arXiv:2602.05563v1 [physics.flu-dyn] 5 Feb 2026

用于不可压缩湍流空气动力学的逐项变分多尺度方法与动态子尺度

D. Escobar [1,2], **D. Pacheco** [3,4,5], **A. Aguirre** [1,2] 和 **E. Castillo** [1,2,0]1 智利圣地亚哥大学计算传热与流体流动实验室[2] 智利圣地亚哥大学机械工程系，智利圣地亚哥[3] 亚琛工业大学技术系统计算分析教席，德国[4] 亚琛工业大学计算工程中基于模型开发方法教席[5] 亚琛工业大学仿真与数据科学中心（JARA-CSD），德国

摘要

变分多尺度方法为处理欠分辨流动尺度提供了稳健框架，而无需借助针对特定问题的湍流模型。本文提出并评估一种动态逐项变分多尺度稳定化公式，用于模拟从层流到湍流区域的不可压缩流。该方法嵌入增量压力修正分步框架，并采用一组最少的稳定化项，从而得到统一离散化：（i）允许等阶速度–压力插值；（ii）在复杂三维情形中对对流主导的动力学提供稳健控制。正交投影是关键要素，可确保非残差逐项结构通过适用于湍流模拟的动态子尺度产生耗散。该方法已在大型外部空气动力学构型上得到验证，包括雷诺数 $= 7.68 \times 10^5$ 下多个倾斜角的Ahmed车身，采用单元数从300万到4000万的非结构四面体网格。其适用性进一步在真实一级方程式构型上得到证明，工况为 $U_\infty = 56\text{m/s}$（201.6千米/小时），对应雷诺数 $\approx 10^6$。结果表明，所提出的稳定化压力分离公式在大规模计算中仍保持稳健，并能捕捉关键分离流特征以及相干

[0]电子邮箱：ernesto.castillode@usach.cl，通讯作者

尾流组织结构。逐点速度与压力谱提供了一种后验一致性指标，在已分辨频带内呈现出与惯性子区参考斜率相容的有限频率范围，并在统一的稳定化有限元框架内支持欠分辨区域中的耗散控制。

关键词： 稳定化有限元，变分多尺度，压力分离，增量压力修正，
不可压缩湍流，外部空气动力学，Ahmed车身，一级方程式

---

1. 引言

准确表征湍流对于计算空气动力学至关重要，因为湍流决定着阻力、升力和分离，同时也影响着不利运行条件下与结构完整性相关的非定常载荷。在实际构型中，空间和时间尺度范围广泛，因此在工程雷诺数下进行直接数值模拟（DNS）的计算成本高得难以承受 [1, 2]。相反，在复杂几何和分离流情况下，雷诺平均纳维–斯托克斯（RANS）闭合模型的预测能力可能有限，且对具体算例的依赖性较强[3, 4, 5]。因此，需要采用能够解析湍流的数值策略，在实际网格上保持计算可行，同时捕捉边界层演化、尾流动力学和涡相互作用。

大涡模拟（LES）通过解析大尺度含能结构并对最小尺度进行建模，提供了一种广泛应用的中间建模层级 [6]。在外部空气动力学中，与典型的雷诺平均纳维–斯托克斯（RANS）方法相比，LES 能够改善对非定常分离流和相干尾流动力学的预测；但在高雷诺数条件和真实几何形状下，其计算成本仍然很高，因此通常仅用于简化构型、成熟的基准数据，或混合工作流程中的局部高保真研究 [7, 8, 9, 10]。这些限制推动了人们持续研究离散化方法和建模策略，以在欠分辨区域控制数值耗散的同时保持稳健性，其中包括针对完全非均匀湍流的高阶不可压缩大涡模拟方法 [11]，以及利用分步策略、采用实用的混合或等阶速度–压力空间实现稳定计算的低耗散格式 [12]。与此同时，人们也在继续探索混合雷诺平均/大涡模拟策略和其他离散框架，以降低复杂壁面约束流动和类似车辆构型中的计算成本，同时保持精度 [13]。近年来，研究重点也转向了非均匀湍流环境和几何灵活性；在这些场景中，对

流动对流格式和亚格子尺度闭合模型的选择，对于耗散控制和精度至关重要 [14]。

在此背景下，隐式大涡模拟 逐渐发展成为一种建模框架，其中数值方法本身用于近似湍流耗散，而无需显式引入物理湍流建模假设。在这类隐式技术中，MILES [15, 16] 和变分多尺度 [17]方法分别是有限体积和有限元领域的典型代表。关于湍流中物理耗散与数值耗散之间重要联系的深入讨论，读者可参阅 Fehn 等人 [18]近期的工作。在这一研究背景下，变分多尺度框架通过分解为可解析尺度和未解析子尺度，为不可压缩流模拟和湍流建模提供了一种系统方法；未解析子尺度的影响在离散层面得到保留 [19, 17, 20]。在湍流环境中，动态子尺度提供了一种嵌入受控数值耗散并恢复隐式大涡模拟行为的机制，而无需引入显式涡黏性闭合 [19, 21]。针对公认的湍流基准算例开展的比较研究表明，包括子尺度空间定义、静态子尺度与动态子尺度的选用，以及正交性的强制实施在内的建模与实现选择，会直接影响稳定性、耗散特性和计算效率 [19, 22, 23]。更多偏数学方向的研究还考察了采用 VMS-LES稳定化增强的不可压缩流离散化的稳健公式和收敛性质，其中包括适用于复杂边界和滑移条件的处理方法 [24]。除单物理场湍流问题外，变分多尺度方法还被应用于流固耦合和气动弹性等耦合场景 [25],；近期研究将基于变分多尺度的湍流建模与自适应及时空策略相结合，以拓展其在各向异性和演化网格上的高雷诺数流动中的适用性 [26, 27]。

变分多尺度框架中的一项核心进展，是基于正交子尺度和动态子尺度的稳定化有限元公式 [28, 29, 30]。在已解析空间与未解析空间之间施加正交性，可实现一致的尺度分离，使速度–压力等阶插值保持稳定，并对数值耗散给出具有物理意义的定义 [31, 32]。将这种方法与时变子尺度相结合后，可以消除严格的时间步长限制，提高各向异性时空离散下的稳健性，并再现湍流能量传递的关键特征，包括惯性区耗散和反散射效应[29, 31]。除了基于残差的实现方式，基于正交投影的逐项稳定化公式也能保持最优收敛性质，同时呈现清晰的耗散结构，其中各个稳定化项的贡献

均可加以识别 [33, 34]。这种结构上的清晰性使系统的能量预算分析成为可能，并阐明了数值耗散如何源自特定的亚尺度分量，而非依赖于具体算例的闭合假设 [32, 35]。重要的是，这些概念并不局限于牛顿流体；正交动态子尺度公式也已扩展至更一般的流变学情形，体现了 VMS 范式在广泛流动问题中的灵活性[36, 37, 38]。

尽管取得了这些进展，现有用于基于变分多尺度的湍流建模的数值证据，大多仍依赖相对简单的基准几何构型，例如均匀各向同性湍流、Taylor–Green 涡和湍流通道流 [19, 23, 27]。这些构型对于在受控条件下分析耗散机制和湍流统计量至关重要，但复杂外部空气动力学场景中的大规模验证仍鲜有报道，尽管分离、尾流相互作用和多尺度涡结构对稳定化设计、耗散控制和数值稳健性提出了严格要求。此外，为了高效求解大规模非结构网格上的不可压缩 Navier–Stokes 方程，工业相关计算通常采用分步（即压力分离）策略，包括压力修正格式。因此，关于基于变分多尺度的湍流解析格式在压力修正分步格式中用于复杂、欠解析外部空气动力学流动时表现如何，目前仍缺乏大规模证据。

为弥合受控基准数据与面向应用的外部空气动力学之间的差距，本研究考虑两种互补构型。Ahmed车身是评估不可压缩外部空气动力学中湍流解析方法的公认基准，因为它保留了道路车辆的基本流动物理，同时使几何形状得到充分控制，便于进行系统比较 [39, 40]。一个显著特征是尾流拓扑和气动阻力对后部斜面角高度敏感，从而诱发明显不同的分离与涡相互作用状态 [41, 42]。这种敏感性推动了针对各倾斜角的大量实验与数值研究，并促成了协作评估工作，为涡解析模拟提供参考数据库，包括雷诺数 $= 7.68 \times 10^5$ [41] 下的大涡模拟和分离涡模拟。除时间平均量之外，Ahmed 车体尾流呈现出丰富的非定常动力学，包括方背构型中的双稳态行为以及依赖湍流强度的行为 [43, 44]。因此，Ahmed车身继续作为现代高保真方法与混合方法的关键验证平台，也用于壁面处理以及

大分离条件下的浸入边界策略 [45, 5, 46]。

作为第二个更具挑战性的案例，我们考虑一种受国际汽车联合会法规约束的真实一级方程式赛车构型，其空气动力性能取决于多个升力面之间的相互作用以及强烈的三维流动结构 [47]。与简化的道路车辆几何相比，F1赛车周围的流动具有复杂得多的拓扑结构，包括前翼和后翼、多部件空气动力装置，以及复杂的车轮与车身相互作用，同时还具有更高的工作雷诺数，以及范围更广的分离和涡主导机制。近期针对受法规启发、处于地面效应下的F1前翼几何形状开展的基准研究，借助公开可用的CAD模型和实验数据集，凸显了捕捉主导流动拓扑结构和载荷变化趋势所需的分辨率要求及验证挑战 [48]。此外，针对相关地面效应下前翼工况，对显式与隐式大涡模拟策略进行的比较进一步强调了离散稳定性和耗散控制在欠分辨率高保真模拟中的作用 [49]。因此，这一构型为评估复杂非结构网格上湍流解析离散格式的稳健性、耗散控制能力和可扩展性，提供了一个具有挑战性的大规模场景。

本研究提出并评估了一种受变分多尺度启发、按项构造的动态稳定化公式，专为不可压缩流的增量压力修正分步法设计。该公式采用最简稳定化布局，即仅引入实现等阶速度–压力插值稳定并控制湍流状态下对流所需的项，同时通过正交动态亚尺度保留明确的耗散机制。其关键设计特点是：通过修改相应的算子块，将稳定化项直接嵌入分步法的各个阶段，而不引入额外的速度–压力耦合。在投影框架中，此类交叉项通常会作为右端项贡献加入，但这并不能增强稳定性，且可能实际上重新引入跨阶段耦合。时间积分采用一致的处理方式：对求解变量和动态子尺度均应用BDF2，从而形成完整的二阶时间框架。此外，本研究还考虑了一个通过压力子尺度起作用的可选梯度–散度项；尽管基线公式并不需要该项，但它能提升严苛配置下的非线性鲁棒性 [50]。

我们的方法在具有挑战性的气动构型上得到验证，这些构型兼具湍流、分离与复杂几何，其中包括针对多个倾斜角、采用多达4000万个单元的非结构四面体网格的Ahmed车身。适用性进一步得到证明，对象为

代表性赛道平均速度为200 km/h、对应于雷诺数 $\approx 1.13\times10^{6}$的F1赛车。在这两种情况下，阻力系数等积分量辅以逐点速度谱和压力谱，作为大规模欠分辨率模拟中耗散控制与稳健性的实用诊断。

本文其余部分安排如下。第2节介绍控制方程和变分框架。第3节概述增量压力修正时间积分。第4节介绍所提出的正交逐项稳定化格式及其在分步阶段中的分块嵌入。第5节报告 Ahmed车身算例的设置与结果，第6节介绍一级方程式应用。最后，第7节总结主要发现并展望未来研究方向。

2. 控制方程

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2,3)$ 为具有边界Γ 和终止时间 $T > 0$ 的有界计算域。我们考虑密度 ρ 和动力黏度 μ 均为常数的牛顿流体不可压缩流。未知量为速度 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ 和压力 $p(\boldsymbol{x}, t)$，它们满足

$$\rho\partial_t \boldsymbol{u} + (\rho\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \mu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad \text{in } \Omega\times(0,T], \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in } \Omega\times(0,T]. \tag{2}$$

边界分解为 $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$。我们规定狄利克雷条件、流出条件和初始条件

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_g \quad \text{on } \Gamma_D\times(0,T], \tag{3}$$

$$(\mu\nabla\boldsymbol{u} - p\boldsymbol{I})\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \quad \text{on } \Gamma_N\times(0,T], \tag{4}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 \quad \text{at } t = 0, \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{I}$ $d\times d$ 表示单位张量，$\boldsymbol{n}$ 为单位外法向量。条件 (4) 采用伪牵引形式，与基准测试设置中使用的流出条件一致。为简化后续章节的论述，以下仅讨论齐次狄利克雷条件，即在 Γ_D 上满足 $\boldsymbol{u}_g = \boldsymbol{0}$ 。

本研究考虑的气动构型均按照实验文献中常用的类风洞条件进行报告。因此，U_∞ 表示规定的自由来流速度，参考面积和参考长度则依据各基准的标准定义选取。

2.1. 空气动力及其系数

令 $\Gamma_i \subset \Gamma_D$ 表示计算力的物体表面。总力为

$$\boldsymbol{F} = \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\Gamma_i, \qquad \boldsymbol{\sigma} := -p\boldsymbol{I} + \mu\nabla\boldsymbol{u} + (\mu\nabla\boldsymbol{u})^{\top}, \tag{6}$$

其中， $\boldsymbol{\sigma}$ 为柯西应力张量。阻力 F_D 是$\boldsymbol{F}$ 在 U_∞方向上的分量，而升力 F_L 是与其正交的分量。相应的无量纲系数为

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A}, \qquad C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A}, \tag{7}$$

其中， A 为基准特定的参考面积（例如正面面积）。雷诺数定义为

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho l U_\infty}{\mu}, \tag{8}$$

其中， l 为针对每个流动问题指定的特征长度。

2.2. 变分框架、离散化与分块记号

我们概述了全文采用的变分框架和完全离散的伽辽金框架，并引入一种分块矩阵记号，用于在整体算子中逐项定位稳定化项逐项 。

令 $V := [H_0^1(\Omega)]^d$ 和 $Q := L^2(\Omega)$，并赋予 $L^2(\Omega)$ 内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$。式 (1)–(2) 的标准弱形式为：求 $(\boldsymbol{u},\ p) : (0,\ T] \to V \times Q$ ，使得

$$\langle \rho\, \partial_t \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + B(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{u}, p; \boldsymbol{v}, q) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle \qquad \forall (\boldsymbol{v}, q) \in V \times Q, \tag{9}$$

其中

$$B(\hat{\boldsymbol{u}}; \boldsymbol{u}, p; \boldsymbol{v}, q) := \langle \rho\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \mu\nabla\boldsymbol{u}, \nabla\boldsymbol{v}\rangle - \langle p, \nabla\cdot\boldsymbol{v}\rangle + \langle \nabla\cdot\boldsymbol{u}, q\rangle\,, \tag{10}$$

且 $\hat{}\boldsymbol{u}$ 表示用于线性化的对流速度（例如，皮卡迭代策略）。

设 $\mathcal{T}_h$ 是 Ω 的协调三角剖分，且 $V_h \subset V$ 和 $Q_h \subset Q$ 是协调有限元空间。伽辽金近似为：求 $(\boldsymbol{u}_h,\ p_h) : (0,\ T] \to V_h \times Q_h$，使得

$$\langle \rho\partial_t \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h\rangle + B(\boldsymbol{u}_h; \boldsymbol{u}_h, p_h; \boldsymbol{v}_h, q_h) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h\rangle \qquad \forall (\boldsymbol{v}_h, q_h) \in V_h \times Q_h. \tag{11}$$

对于此处考虑的湍流计算，方程（9）–（11）为该方法提供了数学模板，而离散解则是在欠分辨区域中求取的；在这些区域中，稳健性和可控的数值耗散对于捕捉主要流动结构以及相关积分观测量（例如力和谱）至关重要。

时间积分采用二阶后向差分公式（BDF2）：对于一般量 $\boldsymbol{v}_h(t)$,

$$\partial_t \boldsymbol{v}_h(t^{n+1}) = \alpha_0 \boldsymbol{v}_h^{n+1} - \alpha_1 \boldsymbol{v}_h^{n} + \alpha_2 \boldsymbol{v}_h^{n-1} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \qquad \alpha_0 = \frac{3}{2\Delta t},\ \alpha_1 = \frac{2}{\Delta t},\ \alpha_2 = \frac{1}{2\Delta t}. \tag{12}$$

全离散块形式（记号）。为揭示鞍点结构及其随后如何被稳定化逐项修改，我们引入时间t^{n+1}处 Galerkin 系统的全离散块表示。该记号仅用于确定各个算子块受到哪些稳定化贡献的影响。

令 $\boldsymbol{M}$ 表示速度质量矩阵，$\boldsymbol{K}$ 表示离散扩散算子，$\boldsymbol{C}(\hat{\boldsymbol{u}}_h)$表示离散对流算子，$\boldsymbol{B}$ 表示离散散度算子，$\boldsymbol{B}^\top$ 表示相应的离散梯度。于是，耦合的 Galerkin 系统可形式化地写为

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 \boldsymbol{M} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}}_{\text{time (mass) block}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}(\hat{\boldsymbol{u}}_h) + \boldsymbol{K} & \boldsymbol{B}^\top \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}}_{\mathcal{K}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}^{n+1} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

其中，$\boldsymbol{b}^{n+1}$ 汇集了已知的 BDF2历史项、边界条件贡献和外力。第4节将利用这种块结构，明确各稳定化项的引入位置，以及如何将其嵌入增量压力修正框架，同时保持投影方法的计算组织结构。

3. 分步时间积分

不可压缩湍流的数值模拟通常需要在大量时间步上推进解，以捕捉相关的非定常动力学。湍流的三维特性以及真实气动构型所涉及的大量自由度，使这一挑战更加严峻。在此背景下，分步（投影）方法为完全耦合的速度–压力公式提供了一种高效的替代方案，因为它能将问题转化为计算复杂度大幅降低的线性子问题。本研究采用一种

增量压力修正格式，并结合 BDF2 时间积分。给定 $(\boldsymbol{u}^n, p^n)$ 和 $(\boldsymbol{u}^{n-1}, p^{n-1})$，算法按如下方式将解推进至 $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ 。

步骤 *1*：速度预测.. 通过求解以下方程，计算中间（非无散）速度 $\boldsymbol{u}^*$ ，对所有 $\boldsymbol{v}_h \in V_h$ 均成立，

$$\left\langle \rho \frac{3\boldsymbol{u}^* - 4\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{u}^{n-1}}{2\Delta t}, \boldsymbol{v}_h \right\rangle + \langle \rho \hat{\boldsymbol{u}}_h \cdot \nabla \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}_h \rangle + \langle \mu \nabla \boldsymbol{u}^*, \nabla \boldsymbol{v}_h \rangle - \langle p^n, \nabla \cdot \boldsymbol{v}_h \rangle = \left\langle \boldsymbol{f}^{n+1}, \boldsymbol{v}_h \right\rangle . \tag{14}$$

对流速度采用 Picard线性化处理。具体而言，在 Picard迭代中，我们令 $\hat{\boldsymbol{u}}_h = \boldsymbol{u}^{*,\,(i-1)}$，其中 $(i-1)$ 表示前一个非线性迭代值，从而对对流项进行稳健的不动点处理。

步骤 *2*：压力校正.. 通过求解以下方程计算压力增量 $\delta p^{n+1} := p^{n+1} - p^n$ ，对所有 $q_h \in Q_h$ 均成立，

$$\left\langle \nabla \delta p^{n+1}, \nabla q_h \right\rangle = \frac{3\rho}{2\Delta t} \left\langle \nabla \cdot \boldsymbol{u}^*, q_h \right\rangle . \tag{15}$$

压力边界条件设为：在 Γ_N 上为 $\delta p^{n+1} = 0$，在 Γ_D [51]上为 $\boldsymbol{n} \cdot \nabla \delta p^{n+1} = 0$。

步骤 *3*：速度校正与压力更新.. 通过以下方式获得（弱）无散速度：

$$\left\langle \boldsymbol{u}^{n+1}, \boldsymbol{v}_h \right\rangle = \langle \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}_h \rangle - \frac{2\Delta t}{3\rho} \left\langle \nabla \delta p^{n+1}, \boldsymbol{v}_h \right\rangle , \tag{16}$$

并按如下方式更新压力

$$p^{n+1} = p^n + \delta p^{n+1}. \tag{17}$$

该增量格式与BDF2结合时，在时间上最高可达到二阶精度；经典投影方法及相关格式的概述可见Guermond等人的综述 [51]。

4. 基于有限元的稳定化公式

我们将介绍一种稳定化有限元公式，旨在适用于非结构网格上的湍流状态，同时与压力校正分步策略兼容。稳定化在全离散整体式层次上构造，并通过逐项构造嵌入分步阶段，从而保留投影方法的计算结构。

4.1. 正交变分多尺度观点及其动机

由于简单灵活，速度和压力采用等阶有限元空间，适用于大规模非结构离散。然而，这类组合需要稳定化，以控制压力–速度耦合，并在对流主导区域保持稳健性。为此，我们采用一种正交变分多尺度 （VMS）方法，其中未解析信息是在有限元空间的 L^2-正交补空间中求取的。

变分多尺度框架基于对解进行尺度分解，将其分解为已解析分量和未解析修正（子尺度）。对于一般的未知量 $\boldsymbol{U}$ （或一组未知量），我们将其分解为

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_h + \widetilde{\boldsymbol{U}}, \ \text{where} \ \ \boldsymbol{U}_h \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_h \ \text{and} \ \ \widetilde{\boldsymbol{U}} \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}, \tag{18}$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_h$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ 分别表示有限元空间及其补空间（$\boldsymbol{\mathcal{X}} = \boldsymbol{\mathcal{X}}_h \oplus \boldsymbol{\mathcal{X}}$）。正交投影算子 $P_h^{\perp}$: $\boldsymbol{\mathcal{X}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}$定义为

$$\left\langle P_h^{\perp}\phi, v_h \right\rangle = 0 \qquad \forall v_h \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_h. \tag{19}$$

该算子确保严格的尺度分离：有限元空间捕捉已解析场，而子尺度仅包含未解析修正。这种正交分解避免了不同尺度之间的冗余，并得到一种公式，其中每个稳定化项都能直接对应于作用在已解析变量上的特定算子。

4.2. 整体层面逐项稳定化公式

稳定化公式首先在耦合的全离散层面提出，随后嵌入增量压力修正格式中。其设计原则是保留投影方法的结构：逐项引入稳定化项 *term-by-term* ，从而不产生额外的速度–压力交叉耦合。关键在于，我们避免引入以不符合压力分离的方式混合压力和速度的交叉稳定化项。在压力修正方法中，这类耦合通常表现为解耦子问题中的额外右端项贡献；它们在相应阶段内并不作为稳定化算子发挥作用，还可能实际上重新引入分步阶段之间的耦合。

稳定化问题旨在求解 $\boldsymbol{U}_h^{n+1} = [\boldsymbol{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}] \in V_h \times Q_h$，使其对所有 $\boldsymbol{V}_h = [\boldsymbol{v}_h, q_h] \in V_h \times Q_h$ 均成立，

$$\langle \rho \partial_t \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h \rangle + B(\hat{\boldsymbol{u}}_h; \boldsymbol{U}_h, \boldsymbol{V}_h) - \sum_K \left(\widetilde{p}, \nabla\cdot\boldsymbol{v}_h\right)_K - \sum_K \left(\widetilde{\boldsymbol{u}}_1, \rho\, \hat{\boldsymbol{u}}_h\cdot\nabla\boldsymbol{v}_h\right)_K - \sum_K \left(\nabla q_h, \widetilde{\boldsymbol{u}}_2\right)_K = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h \rangle\,, \tag{20}$$

其中 $(\cdot,\ \cdot)_K$ 表示逐单元 L^2 内积。

压力子尺度取为准静态，

$$\tau_2^{-1}(\hat{\boldsymbol{u}}_h)\,\widetilde{p} = -\,P_h^{\perp}(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_h), \tag{21}$$

而速度子尺度则为动态，并分解为对流和压力梯度贡献，

$$\rho\partial_t\widetilde{\boldsymbol{u}}_1 + \tau_1^{-1}(\hat{\boldsymbol{u}}_h)\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_1 = -\,P_h^{\perp}\big(\rho\hat{\boldsymbol{u}}_h\cdot\nabla\boldsymbol{u}_h\big), \tag{22}$$

$$\rho\partial_t\widetilde{\boldsymbol{u}}_2 + \tau_1^{-1}(\hat{\boldsymbol{u}}_h)\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2 = -\,P_h^{\perp}(\nabla p_h). \tag{23}$$

速度子尺度的时间积分采用一致的方式进行（BDF2）。在全离散层面，

$$\left[\tau_1^{-1}(\hat{\boldsymbol{u}}_h) + \frac{3\rho}{2\Delta t}\right]\widetilde{\boldsymbol{u}}_1^{\,n+1} = \rho\frac{4\widetilde{\boldsymbol{u}}_1^{\,n} - \widetilde{\boldsymbol{u}}_1^{\,n-1}}{2\Delta t} - P_h^{\perp}\big(\rho\hat{\boldsymbol{u}}_h\cdot\nabla\boldsymbol{u}_h^{n+1}\big), \tag{24}$$

$$\left[\tau_1^{-1}(\hat{\boldsymbol{u}}_h) + \frac{3\rho}{2\Delta t}\right]\widetilde{\boldsymbol{u}}_2^{\,n+1} = \rho\frac{4\widetilde{\boldsymbol{u}}_2^{\,n} - \widetilde{\boldsymbol{u}}_2^{\,n-1}}{2\Delta t} - P_h^{\perp}(\nabla p_h^{n+1}). \tag{25}$$

稳定化参数定义为

$$\tau_1(\hat{\boldsymbol{u}}_h) = \left(c_1\frac{\mu}{h_1^2} + c_2\frac{\rho|\hat{\boldsymbol{u}}_h|}{h_2}\right)^{-1}, \qquad \tau_2(\hat{\boldsymbol{u}}_h) = \frac{h_1^2}{c_3}\,\tau_1(\hat{\boldsymbol{u}}_h), \tag{26}$$

其中，h_1 和 h_2 是特征单元长度，c_1，c_2，c_3 是算法常数。本研究采用 $c_1 = 4$、$c_2 = 2$和 $c_3 = 24$。$c_3 \neq c_1$ 的选择不同于常见设置，后者对两个参数使用相同的常数。这里，$c_3 = 24$ 是在为 F1 配置建立收敛基准后，通过系统的数值试验选定的，并且在所考虑的所有测试案例中表现出最稳健的非线性行为。

通过式 (21)，我们得到一个梯度-散度型贡献。在 F1 应用中，加入该项显著提升了非线性鲁棒性，并使计算能够在现有网格和时间步长下收敛；若不加入该项，非线性迭代往往会停滞。这一现象与该配置下数值耗散不足的情况相符，而额外的散度相关稳定化为所考察的最具挑战性的情形提供了有效的补救措施。当采用高阶单元时，数值证据进一步表明，在稳定化参数中显式引入对多项式次数的依赖可能有益 [52]。

注 4.1. 梯度–散度稳定化的形式为 $\sum_K(\tau_2\nabla\cdot\boldsymbol{u}_h,\nabla\cdot\boldsymbol{v}_h)$，因此有时也称为“散度–散度”。它更常用的名称源于这样一个事实：在连续（强）形式下，该项可以重新解释为源自一致添加的梯度（散度）项$-\nabla(\tau_2\nabla\cdot\boldsymbol{u})$ *[53, 54]*。

4.3. 块结构及其与分步阶段的联系

采用第 2.2 节中引入的全离散块记法，时间层 t^{n+1} 上的稳定化单体系统可写为

$$\begin{bmatrix}\alpha_0\boldsymbol{M} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^{n+1}\\ p^{n+1}\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}(\hat{\boldsymbol{u}}_h)+\boldsymbol{K}+\boldsymbol{H}_s & \boldsymbol{B}^\top\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{L}_s\end{bmatrix}}_{\mathcal{K}_s}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^{n+1}\\ p^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}^{n+1}+\boldsymbol{b}_s^{n+1}\\ \boldsymbol{g}_s^{n+1}\end{bmatrix}. \tag{27}$$

这里，$\boldsymbol{H}_s$ 汇集了作用于动量方程的稳定化项，而 $\boldsymbol{L}_s$ 表示由压力梯度子尺度引起的压力相关对角块。向量 $\boldsymbol{b}_s^{n+1}$ 和 $\boldsymbol{g}_s^{n+1}$汇集了源自动态子尺度 BDF2 离散的已知历史项。

这种块级表示阐明了稳定化与投影之间的相互作用。将其嵌入增量压力修正框架后，动量侧稳定化进入速度预测阶段，而压力相关的对角项则补充到压力修正泊松求解中。其余亚尺度历史项仅作为已知右端项贡献出现，因此最终的速度投影步骤仍保持标准形式。这与投影型有限元格式的经典稳定性分析一致 [55], ；该分析表明，当 Δt 较小时，压力控制可能会减弱，除非引入额外的稳定化机制，二阶变体尤其如此。从这一角度看，本文的构造通过 $\boldsymbol{L}_s$ 实现压力稳定性，并通过 $\boldsymbol{H}_s$引入稳健性所需的最小额外动量耗散，同时保留标准投影结构。

4.4. 实现细节

该公式包含由对流以及依赖于 $\hat{}\boldsymbol{u}_h$ 的稳定化参数所引起的非线性。主要实现要点如下。

- **对流线性化**。对流采用不动点（Picard）迭代处理。在每次非线性迭代中，我们固定对流速度 $\hat{}\boldsymbol{u}_h$ （取其上一次迭代的值），并求解由此得到的线性子问题。

- **正交投影的迭代实现**。 正交投影算子通过投影-校正策略实现。对于一般量 f,

$$P_h^{\perp}(f) \approx f - P_h(f), \tag{28}$$

其中， P_h 表示到离散空间上的 L^2 投影。实际上，P_h 在 Picard迭代中更新，右端项使用上一次迭代的结果，即:

$$P_h^{\perp}\big(f^{(i)}\big) = f^{(i)} - P_h\big(f^{(i-1)}\big), \tag{29}$$

其中，投影 $z_h := P_h\big(f^{(i-1)}\big) \in \boldsymbol{X}_h \subset L^2(\Omega)$只需通过求解以下方程即可得到

$$\langle z_h, w_h\rangle = \big\langle f^{(i-1)}, w_h\big\rangle \tag{30}$$

对所有 $w_h \in \boldsymbol{X}_h$均成立。与大规模计算中的整体非线性迭代相比，这带来的额外开销不大。本研究仅考虑 $L^2(\Omega)$投影，其他策略可参见 [56, 57]。

- **质量矩阵求解**。 每次更新 P_h 都需要求解一个质量矩阵问题（30）。对于一阶单元，集中质量矩阵可提供高效的近似；而对于高阶离散化，通常需要使用相容质量矩阵以保持最优精度。

5. 问题定义：Ahmed车身

我们首先在Ahmed车身上验证所提出的动态逐项变分多尺度启发式稳定化方法。Ahmed车身是外部空气动力学中的一种基准构型。该基准涵盖了会对实际网格上的湍流解析离散化构成挑战的流动机制：后倾斜面上的边界层分离、大范围回流区，以及尾流中的相干涡结构。此外，尾流拓扑和气动阻力强烈依赖于后部斜面角，因此Ahmed车身是检验分离三维流稳定化公式的严格测试对象。

5.1. 几何、流动条件与计算域

Ahmed车体几何由一个矩形主体和一个倾角为 θ 的后倾斜表面组成（图 1），图中标出了主要几何特征和特征尺寸 [39], ，这些特征会显著影响分离和尾流组织结构。我们考虑 $\theta \in \{0^\circ, 12.5^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 35^\circ\}$

雷诺数为 $= 7.68 \cdot 10^5$，基于车身长度 $L = 1.044$ m和入口速度 $U_\infty = 40$ m/s。所有模拟均在类风洞条件下进行，与该基准常见的标准实验设置一致。

计算域在车身上游延伸 $3L$，下游延伸 $5L$，并在横向和垂直方向延伸 $2L$ （图 2）。图中给出了相对于车身长度的计算域范围，以限制远场边界对分离尾流的影响。入口处规定均匀来流速度，物体表面和地面均施加无滑移条件。远场边界采用牵引力/压力型外流条件，与参考文献以及第 2 节采用的伪应力牵引形式一致。

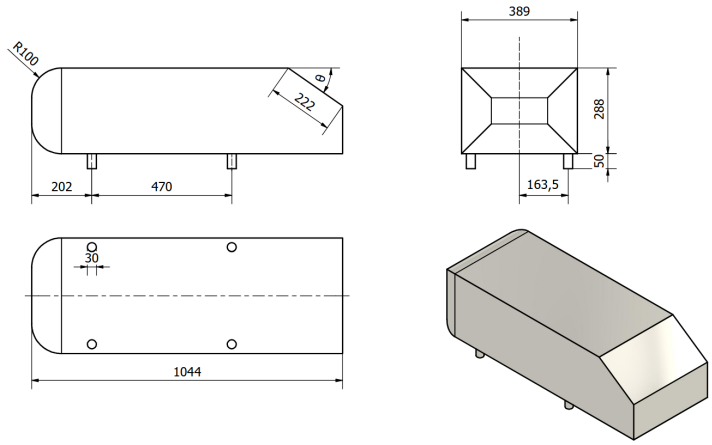


图 1：Ahmed车身几何形状。

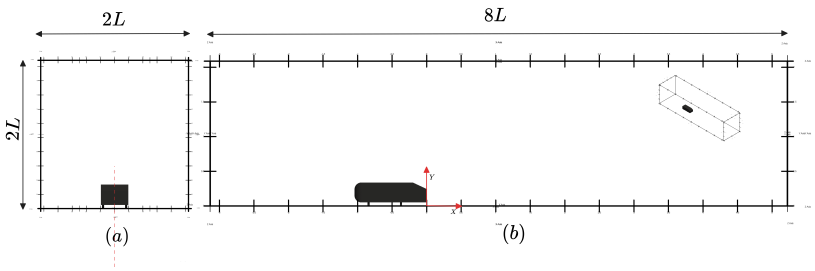


图 2：计算域尺寸。

5.2. 网格设计、时间步长与网格敏感性评估

计算网格采用非结构化四面体单元构建，并在壁面附近及尾流中进行局部加密，其中

主导的分离流动机理在此发展（图3）。加密集中于后倾斜面及下游分离剪切层周围，以捕捉边界层脱离、主回流泡以及控制基底压力和阻力的大尺度涡结构。在远场采用向较粗单元的平滑过渡，以控制总体成本，并避免因网格过渡突变而产生过大耗散。

为评估积分气动输出的敏感性，考虑了三个网格级别。粗网格（$\approx 3.2 \times 10^6$ 单元）用于验证求解器稳定性并获取初步的尾流组织结构。中等网格（$\approx 1.0 \times 10^7$ 单元）提高了近尾流和倾斜区域的分辨率。细网格（$\approx 3.7 \times 10^7$ 单元）旨在达到适当的分辨率，以便对决定阻力系数的分离尾流进行湍流解析预测。通过经验选择时间步长，以确保积分稳定，并使不同分辨率下的非定常行为具有可比性：粗网格、中等网格和细网格分别采用$\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ s、 1.0×10^{-5} s和 5.0×10^{-6} s。

表 1 列出了网格尺寸，以及本研究在 $\theta = 25^\circ$ 下得到的平均阻力系数。$\theta = 25^\circ$ 是文献记录最为广泛的倾斜角，因此为与参考大涡模拟和实验数据集 [41, 40] 进行定量比较提供了最直接的依据。中等网格与细网格之间的 C_D 变化显著，凸显了高-Re 大规模分离尾流对分辨率的要求。与此同时，在单一动态变分多尺度设置下，所有网格级别均实现了稳定计算。由于采用动态子尺度进行时间精确的三维模拟成本高昂，本研究未进一步细化至细网格以下。如下一节所示，细网格所得数值可作为有竞争力的参考，用于与采用尺寸相近网格获得的湍流解析结果进行比较。除非另有说明，本研究后续所有 Ahmed车身结果均采用细网格。

表 1： $\theta = 25^\circ$下 Ahmed车身模拟的网格特性，包括单元数量、本研究在雷诺数 Re $= 7.68 \times 10^5$下得到的平均阻力系数，以及时间步长。

网格级别	**单元**	**节点**	C_D **（本研究，** $\theta = 25^\circ$**）**	Δt **[s]**
粗糙	3,158,028	590,476	0.4548	1.0×10^{-4}
中等	10,132,548	1,979,584	0.4200	1.0×10^{-5}
Fine	37,283,942	6,082,802	0.3297	5.0×10^{-6}

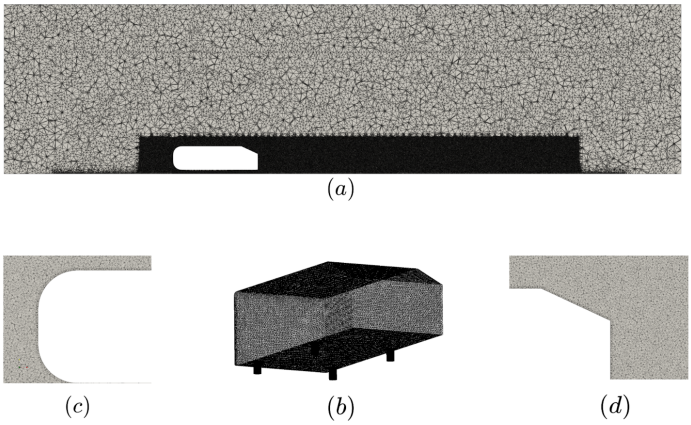


图 3：Ahmed模拟所用的计算网格，展示了近壁加密和尾流分辨率。

5.3. 数值结果

再次采用 $\theta = 25^\circ$ 构型作为主要定量验证案例。此外，利用多角度数据集评估模型在不同尾流拓扑下的稳健性，而 $\theta = 25^\circ$ 则作为所有积分载荷比较的基准。

5.3.1. 气动系数与网格敏感性

我们首先考察平均阻力系数 C_D，在大分离情况下，该系数对尾流拓扑和近尾迹压力恢复较为敏感。表 1 中的结果显示，在 $\theta = 25^\circ$ 下存在显著的网格依赖性： C_D在中等网格（10.1M 个单元）和细网格（37.3M 个单元）之间发生了明显变化。这种敏感性反映了该基准问题的挑战性：要准确计算积分载荷，必须充分分辨分离剪切层以及决定基底压力的主要相干结构。值得注意的是，在所提出的动态VMS框架下，所有网格级别均实现了稳定计算，这表明该方法在广泛的非结构四面体分辨率范围内具有稳健性。

下文将细网格结果作为本方法的参考预测，并据此与外部数据进行比较。表2总结了 C_D 针对 $\theta = 25^\circ$ 的结果，并将其与实验测量结果以及雷诺数和网格尺寸相近的代表性湍流解析数值参考进行对比。我们的细网格模拟得到 $C_D = 0.3297$，处于已发表结果的范围内，且与表2中的大涡模拟参考值接近，相对差异为 4。93%。尽管实验值会因实验设置和修正方法不同而有所差异，但比较结果表明，本文的稳定化分步格式能够在实用的非结构网格上，给出与已发表湍流解析数据一致的积分载荷预

测值，适用于雷诺数 $\mathrm{Re} = \mathcal{O}(10^6)$。

表2：平均阻力系数比较 C_D 对于 $\theta = 25°$ （“本研究”以细网格为参考）。

Case	**单元**	C_D	**相对差异 [%]**
本研究（细网格）	37,283,942	**0.3297**	—
实验	—	0.298	9.64
Guilmineau [58] – 分离涡模拟	23,100,000	0.437	32.55
Guilmineau [58] – 改进延迟分离涡模拟	23,100,000	0.382	15.83
Serre [59] – 大涡模拟-谱粘度体积	40,000,000	0.431	30.69
Serre [59] – 大涡模拟-牛顿迭代	40,000,000	0.346	4.93
Lehmkuhl [60] – 大涡模拟	25,600,000	0.297	9.93

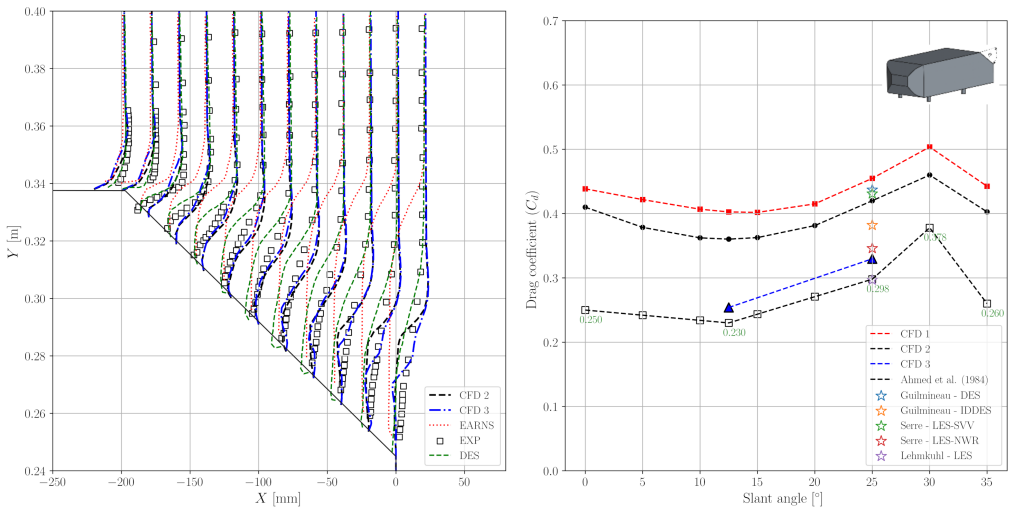


图4：Ahmed车身空气动力学结果的验证。（左）固定倾斜角为 $\theta = 25°$ 时，对称面上的归一化平均速度剖面，并与实验数据进行比较。（右）平均阻力系数 C_D 随倾斜角（θ）的变化，展示其与实验数据和数值参考数据的比较。

除单角度基准外，图 4（右）比较了 C_D 随倾斜角 θ的变化。实验趋势众所周知： C_D从方形尾部情形开始下降，在 $\theta \simeq 12.5°$附近达到最小值，随后因倾斜后表面发生分离而上升，并在 $\theta \simeq 25°$–$35°$ 范围内达到最大值。三种网格级别均再现了这一总体趋势。从定量结果来看，粗网格在各个角度下均高估了 C_D ，而中等网格提高了吻合度，但在

关键分离区间内仍高估阻力。细网格在此区间内与实验结果最为吻合，因此后续所有场级分析均采用细网格。

（图 4，左）表明，虽然中等网格捕捉到了整体尾流结构，但在某些区域与基准数据略有偏差。相比之下，细网格与 [39] 的实验测量结果以及 [58], 的数值结果高度吻合，在多个下游测站准确捕捉到了速度大小和恢复率。这种高度一致性表明，关键的分离流特征已得到充分解析。总体而言，1000 万与 3730 万个单元之间呈现出的敏感性，既凸显了该基准问题的复杂性，也说明了稳定化公式的实际意义：它在不同分辨率下均保持稳健，同时逐步收敛至高保真度的湍流解析预测。

5.3.2. 表面压力分布

图5给出了代表性倾斜角下表面压力系数 C_p 的等值线。对于 $\theta = 0°$，后表面上的压力分布相对均匀，与紧凑的近尾流区相一致。在$\theta = 12.5°$处，流动在斜面上大体保持附着，压力场呈现平滑梯度，这与低阻力状态相关。在 $\theta = 25°$处观察到显著变化，大分离产生了延伸的低压区和强烈的基底压力亏损，与峰值阻力相一致。在 $\theta = 35°$处，流动仍处于分离状态，但尾流重新组织，导致部分压力恢复，以及在临界角之外所报告的 C_D 特征性下降。

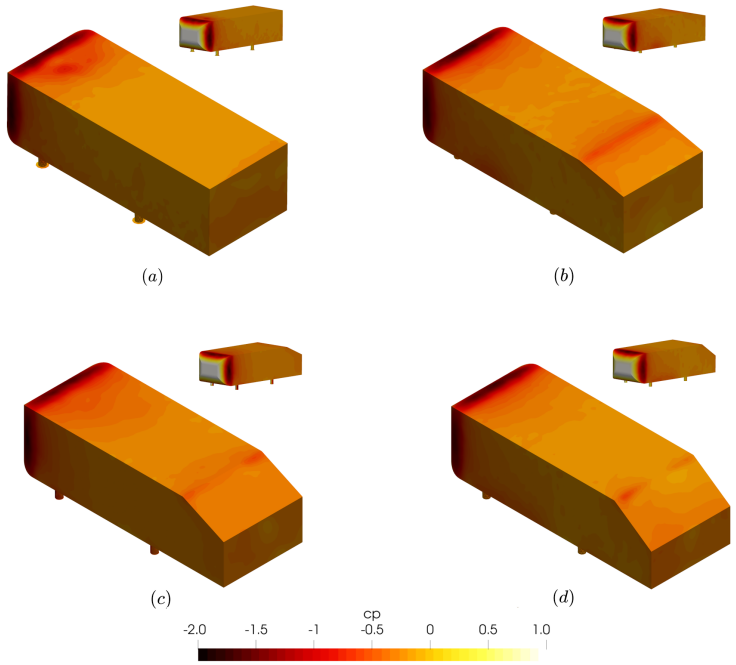


图5：不同后倾角下Ahmed车身上的表面压力系数（C_p）等值线：（a） $\theta = 0°$，（b） $\theta = 12.5°$，（c） $\theta = 25°$和（d） $\theta = 35°$。

5.3.3. 尾流动力学与谱特征分析

为量化尾流非定常性并评估模拟是否再现物理上一致的尺度间行为，我们分析了在后倾斜面下游监测位置处采样的时域信号所得到的速度谱和压力谱。这些点在控制体内的精确坐标见表3；它们被专门布置以覆盖湍流活动最为显著的关键回流区。三个速度分量和压力的代表性时间历程，以及平均速度和压力的相应功率谱，连同用于评估尾流中相位关系的相关李萨如图见图6。对于每个监测信号，计算离散傅里叶变换，并按下式计算相应的谱能量密度

$$E(f_k) = |\hat{u}(f_k)|^2, \tag{31}$$

压力的定义也类似。为获得具有代表性的尾流谱，对来自 M 监测点的各个谱进行平均，

$$\langle E(f_k) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} E_m(f_k). \tag{32}$$

这种空间平均可减少逐点间歇性，并突出已解析范围内占主导地位的标度行为。

表3：Ahmed车身尾流中用于谱分析的监测点坐标 y
尾流。

点	X坐标	Y坐标	Z坐标
1	3.0	1.0	0.0
2	0.1	0.144	0.1945
3	0.3	0.144	0.389
4	1.0	0.144	0.0
5	0.5	0.3	0.0

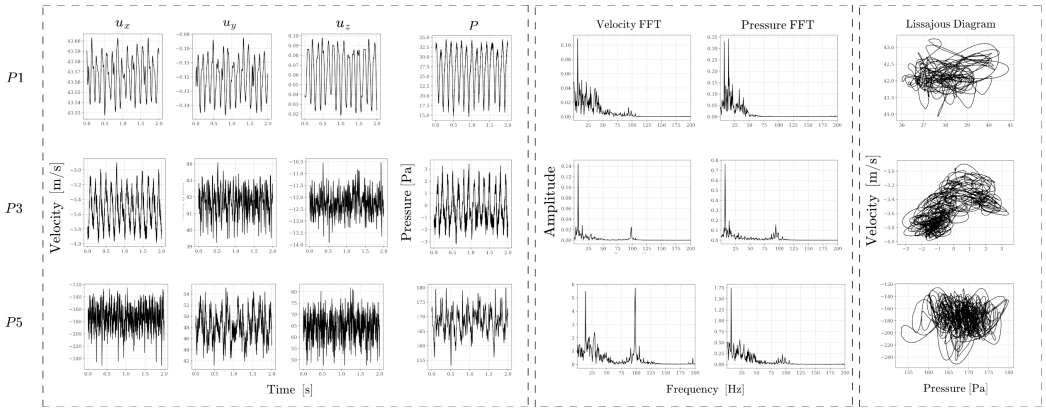


图6：Ahmed车身：选定监测点处速度和压力的代表性时域信号、功率谱（快速傅里叶变换）和相图。

对于充分发展湍流，惯性区标度通常与速度的 $E_u(f) \propto f^{-5/3}$ 以及在标准假设下压力的$E_p(f) \propto f^{-7/3}$相关。图7显示，平均频谱在有限频率范围内呈现出与这些斜率相符的特征。虽然本研究并不旨在针对多个长时间窗口（尤其是在最大网格规模下）进行全面的统计平稳性分析，但这些逐点谱诊断表明，该稳定化方法为大规模分离的外部空气动力学中的湍流解析模拟提供了适当的耗散行为。

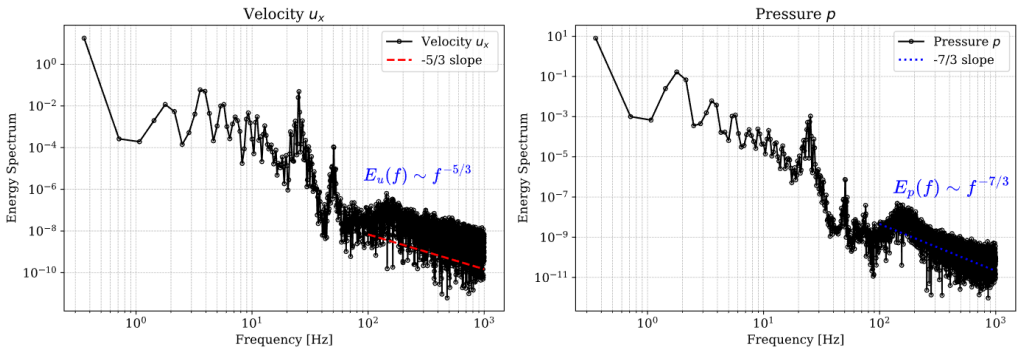


图7：Ahmed车身：速度（左）和压力（右）的平均尾流频谱 .
虚线参考线分别表示理论斜率 $-5/3$ 和 $-7/3$。

5.3.4. 动态亚尺度

图8展示了解析得到的速度场和压力场，以及动态速度亚尺度。对流分量 $\tilde{\mathbf{u}}_1$ （左下）由对流残差 $\rho\hat{\mathbf{u}}_h \cdot \nabla\mathbf{u}_h$计算得到，主要集中在近尾流区。另一方面，压力梯度子尺度 $\tilde{\mathbf{u}}_2$ （右下）用于补偿 ∇p_h 残差，从而确保采用等阶单元时的*inf-sup*稳定性。

我们可以看到， $\tilde{\mathbf{u}}_2$ 的幅值高于 $\tilde{\mathbf{u}}_1$, ，这符合外部空气动力学中的预期：压力梯度是动量平衡中的主导项。两个子尺度在尾流区均表现出显著活动，证实正交投影 $P_h^{\perp}$将稳定化限制在未解析尺度内，并保留宏观结构的能量。这些子尺度具有动态的 BDF2 特性，能够准确捕捉流动的瞬态特性，避免准静态模型中常见的涡脱落频率过度衰减。

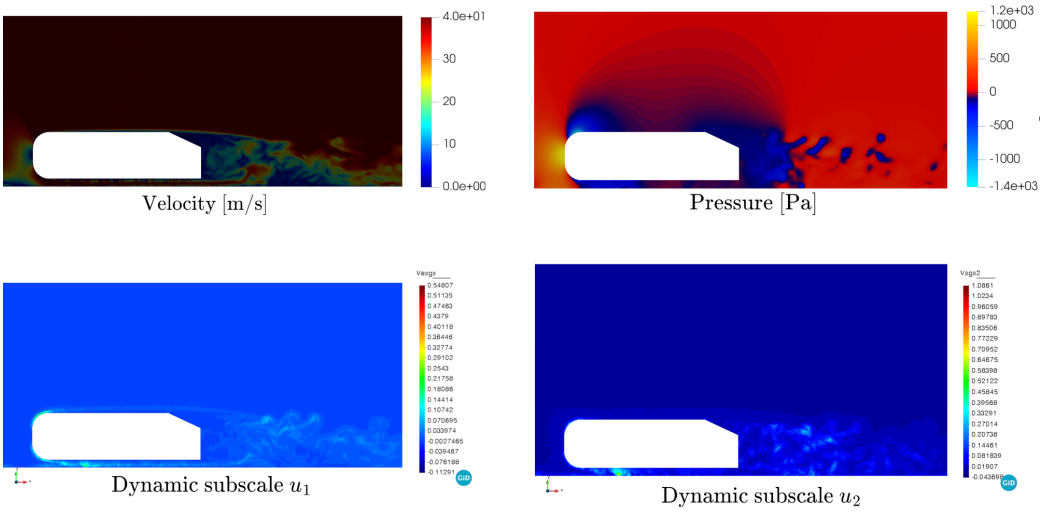


图 8：动态亚尺度

5.3.5. 相干结构可视化与尾流拓扑

为直观展示相干涡结构并阐明尾流组织结构，我们采用 Q判据，

$$Q = \frac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{\Omega}\|^2 - \|\boldsymbol{S}\|^2\right), \tag{33}$$

其中， $\boldsymbol{S}$ 和$\boldsymbol{\Omega}$ 分别是速度梯度张量的对称部分和反对称部分。正的 Q 表示旋转占主导而非应变占主导的区域，因此适合用于提取分离湍流尾流中的涡核。

图 9 展示了按速度大小着色的 Q 等值面。主导的尾流拓扑结构表现为分离剪切层的卷起，以及在下游延续数个车身长度的强流向涡结构，这与 C_D所对应的基底压力亏损一致。该可视化还突出了底部诱导结构和角涡，它们与主尾流相互作用，并促成回流区的三维特性。这些特征已知会影响钝体外流空气动力学中的尾流恢复和阻力，并为解析流场结构提供定性支持。

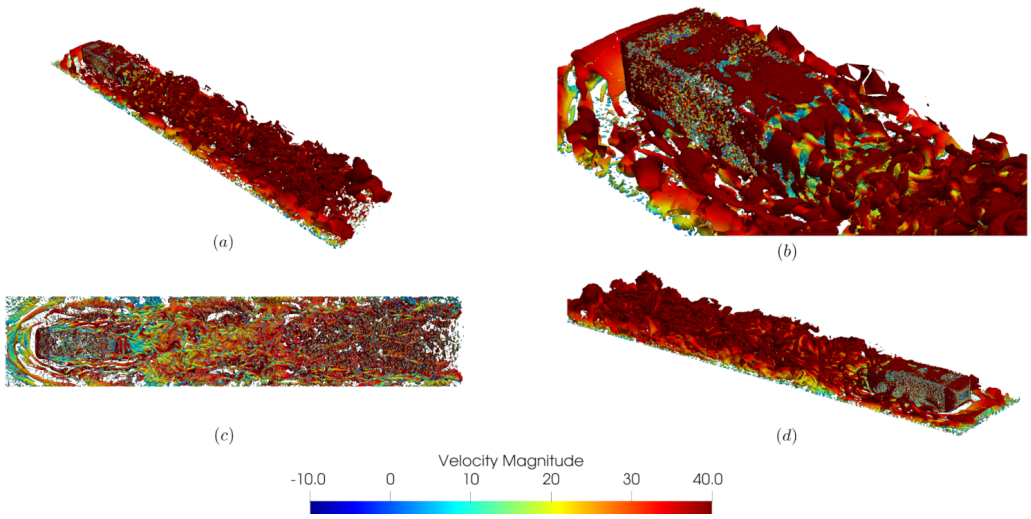
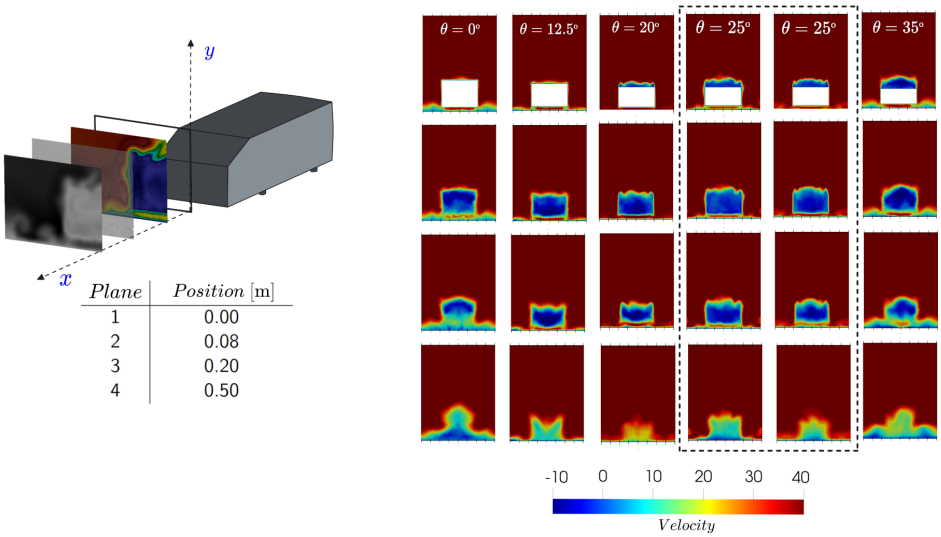


图 9：Ahmed车身：按速度大小着色的 Q 判据等值面（此处 $Q = 200$）y
。

最后，图 10 报告了不同倾斜角下车身下游横截面上的流向速度等值线。随着 θ 增加，流动从附着状态向大规模分离状态的演变十分明显：在临界角附近，回流区扩大，尾流亏损增强；而在更大的倾斜角下，尾流呈现出更加碎片化和三维化的特征。图 11 中的三维流线可视化进一步突出了主导的分离拓扑结构，包括下边缘附近 C 形涡的形成，以及尾流中主要涡结构的发展。这些场级结果补充了积分载荷比较，并支持以下结论：所提出的稳定化分步格式能够针对 Ahmed车体基准给出物理一致的湍流解析预测。



Plane	*Position* [m]
1	0.00
2	0.08
3	0.20
4	0.50

图 10：不同倾斜角下若干下游横截面的流向速度等值线 θ。

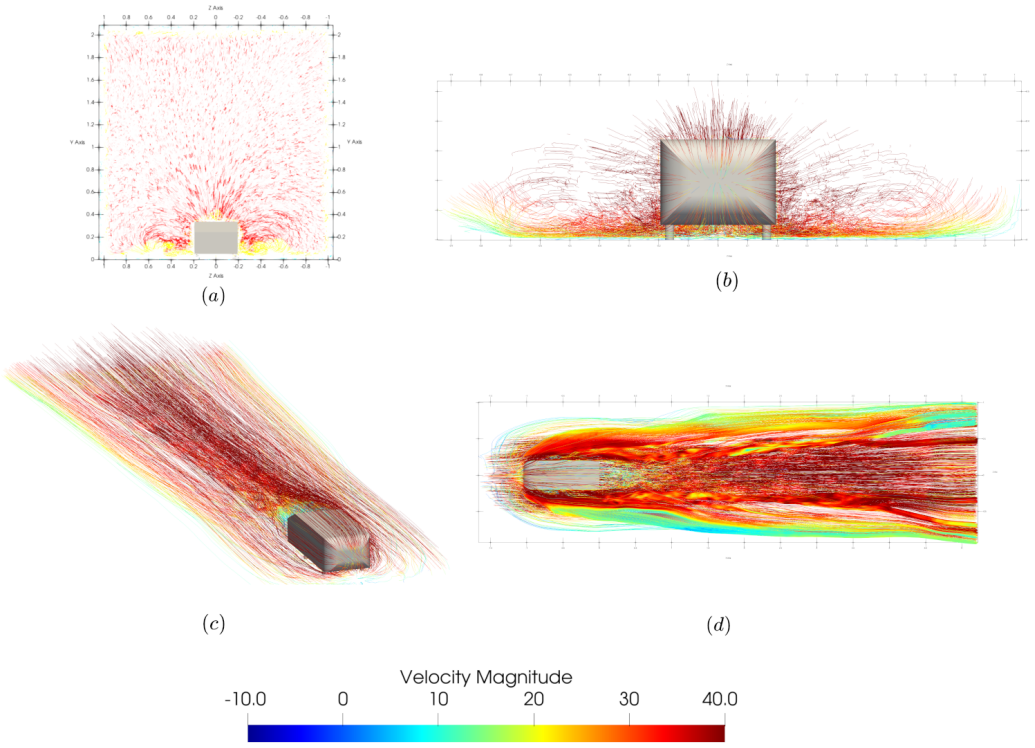


图 11：三维流线可视化，展示分离、剪切层
卷起和尾流组织结构。

r

6. 一级方程式应用

为了在真实且要求极高的外部空气动力学环境中进一步评估所提出的稳定化分步格式，我们考虑一个全尺寸开放式车轮一级方程式赛车几何。与Ahmed车身不同，该构型并非旨在作为由经过整合的公共参考数据库支持的基准验证案例。相反，它作为一个大规模应用，在多分量几何上考验该格式，其中空气动力性能取决于强烈的三维相互作用、地面效应机制以及以涡为主导的流动组织。

本案例的一个关键方面是，计算采用所提出的稳定化公式而不引入显式湍流模型来执行。因此，解析的非定常性及由此产生的频谱内容来自几何诱导的不稳定性以及稳定化离散。这通过证明纯稳定化不可压缩格式可以在具有复杂流动拓扑和实用网格尺寸的真实构型上推进，从而补充了面向基准的Ahmed车身分析。

仿真采用的自由来流速度为 $U_\infty = 56\,\mathrm{m/s}$（$201.6\ \mathrm{km/h}$）。雷诺数定义为 $\mathrm{Re} = \rho U_\infty L_{\mathrm{ref}}/\mu$，其中采用了具有代表性的后翼单元特征弦长 $L_{\mathrm{ref}} = 0.3\ \mathrm{m}$；根据本研究采用的流体属性，得到 $\mathrm{Re} \approx 1.13 \cdot 10^6$。CDF 仿真所用的全尺寸 CAD几何如图 12 所示。计算域为风洞式空间，沿流向延伸 $12L$，横向延伸 $3L$，垂向延伸 $2L$；其中 $L = 4.9\ \mathrm{m}$ 为车辆总长（图 13）。车辆置于静止的 地面上，轮胎建模为不旋转（固定）物体。边界条件包括入口处的均匀来流、出口处的伪牵引出流，以及车辆和地面表面的无滑移条件。未指定湍流来流脉动。

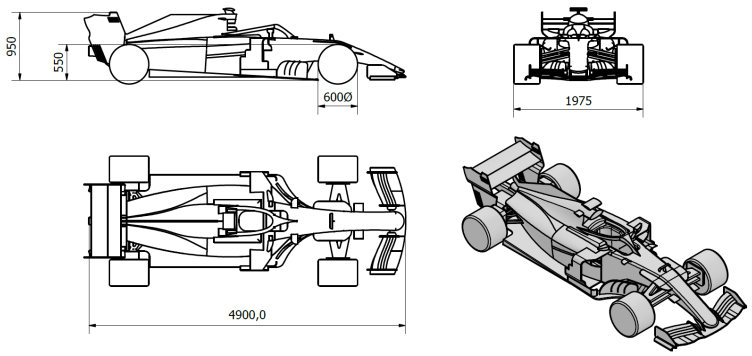


图12：本研究中所考虑的全尺寸一级方程式赛车构型的CAD几何。

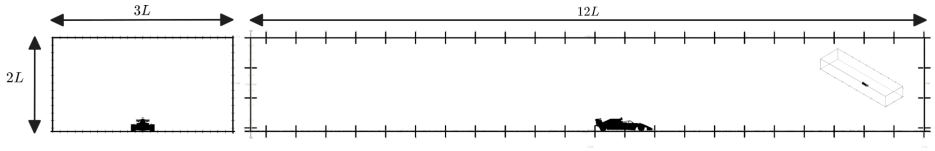


图13：一级方程式模拟的计算域（风洞式设置）。

网格与时间步长选择。 计算网格采用非结构化四面体单元构建，并在所有主要空气动力学部件附近进行强局部加密，包括前翼和后翼、底板、扩散器和侧箱（图 14）。加密区域针对薄剪切层和集中涡结构的起源与相互作用区域；远离车辆后，网格则平滑变粗，以控制计算成本，同时不影响近地面区域的尾流分辨率。采用单个高分辨率网格，包含约 3.87×10^7 个单元（表 4）。

时间步长通过经验选取，以平衡稳定性与主导非定常特征的时间分辨率；本例采用 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-6}$ s。

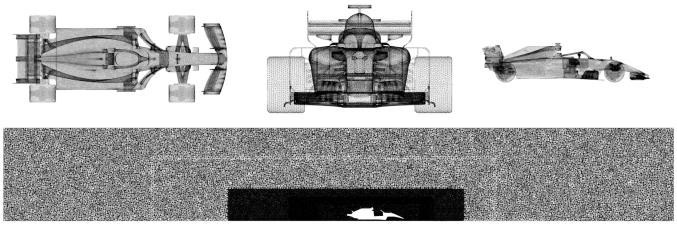


图14：一级方程式模拟的计算网格，突出显示了近体细化和尾流分辨率。

6.1. 数值结果

表 4：一级方程式模拟的网格特性和整体气动系数。

网格单元	L **[m]**		Re	C_D	C_L	C_L/C_D	Δt **[s]**
Fine	38,728,716	4.9	1.13×10^6	1.56	-4.69	-3.00	2.5×10^{-6}

整体气动系数。表 4 报告了阻力系数 C_D、升力系数 C_L（负值对应下压力）以及比值 C_L/C_D。这些系数根据在 $U_\infty = 56$ m/s 时评估的车辆表面总气动力，并采用 $A = 1.5$ m^2 的参考面积计算得出。相应的平均力为 $F_D = 4\,513$ N 和 $F_L = -13\,586$ N。鉴于该案例具有面向应用的性质，重点放在解析流场结构和内部一致性诊断（相干结构拓扑和谱）上，而不是与特定的公开参考数据集进行比较。

横截面尾流演化。图 15 展示了流动沿流向的发展过程，横向平面根据速度大小着色。近场呈现出多个相互作用的低速区域，这些区域与外露车轮及上游升力面产生的尾流有关。随着流动向下游发展，这些尾流结构逐渐汇合并重新组织，形成范围更广、三维特征更显著的尾流。再往下游，尾流表现出明显的垂直位移和横截面变形，这与地面效应构型中底部加速、扩散器诱导膨胀及后翼上洗的共同作用相一致。

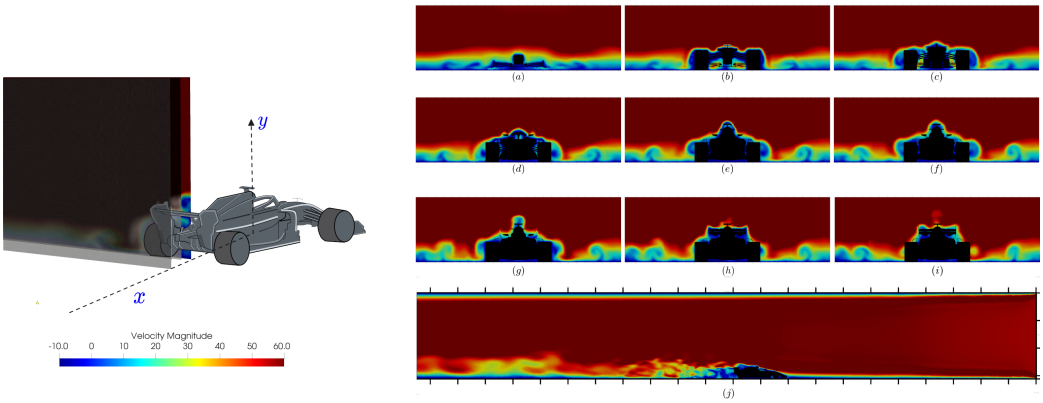


图 15：根据速度大小着色的横向切面上显示的尾流沿流向的演化。

表面压力分布。 图 16 中的表面压力系数等值线标示出了主要的承载区域。车头的驻点区域以及轮胎前表面可观察到高压区，而前翼和后翼的吸力面以及底盘沿线则形成了大范围的低压区。由此产生的压力场

与通过大尺度压力差产生下压力的现象一致，并为潜在的耦合分析提供了具有力学意义的载荷特征。

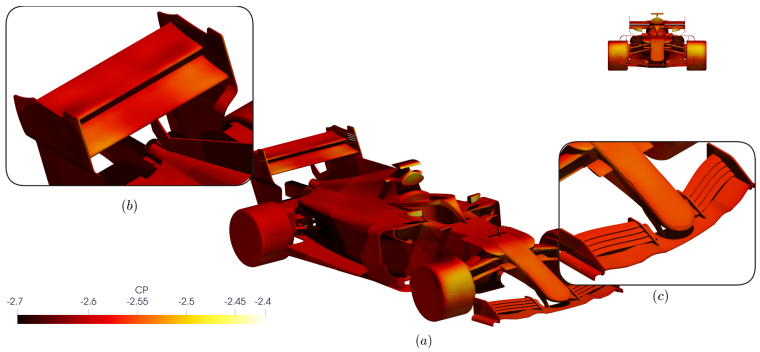


图16：一级方程式构型的表面压力系数（C_p）等值线。

相干涡结构（Q 准则）。图17展示了按速度大小着色的 Q 准则等值面。可视化结果揭示了由车轮尾流和多段式升力装置产生的相互作用涡结构。在车轮下游及沿车辆侧面可观察到细长的涡管，底盘和扩散器区域也呈现出明显的涡结构组织。由此形成的拓扑结构凸显了该构型中流动强烈的三维性和多尺度特征。

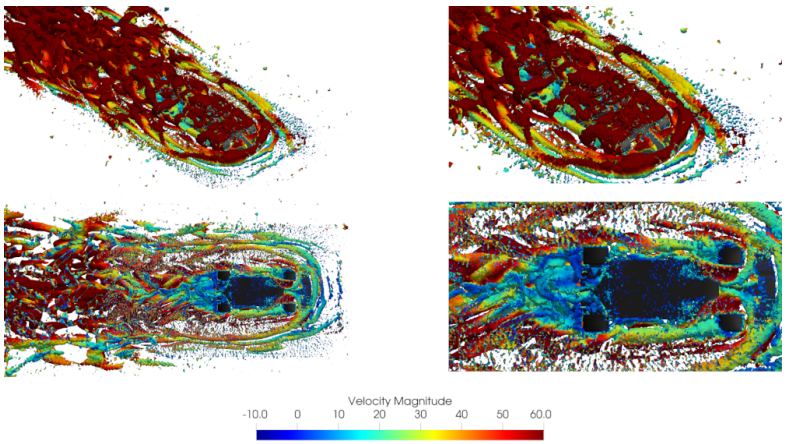


图17：F1赛车：按速度大小着色的 Q 准则等值面。

流线可视化。 流线视图通过展示整体输运路径，对Q-判据进行了补充。如图 18 所示，在前部附近，流线绕车轮区域横向偏转，并在

前部气动装置周围重新组织。沿着侧箱和上部车身，加速与曲率效应导致流线压缩，随后在下游发生扩张。在后部，流线显示车底区域与后部升力系统之间的相互作用，从而促成尾流偏转和恢复模式，这与地面效应空气动力学相一致。

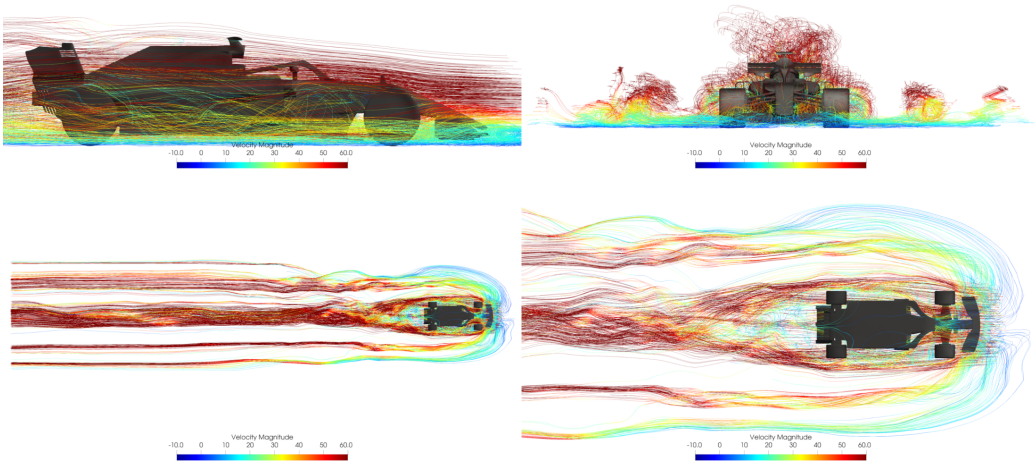


图18：一级方程式流动的三维流线可视化。

尾流非定常性和频谱特征. 为评估已解析流动中的尺度间行为，我们在近尾流和远尾流中设置了监测点。这些监测点在控制体内的精确坐标详见表5；这些位置经过策略性选择，以捕捉主要回流区内的动力学特征。

表5：F1模型中用于谱分析的监测点坐标。

点	X [米]	Y [米]	Z [米]
1	-2.5	0.25	0.1
2	-0.6	0.05	0.2
3	-4.0	0.3	0.15
4	-2.5	0.25	-0.1
5	-0.6	0.05	-0.2

图 19 给出了具有代表性的速度随时间变化的脉动。具体而言，某些信号中观测到的平均速度大小较低，对应于回流泡内部的位置；大尺度涡旋在此处生成并脱落。图 20 展示了速度和压力对应的能量谱密度。谱中呈现的频率范围与经典惯性子区斜率相符，即

$E_u(f) \propto f^{-5/3}$速度和 $E_p(f) \propto f^{-7/3}$压力。这些谱为该欠分辨率工况下已解析尾流动力学提供了后验一致性诊断。

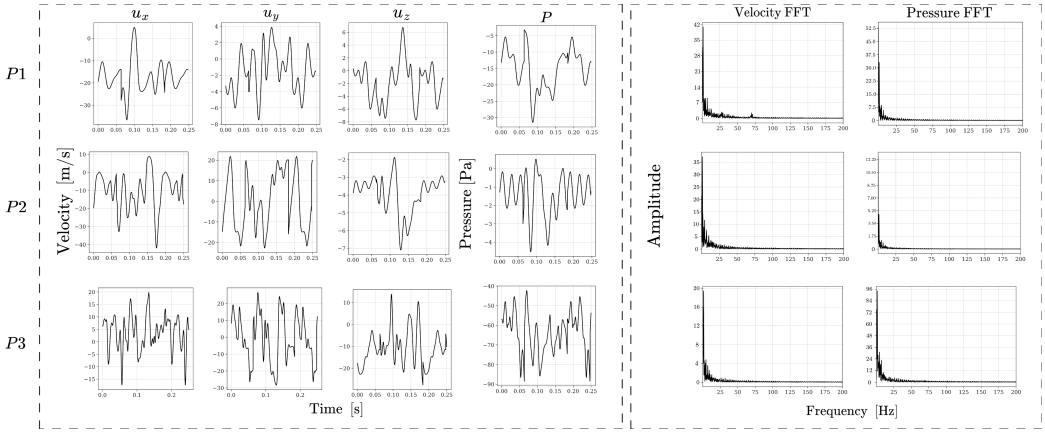


图 19：F1赛车：尾流监测点处具有代表性的速度脉动。

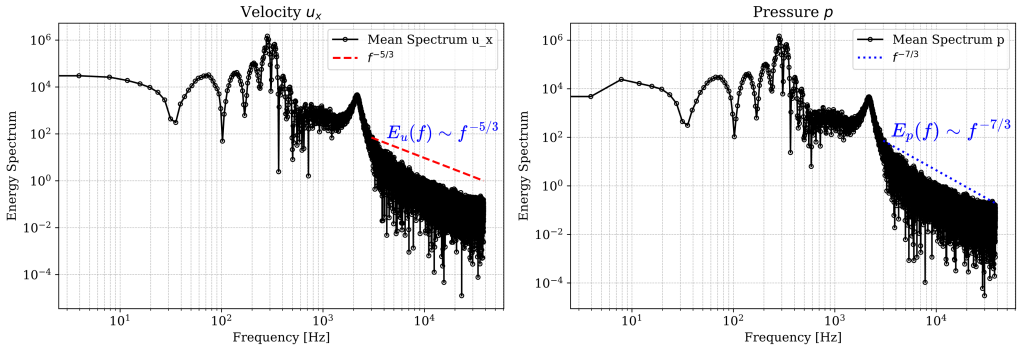


图 20：F1赛车：尾流监测点处速度（左）和压力（右）的能量频谱。虚线表示 $-5/3$ 和 $-7/3$ 斜率。

7. 结论

本研究提出并评估了一种逐项动态变分多尺度（VMS）稳定化方法，该方法针对增量压力修正分步框架进行了设计，适用于从层流到湍流状态的不可压缩流。该公式在全离散单体层面进行设计，随后通过修改现有算子块将其嵌入投影阶段（而非引入额外的速度–压力交叉耦合）。这样既保留了分步方法的计算组织结构，又通过正交动态子尺度引入了额外耗散。本研究得出的主要结论如下：

• 一种精简的、逐项构建的 VMS 启发式稳定化方法，结合正交投影和动态 子尺度，可以整合到增量压力修正方案中，而不改变其分阶段结构。采用分块形式时，稳定化项体现为：(i) 加入速度预测的动量侧修正；(ii) 加入压力修正（类泊松）阶段的压力侧对角增强；而亚尺度历史项仅作为额外的已知右端项贡献出现。这种局部化处理在大规模计算中保留了投影方法的高效性和模块化特征。

• 该方法支持在大型非结构四面体网格上采用等阶速度–压力插值，并且在与外部空气动力学相关的对流占优区域中仍能保持稳健性。正交的逐项构造形成了清晰的稳定化布局，使每项贡献都能对应到特定的算子块，从而可以有针对性地评估稳健性和耗散效应。

• 在 Re $= 7.68 \times 10^5$ 下的 Ahmed车体基准验证表明，所提出的稳定化分步格式能够捕捉大规模分离尾流动力学，并在多个后倾角下给出具有竞争力的积分载荷预测。 $\theta = 25^\circ$ 构型因可用文献广泛，被选作主要定量参照；该构型在中等网格（$\approx$ 10M 个单元）与细网格（$\approx$ 37 M 个单元）之间表现出显著的网格敏感性，凸显了这一基准对分辨率的要求。重要的是，该格式在所考察的所有网格级别上均保持数值稳定，并且随着网格加密，其阻力系数逐渐趋近于网格尺寸相近的湍流解析参考结果。

• 基于尾流监测信号的谱诊断为耗散行为提供了后验一致性指标：计算得到的速度谱和压力谱呈现出与惯性子区标度律相符的频率范围。这些谱与积分系数和流场可视化相辅相成，可作为大规模分离外流空气动力学计算中的实用指标。

• 此外，还在真实的全尺寸一级方程式赛车构型上验证了该方法的适用性，其速度为 $U_\infty = 56\text{m/s}$（201.6 千米/小时），雷诺数为 $\approx 1.13\times10^6$，采用单个包含约 4×10^7 个四面体单元的精细非结构网格。此案例并非用于对照整合后的公共数据库进行基准验证，而是用于考察该方法的稳健性

，对象具有多分量几何、强烈的三维相互作用、地面效应机制，以及以涡主导的流动组织结构。计算过程中未引入显式湍流模型，因此稳健性和耗散完全依赖所提出的稳定化公式，体现了该方法在实际相关构型中的多功能性。

- 从算法角度来看，通过压力子尺度发挥作用的可选梯度–散度项，提高了最具挑战性的配置（一级方程式）中的非线性鲁棒性。启用该项后，在现有网格和时间步长下，非线性迭代均能收敛；若不启用，迭代则往往趋于停滞，这表明在最具挑战性的设置中，额外的稳定化可能会有所助益。

- 稳定化参数的选择在实际应用规模下具有重要意义。具体而言，在 τ_2 的定义中采用 $c_3 = 24$ （不同于通常令 $c_3 = c_1$的选择），在所报告的测试案例中带来了最稳健的非线性表现，并改善了一级方程式计算的收敛性。在为一级方程式案例建立起收敛基线后，我们通过数值实验确定了这一选择，并在整个研究中予以保留。

未来工作可探索提高大型外部气动问题计算效率和谱保真度的扩展方法，包括网格自适应（h自适应或 r自适应），以便在分离区域和主要涡核处集中分辨率；采用高阶有限元；采用替代性的时间积分器（例如 BDF3 等高阶多步格式），以便在精度相当的情况下使用更大的时间步；以及改进非线性求解器（牛顿法或混合皮卡–牛顿策略，以及安德森加速等不动点加速方法）。作为次要改进，延长采样窗口并增加统计量（分量频谱、相关函数和积分能量收支）有助于加强对湍流的刻画；此外，计算所得载荷所提示的气动弹性/流固耦合等多物理场扩展，也是顺理成章的研究方向，适合在后续专项研究中深入探讨。

致谢

D. Escobar 感谢 ANID-Chile 通过奖学金项目 / MAGÍSTER-NACIONAL / 2023-22230392 提供的资助。A. Aguirre 感谢 Dirección de Investigación 提供的资助

智利圣地亚哥大学科学与技术研究局（Dicyt）通过项目
DICYT-052516AR-REG 提供支持。D. Pacheco 感谢德国联邦教育与研究部（BMBF）以及北莱茵-威斯特法伦州文化与科学部（MKW）在德国联邦政府和各州卓越战略框架下提供的资助。E. Castillo 感谢智利国家研究与发展署（ANID）通过项目 FONDECYT 1250287 提供的资助。

参考文献

[1] D Li、J Komperda、A Peyvan、ZGhiasi 和 FMashayek。基于可压缩平面自由剪切层流动的直接数值模拟数据评估湍流模型。《流体力学杂志》，931:A10，2022年。

[2]Mori Mani 和 Andrew J Dorgan。关于航空航天计算流体动力学技术现状的观点。《流体力学年评》，55(1):431–457，2023年。

[3]Matthew Aultman、Zhenyu Wang、Rodrigo Auza-Gutierrez 和 Lian Duan。用于预测简化及复杂汽车模型周围流动的 CFD 方法评估。《计算机与流体》，236:105297，2022年。ISSN 0045-7930。doi: https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2021.105297。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793021003856。[4] S. Shukla、S.N. Singh、S.S. Sinha 和 R. Vijayakumar。URANS、SAS 和分离涡模拟湍流建模在预测船舶大范围分离尾流特征方面的比较评估。《海洋工程》，229:108954，2021年。ISSN 0029-8018。doi: https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.108954。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801821003899。[5] Antonio Ghidoni、Edoardo Mantecca 和 Gianmaria Noventa。延迟额外大涡模拟模型在简化汽车模型空气动力学研究中的评估。《风工程与工业空气动力学杂志》，254:105881，2024年。ISSN 0167-6105。doi: https://doi.org/10.1016/j.jweia.2024.105881。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167610524002447。[6] Younes Bouhafid、Nicolas Bonne 和 Laurent Jacquin。飞机的雷诺平均纳维–斯托克斯/大涡模拟联合方法

直至耗散阶段的尾流。《航空航天科学与技术》，154: 109512，2024年。[7] Marek Jan Janocha、Muk Chen Ong 和 Guang Yin。对受流致振动作用的圆柱绕流进行大涡模拟和模态分解分析。《流体物理学》，34(4)，2022年。[8] Myunghwa Kim、Jonghwan Park 和 Haecheon Choi。基于神经网络亚格子尺度模型的圆柱绕流大涡模拟。《流体力学杂志》，984:A6，2024年。

[9] Bing Shen、Yangjin Yuan、Huan Zhou、Zheng Zhang、Tong Zhou、Xing Zheng 和 Qingshan Yang。对比评估大涡模拟和分离涡模拟在预测高层建筑周围空气动力学特性和流动特性方面的表现。《流体物理学》，37(9)，2025年。

[10] Ming Teng、Josep M Duró Diaz、Ernest Mestres、Jordi Muela Castro、Oriol Lehmkuhl 和 Ivette Rodriguez。城市粗糙度上的大气边界层：大涡模拟验证。《流体物理学》，37(6)，2025年。

[11]Dinesh A. Shetty、Travis C. Fisher、Aditya R. Chunekar 和 Steven H. Frankel。全非均匀湍流的高阶不可压缩大涡模拟。《计算物理学杂志》，229(23):8802–8822，2010年。ISSN 0021-9991。doi: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.08.011。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999110004481。

[12]O. Lehmkuhl、G. Houzeaux、H. Owen、G. Chrysokentis 和 I. Rodriguez。《用于湍流尺度解析模拟的低耗散有限元格式》。计算物理学杂志，390：51–65，2019年。ISSN 0021-9991。doi：https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.04.004。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999119302372。

[13]Sajad Mozaffari、Shang-Gui Cai、Jerome Jacob 和 Pierre Sagaut。基于格子玻尔兹曼 $k-\omega$ SST 的湍流混合雷诺平均纳维–斯托克斯/大涡模拟。《计算物理学杂志》，514:113269，2024年。ISSN0021-9991。doi: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2024.113269。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999124005175。[14] Arjun Ajay、Jagdeep Singh、Sebastiano Stipa、Pierre Bénard 和 Joshua Brinkerhoff。广义

曲线坐标下非均匀湍流的大涡模拟混合亚网格尺度模型。《计算物理学杂志》，547:114554，2026年。ISSN0021-9991。doi: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2025.114554。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999125008368。

[15] L.G. Margolin和W.J. Rider。隐式湍流建模的理论依据。《国际流体数值方法杂志》，39：821–841，2002年。

[16] L.G. Margolin、W.J. Rider和F.F. Grinstein。利用隐式大涡模拟对湍流进行建模。《湍流杂志》，7：N15，2006年。ISSN 1468-5248。

[17]Naveed Ahmed、Tomás Chacón Rebollo、Volker John和Samuele Rubino。用于模拟不可压缩湍流的变分多尺度方法综述。《计算工程方法档案》，24：115–164，2017。ISSN 0377-0257。doi：https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2019.02.005。URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037702571830137X。

[18] N. Fehn、M. Kronbichler 和 G. Lube。从反常耗散、欧拉奇异性到湍流稳定化有限元方法。《流动、湍流与燃烧》，115:347–388，2025年。

[19] Oriol Colomés、Santiago Badia、Ramon Codina 和 Javier Principe。用于不可压缩湍流大涡模拟的变分多尺度模型评估。《计算力学与工程方法》，285:32–63，2015年。ISSN 0045-7825。doi：https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.10.041。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782514004113。

[20]U. Rasthofer 和 V. Gravemeier。用于湍流大涡模拟的变分多尺度方法最新进展。《计算方法工程档案》，25(3):647–690，2018年。ISSN 1886-1784。doi：10.1007/s11831-017-9209-4。URL https://doi.org/10.1007/s11831-017-9209-4。

[21]Volker Gravemeier、Michael W. Gee、Martin Kronbichler 和 Wolfgang A. Wall。用于湍流大涡模拟的代数变分多尺度多重网格方法。《计算力学与工程方法》，199(13):853–864，2010年。ISSN 0045-7825。doi：https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.05.017。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782509002059。大涡模拟湍流建模。

[22]G. Osses、E. Castillo 和 N.O. Moraga。采用非残差动态VMS公式对层流和混沌自然对流流动进行数值建模。《计算力学与工程方法》，386:114099，2021。ISSN 0045-7825。doi：https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.114099。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782521004308。

[23]Naveed Ahmed 和 Volker John。用于模拟不可压缩湍流的两类变分多尺度方法评估。《计算力学与工程方法》，365:112997，2020年。ISSN 0045-7825。doi：https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.112997。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578252030181X。[24]Aparna Bansal、Nicolás A Barnafi 和 Dwijendra Narain Pandey。用于具有滑移边界条件的纳维–斯托克斯方程的 Nitsche方法：收敛性分析与 VMS-LES稳定化。*ESAIM*：数学建模与数值分析，58(5):2079–2115，2024年。[25]Petr Sváček。利用变分多尺度方法对流固相互作用问题进行数值模拟。《计算与应用数学杂志》，427:115125，2023。ISSN 0377-0427。doi：https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115125。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042723000699。[26]M Ravensbergen、Tore Andreas Helgedagsrud、Yuri Bazilevs 和 Artem Korobenko。复杂环境地形上大气湍流的变分多尺度框架。《计算力学与工程方法》，368:113182，2020年。[27]Erika Temellini、Nicola Ferro、Giovanni Stabile、Enrique Delgado Ávila、Tomás Chacón Rebollo 和 Simona Perotto。用于高雷诺数流动 VMS-Smagorinsky建模的时空网格自适应。《计算物理学杂志》，537:114123，2025年。ISSN 0021-9991。doi：https://doi.org/10.1016/j.jcp.2025.114123。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999125004061。[28]Ramon Codina。有限元方法中通过正交子尺度稳定不可压缩性和对流。《计算力学与工程方法》，190(13):1579–1599，2000。ISSN 0045-7825。doi：https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00254-1。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782500002541。

[29] R. Codina、J. Principe、O. Guasch 和 S. Badia。稳定有限元近似中不可压缩流问题的时间依赖子尺度。《计算力学与工程方法》，196(21-24):2413–2430，2007年。

[30] S. Badia 和 R. Codina. 关于瞬态斯托克斯问题的多尺度方法：动态子尺度与各向异性时空离散。《应用数学与计算》，207(2):415–433，2009年。

[31]Javier Principe、Ramon Codina 和 Florian Henke。不可压缩流动的变分多尺度方法的耗散结构。《计算力学与工程方法》，199(13):791–801，2010年。ISSN 0045-7825。doi：https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.09.007。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782508003265。大涡模拟湍流建模。[32]Oriol Guasch 和 Ramon Codina。湍流流动有限元大涡模拟中正交亚网格尺度稳定化项的统计行为。《计算力学与工程方法》，261-262:154–166，2013年。ISSN 0045-7825。doi：https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.04.006。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782513001047。[33] E. Castillo 和 R. Codina。利用正交亚网格尺度的不可压缩纳维–斯托克斯问题动态逐项稳定有限元公式。《计算力学与工程方法》，349:701–721，2019年。ISSN 0045-7825。doi：https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.02.041。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782519301124。[34] A. González、E. Castillo 和 M.A. Cruchaga。不可压缩对流流动问题的非残差正交逐项稳定有限元公式的数值验证。《计算机与应用数学》，80(5):1009–1028，2020年。ISSN 0898-1221。doi：https://doi.org/10.1016/j.camwa.2020.05.025。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122120302479。[35] Linfeng Chen、Steven J. Hulshoff 和 Yuhong Dong。基于变分多尺度方法的不可压缩湍流中基于残差的大涡模拟的湍流动能耗散分析。《计算力学与工程方法》，388:114280，2022年。

ISSN 0045-7825。doi：https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.114280。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782521005831。

[36]E. Amani、A. Ahmadpour 和 M.J. Aghajari。湍流非牛顿流动的动态亚格子大涡模拟模型：Burgers湍流的先验与后验分析。非牛顿流体力学杂志，295:104615，2021。ISSN 0377-0257。doi：https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2021.104615。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377025721001166。

[37]A. González、R.C. Cabrales 和 E. Castillo。不可压缩幂律流体中采用基于残差和非残差的稳定化变分多尺度方法的数值研究。《计算力学与工程方法》，400：115586，2022年。ISSN 0045-7825。doi：https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115586。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782522005576。[38] Sarah Katz、Alfonso Caiazzo 和 Volker John。黏度建模对主动脉血流模拟的影响。《计算与应用数学杂志》，425：115036，2023年。ISSN 0377-0427。doi：https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.115036。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042722006343。[39] S. R. Ahmed、G. Ramm 和 G. Faltin。时均地面车辆尾流的一些显著特征。载于*SAE*技术论文，1984年。doi：10.4271/840300。[40] D. E. Aljure、O. Lehmkuhl、I. Rodríguez 和 A. Oliva。简化汽车模型周围的流动与湍流结构。《计算机与流体》，96：122–135，2014年。doi：10.1016/j.compfluid.2014.03.013。[41]Eric Serre、Matthieu Minguez、Richard Pasquetti、Emmanuel Guilmineau、Gan Bo Deng、Michael Kornhaas、Michael Schäfer、Jochen Fröhlich、Christof Hinterberger 和 Wolfgang Rodi。关于Ahmed车身周围湍流的模拟：LES和分离涡模拟的法德合作评估。《计算机与流体》，78：10–23，2013年。ISSN 0045-7930。doi：https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2011.05.017。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793011001885。湍流气动声学与燃烧的LES。[42] K Liu、BF Zhang、YC Zhang 和 Y Zhou。低阻Ahmed车体周围的流动结构。《流体力学杂志》，913：A21，2021年。

[43]D Burton、S Wang、D Tudball Smith、HN Scott、TN Crouch 和 MC Thompson。背景湍流对Ahmed 车体尾流双稳态的影响。《流体力学杂志》，926：R1，2021年。[44] Amir Sagharichi 和 Mark Francis Tachie。自由来流湍流强度对高阻力Ahmed车体周围流动动力学和涡结构的影响。《流体物理学》，37（7），2025年。[45] Shang-Gui Cai、Sajad Mozaffari、Jérôme Jacob 和 Pierre Sagaut。将基于浸入边界的湍流壁面建模应用于Ahmed车体空气动力学。《流体物理学》，34（9），2022年。[46]Horacio J. Aguerre、Juan M. Gimenez、Francisco Escribano 和 Norberto M. Nigro。运动中的Ahmed车体的数值模拟空气动力学研究。《风工程与工业空气动力学杂志》，245：105635，2024年。ISSN 0167-6105。doi：https://doi.org/10.1016/j.jweia.2023.105635。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167610523003379。[47]国际汽车联合会。2025年一级方程式技术法规（第01版）。技术报告，国际汽车联合会，2024年。URL https://www.fia.com/。完整技术法规的公众咨询。

[48]Filipe F. Buscariolo、Julien Hoessler、David Moxey、Ayad Jassim、Kevin Gouder、Jeremy Basley、Yushi Murai、Gustavo R.S. Assi 和 Spencer J. Sherwin。一级方程式前翼绕流的谱/hp有限元模拟：与实验对比验证。《风工程与工业空气动力学杂志》，221:104832，2022年。ISSN 0167-6105。doi：https://doi.org/10.1016/j.jweia.2021.104832。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016761052100307X。

[49] Gerasimos Ntoukas、Gonzalo Rubio、Oscar Marino、Alexandra Liosi、Francesco Bottone、Julien Hoessler 和 Esteban Ferrer。采用高阶间断伽辽金求解器对显式与隐式大涡模拟进行比较研究：应用于一级方程式前翼。《工程成果》，25:104425，2025年。ISSN 2590-1230。doi：https://doi.org/10.1016/j.rineng.2025.104425。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2590123025005043。

[50] L. Röhe 和 G. Lube。《用于大涡模拟的变分多尺度方法分析及其在均匀各向同性湍流中的应用》。《计算力学与工程方法》，199：2331–2342，2010年。

[51] J.L. Guermond、P. Minev 和 Jie Shen。不可压缩流投影方法概述。计算方法、应用力学与工程，195(44-47)：6011–6045，2006年。[52] F Guerrero、E Castillo、F Galarce 和 DRQ Pacheco。用于广义牛顿流的时空高阶动态非线性变分多尺度方法。《非线性科学与数值模拟通讯》，140：108368，2025年。[53]V. John。不可压缩流问题的有限元方法。施普林格，巴塞尔，2016年。

[54] Y. He 和 M. Olshanskii。奥辛问题的梯度-散度稳定的等阶有限元离散化的预条件子。《工业与应用数学学会科学计算杂志》，47:A1486–A1506，2025年。ISSN 1064- 8275。doi: 10.1137/24M1675849。

[55]Ramon Codina。不可压缩流分步有限元方法中的压力稳定性。《计算物理学杂志》，170(1):112–140，2001年。ISSN 0021- 9991。doi: https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6725。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999101967257。

[56] Ramon Codina。关于对流-扩散方程稳定化有限元方法的hp收敛。《*SeMA*期刊》，75(4):591–606，2018年。

[57]Hauke Gravenkamp、Ramon Codina 和 Javier Principe。采用正交子网格尺度对分散多相流进行建模的稳定化有限元方法。《计算物理学杂志》，501:112754，2024年。ISSN 0021- 9991。doi: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2024.112754。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999124000032。

[58]Emanuel Guilmineau、Ganbo Deng、Patrick Queutey 和 Michel Visonneau。用于模拟绕 Ahmed车身流动的混合LES公式评估。《计算机与流体》，176：171–176，2018年。doi：10.1016/j.compfluid.2018.06.012。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S00457930173000 51.

[59]E. Serre、M. Minguez、R. Pasquetti、E. Guillen、O. Labbé、A. Belanger 和 V. Brunet。关于模拟 Ahmed车身周围的湍流：法国与德国对大涡模拟和分离涡模拟的联合评估。《计算机与流体》，78：

10–23，2013年。doi：10.1016/j.compfluid.2011.05.017。网址：
https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0045793011001885。

[60]O. Lehmkuhl、G. Houzeaux、H. Owen、G. Chrysokentis 和 I. Ro- driguez。用于湍流尺度解析模拟的低耗散有限元格式。《计算物理学杂志》，390：51–65，2019年。doi：10.1016/j.jcp.2019.04.004。URL
https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0021999119302372。