{i\lambda_l z}]z - P(z)e^{i\lambda_l z}(k+1)}{z^{k+2}}. \end{aligned}$$

根据解析函数 $P(z)e^{i\lambda_l z}$的最大模原理，有$|P(z)e^{i\lambda_l z}| \le C$，对于 $|z|<1$。因此 $|f^{(n)}_{\lambda_l}(z)| \le \dfrac{C}{|z|^{n+1}}$。证明完毕。 ——— □

为了与物理现实保持一致，复波数 λ_1 和 λ_2 的实部和虚部必须为正 [10]（严格的数学证明另见 [34]）。这一事实可表述为以下引理。

引理 3.2。 如果方程 (2.7) 的特征根 λ_1 和 λ_2 满足 $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$ 对于$j=1,\ 2$，则 $\operatorname{Im}\lambda_j > 0$ 对于 $j=1,\ 2$。

在下面的引理中，我们给出热弹性 PML 修正基本解及其各阶导数各分量的估计。

引理3.3。 记作 $\Lambda =$最小值{实部 λ_1, 实部 λ_2, λ_3} 并设 $d(\widetilde{x},\widetilde{y})$ 为复距离，其定义见 (3.4)。在假设 $\zeta \ge 1$, $\Phi_{ij}(x-y,\omega)$ 成立的条件下，满足以下估计

$$|\widetilde{\Phi}_{ij}(x-y,\omega)| \le C[(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2]\left(\frac{1}{|x-y|}+\frac{1}{|x-y|^3}\right)e^{-\Lambda\cdot\operatorname{Im} d(\widetilde{x},\widetilde{y})}, \tag{3.12}$$

对于其导数，我们有

$$\begin{aligned} &\left|\prod_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{a_k}\prod_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)^{b_k}\widetilde{\Phi}_{ij}(x-y,\omega)\right| \\ &\le C[(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2]^{\frac{m_1}{2}}\left(\frac{1}{|x-y|}+\frac{1}{|x-y|^{m_2}}\right)e^{-\Lambda\cdot\operatorname{Im} d(\widetilde{x},\widetilde{y})}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

其中 $a_k, b_k, k=1,2,3$ 以及 m_1, m_2 均为正整数。

证明。 由 (3.2) 可知，$\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3)^\top$ 与$\widetilde{y} = (\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2,\widetilde{y}_3)^\top$ 之差的各分量为

$$\widetilde{x}_j - \widetilde{y}_j = \int_{y_j}^{x_j}[1+z\alpha_j(t)]dt = (x_j-y_j)[1+z\alpha_j(t_j)],$$

其中 t_j 介于 y_j 和 x_j 之间（由积分中值定理可知）。复距离 $d(\widetilde{x},\widetilde{y})$ 的平方为

$$\sum_{j=1}^{3}(\widetilde{x}_j-\widetilde{y}_j)^2 = \sum_{j=1}^{3}(x_j-y_j)^2\Big[1+z\alpha_j(t_j)\Big]^2.$$

其模满足以下上界估计：

$$
\begin{aligned}
|d(\widetilde{x},\widetilde{y})|^2 &= \left|\sum_{j=1}^{3}(x_j-y_j)^2\Big[1+z\alpha_j(t_j)\Big]^2\right| \\
&\le \sum_{j=1}^{3}(x_j-y_j)^2|1+z\alpha_j(t_j)|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{3}(x_j-y_j)^2\left\{\Big[1+\zeta\alpha_j(t_j)\Big]^2+\alpha_j(t_j)^2\right\} \\
&\le \Big[(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2\Big]\sum_{j=1}^{3}(x_j-y_j)^2.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

对于 $\zeta \ge 1$，我们有下界估计

$$
\begin{aligned}
|d(\widetilde{x},\widetilde{y})|^2 &\ge \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}(x_j-y_j)^2\Big[1+z\alpha_j(t_j)\Big]^2 \\
&= \sum_{j=1}^{3}(x_j-y_j)^2\left\{\Big[1+\zeta\alpha_j(t_j)\Big]^2-\alpha_j(t_j)^2\right\} \\
&\ge \sum_{j=1}^{3}(x_j-y_j)^2.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

因此，在假设 $\zeta \ge 1$ 下，结合 (3.14) 和 (3.15) 可知，复距离 $d(\widetilde{x},\ \widetilde{y})$ 满足

$$
|x-y| \le |d(\widetilde{x},\widetilde{y})| \le \sqrt{(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2}\cdot|x-y|, \tag{3.16}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\frac{|\widetilde{x}_j-\widetilde{y}_j|}{|d(\widetilde{x},\widetilde{y})|} &= \frac{|(x_j-y_j)[1+z\alpha_j(t_j)]|}{|d(\widetilde{x},\widetilde{y})|} \le \frac{|x_j-y_j|\sqrt{(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2}}{|d(\widetilde{x},\widetilde{y})|} \\
&\le \frac{|x-y|\sqrt{(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2}}{|d(\widetilde{x},\widetilde{y})|} \le \sqrt{(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2}.
\end{aligned}
$$

由抽象形式 (3.6) 可得

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{\Phi}_{ij}(x-y,\omega)| \le \sum_{l=1}^{3}\Big\{ & C_{1l}|f_{\lambda_l}(d(\widetilde{x},\widetilde{y}))| + (C_{2l}+C_{3l})\sqrt{(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2}\cdot|f'_{\lambda_l}(d(\widetilde{x},\widetilde{y}))| \\
& + C_{4l}[(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2]|f''_{\lambda_l}(d(\widetilde{x},\widetilde{y}))| + \frac{C_{5l}}{|d(\widetilde{x},\widetilde{y})|}[(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2]|f'_{\lambda_l}(d(\widetilde{x},\widetilde{y}))|\Big\},
\end{aligned}
$$

其中 C_{tl} 为正数常量，且 $f_{\lambda_l}(z) = e^{\mathbf{i}\lambda_l z}/z$ 适用于 $t=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 和 $l=1,\ 2,\ 3$。简单计算可得

$$
|e^{\mathbf{i}\lambda_l d(\widetilde{x},\widetilde{y})}| = e^{-\mathrm{Re}\,\lambda_l\cdot\mathrm{Im}\,d(\widetilde{x},\widetilde{y})-\mathrm{Im}\,\lambda_l\cdot\mathrm{Re}\,d(\widetilde{x},\widetilde{y})}. \tag{3.17}
$$

我们根据 $|d(\widetilde{x},\ \widetilde{y})|$ 是否小于 1，将分析分为两种情形。情形1： $|d(\widetilde{x},\ \widetilde{y})|<1$。方程 (3.16)-(3.17) 与引理 3.1 联立可得

$$\begin{aligned}|\widetilde{\Phi}_{ij}(x-y,\omega)| \le & \sum_{l=1}^{3}\Bigg(C_{1l}\frac{1}{|d(\widetilde{x},\widetilde{y})|}+(C_{2l}+C_{3l})\frac{\sqrt{(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2}}{|d(\widetilde{x},\widetilde{y})|^2}\\ &+(C_{4l}+C_{5l})\frac{(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2}{|d(\widetilde{x},\widetilde{y})|^3}\Bigg)\\ \le & C\sum_{l=1}^{3}\frac{(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2}{|x-y|^3}\le C\sum_{l=1}^{3}\frac{e^{-\Lambda\cdot\operatorname{Im}d(\widetilde{x},\widetilde{y})}}{e^{-\Lambda}}\frac{(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2}{|x-y|^3}\\ \le & C\sum_{l=1}^{3}\frac{(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2}{|x-y|^3}e^{-\Lambda\cdot\operatorname{Im}d(\widetilde{x},\widetilde{y})},\end{aligned}\tag{3.18}$$

其中 $\Lambda=\min\{\operatorname{Re}\lambda_1,\ \operatorname{Re}\lambda_2,\ \operatorname{Re}\lambda_3=\lambda_3\}$。

情形2： $|d(\widetilde{x},\ \widetilde{y})|\ge 1$。由此可得

$$\begin{aligned}|\widetilde{\Phi}_{ij}(x-y,\omega)| \le & \sum_{l=1}^{3}\Bigg\{C_{1l}\frac{e^{-\operatorname{Re}\lambda_l\cdot\operatorname{Im}d(\widetilde{x},\widetilde{y})}}{|d(\widetilde{x},\widetilde{y})|}+(C_{2l}+C_{3l})\sqrt{(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2}\frac{e^{-\operatorname{Re}\lambda_l\cdot\operatorname{Im}d(\widetilde{x},\widetilde{y})}}{|d(\widetilde{x},\widetilde{y})|}\\ &+(C_{4l}+C_{5l})[(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2]\frac{e^{-\operatorname{Re}\lambda_l\cdot\operatorname{Im}d(\widetilde{x},\widetilde{y})}}{|d(\widetilde{x},\widetilde{y})|}\Bigg\}\\ \le & C\sum_{l=1}^{3}[(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2]\frac{e^{-\Lambda\cdot\operatorname{Im}d(\widetilde{x},\widetilde{y})}}{|x-y|},\end{aligned}$$

结合（3.18），可得

$$|\widetilde{\Phi}_{ij}(x-y,\omega)|\le C[(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2]\Big(\frac{1}{|x-y|}+\frac{1}{|x-y|^3}\Big)e^{-\Lambda\cdot\operatorname{Im}d(\widetilde{x},\widetilde{y})}.$$

$\widetilde{\ }$所有导数的模 $\Phi_{ij}(x-y,\ \omega)$ 也可用类似方法估计。因此，证明完成。

□

4 截断区域和层中的 PML方程

本节将证明，在截断区域中的 PML系统

$$\nabla\cdot(\widetilde{\sigma}(\widetilde{\boldsymbol{u}})A)+\rho\omega^2J\widetilde{\boldsymbol{u}}-\gamma A\nabla\widetilde{p}=\mathbf{Q}\quad\text{in }\Omega_2,\tag{4.1a}$$

$$\nabla\cdot(K\nabla\widetilde{p})+qJ\widetilde{p}+\mathbf{i}\omega\eta\nabla\cdot(A\widetilde{\boldsymbol{u}})=0\quad\text{in }\Omega_2,\tag{4.1b}$$

$$(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top,\widetilde{p})^\top=0\quad\text{on }\partial\Omega,\tag{4.1c}$$

$$(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top,\widetilde{p})^\top=0\quad\text{on }\partial B_2,\tag{4.1d}$$

在对热弹性参数和 PML参数施加适当约束的条件下，在空间 $H_0^1(\Omega_2)$ 中存在唯一的弱解。为此，我们引入半双线性型

$$\mathcal{B}_D(\Phi,\Psi)=\int_D\Big[\widetilde{\sigma}(\widetilde{\boldsymbol{u}})A\colon\nabla\overline{\boldsymbol{u}}'-\rho\omega^2J\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}'-\gamma\widetilde{p}\nabla\cdot(A\overline{\boldsymbol{u}}')$$
$$+\nabla\overline{p}'\cdot(K\nabla\widetilde{p})-qJ\widetilde{p}\overline{p}'-\mathbf{i}\omega\eta\overline{p}'\nabla\cdot(A\widetilde{\boldsymbol{u}})\Big]dx, \tag{4.2}$$

$$\mathcal{A}_D(\Phi,\Psi)=\int_D\left[\widetilde{\sigma}(\widetilde{\boldsymbol{u}})A\colon\nabla\overline{\boldsymbol{u}}'+\nabla\overline{p}'\cdot(K\nabla\widetilde{p})\right]dx, \tag{4.3}$$

其中 $\Phi=(\widetilde{\boldsymbol{u}}\ \ \widetilde{p})$、 $\Psi=(\boldsymbol{u}',\ \ p')$，且 D 是具有分段光滑边界的有界区域 .

为了得到半双线性型 $\mathcal{A}_D$ 的强制性，我们需要下面这个初等引理。

引理 4.1。 [16, 引理 3。1]。 设 $\zeta\geq\sqrt{(\lambda+2\mu)/\mu}$，且 D 是具有分段光滑边界的有界区域。则对于 $j=1$、2、3，有

$$\Big(1+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\Big)\operatorname{Re}\frac{s_1(x_1)s_2(x_2)s_3(x_3)}{s_j(x_j)^2}$$
$$\geq\frac{[1+\zeta\alpha_1(x_1)][1+\zeta\alpha_2(x_2)][1+\zeta\alpha_3(x_3)]}{[1+\zeta\alpha_j(x_j)]^2}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{|s_j(x_j)|^2}.$$

下面的引理推广了 [16, 引理 3.3] 中的论证。

引理 4.2 (椭圆性引理**)**。 设 $\zeta\geq\sqrt{(\lambda+2\mu)/\mu}$，且 D 是具有分段光滑边界的有界区域。则对于任意 $\widetilde{\boldsymbol{u}}\in H_0^1(D)^3$ 和 $\widetilde{p}\in H_0^1(D)$，有

$$\operatorname{Re}\int_D\widetilde{\sigma}(\widetilde{\boldsymbol{u}})A\colon\nabla\overline{\widetilde{\boldsymbol{u}}}dx\geq C_1\|\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}\|^2_{L^2(D)^{3\times3}}, \tag{4.4}$$

and

$$\operatorname{Re}\int_D\nabla\overline{\widetilde{p}}\cdot(K\nabla\widetilde{p})dx\geq C_2\|\nabla\widetilde{p}\|^2_{L^2(D)^3}, \tag{4.5}$$

其中常数 C_1、 C_2 依赖于 α_0 和 D 的大小，且关于二者至多呈多项式增长。**注 4.3.** 对于 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)^\top$，通常的 H^1-范数 $\|\cdot\|_{H^1(D)^3}$ 可表示为

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H^1(D)^3}=\Big(\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(D)^3}+\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(D)^{3\times3}}\Big)^{1/2}$$

其中范数为弗罗贝尼乌斯范数

$$\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2(D)^{3\times3}}=\left(\sum_{j=1}^3\int_D|\nabla u_j|^2dx\right)^{1/2}.$$

证明. 不等式 (4.4) 可直接由 [16, 引理 3.3] 得出。回顾矩阵 K 的定义（见 (3.11)），不等式 (4.5) 可由下式推出

$$\operatorname{Re}\int_D\nabla\overline{\widetilde{p}}\cdot(K\nabla\widetilde{p})dx=\int_D\operatorname{Re}\frac{s_2(x_2)s_3(x_3)}{s_1(x_1)}\Big|\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_1}\Big|^2dx$$
$$+\int_D\operatorname{Re}\frac{s_1(x_1)s_3(x_3)}{s_2(x_2)}\Big|\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_2}\Big|^2dx$$
$$+\int_D\operatorname{Re}\frac{s_1(x_1)s_2(x_2)}{s_3(x_3)}\Big|\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_3}\Big|^2dx,$$

以及 D 的有界性和引理 4.1。证明至此完成。 □

现在我们可以给出本节的主要结果。

定理 **m 4.4.** 假设 $D=\Omega_2$ 或 D 具有光滑边界。如果参数满足

$$\begin{cases} \zeta \geq \sqrt{(\lambda+2\mu)/\mu}, \\ \dfrac{\rho\gamma^2}{\eta^2} \geq 1, \\ \zeta^2 - 1 \geq 2\gamma\zeta, \\ \zeta \geq \sqrt{3}, \\ \alpha_0 < \dfrac{\lambda+\mu}{2\gamma(\lambda+2\mu)}, \end{cases} \tag{4.6}$$

则存在常数 $C>0$，使得

$$\sup_{\Psi\in H_0^1(D)^4\setminus\{0\}} \frac{|\mathcal{B}_D(\Phi,\Psi)|}{\|\Psi\|_{H_0^1(D)^4}} \geq C\|\Phi\|_{H_0^1(D)^4}, \quad \forall\, \Phi \in H_0^1(D)^4$$

除可能存在的离散频率集 ω 外。

证明。我们只需证明变分问题

$$\mathcal{B}_D(\Phi,\Psi) = -\int_D Q_1\cdot\overline{\Psi}dx, \quad \forall\, \Psi\in H_0^1(D)^4 \tag{4.7}$$

在 $H_0^1(D)^4$, 中存在唯一弱解，其中 Q_1 属于 $H_0^1(D)^4$ 的对偶空间。F

或 $\Phi=(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top,\ \widetilde{p})^\top,\ \Psi=(\boldsymbol{u}'^\top,\ p')^\top$，其中 $\widetilde{\boldsymbol{u}}=(\widetilde{u}_1,\ \widetilde{u}_2,\ \widetilde{u}_3)^\top$ 和 $\boldsymbol{u}'=(u_1',\ u_2',\ u_3')^\top$, 1 et

$$\mathcal{H}_D(\Phi,\Psi) := \sum_{i=1}^{3}(\nabla\widetilde{u}_i,\nabla u_i') + (\nabla\widetilde{p},\nabla p') + (\Phi,\Psi),$$

其中 $(\cdot,\ \cdot)$ 表示 L^2-内积，其定义为 $(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) = \int_D \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}dx$，适用于复值向量函数 $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}$。

定义算子 $\mathcal{P}_1(\omega)$ $\mathcal{P}_2(\omega)$: $H_0^1(D)^4\to H_0^1(D)^4$如下:

$$\mathcal{H}_D(\mathcal{P}_1\Phi,\Psi) = \mathcal{A}_D(\Phi,\Psi) + (\Phi,\Psi), \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_D(\mathcal{P}_2\Phi,\Psi) = (\Phi,\Psi) + \int_D\Big[&\rho\omega^2 J\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}' + \gamma\widetilde{p}\nabla\cdot(A\overline{\boldsymbol{u}}') \\ &+ qJ\widetilde{p}\,\overline{p}' + \mathbf{i}\omega\eta\overline{p}'\nabla\cdot(A\widetilde{\boldsymbol{u}})\Big]dx,\end{aligned} \tag{4.9}$$

Let

$$f^\Phi(\Psi) = \int_D\Big[\rho\omega^2 J\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}' + \gamma\widetilde{p}\nabla\cdot(A\overline{\boldsymbol{u}}') + qJ\widetilde{p}\overline{p}' + \mathbf{i}\omega\eta\overline{p}'\nabla\cdot(A\widetilde{\boldsymbol{u}})\Big]dx$$

并且 $g^\Phi(\Psi) = \overline{f^\Phi(\Psi)}$。$g^\Phi(\Psi)$是空间 $H_0^1(D)^4$上的连续线性泛函。由于$H_0^1(D)^4$ 是 $L^2(D)^4$, 的子空间，根据 Hahn-Banach 定理，线性泛函 g^Φ 可以扩展为整个空间 $L^2(D)^4$ 上的线性泛函 g_1^Φ，且满足

$$g_1^\Phi(\Psi) = g^\Phi(\Psi), \quad \forall\, \Psi\in H_0^1(D)^4.$$

设 $f_1^{\Phi}(\Psi) = \overline{g_1^{\Phi}(\Psi)}$，它是空间 $L^2(D)^4$上的反线性泛函。根据 Riesz 表示定理，存在唯一的 $u_\Phi \in L^2(D)^4$，使得 $f_1^{\Phi}(\Psi) = (u_\Phi, \Psi) \ \forall\, \Psi \in L^2(D)^4$。因此，我们可以将方程（4.9）右侧改写为

$$\mathcal{H}_D(\mathcal{P}_2\Phi, \Psi) = (\Phi, \Psi) + (u_\Phi, \Psi) \tag{4.10}$$

根据引理 4.2，方程 (4.8) 右侧的半双线性型是强制的。利用 Lax-Milgram 引理可知，$\mathcal{P}_1^{-1}$存在且连续。在方程 (4.9) 中，带角点的区域上常系数强椭圆系统的正则性理论 [32] 表明

$$\exists\, s > 1, \text{such that } \mathcal{P}_2\Phi \in H^s(D)^4, \text{ if } \Phi + u_\Phi \in L^2(D)^4,$$

我们知道，由 $H^s(D)^4 \cap H_0^1(D)^4$紧嵌入于 $H_0^1(D)^4$可知 $\mathcal{P}_2$是紧的。如下线性偏微分方程组

$$\mathcal{H}_D(G, \Psi) = -\int_D Q_1 \cdot \overline{\Psi} dx, \quad \forall\, \Psi \in H_0^1(D)^4 \tag{4.11}$$

在 $H_0^1(D)^4$中总有唯一解。因此，在$H_0^1(D)^4$ 中求方程(3.9)的解等价于寻求 $\Phi \in H_0^1(D)^4$，使得

$$\mathcal{P}_1\Phi - \mathcal{P}_2\Phi = G. \tag{4.12}$$

由于 $\mathcal{P}_1^{-1}$连续，$\mathcal{P}_1^{-1}\mathcal{P}_2$ 是紧的。为借助解析 Fredholm 定理研究算子方程 (4.12) 的可解性，我们需要寻找一个频率，使得 (4.7) 存在唯一解。

将频率 $\omega = \frac{\gamma}{\eta}\mathbf{i}$ 代入半双线性形式 (4.2)，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_D(\Phi, \Phi) = \int_D \Big[&\widetilde{\sigma}(\widetilde{\boldsymbol{u}})A\colon \nabla\overline{\widetilde{\boldsymbol{u}}} + \rho\frac{\gamma^2}{\eta^2} J\widetilde{\boldsymbol{u}} \cdot \overline{\widetilde{\boldsymbol{u}}} + \nabla\overline{\widetilde{p}} \cdot (K\nabla\widetilde{p}) + \frac{\gamma}{\eta\kappa} J\widetilde{p}\overline{\widetilde{p}} \\ &+ \gamma\nabla\widetilde{p} \cdot (A\overline{\widetilde{\boldsymbol{u}}}) - \gamma\nabla\overline{\widetilde{p}} \cdot (A\widetilde{\boldsymbol{u}})\Big] dx \\ = \mathcal{A}_D(\Phi, \Phi) &+ \int_D \Big(\rho\frac{\gamma^2}{\eta^2} J\widetilde{\boldsymbol{u}} \cdot \overline{\widetilde{\boldsymbol{u}}} + \frac{\gamma}{\eta\kappa} J\widetilde{p}\overline{\widetilde{p}}\Big) dx + \int_D \Big[\gamma\nabla\widetilde{p} \cdot (A\overline{\widetilde{\boldsymbol{u}}}) - \gamma\nabla\overline{\widetilde{p}} \cdot (A\widetilde{\boldsymbol{u}})\Big] dx,\end{aligned} \tag{4.13}$$

其中半双线性形式 $\mathcal{A}_D(\Phi, \Phi)$ 由 (4.3) 定义。直接计算可得

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} J &= \prod_{j=1}^{3}[1 + \zeta\alpha_j(x_j)] - \sum_{j=1}^{3} \frac{\alpha_1(x_1)\alpha_2(x_2)\alpha_3(x_3)}{\alpha_j(x_j)} - 3\zeta\alpha_1(x_1)\alpha_2(x_2)\alpha_3(x_3) \\ &= 1 + \zeta\sum_{j=1}^{3}\alpha_j(x_j) + (\zeta^2 - 1)\sum_{j=1}^{3}\frac{\alpha_1(x_1)\alpha_2(x_2)\alpha_3(x_3)}{\alpha_j(x_j)} + (\zeta^3 - 3\zeta)\alpha_1(x_1)\alpha_2(x_2)\alpha_3(x_3).\end{aligned} \tag{4.14}$$

对于给定向量 $\widetilde{\boldsymbol{u}} = (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_3)^\top$ 并回顾矩阵 A 的定义（见 (3.10)），我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\int_D \gamma\nabla\widetilde{p} \cdot (A\overline{\widetilde{\boldsymbol{u}}}) dx &= \gamma \operatorname{Re}\int_D \left(s_2 s_3 \frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_1}\overline{\widetilde{u}_1} + s_1 s_3 \frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_2}\overline{\widetilde{u}_2} + s_1 s_2 \frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_3}\overline{\widetilde{u}_3}\right) dx, \\ \operatorname{Re}\int_D \gamma\nabla\overline{\widetilde{p}} \cdot (A\widetilde{\boldsymbol{u}}) dx &= \gamma \operatorname{Re}\int_D \left(s_2 s_3 \overline{\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_1}}\widetilde{u}_1 + s_1 s_3 \overline{\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_2}}\widetilde{u}_2 + s_1 s_2 \overline{\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_3}}\widetilde{u}_3\right) dx.\end{aligned}$$

结合关系式 $s_j = 1 + (\zeta + \mathbf{i})^{\alpha_j}$ 和基本恒等式，得到

$$\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x_j}\overline{\widetilde{u}_j} - \overline{\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x_j}}\widetilde{u}_j = 2\mathbf{i}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x_j}\overline{\widetilde{u}_j}\right), j = 1, 2, 3$$

得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\int_D \Big[\gamma\nabla\widetilde{p}\cdot(A\overline{\widetilde{\boldsymbol{u}}}) - \gamma\nabla\overline{\widetilde{p}}\cdot(A\widetilde{\boldsymbol{u}})\Big]dx \\
=&-2\gamma\int_D\Bigg\{(\alpha_2+\alpha_3+2\zeta\alpha_2\alpha_3)\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_1}\overline{\widetilde{u}_1}\right) + (\alpha_1+\alpha_3+2\zeta\alpha_1\alpha_3)\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_2}\overline{\widetilde{u}_2}\right) \\
&+(\alpha_1+\alpha_2+2\zeta\alpha_1\alpha_2)\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_3}\overline{\widetilde{u}_3}\right)\Bigg\}dx. \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

注意到柯西-施瓦茨不等式意味着

$$-2\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_j}\overline{\widetilde{u}_j}\right) \geq -\Big(\Big|\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_j}\Big|^2 + \Big|\overline{\widetilde{u}_j}\Big|^2\Big), j = 1, 2, 3,$$

结合式（4.15），我们得到以下估计

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\int_D \Big[\gamma\nabla\widetilde{p}\cdot(A\overline{\widetilde{\boldsymbol{u}}}) - \gamma\nabla\overline{\widetilde{p}}\cdot(A\widetilde{\boldsymbol{u}})\Big]dx \\
\geq&-\gamma\int_D\Bigg\{(\alpha_2+\alpha_3+2\zeta\alpha_2\alpha_3)\Big(\Big|\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_1}\Big|^2+\Big|\overline{\widetilde{u}_1}\Big|^2\Big) + (\alpha_1+\alpha_3+2\zeta\alpha_1\alpha_3)\Big(\Big|\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_2}\Big|^2+\Big|\overline{\widetilde{u}_2}\Big|^2\Big) \\
&+(\alpha_1+\alpha_2+2\zeta\alpha_1\alpha_2)\Big(\Big|\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_3}\Big|^2+\Big|\overline{\widetilde{u}_3}\Big|^2\Big)\Bigg\}dx \\
\geq&-2\gamma\int_D(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\zeta\alpha_2\alpha_3+\zeta\alpha_1\alpha_3+\zeta\alpha_1\alpha_2)|\widetilde{\boldsymbol{u}}|^2dx \\
&-\gamma\int_D(\alpha_2+\alpha_3+2\zeta\alpha_2\alpha_3)\Big|\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_1}\Big|^2dx - \gamma\int_D(\alpha_1+\alpha_3+2\zeta\alpha_1\alpha_3\Big]\Big|\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_2}\Big|^2dx \\
&-\gamma\int_D(\alpha_1+\alpha_2+2\zeta\alpha_1\alpha_2)\Big|\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_3}\Big|^2dx. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

由引理4.1–4.2可知

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\mathcal{A}_D(\Phi,\Phi) \geq C_1\|\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}\|^2_{L^2(D)^{3\times3}} &+ \int_D\Big(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\Big)\frac{(1+\zeta\alpha_2)(1+\zeta\alpha_3)}{(1+\zeta\alpha_1)}\Big|\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_1}\Big|^2dx \\
&+\int_D\Big(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\Big)\frac{(1+\zeta\alpha_1)(1+\zeta\alpha_3)}{(1+\zeta\alpha_2)}\Big|\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_2}\Big|^2dx \qquad (4.17) \\
&+\int_D\Big(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\Big)\frac{(1+\zeta\alpha_1)(1+\zeta\alpha_2)}{(1+\zeta\alpha_3)}\Big|\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_3}\Big|^2dx.
\end{aligned}$$

在假设 $\dfrac{\rho\gamma^2}{\eta^2} \geq 1$ 下，我们有

$$\mathrm{Re}\int_D\Big(\rho\frac{\gamma^2}{\eta^2}J\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\overline{\widetilde{\boldsymbol{u}}} + \frac{\gamma}{\eta\kappa}J\widetilde{p}\overline{\widetilde{p}}\Big)dx \geq \int_D \mathrm{Re}\,J|\widetilde{\boldsymbol{u}}|^2dx + \frac{\gamma}{\eta\kappa}\|\widetilde{p}\|^2_{L^2(D)}. \qquad (4.18)$$

我们要求以下三个不等式成立：

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right)\frac{(1+\zeta\alpha_2)(1+\zeta\alpha_3)}{(1+\zeta\alpha_1)} &> \gamma(\alpha_2+\alpha_3+2\zeta\alpha_2\alpha_3),\\
\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right)\frac{(1+\zeta\alpha_1)(1+\zeta\alpha_3)}{(1+\zeta\alpha_2)} &> \gamma(\alpha_1+\alpha_3+2\zeta\alpha_1\alpha_3),\\
\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right)\frac{(1+\zeta\alpha_1)(1+\zeta\alpha_2)}{(1+\zeta\alpha_3)} &> \gamma(\alpha_1+\alpha_2+2\zeta\alpha_1\alpha_2),
\end{aligned}$$

可展开为

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right)(1+\zeta\alpha_2+\zeta\alpha_3+\zeta^2\alpha_2\alpha_3)\\
>\ &\gamma\left[\alpha_2+\alpha_3+\zeta\alpha_2(\alpha_1+\alpha_3)+\zeta\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2)+2\zeta^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3\right],\\
&\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right)(1+\zeta\alpha_1+\zeta\alpha_3+\zeta^2\alpha_1\alpha_3)\\
>\ &\gamma\left[\alpha_1+\alpha_3+\zeta\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)+\zeta\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2)+2\zeta^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3\right],\\
&\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right)(1+\zeta\alpha_1+\zeta\alpha_2+\zeta^2\alpha_1\alpha_2)\\
>\ &\gamma\left[\alpha_1+\alpha_2+\zeta\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)+\zeta\alpha_2(\alpha_1+\alpha_3)+2\zeta^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3\right].
\end{aligned}$$

由于函数 $\alpha_j(x_j) \le \alpha_0,\quad j=1,\ 2,\ 3$，我们需要满足条件

$$2\gamma\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\alpha_0<1 \Longleftrightarrow \alpha_0<\frac{\lambda+\mu}{2\gamma(\lambda+2\mu)}$$

以满足要求。因此，我们得到估计

$$\begin{aligned}
&\int_D\left[\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right)\frac{(1+\zeta\alpha_2)(1+\zeta\alpha_3)}{(1+\zeta\alpha_1)}-\gamma(\alpha_2+\alpha_3+2\zeta\alpha_2\alpha_3)\right]\left|\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_1}\right|^2dx\\
+&\int_D\left[\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right)\frac{(1+\zeta\alpha_1)(1+\zeta\alpha_3)}{(1+\zeta\alpha_2)}-\gamma(\alpha_1+\alpha_3+2\zeta\alpha_1\alpha_3)\right]\left|\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_2}\right|^2dx\\
+&\int_D\left[\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right)\frac{(1+\zeta\alpha_1)(1+\zeta\alpha_2)}{(1+\zeta\alpha_3)}-\gamma(\alpha_1+\alpha_2+2\zeta\alpha_1\alpha_2)\right]\left|\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_3}\right|^2dx\\
\ge\ &C_2\left(\left\|\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_1}\right\|^2_{L^2(D)}+\left\|\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_2}\right\|^2_{L^2(D)}+\left\|\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x_3}\right\|^2_{L^2(D)}\right)=C_2\|\nabla\widetilde{p}\|^2_{L^2(D)^3}.
\end{aligned}\tag{4.19}$$

在假设 $\zeta^2-1\ge 2\gamma\zeta$ 和 $\zeta\ge\sqrt{3}$下，由 (4.14) 可得

$$\int_D \mathrm{Re}\, J|\widetilde{\boldsymbol{u}}|^2dx-2\gamma\int_D(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\zeta\alpha_2\alpha_3+\zeta\alpha_1\alpha_3+\zeta\alpha_1\alpha_2)|\widetilde{\boldsymbol{u}}|^2dx\ge C_3\|\widetilde{\boldsymbol{u}}\|^2_{L^2(D)^3}.$$

将其与 (4.13) 和 (4.17)-(4.19) 结合，可得对于任意 $\Phi\in H_0^1(D)^4$

$$\mathrm{Re}\,\mathcal{B}_D(\Phi,\Phi)\ge C_1\|\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}\|^2_{L^2(D)^{3\times3}}+C_2\|\nabla\widetilde{p}\|^2_{L^2(D)^3}+C_3\|\widetilde{\boldsymbol{u}}\|^2_{L^2(D)^3}+\frac{\gamma}{\eta\kappa}\|\widetilde{p}\|^2_{L^2(D)},$$

因此，对于特定频率 $\omega = \frac{\gamma}{\eta}\mathbf{i}$，在假设 (4.6) 下，Lax-Milgram 引理表明变分问题存在唯一解

$$\mathcal{B}_D(G,\Psi) = -\int_D Q_1 \cdot \overline{\Psi} dx, \quad \forall\, \Psi \in H_0^1(D)^4$$

最后，解析 Fredholm 定理表明，除可能的离散频率集 ω外，方程的 $(I - \mathcal{P}_1^{-1}\mathcal{P}_2)^{-1}$ 存在。 (4.12) □

由定理 4.4 中情形 $D = \Omega_2$ 的证明，我们可以得到截断 PML 问题 (4.1a)-(4.1d) 的如下存在唯一性结果。

推论 4.5. 在条件 (4.4) 下，截断 *PML* 问题 (4.1a)-(4.1d) 在空间 $H_0^1(\Omega_2)^4$, 中存在唯一解，可能的离散频率集 ω 除外。

下文中，我们考虑 PML 层中用于完美匹配层方法收敛性分析的一个 PDE 系统:

$$\nabla \cdot (\widetilde{\sigma}(\widetilde{\boldsymbol{u}})A) + \rho\omega^2 J\widetilde{\boldsymbol{u}} - \gamma A\nabla\widetilde{p} = 0 \quad \text{in } \Omega_{\mathrm{PML}}, \tag{4.20a}$$

$$\nabla \cdot (K\nabla\widetilde{p}) + qJ\widetilde{p} + \mathbf{i}\omega\eta\nabla\cdot(A\widetilde{\boldsymbol{u}}) = 0 \quad \text{in } \Omega_{\mathrm{PML}}, \tag{4.20b}$$

$$(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top, \widetilde{p})^\top = F \quad \text{on } \partial B_2, \tag{4.20c}$$

$$(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top, \widetilde{p})^\top = 0 \quad \text{on } \partial B_1. \tag{4.20d}$$

则 (4.20a)-(4.20d) 的变分形式如下：给定 $F \in H^{1/2}(\partial B_2)^4$, ，求 $(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top, \widetilde{p})^\top \in H^1_{\partial B_1}(\Omega_{\mathrm{PML}})^4 =: \{\Phi \in H^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4 : \Phi = 0 \text{ 在 } \partial B_1\}$ 上，使得

$$\mathcal{B}_{\Omega_{\mathrm{PML}}}((\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top, \widetilde{p})^\top, \Psi) = 0, \quad \forall\, \Psi \in H_0^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4. \tag{4.21}$$

定理 4.6。 设 $D = \Omega_{\mathrm{PML}}$，并假设参数满足约束条件 (4.6)。给定 $F \in H^{1/2}(\partial B_2)^4$, ，系统 (4.20a)-(4.20d) 存在唯一弱解 $(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top, \widetilde{p})^\top \in H^1_{\partial B_1}(\Omega_{\mathrm{PML}})^4$，使得在 ∂B_2 上有 $(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top, \widetilde{p})^\top = F$，但可能除外一个离散频率集 ω。此外，系统 (4.20a)-(4.20d)满足以下稳定性估计

$$\|(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top, \widetilde{p})^\top\|_{H^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4} \le C(d)\|F\|_{H^{1/2}(\partial B_2)^4}, \tag{4.22}$$

其中 常数 $C(d)$ 取决于厚度 d，且关于 d 至多呈多项式增长。

证明。 首先，我们证明问题 (4.20a)-(4.20d) 解的存在唯一性。设 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 为一个截断函数，满足在 $B_{d/2} = \{(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ 上 $\chi = 0 : \ |x_j| < l_j + d_j/2, j = 1, 2, 3\}$，且在边界 ∂B_2 附近 $\chi = 1$。

假设 $(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top, \widetilde{p})^\top \in H^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4$ 是变分问题 (4.21) 的解，则 $(\widetilde{U}^\top, \widetilde{P})^\top = (\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top, \widetilde{p})^\top - \chi F \in H_0^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4$ 满足以下变分形式

$$\mathcal{B}_{\Omega_{\mathrm{PML}}}((\widetilde{U}^\top, \widetilde{P})^\top, \Psi) = -\mathcal{B}_{\Omega_{\mathrm{PML}}}(\chi F, \Psi), \quad \Psi \in H_0^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4 \tag{4.23}$$

其中 $\mathcal{B}_{\Omega_{\mathrm{PML}}}(\cdot,\ \cdot)$ 在 (4.2) 中定义。类似于定理 4.4 的证明可知，变分问题 (4.23) 在 $H_0^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4$ 中存在唯一的弱解，但以下情况除外:

在约束条件 (4.6) 下的离散频率集 ω。因此，inf-sup条件成立

$$\sup_{\Psi\in H_0^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4\setminus\{0\}}\frac{|\mathcal{B}_{\Omega_{\mathrm{PML}}}(\Phi,\Psi)|}{\|\Psi\|_{H_0^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4}}\geq C\|\Phi\|_{H^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4},\quad\forall\,\Phi\in H_0^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4. \tag{4.24}$$

因此，问题 (4.20a)-(4.20d) 的解 $(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top,\ \widetilde{p})^\top$ 所需的存在唯一性结果得以获得。

现在我们为问题 (4.20a)-(4.20d) 建立稳定性估计。对于变分问题 (4.23)，由 inf-sup条件 (4.24) 以及 $\mathcal{B}_{\Omega_{\mathrm{PML}}}(\cdot,\ \cdot)$ 的连续性可得

$$\begin{aligned}\|(\widetilde{U}^\top,\widetilde{P})^\top\|_{H^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4}&\leq C\sup_{\Psi\in H_0^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4\setminus\{0\}}\frac{|\mathcal{B}_{\Omega_{\mathrm{PML}}}((\widetilde{U}^\top,\widetilde{P})^\top,\Psi)|}{\|\Psi\|_{H_0^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4}}\\&=C\sup_{\Psi\in H_0^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4\setminus\{0\}}\frac{|\mathcal{B}_{\Omega_{\mathrm{PML}}}(\chi F,\Psi)|}{\|\Psi\|_{H_0^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4}}\\&\leq C\sup_{\Psi\in H_0^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4\setminus\{0\}}\frac{\|\chi F\|_{H^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4}\|\Psi\|_{H_0^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4}}{\|\Psi\|_{H_0^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4}}\\&\leq C(d)\|F\|_{H^{1/2}(\partial B_2)^4},\end{aligned}$$

这意味着

$$\|(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top,\widetilde{p})^\top-\chi F\|_{H^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4}\leq C(d)\|F\|_{H^{1/2}(\partial B_2)^4}.$$

所需的估计 (4.22) 随即由三角不等式得出。

□

5 PML方法的收敛性分析

在本节中 本节中，我们对 PML 层的厚度 d 作如下假设 ：

$$\overline{l_j}-l_j\leq\frac{d}{2},j=1,2,3,\text{ and }d\text{ has a positive lower bound.} \tag{5.1}$$

为了研究单轴 PML 方法的收敛性，我们引入与截断 PML 问题 (4.1a)-(4.1d) 相关的 Dirichlet-to-Neumann 算子 $\hat{}\mathcal{N}:\ H^{1/2}(\partial B_1)^4\to H^{-1/2}(\partial B_1)^4$。给定 $G\in H^{1/2}(\partial B_1)^4,$，定义

$$\hat{\mathcal{N}}G=\widetilde{\mathcal{R}}(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top,\widetilde{p})^\top, \tag{5.2}$$

其中 $(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top,\ \widetilde{p})^\top$ 满足 PML 层中的方程

$$\nabla\cdot(\widetilde{\sigma}(\widetilde{\boldsymbol{u}})A)+\rho\omega^2J\widetilde{\boldsymbol{u}}-\gamma A\nabla\widetilde{p}=0\quad\text{in }\Omega_{\mathrm{PML}}, \tag{5.3a}$$

$$\nabla\cdot(K\nabla\widetilde{p})+qJ\widetilde{p}+\mathbf{i}\omega\eta\nabla\cdot(A\widetilde{\boldsymbol{u}})=0\quad\text{in }\Omega_{\mathrm{PML}}, \tag{5.3b}$$

$$(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top,\widetilde{p})^\top=0\quad\text{on }\partial B_2, \tag{5.3c}$$

$$(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top,\widetilde{p})^\top=G\quad\text{on }\partial B_1. \tag{5.3d}$$

$\widetilde{}$此处，$\mathcal{R}$ 定义为

$$\widetilde{\mathcal{R}}(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top,\widetilde{p})^\top=\begin{bmatrix}\widetilde{T}&-\gamma\widetilde{\nu}\\0&\partial_{\widetilde{\nu}}\end{bmatrix}(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top,\widetilde{p})^\top\quad\text{on }\partial B_1 \tag{5.4}$$

~其中 $\widetilde{\nu} = A\nu$、 $\partial_{\widetilde{\nu}}\boldsymbol{u} = \nu \cdot (A\nabla \boldsymbol{u})$ 和 $T\boldsymbol{u} = \widetilde{\sigma}(\widetilde{\boldsymbol{u}})A\nu$。注意到 A和 B在 ∂B_1上化为单位矩阵，因此 $\widetilde{\sigma}(\widetilde{\boldsymbol{u}}) = \sigma(\widetilde{\boldsymbol{u}})$，由此得到 $\widetilde{\mathcal{R}}(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top,\ \widetilde{p})^\top = \mathcal{R}(\widetilde{\boldsymbol{u}}^\top,\ \widetilde{p})^\top$。

对于 $x \in \partial B_2,\ y \in \partial B_1$，由（3.5）和假设（5.1）可得

$$\operatorname{Im} d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \geq \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\left(|x_j - y_j|\left|\int_{y_j}^{x_j}\alpha_j(t)dt\right| + \zeta\left|\int_{y_j}^{x_j}\alpha_j(t)dt\right|^2\right)}{(1+\zeta\alpha_0)\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}} \geq r_0\alpha_0 d, \tag{5.5}$$

其中 $r_0 = \dfrac{3}{4\sqrt{\sum_{j=1}^{3} d(2l_j + d_j)^2}}$。

对于 $v \in W^{1,\infty}(\partial B_2) \cap H^{1/2}(\partial B_2)$，根据 $H^{1/2}$-范数在 $\partial B_i (i = 1,\ 2)$ 上的定义

$$\|v\|_{H^{1/2}(\partial B_i)} = \left(\|v\|^2_{L^2(\partial B_i)} + \int_{\partial B_i}\int_{\partial B_i}\frac{|v(x) - v(x')|^2}{|x - x'|^3}\,ds(x)\,ds(x')\right)^{\frac{1}{2}},$$

我们有

$$\|v\|_{H^{1/2}(\partial B_i)} \leq C\Big(|\partial B_i|^{1/2}\|v\|_{L^\infty(\partial B_i)} + |\partial B_i|^{1/2}\operatorname{diam}(B_i)^{1/2}\|\nabla v\|_{L^\infty(\partial B_i)}\Big),$$

其中 $\operatorname{diam}(B_i)$ 表示区域 B_i 的直径。如果 d 有一个正的下界，则有

$$\|v\|_{H^{1/2}(\partial B_i)} \leq C\Big(d\|v\|_{L^\infty(\partial B_i)} + d^{3/2}\|\nabla v\|_{L^\infty(\partial B_i)}\Big). \tag{5.6}$$

下面关于 PML 延拓衰减性质的引理将在完美匹配层方法的收敛分析中发挥重要作用。

引理5.1。 对于 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)^\top \in H^{1/2}(\partial B_1)^4$, ，在假设 (5.1) 下，我们有如下 *PML* 延拓的估计

$$\|\widetilde{E}(\boldsymbol{f})\|_{H^{1/2}(\partial B_2)^4} \leq C\Big[(1+\zeta\alpha_0)^2 + \alpha_0^2\Big]^{\frac{m}{2}} P(d)e^{-r_0\alpha_0 d}\|\boldsymbol{f}\|_{H^{1/2}(\partial B_1)^4}, \tag{5.7}$$

其中 $m > 0$ 是一个整数， r_0 出现在(5.5) 中，而 $P(d)$ 是一个至多多项式增长的函数。

证明。设 $M_{(k)}$ 和 $M^{(k)}$ 分别为矩阵~M 在 $\mathbb{C}$上的第 k行向量和列向量。对于 $x \in \partial B_2$, PML 延拓 $E(\boldsymbol{f})$ 的第 k个分量（其定义见 (3.7)）为

$$\widetilde{E}(\boldsymbol{f})_k(x) = \frac{1}{2}\Big[\widetilde{\Psi}_{SL}(\mathcal{N}\boldsymbol{f})_k(x) - \widetilde{\Psi}_{DL}(\boldsymbol{f})_k(x)\Big], \tag{5.8}$$

其中

$$\widetilde{\Psi}_{SL}(\mathcal{N}\boldsymbol{f})_k(x) = \int_{\partial B_1}\widetilde{\Phi}(x-y,\omega)_{(k)}(\mathcal{N}\boldsymbol{f})(y)ds(y),$$
$$\widetilde{\Psi}_{DL}(\boldsymbol{f})_k(x) = \int_{\partial B_1}[\mathcal{S}(\partial_y,\nu(y),\omega)\widetilde{\Phi}^\top(x-y,\omega)]^{(k)}\boldsymbol{f}(y)ds(y).$$

对 ∂B_2 使用 $H^{1/2}$ 范数估计 (5.6)，可得

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\Psi}_{SL}(\mathcal{N}\boldsymbol{f})_k\|_{H^{1/2}(\partial B_2)} \le Cd\Big\| \int_{\partial B_1} \widetilde{\Phi}(x-y,\omega)_{(k)}(\mathcal{N}\boldsymbol{f})(y)ds(y)\Big\|_{L^\infty(\partial B_2)} \\ + Cd^{3/2}\Big\|\nabla_x \int_{\partial B_1} \widetilde{\Phi}(x-y,\omega)_{(k)}(\mathcal{N}\boldsymbol{f})(y)ds(y)\Big\|_{L^\infty(\partial B_2)},\end{aligned} \tag{5.9}$$

and

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\Psi}_{DL}(\boldsymbol{f})_k\|_{H^{1/2}(\partial B_2)} \le Cd\Big\| \int_{\partial B_1} \Big[\mathcal{S}(\partial_y,\nu(y),\omega)\widetilde{\Phi}^\top(x-y,\omega)\Big]^{(k)}\boldsymbol{f}(y)ds(y)\Big\|_{L^\infty(\partial B_2)} \\ + Cd^{3/2}\Big\|\nabla_x \int_{\partial B_1} \Big[\mathcal{S}(\partial_y,\nu(y),\omega)\widetilde{\Phi}^\top(x-y,\omega)\Big]^{(k)}\boldsymbol{f}(y)ds(y)\Big\|_{L^\infty(\partial B_2)}.\end{aligned} \tag{5.10}$$

利用对偶配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{-1/2}(\partial B_1)\times H^{1/2}(\partial B_1)}$ 并对 ∂B_2 取最大值，可得(5.9)

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\Psi}_{SL}(\mathcal{N}\boldsymbol{f})_k\|_{H^{1/2}(\partial B_2)} \le Cd\max_{x\in\partial B_2}\sum_{j=1}^4 \|\widetilde{\Phi}(x-\cdot,\omega)_{kj}\|_{H^{1/2}(\partial B_1)}\|f_j\|_{H^{1/2}(\partial B_1)} \\ + Cd^{3/2}\max_{x\in\partial B_2}\max_{t\in\{1,2,3\}}\sum_{j=1}^4 \Big\|\frac{\partial}{\partial x_t}\widetilde{\Phi}(x-\cdot,\omega)_{kj}\Big\|_{H^{1/2}(\partial B_1)}\|f_j\|_{H^{1/2}(\partial B_1)},\end{aligned} \tag{5.11}$$

其中用到了Dirichlet-to-Neumann算子 $\mathcal{N}$ 的有界性。(5.10)的估计可类似地得到，并结合如下事实：对光滑函数， $H^{-1/2}(\partial B_1)$-范数由 $H^{1/2}(\partial B_1)$-范数控制：

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\Psi}_{DL}(\boldsymbol{f})_k\|_{H^{1/2}(\partial B_2)} \le Cd\max_{x\in\partial B_1}\sum_{i=1}^4\sum_{a=1}^4 \|\mathcal{S}_{ia}\widetilde{\Phi}(x-\cdot,\omega)_{ka}\|_{H^{1/2}(\partial B_1)}\|f_i\|_{H^{1/2}(\partial B_1)} \\ + Cd^{3/2}\max_{x\in\partial B_1}\max_{t\in\{1,2,3\}}\sum_{i=1}^4\sum_{a=1}^4 \Big\|\frac{\partial}{\partial x_t}\mathcal{S}_{ia}\widetilde{\Phi}(x-\cdot,\omega)_{ka}\Big\|_{H^{1/2}(\partial B_1)}\|f_i\|_{H^{1/2}(\partial B_1)}.\end{aligned} \tag{5.12}$$

在 ∂B_1 上应用 $H^{1/2}$-范数估计 (5.6)，可得 (5.11) 和 (5.12) 的以下界

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\Psi}_{SL}(\mathcal{N}\boldsymbol{f})_k\|_{H^{1/2}(\partial B_2)} \le Cd\|\boldsymbol{f}\|_{H^{1/2}(\partial B_1)^4}\sum_{j=1}^4\Big(d\|\widetilde{\Phi}(x-y,\omega)_{kj}\|_{L^\infty(\partial B_1\times\partial B_2)} \\ + d^{3/2}\|\nabla_y\widetilde{\Phi}(x-y,\omega)_{kj}\|_{L^\infty(\partial B_1\times\partial B_2)}\Big) \\ + Cd^{3/2}\|\boldsymbol{f}\|_{H^{1/2}(\partial B_1)^4}\max_{t\in\{1,2,3\}}\sum_{j=1}^4\Big(d\Big\|\frac{\partial}{\partial x_t}\widetilde{\Phi}(x-y,\omega)_{kj}\Big\|_{L^\infty(\partial B_1\times\partial B_2)} \\ + d^{3/2}\Big\|\nabla_y\frac{\partial}{\partial x_t}\widetilde{\Phi}(x-y,\omega)_{kj}\Big\|_{L^\infty(\partial B_1\times\partial B_2)}\Big),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\Psi}_{DL}(\boldsymbol{f})_k\|_{H^{1/2}(\partial B_2)} \le Cd\|\boldsymbol{f}\|_{H^{1/2}(\partial B_1)^4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{a=1}^{3}\Big(&d\|\mathcal{S}_{ia}\widetilde{\Phi}(x-y,\omega)_{ka}\|_{L^\infty(\partial B_1\times\partial B_2)}\\&+d^{3/2}\|\nabla_y\mathcal{S}_{ia}\widetilde{\Phi}(x-y,\omega)_{ka}\|_{L^\infty(\partial B_1\times\partial B_2)}\Big)\\&+Cd^{3/2}\|\boldsymbol{f}\|_{H^{1/2}(\partial B_1)^4}\max_{t\in\{1,2,3\}}\sum_{i=1}^{4}\sum_{a=1}^{3}\Big(d\Big\|\frac{\partial}{\partial x_t}\mathcal{S}_{ia}\widetilde{\Phi}(x-y,\omega)_{ka}\Big\|_{L^\infty(\partial B_1\times\partial B_2)}\\&+d^{3/2}\Big\|\nabla_y\frac{\partial}{\partial x_t}\mathcal{S}_{ia}\widetilde{\Phi}(x-y,\omega)_{ka}\Big\|_{L^\infty(\partial B_1\times\partial B_2)}\Big).\end{aligned}$$

结合表示式 (5.8) 和引理3.3，即可得到所需的估计 (3.3)。至此，证明完成。

□

根据引理5.1，我们可以得到 DtN算子 $\mathcal{N}$ 与 $\hat{\mathcal{N}}$ 之间的误差估计。

引理5.2。对于 $\boldsymbol{f}\in H^{1/2}(\partial B_1)^4$, 有

$$\|(\mathcal{N}-\hat{\mathcal{N}})\boldsymbol{f}\|_{H^{-1/2}(\partial B_1)^4}\le C\Big[(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2\Big]^{\frac{m}{2}}P(d)e^{-r_0\alpha_0 d}\|\boldsymbol{f}\|_{H^{1/2}(\partial B_1)^4},\tag{5.13}$$

其中， $m>0$ 为整数， r_0 出现在（5.5）中，并且 $P(d)$ 是一个至多多项式增长的函数。

证明。设 $\boldsymbol{f}\in H^{1/2}(\partial B_1)^4$, , 令 $\widetilde{E}(\boldsymbol{f})$ 为式（3.7）中定义的 PML延拓势。根据式（2.10）中 DtN 算子的定义，我们有

$$\mathcal{N}\boldsymbol{f}=\mathcal{R}E(\boldsymbol{f})|_{\partial B_1}=\mathcal{R}\widetilde{E}(\boldsymbol{f})|_{\partial B_1}.$$

~现在令 U 为系统（5.3a）-（5.3d）的解，其中 $G=\boldsymbol{f}$ 在 ∂B_1 上。根据式（5.2）中 DtN算子 $\hat{\mathcal{N}}$ 的定义，我们有

$$\hat{\mathcal{N}}\boldsymbol{f}=\widetilde{\mathcal{R}}\widetilde{U}|_{\partial B_1}=\mathcal{R}\widetilde{U}|_{\partial B_1}.$$

于是 $(\mathcal{N}-\hat{\mathcal{N}})\boldsymbol{f}=\mathcal{R}\widetilde{W}|_{\partial B_1}$，其中 $\widetilde{W}=\widetilde{U}-\widetilde{E}(\boldsymbol{f})$ 满足系统（4.20a）-（4.20d），且 $\sim F=-E(\boldsymbol{f})$ 在 ∂B_2 上。根据定理 4.6，以下稳定性估计

$$\|\widetilde{W}\|_{H^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4}\le C(d)\|\widetilde{E}(\boldsymbol{f})\|_{H^{1/2}(\partial B_2)^4}\tag{5.14}$$

因此成立，其中常数 $C(d)$ 取决于厚度 d，且其增长速度至多随 d 多项式增长。

设将 $\Psi\in H^{1/2}(\partial B_1)^4$ 延拓为 $H^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4$ 中的一个函数（仍记为 Ψ），使得在 ∂B_2 上 $\Psi=0$，且 $\|\Psi\|_{H^{1/2}(\partial B_1)^4}\ge C\|\Psi\|_{H^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4}$。于是由分部积分及 (5.14) 可得

$$\begin{aligned}|\langle\mathcal{R}\widetilde{W}|_{\partial B_1},\Psi\rangle_{\partial B_1}| &= |\langle(\hat{\mathcal{N}}-\mathcal{N})\boldsymbol{f},\Psi\rangle_{\partial B_1}| = |\mathcal{B}_{\mathrm{PML}}(\widetilde{W},\Psi)|\\&\le C\|\widetilde{W}\|_{H^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4}\|\Psi\|_{H^1(\Omega_{\mathrm{PML}})^4}\\&\le C(d)\|\widetilde{E}(\boldsymbol{f})\|_{H^{1/2}(\partial B_2)^4}\|\Psi\|_{H^{1/2}(\partial B_1)^4},\end{aligned}$$

其中，半双线性型 $\mathcal{B}_{\mathrm{PML}}(\cdot,\cdot)$ 对 $D=\Omega_{\mathrm{PML}}$ 在 (4.2) 中定义。于是由 $H^{-1/2}(\partial B_1)^4$ 的定义可得

$$\|\mathcal{R}\widetilde{W}|_{\partial B_1}\|_{H^{-1/2}(\partial B_1)^4}=\sup_{\Psi\in H^{1/2}(\partial B_1)^4\setminus\{0\}}\frac{|\langle\mathcal{R}\widetilde{W}|_{\partial B_1},\Psi\rangle_{\partial B_1}|}{\|\Psi\|_{H^{1/2}(\partial B_1)^4}}\le C(d)\|\widetilde{E}(\boldsymbol{f})\|_{H^{1/2}(\partial B_2)^4}.$$

结合引理5.1，可得到所需的估计（5.13）。

□

现在我们可以 建立关于完美匹配层方法指数收敛性的主要结果。

定理5.3（收敛定理）。 设条件（4.6）成立，且 $\alpha_0 d$ 充分大。对于给定的$\mathbf{Q}\in H^1(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)^3$，其在 B_1内部具有紧支撑，令 $\overline{U}$ 和 $\widetilde{U}$ 分别为满足*Kupradze*辐射条件（2.8）和（4.1a）-（4.1 d）的问题（2.2）的解。则有以下误差估计

$$\|\widetilde{U}-U\|_{H^1(\Omega_1)^4}\le C\Big[(1+\zeta\alpha_0)^2+\alpha_0^2\Big]^{\frac{m}{2}}P(d)e^{-r_0\alpha_0 d}\|\widetilde{U}\|_{H^{1/2}(\partial B_1)^4},\tag{5.15}$$

其中，$m>0$ 为整数，r_0 出现在（5.5）中，而 $P(d)$ 是一个至多按多项式增长的函数。

证明。 注意到$\mathbf{Q}\in H^1(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)^3$ 在 B_1内部具有紧支撑，因此 U 和 $\widetilde{U}$ 满足以下变分问题

$$\mathcal{B}_1(U,\Psi)=-\int_{\Omega_1}\mathbf{Q}\cdot\overline{\Psi}dx,\quad\forall\,\Psi\in H^1_{\partial B_1}(\Omega_1)^4\tag{5.16}$$

$$\mathcal{B}_{\Omega_2}(\widetilde{U},\Psi)=-\int_{\Omega_1}\mathbf{Q}\cdot\overline{\Psi}dx,\quad\forall\,\Psi\in H^1_0(\Omega_2)^4.\tag{5.17}$$

对$\mathcal{B}_{\Omega_2}$ 作简单分解并分部积分，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\Omega_2}(\widetilde{U},\Psi)&=\mathcal{B}_1(\widetilde{U},\Psi)+\langle\mathcal{N}\widetilde{U},\Psi\rangle_{\partial B_1}+\mathcal{B}_{\Omega_{\mathrm{PML}}}(\widetilde{U},\Psi)\\&=\mathcal{B}_1(\widetilde{U},\Psi)+\langle\mathcal{N}\widetilde{U},\Psi\rangle_{\partial B_1}+\langle-\hat{\mathcal{N}}\widetilde{U},\Psi\rangle_{\partial B_1}.\end{aligned}\tag{5.18}$$

将方程(5.16)与(5.17)相减，并利用(5.18)，可得

$$\mathcal{B}_1(U-\widetilde{U},\Psi)=\langle(\mathcal{N}-\hat{\mathcal{N}})\widetilde{U},\Psi\rangle_{\partial B_1}.$$

结合迹定理，由此可得

$$|\mathcal{B}_1(U-\widetilde{U},\Psi)|\le C\|(\mathcal{N}-\hat{\mathcal{N}})\widetilde{U}\|_{H^{-1/2}(\partial B_1)^4}\|\Psi\|_{H^1(\Omega_1)^4},$$

这显然意味着

$$\frac{|\mathcal{B}_1(U-\widetilde{U},\Psi)|}{\|\Psi\|_{H^1(\Omega_1)^4}}\le C\|(\mathcal{N}-\hat{\mathcal{N}})\widetilde{U}\|_{H^{-1/2}(\partial B_1)^4}.\tag{5.19}$$

所需的误差估计 (5.15) 可由引理5.2以及关于半双线性形式 $\mathcal{B}_1$ 的 inf-sup条件 (2.13) 得出。

□

~ ~**注5.4**（关于 U 对较大 PML参数的一致有界性）。由于 U 是截断 PML 问题 (4.1a)-(4.1d) 的解，$\|U\|_{H^{1/2}(\partial B_1)^4}$ 自然依赖于~PML参数 d 和 α_0。一个自然的问题是：当 d 和 α_0 变化时，$\|U\|_{H^{1/2}(\partial B_1)^4}$ 会如何增长？下面我们将在定理5.3的条件下讨论这个问题。

根据三角不等式

$$\|\widetilde{U}\|_{H^1(\Omega_1)^4} - \|U\|_{H^1(\Omega_1)^4} \leq \|\widetilde{U} - U\|_{H^1(\Omega_1)^4},$$

和迹定理

$$\frac{1}{C_{\Omega_1}}\|\widetilde{U}\|_{H^{1/2}(\partial B_1)^4} \leq \|\widetilde{U}\|_{H^1(\Omega_1)^4},$$

其中， C_{Ω_1} 是一个与 d 和 α_0无关的正常数。由误差估计（5.15）可得

$$\frac{1}{C_{\Omega_1}}\|\widetilde{U}\|_{H^{1/2}(\partial B_1)^4} - C\left[(1+\zeta\alpha_0)^2 + \alpha_0^2\right]^{\frac{m}{2}} P(d)e^{-r_0\alpha_0 d}\|\widetilde{U}\|_{H^{1/2}(\partial B_1)^4} \leq \|U\|_{H^1(\Omega_1)^4},$$

~其中， m 是一个正整数。可以看出，当 $\alpha_0 d$ 足够大时，$\|U\|_{H^{1/2}\ (\partial B_1)\ ^4}$保持一致有界。

6 结论

本文研究了笛卡尔坐标下用于三维时谐热弹性散射问题的单轴 PML 方法。在模型参数满足一定约束条件时，我们利用经典解析Fredholm理论证明了截断区域和 PML 层中的 PML 问题均存在唯一解，但可能存在一个离散频率集，使得结论不成立。此外，我们还建立了单轴 PML 方法关于 PML 层厚度和吸收参数的指数收敛性。证明基于原散射问题与截断 PML 问题的狄利克雷-诺伊曼算子之间的误差估计，而该误差估计取决于 PML 延拓和修正基本解的指数衰减性质。

我们的方法可以推广到其他散射问题，例如波导结构或孔弹性障碍物的散射问题。研究在PML外界面采用不同边界条件时，所提出的单轴 PML 方法的收敛性，以及用于时谐热弹性散射问题的球形 PML 方法，也很有意义。我们希望在不久的将来报告这些结果。

致谢

本研究部分受到国家自然科学基金项目（12431016 和 12201033）资助。

参考文献

[1] E.S. Athanasiadou、V. Sevroglou 和 S. Zoi，多层物体的热弹性波散射，计算与应用数学杂志 **163** (2024)，186-200。

[2] G. Bao 和 H. Wu，时间谐波麦克斯韦方程完全匹配层问题的收敛分析，SIAM J. Numer. Anal. 43 (2005)，2121-2143。[3] G. Bao、L. Xu 和 T. Yin，三维弹性波和热弹性波的边界积分方程方法，计算方法与应用力学和工程 354 (2019)，464-486。[4] J.P. Bérenger，一种用于吸收电磁波的完全匹配层，J. Comput. Phys. 114 (1994)，185-200。[5] J.H. Bramble 和 J.E. Pasciak，三维电磁波散射问题的笛卡尔PML近似分析，国际数值分析与建模杂志 9 (2012)，543-561。[6] J. H. Bramble 和 J.E. Pasciak， $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$中的声散射问题的笛卡尔PML近似分析，计算与应用数学杂志 247 (2013)，209-230。[7] J.H. Bramble 和 J.E. Pasciak，三维时间谐波麦克斯韦和声散射问题的有限完美匹配层近似分析，数学计算 76 (2007)，597-614。[8] J.H. Bramble、J.E. Pasciak 和 D. Trenev，三维弹性波散射问题的有限完美匹配层近似分析，数学计算 79 (2010)，2079-2101。[9] F. Cakoni， $\mathbb{R}^3$中热弹性屏幕散射问题的边界积分法，Math. Meth. Appl. Sci. 23 (2000)，441-466。[10] F. Cakoni 和 G. Dassios，热弹性中的 Atkinson-Wilcox 定理，Q. Appl. Math. 57 (1999)，771-795。[11] Z. Chen，时域完美匹配层方法在声散射问题中的收敛性，国际数值分析与建模杂志 6 (2009)，124-146。[12] Z. Chen、T. Cui 和 L. Zhang，一种用于三维时间谐波电磁散射问题的自适应各向异性完美匹配层方法，Numer. Math. 125 (2013)，639-677。[13] Z. Chen 和 X. Liu，一种用于时间谐波散射问题的自适应完美匹配层技术，SIAM J. Numer. Anal. 43 (2005)，645-671。[14] Z. Chen 和 X. Wu，一种用于时间谐波散射问题的自适应单轴完美匹配层方法，Numer. Math. Theor. Meth. Appl. 1 (2008)，113-137。[15] Z. Chen 和 X. Wu，单轴完美匹配层方法在时域声散射问题中的长时间稳定性和收敛性，SIAM J. Numer. Anal. 50 (2012)，2632-2655。[16] Z. Chen、X. Xiang 和 X. Zhang，弹性波散射问题中PML方法的收敛性，数学计算 85 (2016)，2687-2714。

[17] Z. Chen 和 W. Zheng，双层介质中时间谐波散射问题的单轴完美匹配层方法的收敛性，SIAM J. Numer. Anal. 48 (2010), 2158-2185。[18] Z. Chen 和 W. Zheng，双层介质电磁散射问题的PML方法，SIAM J. Numer. Anal. 55 (2017), 2050-2084。[19] W.C. Chew 和 W.H. Weedon，基于拉伸坐标的修正麦克斯韦方程构造的三维完美匹配介质，Microw. Opt. Technol. Lett. 7 (1994年), 599-604。[20] A. Fathi、L.F. Kallivokas 和 B. Poursartip，三维PML截断弹性介质中的全波形反演，Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 296 (2015), 39-72。[21] T. Hohage、F. Schmidt 和 L. Zschiedrich，基于极点条件求解时间谐波散射问题 II：PML方法的收敛性，SIAM J. Math. Anal. 35 (2003), 547-560。[22] W. Hou、L.Y. Fu 和 J. M. Carcione，多层介质中热弹性波的反射与透射，Geophysics 87 (2022), MR117-MR128。[23] W. Hou、L.Y Fu、J.M. Carcione 和 Z. Wang，基于Lord-Shulman理论的热弹性波模拟，Geophysics 86 (2021), T155-T164。[24] X. Jiang、P. Li、J. Lv 和 W. Zheng，周期结构中弹性波散射问题的自适应有限元PML方法，ESAIM: Math. Model. Numer. Anal. 51 (2017), 2017-2047。[25] X. Jiang、P. Li、J. Lv 和 W. Zheng，双周期结构散射弹性波的PML解的收敛性，Commun. Math. Sci. 16 (2018), 987-1016。[26] S. Kim 和 J.E. Pasciak，声散射问题中笛卡尔PML近似的分析， $\mathbb{R}^2$J. Math. Anal. Appl. 370 (2010), 168-186。[27]V.D. Kupradze、T.G. Gegelia、M.O. Basheleishvili 和 T.V. Burchuladze，《弹性与热弹性数学理论的三维问题》，North-Holland，Amsterdam，1979。[28] M. Lassas 和 E. Somersalo，关于PML方程解的存在性与收敛性，Computing 60 (1998), 229-241。[29] W. Lei、Y. Liu、G. Li、S. Zhu、G. Chen 和 C. Li，采用优化完美匹配层的二维频域有限差分声波建模，Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 88 (2023), F1-F13。[30] A. Pakravan、J. W. Kang，一维PML截断固体介质材料剖面重建的高斯-牛顿全波形反演，KSCE J. Civ. Eng. 18 (2014), 1792-1804。[31] A. Pakravan、J. W. Kang 和 C. M. Newtson，利用标量探测波在PML截断区域中的高斯-牛顿全波形反演，J. Comput. Phys. 350 (2017), 824-846。

[32] G. Savare，Lipschitz 区域中椭圆方程的正则性结果，*J. Funct. Anal.***152** (1998), 176-201。[33] E. Wang、J.M. Carcione 和 J. Ba，部分饱和孔隙热弹性介质中的波动模拟，*IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing* **60** (2022), 1-14。[34] Y. Wang、P. Li、L. Xu 和 T. Yin，热弹性散射问题的自适应Dirichlet-to-Neumann有限元方法，*J. Comput. Phys.* **534**(2025), 114016。[35] C. Wei、J. Yang 和 B. Zhang，时域电磁散射问题的PML方法收敛分析，*SIAM J. Numer. Anal.* **58**(2020), 1918-1940。[36] C. Wei、J. Yang 和 B. Zhang，时域电磁散射问题的单轴PML方法的收敛性，*ESAIM: Math. Model. Numer. Anal.* **55** (2021), 2421-2443。[37] S. Yang、G. Wu、J. Shan 和 H. Liu，流固耦合热弹性介质中的地震波模拟，*Geophysics* **89** (2024), T263-T274。[38] T. Zhu、C. Wei 和 J. Yang，双周期弹性体的时谐电磁波散射，*Math. Meth. Appl. Sci.* **47** (2024), 6354-6381。