一般网络中异质交通流的基于路径的边际成本

JiachaoLiu[a] 和 Sean Qian[a,b,*]

[a]卡内基梅隆大学土木与环境工程系，美国宾夕法尼亚州匹兹堡[b]卡内基梅隆大学海因茨学院，美国宾夕法尼亚州匹兹堡。

arXiv:2602.05565v1 [cs.CE] 5 Feb 2026

关键词：动态交通分配 系统最优 路径边际成本 异质交通流 次梯度

路径边际成本（PMC）是求解基于路径的系统最优动态交通分配（SO-DTA）、动态起讫点需求估计（DODE）和网络韧性分析的重要组成部分。然而，在异质交通流条件下准确评估PMC面临重大挑战。以往研究通常聚焦于单一车辆类别的同质交通流，未能充分处理异质交通流之间的交互作用及由此产生的计算问题。本研究提出了一种新颖而简单的方法，用于近似评估复杂异质交通流条件下的PMC。该方法将PMC分解为类内项和类间项，并采用根据异质路段动态推导出的转换因子，明确建模车辆类别之间复杂的关系。此外，该方法还考虑了混合交通流接近系统最优条件时出现的不可微问题。我们在一个具有合成需求的小型走廊网络，以及一个使用现实世界数据校准需求的大规模网络上测试了所提出的方法。结果表明，该方法在求解双类别系统最优动态交通分配问题时表现出更优性能，能够降低总出行成本，并捕捉系统最优状态下的多类别流量竞争。

1 引言

对于一般网络，基于路径的边际成本（PMC）衡量广义路径出行成本相对于类别特定路径流或路段流量的增量变化。它是许多网络应用的关键。例如，它衡量网络流量中出行时间（广义成本的一种具体实现）的稳定性和可靠性。它还有助于推导关于路径/路段

* 通讯作者。电子邮箱：seanqian@cmu.edu。

流量的梯度，这对于估计网络中的路径/路段流量至关重要（例如，在动态起讫点估计问题中）。基于路径的边际成本 notoriously 难以求解，因为网络流量到系统成本的映射是非光滑的，甚至可能不连续；这取决于排队模型以及网络环境中流量模型或基于智能体的模型的选择。

PMC 的另一项重要应用是求解系统最优。系统最优动态交通分配（SO-DTA）旨在根据起讫点（O-D）出行需求，求解网络中随时间变化的交通流量，使总广义系统成本最小化。SO-DTA 的解通常用作交通系统管理的基准，数十年来一直受到广泛研究。SO-DTA 的一种可能建模方法是基于路段的，其基本变量是随时间变化的路段流量（Merchant 和 Nemhauser，1978a,b；Carey，1987）。然而，基于路段的 SO-DTA 存在一些问题，例如非凸性（Carey，1992；Merchant 和 Nemhauser，1978a,b）、车辆滞留（Ziliaskopoulos，2000；Han 等人，2011；Zhu 和 Ukkusuri，2013），以及可能违反先入先出（FIFO）原则（Carey，1992）。近期有研究致力于解决这些挑战，但由于非凸性高且维度高，基于路段的公式化在大型网络应用中通常难以进行数学求解（Long 等人，2018；Long 和 Szeto，2019）。另一种 SO-DTA 建模方法是基于路径流量（Ghali 和 Smith，1995；Peeta 和 Mahnaassani，1995；Lo，1999；Ukkusuri 等人，2012）。基于路径的公式化具有线性约束，但其总出行成本目标函数通常高度非线性，这是因为出行成本是通过网络流动态模拟计算得出的。基于路径的公式化可以转化为变分不等式问题（VIP），而求解 VIP 公式化的算法需要评估 PMC（Shen 等人，2007；Qian 等人，2012）；最终的系统最优（SO）状态应确保所有路径和出发时间的 PMC 相等。

PMC 可通过动态网络加载（DNL）过程进行解析计算；由于 DNL 模型的复杂性，无法得到闭式解。现有方法通常基于这样一个隐含假设：总出行成本关于路径流在任意时刻均可微，并通过追踪 DNL 中的正向流量扰动来计算 PMC（Shen 等人，2007；Qian 和 Zhang，2011；Qian 等人，2012）。然而，Zhang 和 Qian（2020）已证明，PMC 不可微，尤其是在最优点处，因此应使用次梯度。另一个问题来自 DNL 中的多类别建模，其中存在多个车辆类别（即小汽车、卡车、公交车等），代表交通系统中的不同交通方式。这些车辆类别具有不同的交通流特性，并在多类别 DNL 中相互影响（Qian 等人，2017）；在瓶颈模型中，异质性假设有时会影响均衡解的存在性和唯一性（Ramadurai 等人，2010）。据我们所知，现有研究在计算 PMC 以求解多类别基于路径的系统最优动态交通分配时，均未考虑这种异质交通交互。Ma 等人（2020）和 Liu 与 Qian（2024）基于两种车辆类别各自的累积曲线计算了小汽车和卡车的 PMC，并未考虑交互。与此同时，若考虑多类别交互，用于判断 PMC 是否不可微的条件需要与异质交通动态相兼容。

为应对这些挑战，本研究提出了一种分析方法，用于近似计算多类别动态网络加载过程中的路径边际成本，同时考虑不同车辆类别之间的相互作用以及不可微问题。主要贡献可概括如下：(1) 本研究提出了一种新方法，用于在异质多类别动态网络加载背景下评估路径边际成本（PMC）。该方法通过对 PMC 分解后的类间项建模，捕捉多个车辆类别之间的复杂相互作用。(2) 本研究解决了多类别 PMC 评估中固有的不可微问题，并建立了与异质交通流理论的理论联系。(3) 所提出的 PMC 评估方法有助于提升求解多类别 SO-DTA 的性

能。此外，该方法还有望用于利用探针速度数据校准网络流量和旅行时间，以及开展网络韧性分析。

本文其余部分安排如下。第2节介绍系统最优问题的表述，并回顾 Qian 等（2017）提出的多类别动态网络装载模型，该模型贯穿本研究。第3节介绍一种通过将双类别交通的PMC分解为类内项和类间项来近似PMC的方法。我们还介绍基于路径边际成本求解系统最优动态交通分配的标准逐次平均法（MSA）算法。第4节比较并讨论了两个不同规模网络上的实验结果。第5节总结本研究的主要发现，并提出未来的研究方向。

2 预备知识

2.1 解释多类别系统最优中的PMC

考虑一个一般的交通网络，记为 $G=(N, A)$，它由路段集合 A 和节点集合 N 组成。网络中有 $|I|$ 类旅客，分别由不同的车辆类别 $i \in I$ 表示。$R \subset N$ 和 $S \subset N$ 分别是起点和终点节点集合。对于一个 OD对 rs，其中 $r \in R$ 且 $s \in S$，类别 i 的路径集记为 P_i^{rs}。令 $T_a=[0,T]$ 为分配时段，且网络在时刻 $t=0$ 初始化为空。$f_{rsp,i}(t)$ 表示类别 $i \in I$ 的路径流：在时刻 $t \in T_a$ 从起点节点 $r \in R$ 出发，选择路径 $p \in P_i^{rs}$ 并前往终点 $s \in S$。路径流 $f_{p,i}^{rs}(t)$ 是出发时刻 t 的函数，每个路径流对应一个出行成本，记为 $c_{p,i}^{rs}(t)$，它同样是时刻 t 的函数。在下列方程中，$f_{rsp,i}(t)$ 和 $f_{rsp,t,i}$ 可以互换使用，二者均表示时变路径流。其他带有时间下标的变量也遵循相同规则。通常，出行成本由两部分组成：与实际旅行时间相关的成本（时间价值 α 乘以路径行驶时间 $w_{p,i}^{rs}(t)$）和时刻表延误惩罚，如方程1所示。时刻表延误惩罚是一个函数 sd(·)，取决于实际到达时间 $t+w_{p,i}^{rs}(t)$ 与期望到达时间 $t_{rs,i}^{*}$ 之间的差值。我们用 Δt 表示时间差 $\Delta t=t+w_{p,i}^{rs}(t)-t_{rs,i}^{*}$。旅行时间 $w_{p,i}^{rs}(t)$ 可通过所用动态网络加载过程对应的任意延误算子获得。

$$c_{p,i}^{rs}(t)=\alpha w_{p,i}^{rs}(t)+f(\Delta t) \tag{1}$$

时刻表延误惩罚函数选为分段线性函数，具体取决于 Δt 和预先定义的准点阈值 δ，如下所示

$$\mathrm{sd}(\Delta t)=\begin{cases}\beta(-\Delta t-\delta) & \Delta t \in(-\infty,\delta) \\ 0 & \Delta t \in[-\delta,\delta] \\ \gamma(\Delta t-\delta) & \Delta t \in(\delta,+\infty)\end{cases} \tag{2}$$

其中，β 和 γ 分别为提前到达和延迟到达的惩罚系数。函数 sd(·) 也可以取决于 OD对 *rs*、路径 *p* 和车辆类别*i*，可表示为 $\mathrm{sd}_{p,i}^{rs}(\cdot)$。惩罚系数和准点阈值也适用类似规则。

同时考虑出发时间和路径选择的系统最优动态交通分配可表述为

$$\begin{aligned}\min_{\left\{f_{p,i}^{rs}(t)\right\}_{r,s,p,t,i}} \quad & \mathbf{TC}\left(\left\{f_{p,i}^{rs}(t)\right\}_{r,s,p,t,i}\right)=\sum_{rs\in RS}\sum_{i\in I}\sum_{p\in P_i^{rs}}\int_0^T f_{p,i}^{rs}(t)c_{p,i}^{rs}(t)dt \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{p\in P_i^{rs}}\int_0^T f_{p,i}^{rs}(t)dt=q_i^{rs}, \quad \forall r,s,i \\ & f_{p,i}^{rs}(t)\geq 0, \quad \forall r,s,p,t\end{aligned} \tag{3}$$

其中，目标函数是最小化系统中所有出行者的总出行成本，两个约束分别是流守恒和非负条件。

这里我们介绍路径边际成本以及相关的链路边际成本概念，并将用它们重新表述系统最优动态交通分配问题。这些概念此前由 Shen 等人（2007）；Qian 和 Zhang（2011）；Qian 等人（2012）；Zhang 和 Qian（2020）讨论过。

定义 1. 路径边际成本（***PMC***）路径边际成本记为 $PMC_{p,\,t,\,i}^{rs}$，其定义为：在 *OD* 对 *rs* 之间的路径 p 上，于时刻 t 出发的 i 类流量发生单位扰动所引起的系统总成本变化。

定义 2. 链路边际成本（***LMC***）链路边际成本记为 $LMC_{a,\,t,\,i}^{rs}$，其定义为：在 *OD* 对 *rs* 之间的路径 p 上，于时刻 t 出发的 i 类流量发生单位扰动所引起的路段 a 出行成本变化。

根据 Shen 等人（2007），PMC 与 LMC 具有以下关系。

$$\mathrm{PMC}_{p,t,i}^{rs}(\mathbf{f})=\mathrm{sd}_{p,i}^{rs}(t)+\sum_{a\in A}\sum_{k}\frac{\partial\left(u_{a,i}(k)\omega_{a,i}(k,\mathbf{f})\right)}{\partial f_{p,t,i}^{rs}}=\mathrm{sd}_{p,i}^{rs}(t)+\sum_{a\in A_p}\mathrm{LMC}_{a,t,i}^{rs} \tag{4}$$

其中，$u_{a,i}(k)$ 表示车辆类别 i 在时间 k进入路段 a 的流入流量。由于我们使用单位扰动流来近似计算路径边际成本和 LMC，因此将 $u_{a,i}(k)$ 设为 1。$\omega_{a,i}(k,\mathbf{f})$ 表示取决于整体网络流模式 $\mathbf{f}$ 和到达时间 k的路段出行时间。k 表示连续路段 $a\ \in A_P$上的到达时间，其中 A_P 是路径 p上连续路段的编号。

命题 1. 基于路径的系统最优动态交通分配可以转化为一个等价的变分不等式问题（*VIP*），即求解 $\mathbf{f}^*=\{\mathbf{f}^{\mathbf{rs},*}{}_{\mathbf{p},\mathbf{t},\mathbf{i}}\}_{\mathbf{rs},\mathbf{p},\mathbf{t},\mathbf{i}}\in\Omega$，使得

$$\sum_{rs\in RS}\sum_{i\in I}\sum_{p\in P_i^{rs}}\int_0^T PMC_{p,t,i}^{rs}(\boldsymbol{f}^*)\left(f_{p,t,i}^{rs}-f_{p,t,i}^{rs,*}\right)dt\geq 0,\ \forall\mathbf{f}\in\Omega \tag{5}$$

其中，*PMC* 在不失一般性的情况下可表示为以下次梯度形式

$$PMC_{p,t,i}^{rs}(\boldsymbol{f})\in\left[PMC_{p,t,i}^{rs}(\boldsymbol{f})^-,PMC_{p,t,i}^{rs}(\boldsymbol{f})^+\right]=\left[\lim_{x\uparrow f_{p,t,i}^{rs}}\frac{\mathbf{TC}(\tilde{\mathbf{f}})-\mathbf{TC}(\mathbf{f})}{x-f_{p,t,i}^{rs}},\lim_{x\downarrow f_{p,t,i}^{rs}}\frac{\mathbf{TC}(\tilde{\mathbf{f}})-\mathbf{TC}(\mathbf{f})}{x-f_{p,t,i}^{rs}}\right] \tag{6}$$

PMC 计算中的不可微问题出现在 $\mathrm{PMC}_{p,t,i}^{rs}(\mathbf{f})^-\neq\mathrm{PMC}_{p,t,i}^{rs}(\mathbf{f})^+$ 时，这表明增加一个单位的路径流和移除一个单位的路径流，对系统广义成本的影响幅度不同（Zhang 和 Qian，2020）。

在本研究中，我们采用基于离散时间间隔的数值求解算法求解系统最优动态交通分配，并将连续的变分不等式问题改写为离散形式：

$$\text{Find } \mathbf{f}^*\in\Omega \text{ such that } \sum_{rs\in RS}\sum_{i\in I}\sum_{p\in P_i^{rs}}\sum_{t\in T_a}\mathrm{PMC}_{p,t,i}^{rs}(\mathbf{f}^*)\left(f_{p,t,i}^{rs}-f_{p,t,i}^{rs,*}\right)\geq 0,\ \forall\mathbf{f}\in\Omega \tag{7}$$

2.2 重新审视 Qian 等人（2017）的多类别元胞传输模型

本研究采用 Qian 等（2017）提出的多类别元胞传输模型（CTM），对不同车辆类别的路段交通流动态进行建模。本节总结了后续 PMC 推导中使用的关键建模要素。为便于说明，我们以两种车辆类别为例；推广至多个类别时，逻辑相同。

2.2.1 两类车辆的基本图

假设有两种车辆类别，分别记为$i \in 1,2$。一般性不失，类别2的自由流速度较低。每种车辆类别具有相同的跟驰行为和车辆尺寸，并各自拥有相应的均质基本图（FD）$F_i(\rho_i)$，用于描述均质交通条件下类别i车辆的流量与密度之间的关系。近期研究发现，路段基本图会随局部道路配置（例如路缘停车、车道阻塞）而变化（Koch 等，2022；Liu 和 Qian，2024）。因此，我们将多类别元胞传输模型推广，以适应随时间和位置变化的道路配置。令 μ_t 表示时刻t的局部道路配置状态。类别特定的基本图写作$F_i(\rho_i, \mu_t), i \in \{1,2\}$，其关键参数包括通行能力$q_i^c(\mu_t)$、临界密度 $\rho_i^c(\mu_t)$（对应通行能力）和拥堵密度$\rho_{ji}(\mu_t)$，这些参数可能随 μ_t变化。图1展示了本研究采用的两类车辆的三角形基本图。

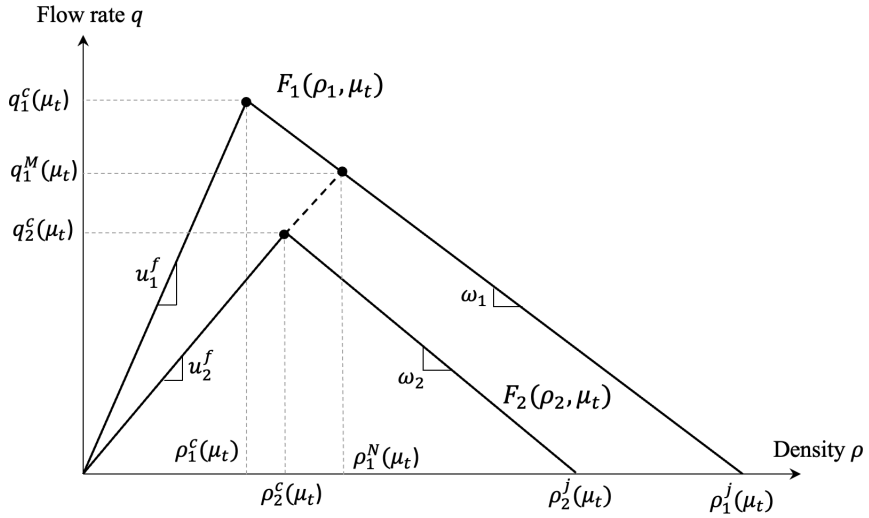

图 1：双类别交通流的基本图

2.2.2 道路空间划分与感知密度

当多个车辆类别混合时，某一类别所经历的拥堵由两类车辆的共同存在所决定。类别间影响可通过感知等效密度（或感知密度）的概念来描述，使每个类别都能从自身视角理解混合交通状态。Qian 等（2017）引入了由参数 α_1 和 α_2描述的道路空间分配，这些参数表示分配给各类别的有效道路空间份额。以类别1为例，第1类车辆感知到自身密度 ρ_1，此外还会感知到由类别2带来的等效密度，记为 $\rho_2\,\delta_1(\alpha_1,\ \alpha_2)$，其中 $\delta_1(\cdot)$是由道路空间分配决定的转换因子。

实际密度（ρ_1，ρ_2）描述的是实际的混合状态，而其物理含义是：第1类车辆会将第2类车辆视为已转换为第1类车辆，并占用一定有效道路空间份额。对称地，类别2感知到自身密度 ρ_2 以及由类别1带来的等效密度$\rho_1\,\delta_2(\alpha_1,\ \alpha_2)$。

综上所述，给定道路路段上的实际密度（ρ_1,ρ_2），α_1 和 α_2 确定每个类别的感知等效密度（$\rho_p 1\ ,\rho_p 2$），从而可以表示跨类别横向相互作用。在Qian 等（2017）中，当（$\rho_p 1\ ,\rho_p 2$）和（$\alpha_p 1\ ,\alpha_p 2$）满足不同条件时，讨论了跨类别相互作用的三种可能状态区间：

自由流状态。 两个类别均以自由流行驶，其相互作用最小。令 $\rho_i^c(\mu_t)$为道路配置状态 μ_t下类别i 的临界密度。类别i 维持自由流所需的最小空间占比为 $\rho_i/\rho_i^c(\mu_t)$，即

$$\alpha_1=\frac{\rho_1}{\rho_1^c(\mu_t)},\quad \alpha_2=\frac{\rho_2}{\rho_2^c(\mu_t)}. \tag{8}$$

相应的感知密度为

$$\rho_1^p=\rho_1+\rho_2\frac{\rho_1^c(\mu_t)}{\rho_2^c(\mu_t)},\quad \rho_2^p=\rho_2+\rho_1\frac{\rho_2^c(\mu_t)}{\rho_1^c(\mu_t)}. \tag{9}$$

自由流状态的条件为

$$\rho_1^p\le\rho_1^c(\mu_t),\quad \rho_2^p\le\rho_2^c(\mu_t), \tag{10}$$

这等价于

$$\alpha_1+\alpha_2\le 1. \tag{11}$$

半拥堵状态。 类别1（自由流速度较高）没有足够空间保持自由流，因此进入轻度拥堵状态；而类别2仍可保持自由流。对于第2类车辆，在 μ_t 条件下，它们持续处于自由流状态，因此

$$\alpha_2=\frac{\rho_2}{\rho_2^c(\mu_t)},\quad \alpha_1=1-\alpha_2. \tag{12}$$

感知密度满足

$$\rho_1^p=\frac{\rho_1}{\alpha_1}\le\rho_1^N,\quad \rho_2^p=\frac{\rho_2}{\alpha_2}=\rho_2^c(\mu_t), \tag{13}$$

其中，ρ_1^N表示区分类别半拥堵状态与完全拥堵状态的密度阈值，如图1所示。

完全拥堵状态。 两类车辆都处于拥堵状态，并以相同速度行驶，因为在拥堵交通流中，类别1无法超越类别2。我们有

$$u=\frac{F_1(\rho_1^p,\mu_t)}{\rho_1^p}=\frac{F_2(\rho_2^p,\mu_t)}{\rho_2^p}. \tag{14}$$

假设采用三角形基本图（图 1），可推导出空间划分如下：

$$\alpha_1=\frac{w_1-w_2+\rho_2^j(\mu_t)\frac{w_2}{\rho_2}}{\rho_2^j(\mu_t)\frac{w_2}{\rho_2}+\rho_1^j(\mu_t)\frac{w_1}{\rho_1}},\quad \alpha_2=\frac{w_2-w_1+\rho_1^j(\mu_t)\frac{w_1}{\rho_1}}{\rho_2^j(\mu_t)\frac{w_2}{\rho_2}+\rho_1^j(\mu_t)\frac{w_1}{\rho_1}}. \tag{15}$$

因此，完全拥堵时的感知密度为：

$$\rho_1^p = \frac{\rho_1}{\alpha_1} > \rho_1^N, \quad \rho_2^p = \frac{\rho_2}{\alpha_2} > \rho_2^c(\mu_t). \tag{16}$$

综上所述，类别-i 交通流的状态取决于相应的感知密度，该感知密度包括实际的类别-i车辆，以及由其他类别转换而来的类别-i 车辆，

$$\begin{aligned} F_1^{\text{mix}}(\rho_1, \rho_2, \mu_t) &= F_1(\rho_1^p, \mu_t) \\ F_2^{\text{mix}}(\rho_1, \rho_2, \mu_t) &= F_2(\rho_2^p, \mu_t) \end{aligned} \tag{17}$$

需要注意的是，在自由流与半拥堵状态区间的边界上，感知密度可以等于临界密度，即感知流入量恰好与通行能力相符。该边界会在后续各节推导路径边际成本时导致不可微性。

2.2.3 元胞间流量

在多类别元胞传输模型中，每条路段被离散为长度为 Δx 的元胞，并以时间步长 Δt进行仿真，满足 $\Delta x \geq u_{f_1} \Delta t$。异质交通流依据供需关系在相邻元胞之间传播，其中跨类别相互作用通过感知密度加以刻画。考虑两个相邻元胞：上标为l的上游元胞，以及上标为r的下游元胞。为简便起见，在以下方程中省略时间指标t 和道路配置 μ_t 。元胞间的双类别流量q_1 和q_2取决于两个相邻元胞的状态，并由$(\rho_{p,l\,i}\, \rho_{p,r\,i})$ $i \in \{1,2\}$参数化。

左侧元胞的$i \in \{1,2\}$ 类需求定义为

$$D_i^l = F_i^{l,\text{demand}}\left(\rho_i^{p,l}\right) = \min\left(q_i^{c,l}, u_i^f \rho_i^{p,l}\right) \tag{18}$$

右侧元胞的i类供给定义为

$$S_i^r = F_i^{r,\text{supply}}\left(\rho_i^{p,r}\right) = \min\left(q_i^{c,r}, w_i\left(\rho_i^{j,r} - \rho_i^{p,r}\right)\right) \tag{19}$$

请注意，相邻元胞可能是异质的，这意味着$q^{c,l}{}_i$ 和$q^{c,r}{}_i$ 可能因具体元胞条件而不同。i 类流量定义为

$$q_i = \alpha_i^l \min\left(D_i^l, S_i^r\right) \tag{20}$$

Qian 等（2017）证明，方程 20 中的多类别流量模型与单类别元胞传输模型一致。

总而言之，在网络加载的每个时间步长中，对于路段上的每个元胞，我们首先根据守恒更新得到物理交通密度（ρ_1，ρ_2），然后利用感知密度（$\rho_p 1$，$\rho_p 2$）和道路空间分配（α_1，α_2）确定交通状态。接下来，我们通过基本图 $F_i(\rho_{p\,i}\ \ \mu_t)$评估类别特定的元胞需求和供给，并确定实际的元胞间流量 q_i 以更新流量。

3 异质交通流PMC的近似及其在系统最优动态交通分配中的应用

3.1 双类别交通流的PMC分解

首先，我们将总出行成本关于车辆类别 $i \in I$ 的第p条路径流的全导数分解如下

$$\mathrm{PMC}^{rs}_{p,t,i}(\mathbf{f}) = \frac{\partial \mathrm{TC}(\mathbf{f}_i)}{\partial f^{rs}_{p,t,i}} + \sum_{j \in I_{\setminus i}} \frac{\partial \mathrm{TC}(\mathbf{f}_j)}{\partial f^{rs}_{p,t,i}} \tag{21}$$

其中，第一项表示第i类车辆相对于路径流f_p^{rs}，t，i 的总成本，第二项表示其他车辆类别（$j \in I\setminus i$）相对于第i类第p条路径流的其余总成本。第二项描述了不同车辆类别交通流之间的相互作用，这是本研究的重点。在以下分析中，我们仅考虑有两类车辆的情形，分别用下标 1 和 2 表示；更一般的情形也可轻松推广。双类别系统最优动态交通分配可表述为方程 22 中的变分不等式问题。

求 $\mathbf{f}_1^*,\ \mathbf{f}_2^* \in \Omega$

$$\text{such that} \sum_{rs \in RS} \sum_{t \in T_a} \left\{ \sum_{p \in P_1^{rs}} \left[\frac{\partial \mathrm{TC}(\mathbf{f}_1)}{\partial f^{rs}_{p,t,1}} + \frac{\partial \mathrm{TC}(\mathbf{f}_2)}{\partial f^{rs}_{p,t,1}} \right] \left(f^{rs}_{p,t,1} - f^{rs,*}_{p,t,1} \right) + \sum_{p \in P_2^{rs}} \left[\frac{\partial \mathrm{TC}(\mathbf{f}_2)}{\partial f^{rs}_{p,t,2}} + \frac{\partial \mathrm{TC}(\mathbf{f}_1)}{\partial f^{rs}_{p,t,2}} \right] \left(f^{rs}_{p,t,2} - f^{rs,*}_{p,t,2} \right) \right\} \geq 0$$
$$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \Omega = \{ \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 | \Delta_1 \mathbf{f}_1 = \mathbf{q}_1, \Delta_2 \mathbf{f}_2 = \mathbf{q}_2 \} \tag{22}$$

在方程 22 中，有四个PMC项需要分别分析，且每一项都对应一个具有上下界的次梯度。为简便起见，我们用 $\mathrm{PMC}^{j}{}_{i,\ t}$ 表示<style id='j'>类路径流**f**j 相对于<style id='i'>类路径流$f_{i,\ t}$ 在时刻t的总成本导数，并省略其他下标以简化表达。同样，链路边际成本记为 $\mathrm{LMC}_{j\,i,\ t}$。

$$\mathrm{PMC}^{j}_{i,t} = \frac{\partial \mathrm{TC}(\mathbf{f_j})}{\partial f_{i,t}} \tag{23}$$

四个 PMC 项可分为两类：（1）类内 PMC，表示类别 $i \in \{1,2\}$ 对自身施加的边际成本（即 $\mathrm{PMC11}_{,\ t}$和 $\mathrm{PMC22}_{,\ t}$）；（2）类别间 PMC，表示由于跨类别交互，一个类别对另一个类别施加的边际成本（即 $\mathrm{PMC12}_{,\ t}$和 $\mathrm{PMC21}_{,\ t}$）。

3.1.1 类内项

我们首先分析类内项 $\mathrm{PMC11}_{,t}$ 和 $\mathrm{PMC22}_{,t}$。每次动态网络加载运行后，流入与流出剖面被记录在类别特定累计曲线中 Ma 等人（2020）；Liu 与 Qian（2024）。我们遵循 Qian 等人（2012）；Zhang 与 Qian（2020）的工作来分析这些类别特定路径边际成本，但在我们的设定中，主要区别在于当交通流为异质时如何识别路段状态（即状态区间），因为状态区间取决于类别相互作用和类别相关参数，而非单一的均质基本图。

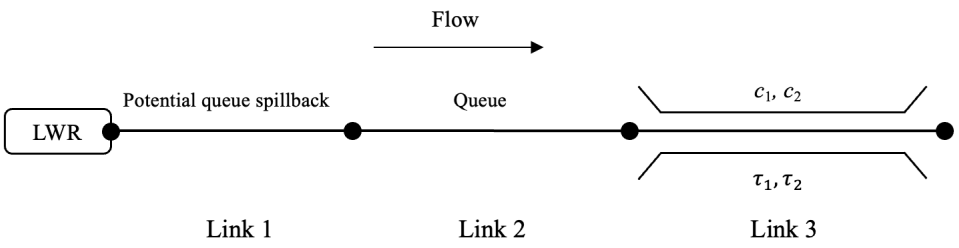

图 2：单瓶颈

考虑一个如图 2 所示、包含三个路段的简单网络。双类别交通流从左至右通过该网络。在动态网络加载中，采用 Lighthill-Whitham-Richards（LWR）模型作为交通流动态模型。不失一般性，假设路段 3 是一个瓶颈，其对两个不同类别的通行能力分别为c_1 和c_2，且两个类别在路段 3 上的自由流行程时间分别为 τ_1 和 τ_2。若流入流量超过通行能力，则（不同类别的）排队会在路段 2 上累积，并可能向上游溢出至路段 1。该网络对两个车辆类别分别具有路径流量，记为 f_1 和 f_2。在多类别动态网络加载中，空间分流比（即 α_1 和 α_2）以及感知密度（即 $\rho_p 1_{,t}$和 $\rho_p 2_{,t}$）用于判断瓶颈路段 3 是否处于激活状态。我们首先介绍将在后续讨论中使用的若干定义。

定义 3. 活动瓶颈。在多类别交通中，当车辆类别 i 在时刻 t 的感知密度大于其临界密度时，瓶颈在时刻 t 对车辆类别 i 而言处于活动状态，即 $\rho^p\, i,\ t\ \geq \rho_i^c$。在双类别情形下，类别 i 的空间分割比应处于半拥堵或完全拥堵状态对应的范围内。

定义 4. 扰动到达时间。扰动到达时间定义为扰动路径流沿路径到达某一特定路段的时间。扰动到达时间决定当前路段的 *LMC* 是否可微，并取决于上游路段的条件。

定义 5. 排队消散时间。车辆类别 i 的排队消散时间定义为交通状态从半拥堵或完全拥堵切换回自由流且流入流量等于流出流量时的起始时间。

考虑图3所示两类车辆的时变流入/流出曲线。我们假设路段1上不发生排队溢出，而由于前方路段3上可能存在瓶颈，排队在路段2上累积。图3分别描绘了瓶颈处两类车辆的累积曲线。在早于t_1 和t_1'的某一时刻之前，两类车辆的交通流均保持自由流状态，无需考虑类别间影响。在此期间，该瓶颈对两类车辆均处于非活动状态，即 α_1 和 α_2 落入自由流状态并满足 $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$。同时，感知密度均低于临界密度，即 $\rho_p 1_{,t} \leq \rho_1^c$和$\rho_2^p{}_{,t} \leq \rho_2^c$。在这种情况下，$\mathrm{PMC}_1^{1+}{}_{,,t} = \mathrm{PMC}^{1,}{}_{1}{}^{-}{}_{,t} = \tau_1$ 以及$\mathrm{PMC}_2^{2+}{}_{,,t} = \mathrm{PMC}^{2,}{}_{2}{}^{-}{}_{,t} = \tau_2$，因为任何到达非活动瓶颈路段的扰动车辆都将以其自由流速度行驶，增加或移除一个扰动车辆单位将使路径行程时间增加或减少相应车辆类别的自由流行程时间。

随着双类别到达率随时间增加，类别1的交通流可能会先在时间t_1, 达到通行能力，这意味着类别1的感知密度等于临界密度（$\rho_1^p{}_{,\ t} = \rho_1^c$），而类别2的交通流仍能保持自由流。我们假设从时间t_1 到时间$t2$, $\rho_1^p{}_{,\ t} = \rho_1^c$ 以及时间t_2, 之后，

到达率超过离开率，于是形成排队。在时间t_3,，类别1车辆的排队消散。类似地，对于类别2的交通流，存在一个起始时间t_1'（可能晚于t_1），从该时刻起，感知密度ρ_2^p，$_t = \rho_2^c$，并持续至t_2'。在t_2'之后，类别2车辆开始排队，并于时间t_3'消散。从时间t_1（t_1'）开始，两个车辆类别的瓶颈开始起作用。

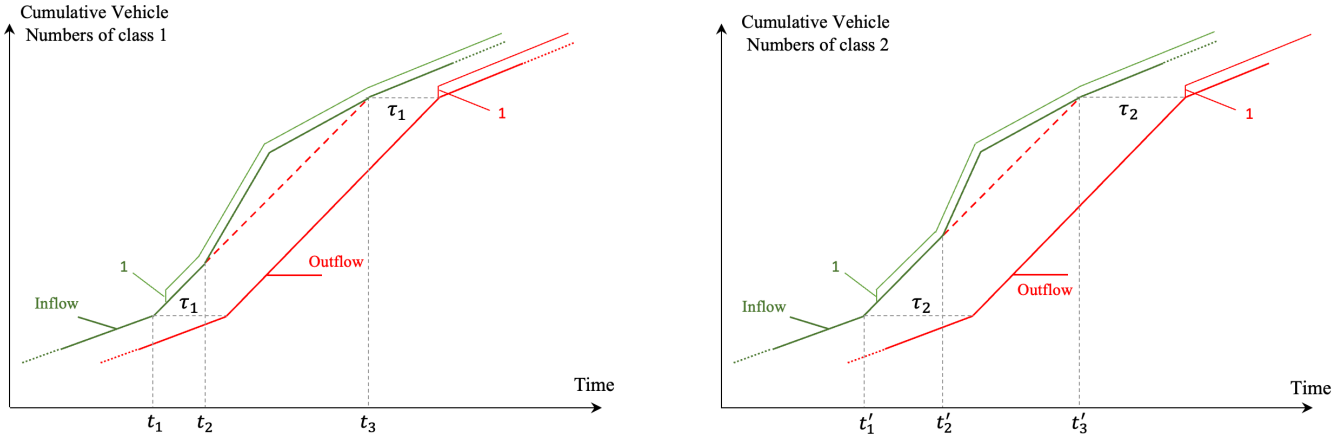

图3：两个车辆类别的累积曲线

若车辆类别1（2）的扰动流在已有排队累积时于时刻$t > t_2$（t_2'）到达瓶颈，正、负流量扰动将在排队消散后使离开曲线发生偏移，且总出行时间可微。然而，根据Zhang 与 Qian（2020）的分析，当流入率首次达到流量容量时（即介于t_1 与t_2之间），路径行程时间不可微，且下述命题对双类别交通设定成立。

命题 2. 当满足以下条件时，类别i的出行时间不可微：*(1)* 沿该路径存在对类别i处于激活状态的下游瓶颈；*(2)* 瓶颈路段上的扰动到达时间t满足$\rho^p\ i,t = \rho_i^c$且 α_i 落入半拥堵情形。

对于车辆类别1，扰动在 t_1 和 t_2 之间到达，且 ρ_1^p,t $= \rho_1^c$，这意味着车辆1的感知流量恰好等于通行能力 c_1。在 t_2 之后，瓶颈处开始积累排队。从 t_2，之后的某个时刻起，感知流入率下降；当流入量低于通行能力 c_1 时，排队开始消散。最终，排队在 t_3 时消散。当流量扰动在时刻 $t \in [t_2,t_3]$, $PMC11,_t = t_3 - t + \tau_1$ 到达瓶颈时。当流量扰动在时刻 $t \in [t_1,t_2)$ 到达瓶颈时，路径行程时间不可微，这意味着 PMC_1^{1+}, ,t $\neq PMC^{1},_1{}^{-}$,t 。如果在时刻 $t \in [t_1,t_2)$ 从路段中移除一个车辆1的边际单位，则 $PMC^{1},_1{}^{-}$,t $= \tau_1$；而如果向路段中加入一个边际单位，则 PMC_1^{1+}, ,t $= t_3 - t + \tau_1$。

综上所述

$$PMC_{1,t}^{1} = \begin{cases} \tau_1 & t < t_1 \\ [\tau_1, t_3 - t + \tau_1] & t \in [t_1, t_2) \\ t_3 - t + \tau_1 & t \in [t_2, t_3) \\ \tau_1 & t \geq t_3 \end{cases} \tag{24}$$

类似地，PMC22,t 可根据扰动单元到达瓶颈的到达时间，以及感知流入量达到c_2 ($t \in [t_1^{'}, t_2^{'}]$)的时刻和排队消散时间$t_3^{'}$推导得到。PMC22,t 可总结为

$$\mathrm{PMC}_{2,t}^{2} = \begin{cases} \tau_2 & t < t_1^{'} \\ \left[\tau_2, t_3^{'} - t + \tau_2\right] & t \in [t_1^{'}, t_2^{'}) \\ t_3^{'} - t + \tau_2 & t \in [t_2^{'}, t_3^{'}) \\ \tau_2 & t \geq t_3^{'} \end{cases} \tag{25}$$

3.1.2 类间项

当考虑不同车辆类别之间的相互作用时，我们采用一种务实的方法，利用类内PMC及相应的转换因子来近似类别间 PMC。我们使用 Qian 等（2017）提出的路段状态区间，因为我们的多类别动态网络加载植根于该框架，因此使用同一组参数来刻画跨类别相互作用是一致的。只要与所采用的动态网络加载兼容，也可以采用其他方法。核心思路是根据路段区间推导等效转换因子。具体而言，我们通过对类内项进行缩放来计算类间项，

$$\mathrm{PMC}_{2,t}^{1} = \delta_2^1 \cdot \mathrm{PMC}_{1,t}^{1} \quad \text{and} \quad \mathrm{PMC}_{1,t}^{2} = \delta_1^2 \cdot \mathrm{PMC}_{2,t}^{2} \tag{26}$$

其中 δ_2^1 表示取决于道路空间划分比例的转换因子。相应地，我们将它们定义为，

$$\begin{aligned} \delta_2^1(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{\rho_1/\alpha_1}{\rho_2/\alpha_2} \\ \delta_1^2(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{\rho_2/\alpha_2}{\rho_1/\alpha_1} \end{aligned} \tag{27}$$

其中 ρ_1 与 ρ_2 均不为零。如第2.2节所述，三种状态区间由感知密度和道路空间划分决定。我们分别讨论每种状态区间，以推导类别间PMC项。当路段状态落入自由流状态时，两类之间的相互作用可以忽略，即增加一个单位的流量（无论是小汽车还是卡车）都不会影响另一类别。因此，类别间 PMC 为

$$\begin{aligned} \mathrm{PMC}_{1,t}^{2} &= 0 \\ \mathrm{PMC}_{2,t}^{1} &= 0 \end{aligned} \tag{28}$$

在半拥堵状态下，我们考虑单向相互作用，即增加一个单位的卡车流量会对小汽车产生影响，但小汽车流量不会影响卡车，因为卡车能够保持自由流速度。在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{PMC}_{1,t}^{2} &= \delta_1^2(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \mathrm{PMC}_{2,t}^{2} = \frac{\rho_2^p - \rho_2}{\rho_1} \cdot \mathrm{PMC}_{2,t}^{2} \\ \mathrm{PMC}_{2,t}^{1} &= 0 \end{aligned} \tag{29}$$

在完全拥堵状态下，两种类别会相互作用，因为它们需要竞争有限的道路空间，且都无法保持自由流速度；相互作用项可计算为

$$\begin{aligned}\mathrm{PMC}^{2}_{1,t} &= \delta^{2}_{1}(\alpha_1,\alpha_2)\cdot \mathrm{PMC}^{2}_{2,t} = \frac{w_1\rho_2 + (\rho^{j}_{2}-\rho_2)w_2}{w_2\rho_1 + (\rho^{j}_{1}-\rho_1)w_1}\mathrm{PMC}^{2}_{2,t} \\ \mathrm{PMC}^{1}_{2,t} &= \delta^{1}_{2}(\alpha_1,\alpha_2)\cdot \mathrm{PMC}^{1}_{1,t} = \frac{w_2\rho_1 + (\rho^{j}_{1}-\rho_1)w_1}{w_1\rho_2 + (\rho^{j}_{2}-\rho_2)w_2}\mathrm{PMC}^{1}_{1,t}\end{aligned} \tag{30}$$

请注意，在计算路径边际成本时，小汽车和卡车的不可微问题可能不会同时出现，这取决于类别特定单位流量的实际到达时间。因此，我们应在动态网络加载过程中记录随时间变化的路段状态，并利用这些信息确定合适的PMC表达式。

总之，对于一般网络，路径边际成本可按以下步骤计算：(1) 对每个时间间隔，使用两个车辆类别随时间变化的感知密度，确定路段条件，并根据命题 2 判断是否出现不可微问题；(2) 添加一个单位类别特定路径流，并沿路径依次追踪每个路段，计算扰动进入路段e的时间，记为$t^{e}_{i,\,\mathrm{in}}$以及扰动离开路段e的时间，记为$t^{e}_{i,\,\mathrm{out}}$；(3) 通过以下公式计算LMC：

$$\begin{aligned}\mathrm{LMC}^{i,+/-}_{i,e,t} &= t^{e,+/-}_{i,\mathrm{out}} - t^{e,+/-}_{i,\mathrm{in}} + \mathrm{fft}_{i,e} \\ \mathrm{LMC}^{i,+/-}_{j,e,t} &= \delta^{i}_{j}\cdot \mathrm{LMC}^{i,+/-}_{i,e,t}\end{aligned} \tag{31}$$

其中，$\mathrm{fft}_{i,\,e}$表示类别i在路段e上的自由流行程时间，而$+/-$的取值取决于扰动到达当前路段时是否出现不可微问题。沿路径汇总各段LMC，即可得到PMC，具体使用公式4。

这里我们还讨论一种通用方法，用于计算由路内停车造成的异质道路配置下的路径边际成本。如 Liu 与 Qian（2024）所示，路缘停车会对路段性能产生局部负面影响；使用元胞传输模型描述路段动态时，这会导致基本图在路段内部呈现位置相关的异质性。由于多类别元胞传输模型天然支持元胞异质性，我们只需使用更精细的累积曲线记录元胞层面的流入流量和流出流量，并计算元胞层面的边际成本。随后，通过汇总路段内各元胞的边际成本，得到路段层面的 LMC。还可以利用多类别交通流的感知密度，逐个元胞检查不可微条件。我们将这一通用扩展留待未来研究。

3.2 基于 PMC 的系统最优动态交通分配求解算法

本节采用标准的逐次平均法（MSA）算法求解离散化的系统最优动态交通分配变分不等式规划。其核心思想是：在每次迭代中，根据当前的双类别流模式，评估每个车辆类别的类内和类别间 PMC，然后将需求转移至路径边际成本值最小的路径。该算法属于启发式算法，但已广泛用于以 PMC 为基础的系统最优动态交通分配研究。

每次 MSA 迭代包含四个主要步骤：(1) 运行一次双类别动态网络加载，以获取路段和路径状态；(2) 通过追踪一个单位扰动路径流穿过网络来评估 PMC；(3) 计算最小 PMC

搜索过程，该过程针对每个 OD对和类别，基于时变最短路方法进行；(4) 执行 MSA 平均更新。算法如算法 1 所示。

在算法 1 的**寻找最小PMC** 步骤中，我们需要求解一个时变最短路问题，以找到最小的类别特定路径边际成本。该问题可通过 (Chabini, 1998) 提出的时间递减序算法（DOT）求解。关于点排队模型和LWR模型的更多讨论可参见 (Qian 等人, 2012)。在该算法中，我们使用如下定义的递减步长：

$$\lambda^v = \frac{1}{1+v} \tag{32}$$

算法 1 的收敛判据基于间隙函数g^v，其在第 v 次迭代时的定义见公式 33。

$$g^v = \frac{\sum_i \sum_t \sum_{rs} \sum_p f_{p,i}^{rs}(t)(\mathrm{PMC}_{p,i}^{rs}(t) - \mu_i^{rs})}{\sum_i \sum_t \sum_{rs} \sum_p f_{p,i}^{rs}(t)\mu_i^{rs}} \tag{33}$$

其中，μ_i^{rs}表示车辆类别i 和 OD对rs 在所有可行路径与出发时间组合中的最小PMC。由于我们同时考虑路径与出发时间选择，μ_i^{rs}相对于t为常数。若仅考虑路径选择，则相应项应为 $\mu_i^{rs}(t)$，它也取决于出发时间t。

当路径边际成本不可微时，次梯度上界与下界并不相同。在 MSA 算法中，可以使用下界或上界，也可以使用两者的凸组合。本研究报告采用指定界值的结果，并将更先进的次梯度应用留待未来研究。

算法 1 同时进行路径与出发时间选择的系统最优动态交通分配原始MSA算法

1：初始化：任意 $\mathrm{f}_i^0 \in \Omega$，其中 Ω 是多类别需求的约束；$v = 0$；λ^0；2：重复执行 3：双类别动态网络加载。将多类别路径流量 f_i^v加载到网络中；4：计算类内项。沿各路径跟踪扰动单元流量，并根据公式 24 计算所有路段的类内链路边际成本；5：计算类间项。根据多类别链路状态确定路段区间（自由流 / 半拥堵 / 完全拥堵），并使用流态相关转换因子，根据公式 29 和 30 计算类间项；6：汇总链路边际成本，得到路径边际成本。汇总各路径上路段的链路边际成本，并加入计划延误项，根据公式 4 得到路径边际成本；7：搜索最小路径边际成本。对于每个 $\mathrm{rs} \in \mathrm{RS}$（给定任意 $\mathrm{t} \in \mathrm{T}_d$ 时的 $\mathrm{rs} \in \mathrm{RS}$），分别为车辆类别 i 找到路径 $[\mathrm{p}_i^*, \mathrm{t}^*]$，使其路径边际成本最小，即求解问题 $[\mathrm{p}_i^*, \mathrm{t}^*] = \arg\min_{p,t} \mathrm{PMC}_{p,t,i}^{rs}$。这通过时变最短路问题求解（例如 DOT 算法）；8：辅助路径流量。通过将 Q_i^{rs}的所有类别特定需求分配至 $[\mathrm{p}_i^*, \mathrm{t}^*]$，生成辅助路径流量方案 $\mathrm{g}_i(\mathrm{f}_i^v)$；9：MSA 更新 $\mathrm{f}_i^{v+1} = (1-\lambda^v)\mathrm{f}_i^v + \lambda^v \mathrm{g}_i(\mathrm{f}_i^v)$；10：将步长更新为 $\lambda^v$to λ^{v+1}，$v = v+1$；11：直至满足收敛准则；

4 数值实验

4.1 小型网络

我们首先采用 Zhang 和 Qian（2020）使用的一个小型走廊网络，如图4所示。链路属性汇总于表1。ID 为 10–15 的路段是 OD连接器，采用点队列模型，其通行能力和拥堵密度均设为无限大（在仿真中设为较大的常数），且不会发生拥堵。其他路段代表按车道汇总交通流特征的道路路段。分配时间间隔为 15 分钟，它决定路径成本更新的频率，以及时变路径选择比例的计算和需求分配频率。加载时间间隔为 5 秒。整个动态网络加载过程包含 10 个分配时间间隔，总计 2.5 小时；我们假设实际时段为上午 8:00 至 10:30。我们考虑路径与出发时间选择，并将出行成本参数设为： $\alpha = 1$、 $\beta = 0.5$ 和 $\gamma = 2$。准时到达时间窗为上午 8:30 至 10:00。

我们报告总出行成本（TTC）和总出行时间成本（TTTC），以评估模型性能。TTC 按照公式 1 计算。在实验中，我们同时考虑路径与出发时间选择，因此每个路径流的广义出行成本由两部分组成：（i）出行时间成本（路径行程时间乘以时间价值）；（ii）由目的地实际到达时间与期望到达时间窗之差决定的时刻表延误惩罚。我们按照分配时间间隔的分辨率（即 15 分钟）使用路径流计算 TTC。考虑 OD对 rs 之间在时间间隔 t 出发的第 i 类车辆的第 p 条路径流，记为 f rsp i(t)，我们从路径 p 上连续链路的出发/到达累积曲线中提取相应的路径行程时间 $w_p^{rs}{}_{,i}$(t)（秒）。该路径流的实际到达时间为 $t_{arr} = t + w_p^{rs}{}_{,i}(t)$，以秒表示。根据实验设置，准时到达时间窗为上午 8:30 至 10:00，由此得到目标到达时间 $t_{rs,i}^* = 4500$ （秒）和容许项 $\delta = 2700$ （秒）。该路径流的时刻表延误成本取决于 $\Delta t = t_{arr} - t_{rs,i}^*$ 所属的区域，具体如公式 2 所示。我们将惩罚乘以路径流量，然后对所有 (rs, p,t, i) 求和，得到总时刻表延误成本（TSDC）

$$\mathrm{TSDC} = \sum_{rs}\sum_{i}\sum_{t}\sum_{p} f_{p,i}^{rs}(t)\cdot \mathrm{sd}(t + w_{p,i}^{rs}(t) - t_{rs,i}^*) \tag{34}$$

类似地，总出行时间成本汇总为

$$\mathrm{TTTC} = \sum_{rs}\sum_{i}\sum_{t}\sum_{p} f_{p,i}^{rs}(t)\cdot \alpha w_{p,i}^{rs}(t) \tag{35}$$

总体总出行成本为

$$\mathrm{TTC} = \mathrm{TTTC} + \mathrm{TSDC} \tag{36}$$

我们分别采用考虑和不考虑类别间PMC项的次梯度下界来求解系统最优动态交通分配。选择下界的原因是，下界能够反映不可微性；如前文所述，当LMC不可微时，下界与上界不同。我们以动态用户均衡为基准，评估出行成本降低情况。

表2比较了不同交通分配模型的性能，包括动态用户均衡（DUE）和动态系统最优（DSO）在各种设置下的基准结果。

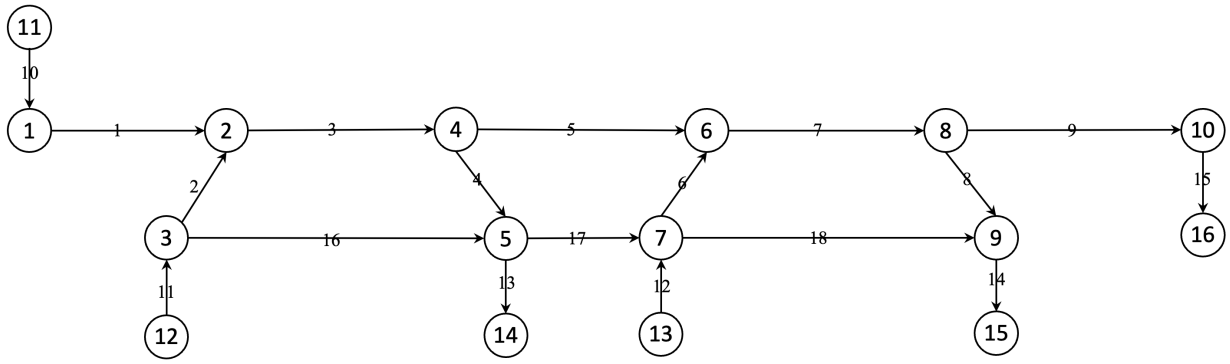

图4：小型网络

表1：小型网络的链路属性（交通流特征按车道汇总）

ID	长度（英里）	lane 数量	小汽车自由流速度（英里/小时）	卡车自由流速度（英里/小时）	小汽车流量容量（辆/小时）	卡车流量容量（辆/小时）	小汽车拥堵密度（辆/英里）	卡车拥堵密度（辆/英里）
1	1	3	50	40	6000	3600	540	240
2	0.5	1	50	40	2000	1200	180	80
3	2	3	50	40	6000	3600	540	240
4	0.5	1	50	40	2000	1200	180	80
5	2	3	50	40	6000	3600	540	240
6	0.5	1	50	40	2000	1200	180	80
7	1	2	50	40	4000	2400	360	160
8	0.5	1	50	40	2000	1200	180	80
9	1	3	50	40	6000	3600	540	240
16	2	1	30	20	2000	1200	180	80
17	2	1	30	20	2000	1200	180	80
18	1	1	30	20	2000	1200	180	80

模型类型	**总出行时间成本（TTTC）**		**总出行成本（TTC）**		**Gap**	
	car	卡车	car	卡车	car	卡车
DUE	978.2	191.1	2172.6	416.9	0.058	0.054
DSO, L, 内部 + 之间	724.5	147.8	1479.2	292.1	0.181	0.136
DSO，L，仅内部	762.3	151.1	1560.3	304.8	0.177	0.161
DSO, U, 内部 + 之间	852.9	164.2	1856.3	351.3	0.15	0.11
DSO，U，仅内部	856.5	165.1	1862.0	352.9	0.16	0.10

表2：模型性能比较

系统最优模型的区别在于是否纳入类别间 PMC（intra +inter）或仅使用类内PMC（仅内部），以及在逐次平均法更新中使用路径边际成本的下界（L）还是上界（U）。出行成本的单位为 veh·hour。

结果表明，与 DUE 基准相比，系统最优模型能够提升全系统效率。对于小汽车，总出行时间成本（TTTC）从 DUE 下的 978.2 降至 DSO（L，intra + inter）下的最低 724.5，降幅为 26%。卡车也有类似改善，TTTC 从 191.1 降至 147.8（降幅为 23%）。同时计入时间成本和计划延误成本的总出行成本（TTC）也呈现相同趋势：小汽车的成本从 2172.6 降至 1479.2（降幅为 32%），卡车则从 416.9 降至 292.1（降幅为 30%）。这些结果证实，通过考虑类别间边际成本，系统最优交通分配能够显著提升整体网络效率。

对比包含类别间影响的 + 类别间模型与仅内部 DSO 模型，可以看出考虑类别间影响和交通流不可微问题的益处。对于下界和上界形式，纳入类别间 PMC 始终能降低 TTTC 和 TTC。例如，在下界 DSO 中，小汽车的 TTTC 从 762.3（仅内部）降至 724.5（+ 类别间），而卡车的 TTTC 则从 151.1 降至 147.8。TTC 的降幅也呈现出类似趋势，表明忽略类别间影响会导致次优分配，使小汽车和卡车低效地争夺通行能力。此外，无论是否纳入类别间 PMC，下界 DSO 对两种车辆类别都始终能实现更低的 TTTC 和 TTC。由于只有当混合交通流的路段容量达到通行能力时，下界与上界才会出现差异，这些差异表明，考虑不可微问题的下界 DSO 能更有效地推动网络趋向系统最优。

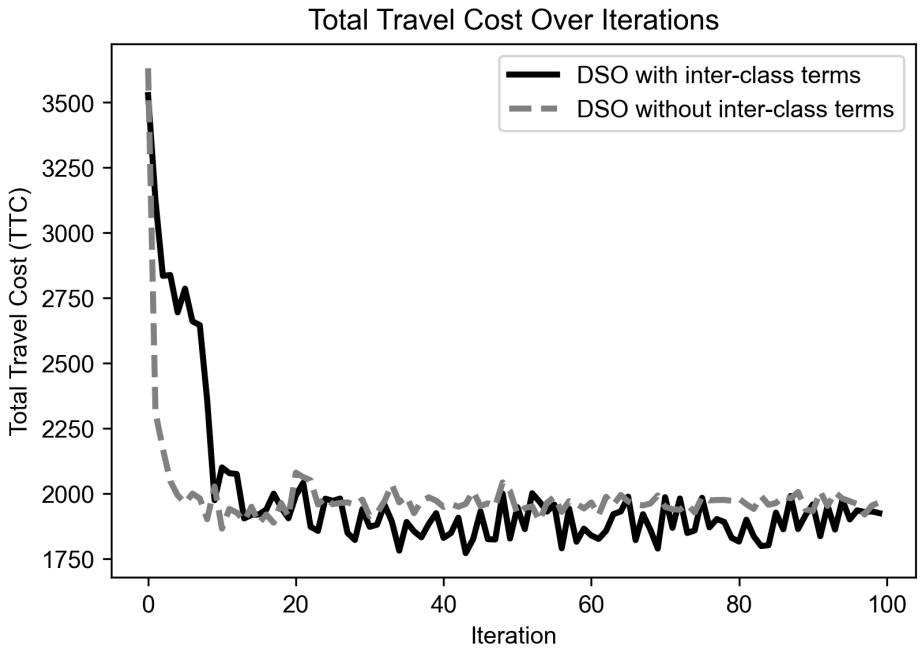

图5：小型网络上两次 DSO 运行的收敛情况（含/不含类间项）

图5比较了两次 DSO 运行的收敛行为。一次是含交互作用的 DSO（即表2中的 DSO、L、intra+inter），另一次是不含交互作用的 DSO（即表2中的 DSO、L、仅内部）。

可以观察到，不考虑交互的 DSO 收敛较早（约 10 次迭代后），但总出行成本较高；考虑交互的 DSO 则能在 20 次迭代后进一步降低总出行成本，最终获得更优的 DSO 解。

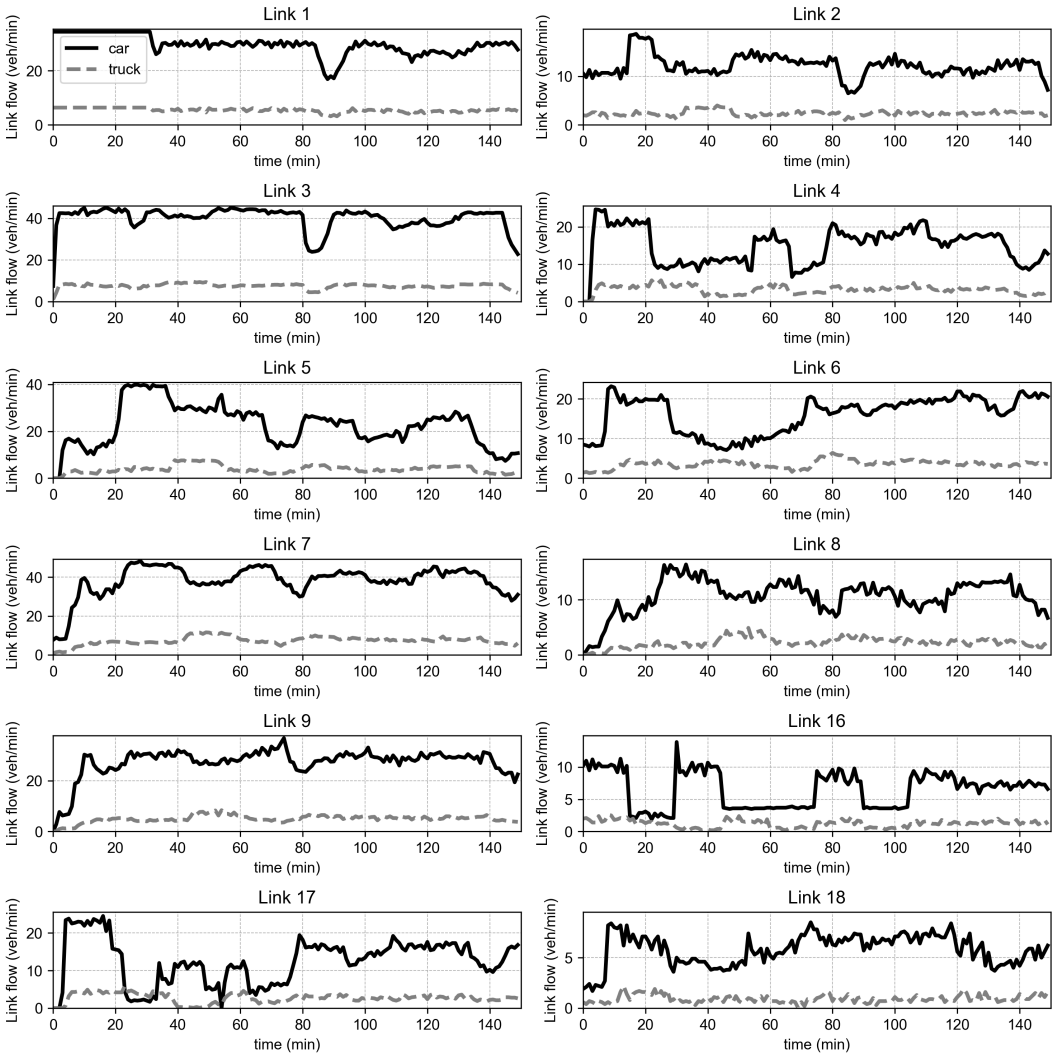

图6：路段流量时间模式（采用类别间 PMC 的 DSO）

我们进一步考察路径与出发时间选择中类别特定路段流量的转移情况，以比较在考虑和不考虑双类别交互时的DSO路段/路径状态。图6和图7比较了在MSA算法中计算PMC时，考虑与不考虑多类别交互情况下DSO的路段层面流量模式。可以看出，两次运行呈现出不同的时间变化模式。纳入多类别交互后，小汽车流量和卡车流量的时间变化都更加平稳，没有明显尖峰，并且在各路段间的重新分配也更加均衡，这表明该算法能够有效捕捉跨类别拥堵外部性。相比之下，不考虑多类别交互的解在若干路段（例如路段2、6和16）上的小汽车流量和卡车流量都出现了突增和骤降，尽管某些路段（例如路段1、3和7）的时间变化模式较为稳定。这表明，该DSO优化将各类别视为彼此独立，忽略了它们对拥堵的相互影响，尤其是在通行能力有限的局部路段上。图6中另一个值得注意的现象是，在某些时间间隔内（例如路段6、8和9上的40–60分钟），小汽车流量和卡车流量呈现反向时间趋势：

小汽车流量下降而卡车流量上升，反之亦然。这一现象凸显了模型能够动态地在不同类别之间转移需求，以平衡路段利用率，表明类别间PMC有望协调多类别交通流，而非仅仅独立优化各类别。流量模式更加平滑、呈反向相关且分布更加均衡，这表明明确考虑类别间外部性能够得到更优且更合理的系统最优解。

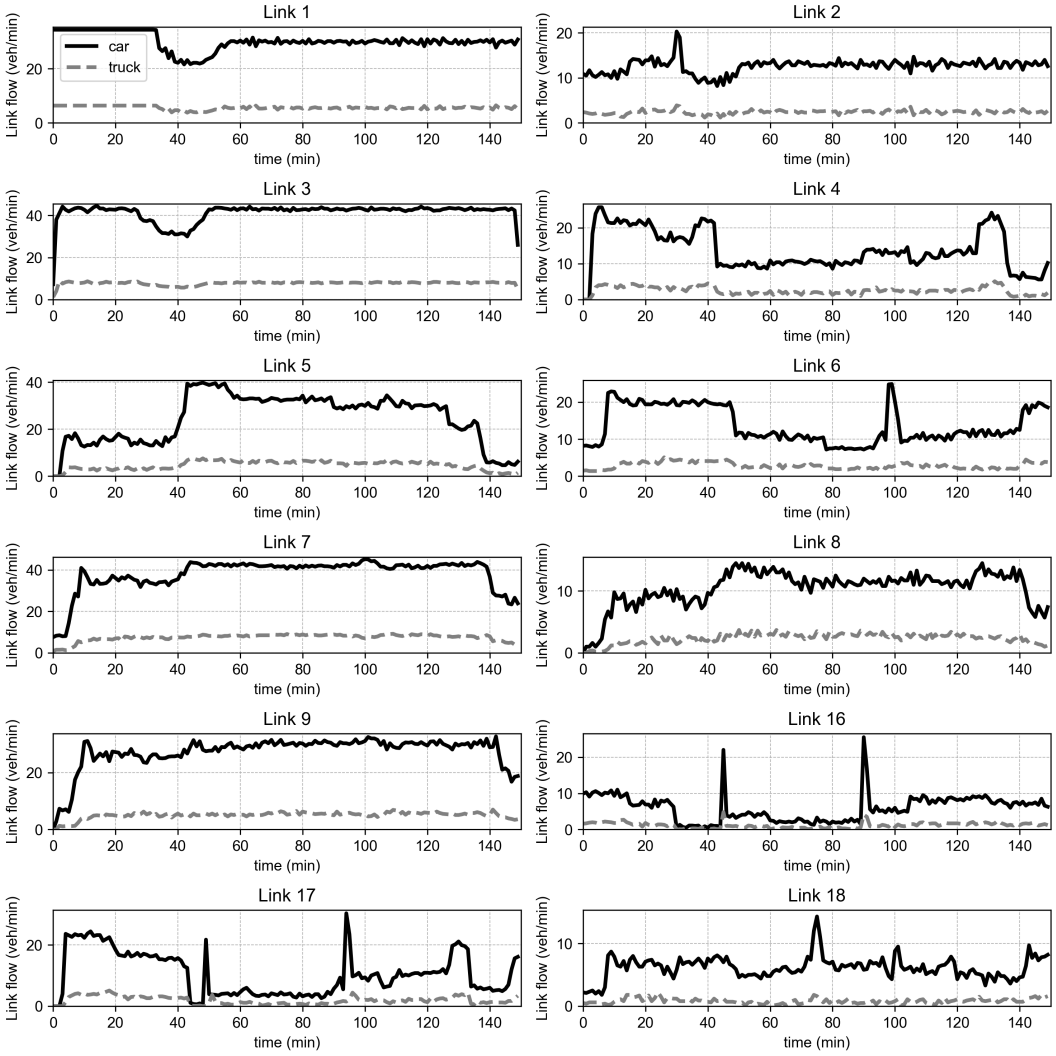

图7：路段流量时间模式（不考虑类别间 PMC 的 DSO）

图8和图9分别展示了在考虑类别间 PMC 的 DSO 下，小汽车和卡车的联合路径与出发时间选择。在收敛时，每个 OD对最终都会将流量分配到一条主导路径上；由于其他路径上的流量占比接近于零，因此未予绘制。对于某些 OD对（例如（12，16）、（12，15）、（13，15）和（12，14）），可以观察到车辆类别之间明显的时间差异：小汽车和卡车呈现出不同但互补的时变路径流量。这表明，类别间 PMC 能够有效地在不同路径和出发时间之间重新分配多类别需求，从而缓解跨类别拥堵。

相比之下，其他OD对（例如（11, 16）、（11, 14）、（11, 15）和（13, 16））在不同车辆类别之间的路径与出发时间选择上表现出较强的一致性，这表明对于这些OD对，类别间

效应相对较弱，不足以引发多类别交通流的时空分离。类内PMC主导了选择决策，导致两个类别趋向于选择相似的最优路径与出发时间。

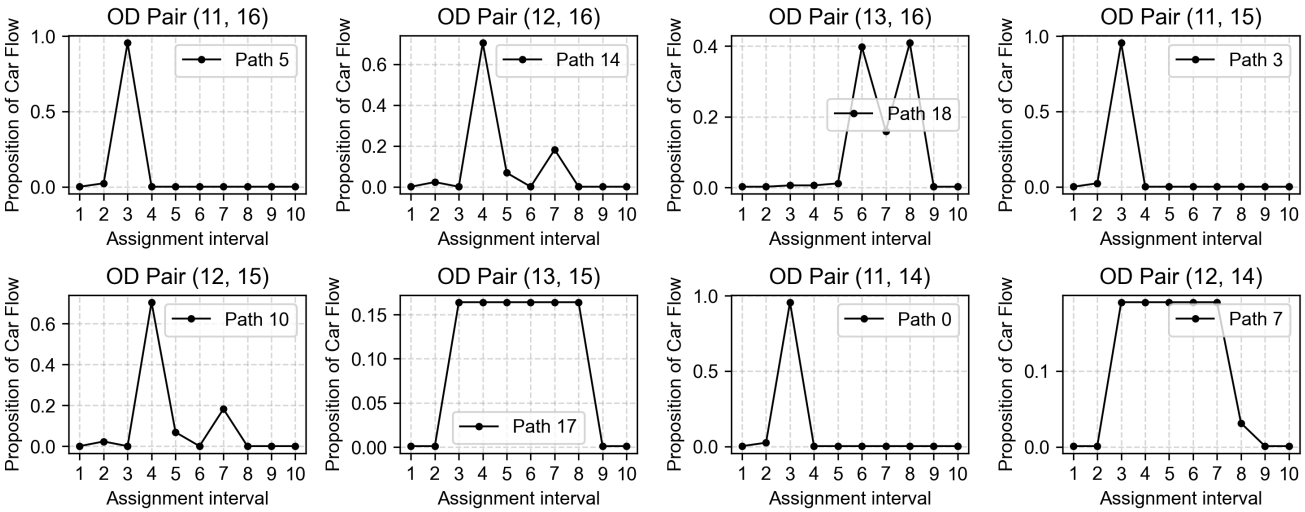

图 8：小汽车路径流量分流（含类别间 PMC）

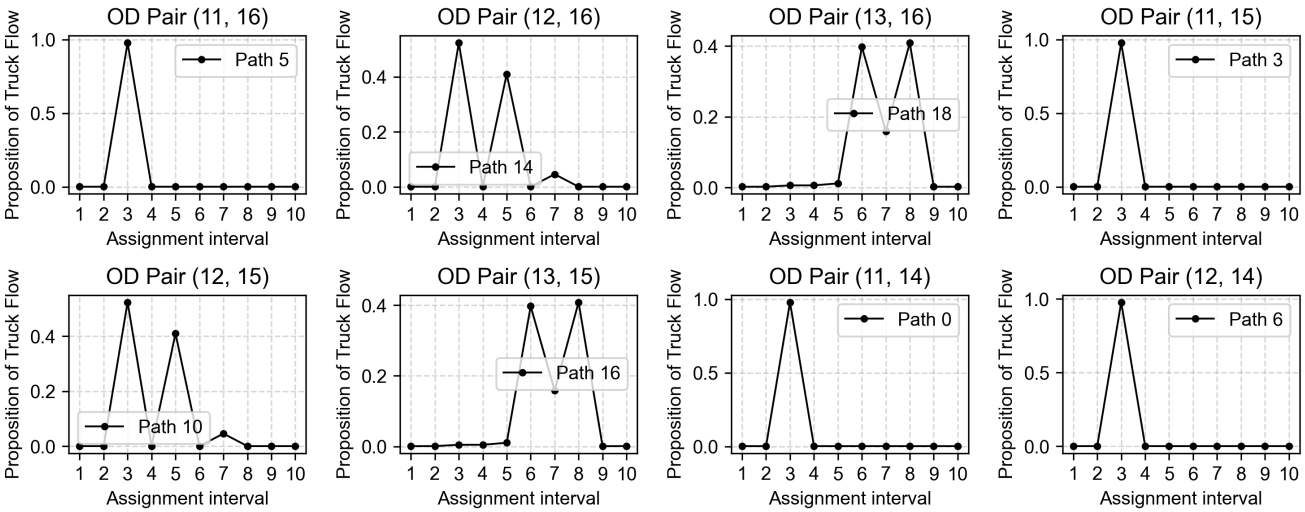

图 9：卡车路径流量分流（含类别间 PMC）

图 10 和图 11 展示了在不考虑类别间 PMC 的情况下求解 DSO 得到的联合路径与出发时间选择结果。与考虑类别间 PMC 的情况不同，结果表明，两种车辆类别的时序路径选择模式高度一致。对于几乎所有起讫点对，小汽车和卡车的路径与出发时间分布都相似，这表明仅使用类内 PMC 可能会使不同类别对出发时间和路径选择形成共同偏好，以尽量降低各自类别的出行成本，即使这会加剧跨类别拥堵。

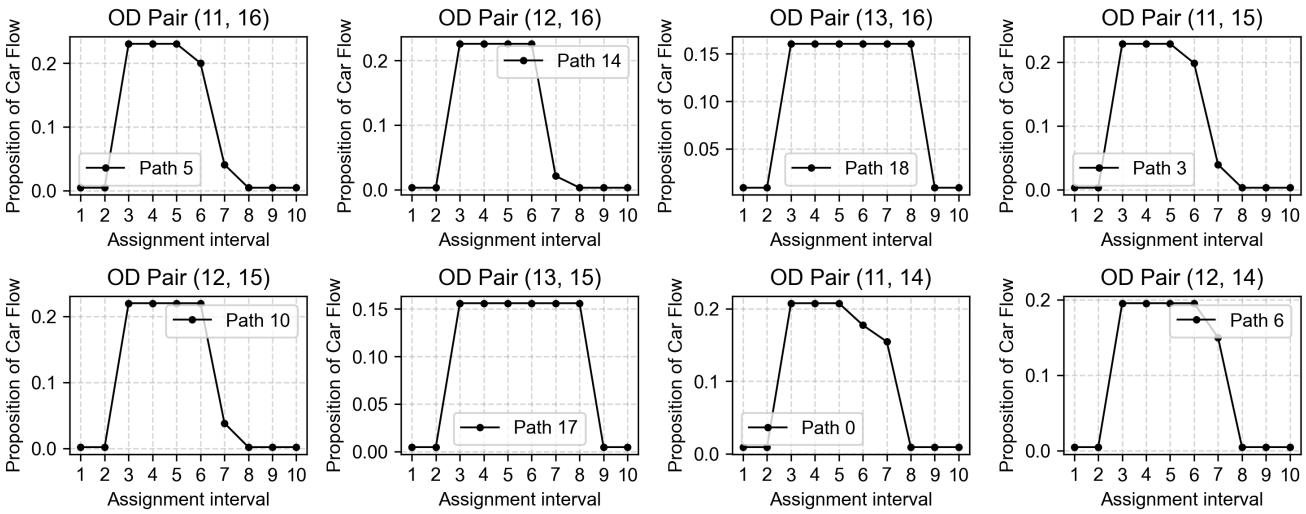

图 10：小汽车路径流量分流（不考虑类别间 PMC）

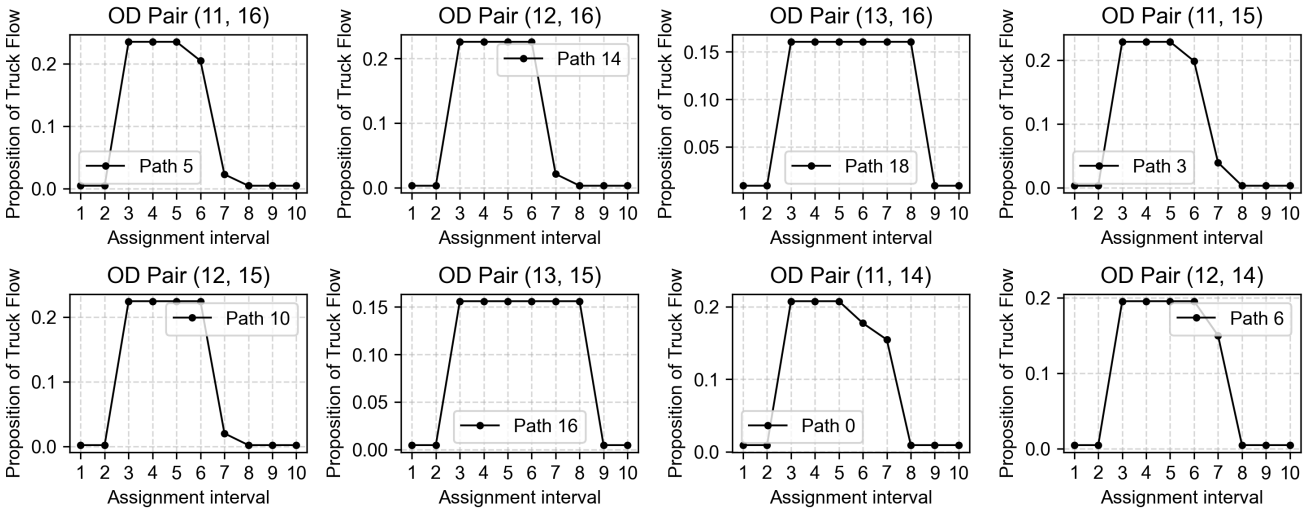

图 11：卡车路径流量分流（不考虑类别间 PMC）

两个情景的另一个显著差异在于流量在各分配时间段之间的分布。不考虑类别间 PMC 时，若干起讫点对的流量在多个分配时间段之间分配得更为均匀，小汽车和卡车会选择两个或更多占比相近的时间段（例如起讫点对 (13,16)、(12,15) 和 (12,16)）。相比之下，考虑类别间 PMC 时，对于大多数起讫点对，流量会显著集中在一两个占主导地位的时间段。引入类别间项后，PMC 会因计入跨类别外部性而变陡，从而有效抑制不同类别在高拥堵时段同时使用道路。因此，一两个时间段会明显成为最优选择，而其他时间段的吸引力则会降低，进而使流量的时间集中更加明显。

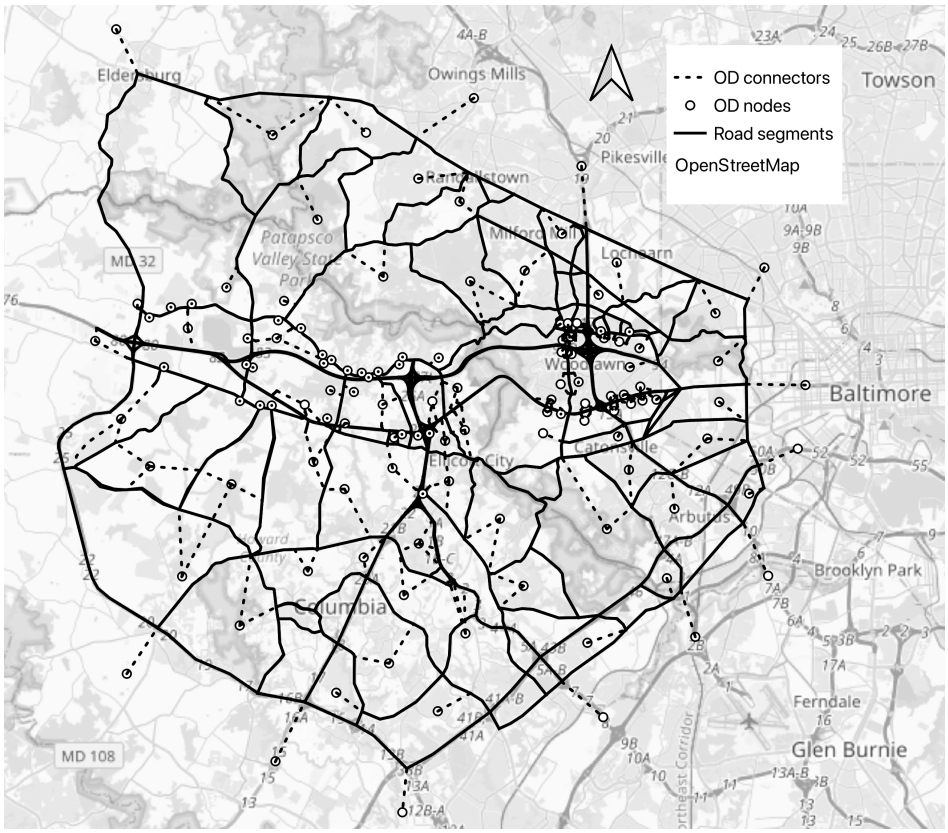

图 12：大规模现实世界网络

4.2 一个大型网络

为检验所提方法的可扩展性，我们进一步在一个大型网络上求解 DSO，该网络使用现实世界数据标定了 OD 需求。该网络位于马里兰州巴尔的摩附近，由马里兰州交通部（MDOT）州公路管理局（SHA）提供。如图 12 所示，该网络包含 1,510 条路段、776 个节点、124 个起点/终点和 15,376 个起讫点对。大型网络的详细设置见（Ke 等，2023，2025）。整个动态网络加载模型涵盖 7 小时，即典型工作日的上午 5 点至中午 12 点。与小型网络相同，我们考虑路径与出发时间选择，并采用相同的出行成本参数。我们将准时到达时间窗设为上午 6:30 至 10:30。

图13展示了两次 DSO 运行的收敛曲线。我们分别比较了采用基于下界 PMC 的 MSA、考虑和不考虑类间项时的结果。由于间隙函数值无法进一步降低，因此认为两次 DSO 运行在第 22 次迭代后收敛。考虑和不考虑类间项时，DSO 的总间隙值分别达到 0.674 和 0.894。

我们观察到，在采用相同的简单 MSA算法时，考虑类间项的 DSO 能为系统带来更低的总出行成本。其收敛曲线在第 10 次迭代后仍持续下降，而不考虑类间项的 DSO 则维持在相同的总成本水平，并较早收敛。我们进一步在表 3 中将总成本分解为小汽车和卡车的不同成本项，发现纳入类别间 PMC 后，两类车辆的出行时间成本分别进一步降低了 9% 和 5%，这表明在系统最优状态下优化混合交通流模式具有潜力。

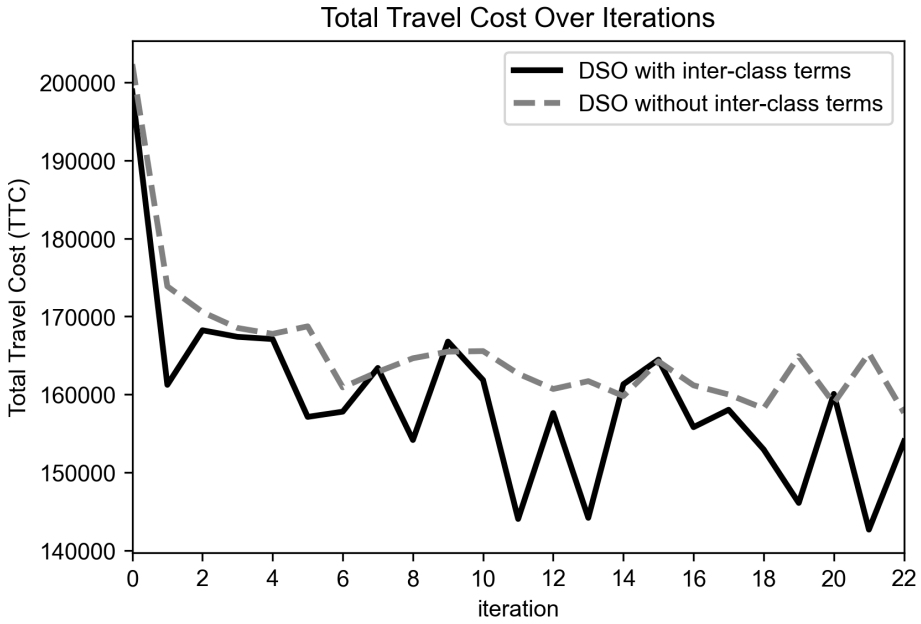

图13：大型网络中两次 DSO 运行的收敛情况（含/不含类间项）

模型类型	**总出行时间成本（TTTC）**		**总出行成本（TTC）**		**Gap**	
	car	卡车	car	卡车	car	卡车
含类别间PMC	80820.3	7437.8	130936.8	11721.1	0.65	0.97
不含类别间PMC	89112.9	7812.1	145875.8	11770.9	0.92	0.37

表3：大型网络DSO中按车辆类型分解的出行成本（单位：veh·hour）

与小型网络相比，大型网络中的收敛曲线不够平滑，最终间隙函数值也相对较大。这主要是由于在双类车辆设定下，大型网络的问题维度更高，时空交互也更为复杂。考虑类别间外部性时，算法必须同时平衡两类车辆的高维路径与出发时间选择；而仅依赖 PMC 值的原始MSA算法可能会出现振荡。我们强调，本研究的重点是所提出的异质 PMC 近似方法及其为多类别 SO-DTA 提供有效下降方向的能力，而非开发最先进的大规模 SO-DTA 求解器。采用相同的简单 MSA算法时，纳入类别间 PMC 相比不含类间项的基准方法，能够降低系统总出行成本和间隙值。未来值得重点探索的方向包括开发更稳定或更快速的求解算法，改进步长规则，并针对大规模网络设计求解器，以进一步降低最终间隙。

5 结论与未来研究

本研究提出一种新颖而简洁的解析方法，用于近似评估异质交通流动态交通网络中的路径边际成本（PMC）。准确计算 PMC

在混合交通条件下颇具挑战，因为不同车辆类别之间会相互作用并对彼此产生外部性；此外，当混合交通流接近通行能力时，也会出现相关的计算问题。为应对这些挑战，本研究将 PMC 分解为类内项和类间项，并使用根据异质路段动态推导出的转换因子来量化类间项，从而以易于处理的方式表示一个类别如何加剧另一类别所经历的拥堵。此外，我们明确考虑异质交通流接近通行能力时可能出现的不可微性，并纳入下界（次梯度）边际拥堵表示。这些 PMC 近似值直接用于求解系统最优动态交通分配的变分不等式表述，采用的标准迭代算法包括逐次平均法。

我们在合成需求的小型走廊网络和利用现实世界数据校准需求的大规模现实世界网络上，评估了所提出的方法。两种场景下的结果均表明，与仅纳入类别内影响的公式相比，纳入类别间PMC项始终能够提升系统最优解的质量。具体而言，由此得到的系统最优动态交通分配可产生更平滑、更高效的时空流量分布，并能更好地缓解跨类别拥堵外部性，同时大幅降低总出行成本，并在系统最优状态下形成更具竞争力的流量模式。此外，研究还表明，采用考虑异质流量不可微问题的下界次梯度，可以进一步降低系统总成本。这说明，采用与异质交通动态相一致的PMC近似，对于逼近真正的系统最优状态至关重要。

求解多类别基于路径的系统最优动态交通分配，是本研究所开发的异质 PMC 的一项直接应用。该 PMC 公式还可支持更广泛的异质交通网络模型，这些模型也是值得探索的未来研究方向。首先，异质交通时间估计、多类别交通仿真校准和动态起讫点需求估计均可从异质 PMC 信息中受益，因为这些问题从根本上取决于类别特定路径流的变化如何通过网络交通动态，在路段和路径之间传播。在起讫点需求估计、校准及其他反问题中，通常需要采用基于梯度或基于灵敏度信息的更新，以高效地使估计状态与现实世界观测相匹配（Ma 等人，2020；Liu 等人，2023b、2025；Liu 和 Yin，2025a、b）。从这一角度看，异质 PMC 为异质交通条件下的这些灵敏度提供了可处理的近似；当网络模型中存在多个车辆类别时，这有助于提升计算可扩展性和行为一致性（Liu 和 Qian，2024；Liu 等人，2024；Liu，2025）。当不同类别之间存在非对称交互（例如，与小型车辆相比，重型车辆造成的延误更大）时，采用同质 PMC 近似可能会使校准需求或参数产生偏差，而异质 PMC 则能够明确考虑这些类别间外部性，从而提高估计精度。

其次，异质 PMC 可自然地用于在异质网络模型中推导控制策略，包括定价、信号控制及其他干预措施；在这些问题中，目标函数通常取决于出行时间（或广义出行成本），而网络动态则作为约束。在此类双层优化问题的建模中，我们需要推导系统性能相对于影响路径流量的决策变量的梯度。其中一些梯度可以用路径流对出行时间的边际影响来表示，这正是 PMC 所近似的量（Liu et al., 2023a）。重要的是，所提出的 PMC 分解将其分为类内项和类间项，使控制变量能够区分类别，从而让控制策略辨别边际变化主要源于减少类内拥堵，还是缓解类间竞争。这在异质问题设定（Wu et al., 2024）中可能尤为关键，因为公平性、优先级分配或运营可能因类别而异。

第三，异质 PMC 为网络韧性分析提供了有用的指标，其目标是

量化网络受到扰动以及混合交通组成在不同类别之间发生变化时系统性能的变化。从概念上讲，PMC 衡量增加或移除某些路径流量时系统性能的边际恶化或改善，因此可作为一种具有可解释性的敏感性指标，用于识别网络脆弱点、关键路径，以及对时空拥堵模式贡献最大的特定车辆类别。这类特定类别的 PMC 信息对于混合交通条件下的韧性评估十分有价值，尤其是在扰动可能放大跨类别外部性时（例如，某一类别引发拥堵或溢出，从而对另一类别造成不成比例的损害）；异质 PMC 有助于刻画这些类别间影响机制，并支持制定有针对性的主动缓解策略。

此外，进一步研究可聚焦于强化异质 PMC 公式以及多类别 SO-DTA 的求解算法。首先，双类别公式可推广至多个车辆类别，同时保持大规模网络的计算可处理性。其次，所提出路径边际成本的下界/上界结构促使人们开发比标准 MSA 更先进的非光滑、基于次梯度的算法，以在接近通行能力时存在不可微性的情况下提高收敛速度和鲁棒性。

致谢

本研究的部分工作由美国国家科学基金会资助项目 CMMI-2528901 资助。ChatGPT-5.2 被用于协助提升本稿件写作的清晰度、简洁性和整体质量。

参考文献

Carey, M. (1987). 拥堵网络上的最优时变流量. 《运筹学》, 35(1):58–69.

Carey, M.（1992）。动态交通分配问题的非凸性。《交通研究*B*辑：方法论》，26(2):127–133。

Chabini, I.（1998）。交通应用中的离散动态最短路径问题：复杂性与最优运行时间算法。《交通研究记录》，1645(1):170–175。

Ghali, M. 和 Smith, M.（1995）。动态系统最优交通分配问题模型。《交通研究*B*辑：方法论》，29(3):155–170。

Han, L.、Ukkusuri, S. 和 Doan, K.（2011）。基于元胞传输模型的动态用户均衡互补性公式，包含出发时间选择、弹性需求和用户异质性。《交通研究*B*辑：方法论》，45(10):1749–1767。

Ke, Z.、Liu, J.、Zou, Q.、Yao, W.、Liu, Y.、Qian, S.、Owolabi, O. 等（2023）。干道友好型本地匝道计量控制系统的设计与演示。技术报告，马里兰州交通部州公路管理局。

Ke, Z., Zou, Q., Liu, J., and Qian, S. (2025). 不确定条件下的实时系统最优交通路径规划——物理模型能否提升强化学习？《交通研究*C*辑：新兴技术》, 173:105040.

Koch, J., Maxner, T., Amatya, V., Ranjbari, A., and Dowling, C. (2022). 参数化基本图的物理信息机器学习。*arXiv*预印本 *arXiv:2208.00880*. Liu, J. (2025). 利用异质数据的路缘空间感知网络模型：学习与优化. 博士论文，卡内基梅隆大学。Liu, J., Guarda, P., Niinuma, K., and Qian, S. (2024). 利用高分辨率卫星影像改进多类别中观网络模型。在*2024*年*IEEE*第*27*届智能交通系统国际会议（*ITSC*），第733–740页。电气电子工程师学会。Liu, J., Guarda, P., Niinuma, K., and Qian, S. (2025). 利用高分辨率卫星影像数据增强的可扩展动态起讫点需求估计。*arXiv*预印本 *arXiv:2506.22499*. Liu, J., Ma, W., and Qian, S. (2023a). 管理网约车上下客的最优路缘定价。《交通研究*C*辑：新兴技术》, 146:103960. Liu, J. and Qian, S. (2024). 动态网络中的多模式路缘空间使用建模。《交通科学》, 58(6):1277–1299. Liu, Z. and Yin, Y. (2025a). 基于经验数据构建交通网络均衡模型：逆向学习视角。可在*SSRN 5995274*获取. Liu, Z. and Yin, Y. (2025b). 用户均衡的端到端学习：表达能力、泛化与优化。《交通科学》. Liu, Z., Yin, Y., Bai, F., and Grimm, D. K. (2023b). 利用隐式神经网络端到端学习用户均衡。《交通研究*C*辑：新兴技术》, 150:104085. Lo, H. (1999). 一种涵盖元胞传输模型的动态交通分配建模形式。载于第*14*届交通与交通流理论国际研讨会 *Transportation*。Long, J. and Szeto, W. Y. (2019). 一般网络中基于路段的系统最优动态交通分配问题。《运筹学》, 67(1):167–182. Long, J., Wang, C., and Szeto, W. (2018). 动态系统最优路径与出发时间联合选择问题：基于交叉口转向的建模形式及其比较。《交通研究*B*辑：方法论》, 115:166–206. Ma, W., Pi, X., and Qian, S. (2020). 通过计算图上的前向-后向算法估计多类别动态起讫点需求。《交通研究*C*辑：新兴技术》, 119:102747. Merchant, D. K. and Nemhauser, G. L. (1978a). 动态交通分配问题的模型与算法。《交通科学》, 12(3):183–199. Merchant, D. K. and Nemhauser, G. L. (1978b). 动态交通分配模型的最优性条件。《交通科学》, 12(3):200–207. Peeta, S. and Mahmassani, H. S. (1995). 拥堵网络中的系统最优与用户均衡时变交通分配。《运筹学年鉴》, 60(1):81–113.

Qian, Z. 和 Zhang, H. M.（2011）。具有排队回溢的网络中个体路径边际成本的计算。《交通研究记录》， 2263(1):9–18。Qian, Z. S., Li, J., Li, X., Zhang, M. 和 Wang, H.（2017）。异质交通流建模：一种实用方法。《交通研究B辑：方法论》， 99:183–204。Qian, Z. S., Shen, W. 和 Zhang, H.（2012）。有排队回溢和无排队回溢情况下的系统最优动态交通分配：其基于路径的公式化及通过近似路径边际成本求解。《交通研究B辑：方法论》， 46(7):874–893。Ramadurai, G., Ukkusuri, S. V., Zhao, J. 和 Pang, J.-S.（2010）。异质通勤者单瓶颈模型的线性互补公式化。《交通研究B辑：方法论》， 44(2):193–214。Shen, W., Nie, Y. 和 Zhang, H. M.（2007）。路径边际成本分析及其与动态系统最优交通分配的关系。载于《第17届交通与交通理论国际研讨会 交通》。Ukkusuri, S. V., Han, L. 和 Doan, K.（2012）。一般交通网络中基于路径的元胞传输模型下的动态用户均衡。《交通研究B辑：方法论》， 46(10):1657–1684。Wu, M., Wang, B., Yin, Y. 和 Lynch, J. P.（2024）。参与式交通控制：利用网联自动驾驶车辆提升网络效率。《交通研究C辑：新兴技术》， 166:104757。Zhang, P. 和 Qian, S.（2020）。基于路径的系统最优动态交通分配：一种次梯度方法。《交通研究B辑：方法论》， 134:41–63。Zhu, F. 和 Ukkusuri, S. V.（2013）。具有非阻滞流的基于元胞的动态系统最优模型。《交通研究C辑：新兴技术》， 36:367–380。Ziliaskopoulos, A. K.（2000）。单目的地系统最优动态交通分配问题的线性规划模型。《交通科学》， 34(1):37–49。