arXiv:2602.05580v1 [cs.CE] 5 Feb 2026

通过主成分分析与受 MTP_2 约束的高斯图模型揭示金融时间序列中的残差因子

Koshi Watanabe[1] , **Ryota Ozaki**[2] , **Kentaro Imajo**[2] 与 **Masanori Hirano**[21]北海道大学[2]Preferred Networks Inc. koshi.watanabe.504@gmail.com, { ryota55ozaki,imos}@preferred.jp, research@mhirano.jp

摘要

金融时间序列通常被分解为捕捉各资产共同价格变动的市场因子，以及反映资产特异性偏离的残差因子。为对冲市场整体风险（如 COVID-19 冲击），利用残差因子的交易策略已被证明是有效的。然而，金融时间序列往往呈现近奇异特征结构，这阻碍了对残差因子进行稳定而准确的估计。本文提出一种从金融时间序列中提取残差因子的方法，该方法分层应用主成分分析（PCA）与高斯图模型（GGM）。我们的分层方法在稳定估计与消除仅靠 PCA 无法完全去除的因子之间取得平衡，从而能够高效提取残差因子。我们使用受二阶多元全正（MTP_2）约束的 GGM，以刻画金融数据中正相关占主导的特征。我们的分析证明，所得残差因子比仅使用 PCA 得到的残差因子具有更强的正交性。在测试期与训练集长度各不相同的多项实验中，所提出的方法始终使残差因子获得更优的正交性。对标准普尔500指数与 TOPIX 500 成分股的回测进一步表明交易表现有所改善，包括更高的夏普比率。

1 引言

金融市场呈现复杂的价格动态，既受整体市场风险驱动，也受资产特有风险影响。图 1 展示了谷歌和苹果公司的累计股票收益。两条序列走势相近，在相似的时间上涨和下跌，但各自也表现出独特的资产特有偏离。经典因子模型（如资本资产定价模型 [Sharpe, 1964] 以及 Fama–French模型 [Fama 和 French, 1992], ）将这一现象形式化为把收益分解为影响众多资产的共同因子和各资产独有的残差因子 。

识别残差因子一直备受学术研究和实践领域的关注。例如，近期



图 1：谷歌（纳斯达克：GOOGL）和苹果公司（纳斯达克：AAPL）2015–2019 年的累计股票收益。

研究表明，残差因子有助于构建能够对冲共同市场因子的投资组合 [Blitz 等，2011；Imajo 等， 2021]。这些发现表明，准确提取残差因子对于交易和市场分析具有巨大潜力。

由于残差因子在不同资产之间相互独立，因此可以通过多元分析识别它们。恢复独立因子的两种常用方法是**白化** [Kessy 等，2018] 和**独立成分分析（ICA）** [Hyv¨arinen 等, 2001; Hyv¨arinen 等，2023]。白化会使数据协方差的特征值相等，而独立成分分析通常会在此之后旋转白化后的数据，以实现统计独立性。这些方法已在计算机视觉和语音识别等领域证明行之有效 [Coates 等, 2011; Huang 等, 2018; Choi 等， 2005]。然而，金融数据流往往会产生近乎奇异的协方差矩阵，而将与资产特有波动相关的小特征值调整为相等，可能导致数值不稳定性。

相比之下，研究人员提出了基于套利定价理论的方法，通过应用**主成分分析（主成分分析）**去除主导市场成分，从而提取残差因子 [Ross, 1976; Chamberlain and Roth- schild， 1983]。这些方法通过去除与大特征值相关联的特征向量，能够稳健地处理近奇异协方差结构。基于 PCA的方法已被广泛应用于众多研究中 [Onatski, 2010; Ahn and Horenstein, 2013; Bai and Wang, 2016] ，如今已被视为提取市场因子和残差因子的基础方法。

然而，在估计弱因子时，基于PCA的方法的准确性可能会降低 [Chudik等，2011年；

Onatski，2012年；Bai 和 Wang， 2016]。将随机矩阵理论应用于金融时间序列的研究 [Laloux 等，1999] 发现，行业内相关性远弱于全市场相关性 [Plerou 等，2002年；Pan 和 Sinha， 2007]。基于PCA的方法通常依赖信息准则，通过评估各因子的相对解释力来确定成分数量。因此，与相对较弱的行业内相关性相关的因子可能会被低估，从而导致残差因子的识别效果下降。

为解决这一问题，我们采用高斯图模型（GGM）作为一种有效的方法 [Yuan 和 Lin，2007；Friedman 等， 2008]。高斯图模型广泛用于推断稀疏的偏相关模式，并且非常适合在使用主成分分析控制主要因子后，对收益数据中的残差依赖关系进行建模。此外，先前的研究记录了正的跨资产相关性 [Sharpe，1964；Chamberlain 和 Rothschild，1983；Fama 和 French， 1992],这为推断剩余的相关结构提供了有用的归纳偏置。

本文提出了一种识别金融时间序列中残差因子的新方法：首先应用主成分分析，然后剔除由受二阶多元全正性（MTP_2）约束的高斯图模型估计出的因子 [Lauritzen等，2019；Ying 等， 2023]。近年来，MTP_2 约束因其易处理性和广泛的应用而受到研究 [Slawski 和 Hein，2015；Lauritzen等，2019；Agrawal等，2022；Ying等， 2023] 该约束限制了资产间协方差的类别，使所有偏相关均为非负。这一限制与金融数据流的经验特征相符，并已在协方差估计中得到验证 [Agrawal 等， 2022]。

我们通过与主成分分析方法进行理论比较，并使用来自两个股票市场——标准普尔500指数和TOPIX 500的成分股历史数据开展实验，展示了我们的分析结果。首先，在 MTP_2 假设下，我们证明，所提出的方法得到的残差因子比通过主成分分析得到的残差因子具有更强的正交性。这一发现与确定因子数量的方法无关 [Bai and Ng, 2002; Onatski, 2010; Ahn and Horenstein, 2013], 这表明，该方法可以推广至其他基于主成分分析的因子估计研究。在实验中，我们使用十余年的历史数据进行回测。我们比较了所提出的方法与主成分分析或其他白化方法得到的残差收益的正交性，证实理论结果在实证中同样成立。我们还利用残差因子进行逆向交易，结果表明，所提出的方法表现更优，包括取得更高的夏普比率。所有实验均通过滚动多个评估期进行了全面开展。

本**研究的主要贡献**如下：

- 我们提出了一种从金融时间序列中提取残差因子的新方法，可实现准确且稳健的估计。
- 在适用于金融时间序列的假设下，该方法产生的残差因子在各资产之间比主成分分析所得因子更具正交性。
- 使用标准普尔500指数和TOPIX 500成分股历史数据的实验表明，在多个时间段内，正交性更高，反转策略的表现也更强。

2 预备知识

2.1 问题设定

令 $p_{n,t}$ 表示资产 n 在时间 t的价格。相应的（算术）收益定义为 $x_{n,t} = p_{n,p_n^{t+1},t} - 1$。令 $\mathbf{x}_{n} = [x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,T}]^\top \in \mathbb{R}^T$表示资产 n 在连续 T 个时期内的收益向量。本研究考察收益矩阵 $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \cdots \mathbf{x}_N]^\top \in \mathbb{R}^{N\times T}$

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N$，该矩阵由 N 个资产的收益序列构成，并研究如何从时间 t的跨资产收益向量中提取残差因子，记为 $\mathbf{x}_{\cdot,t} \in \mathbb{R}^N$。

在包括金融时间序列在内的变化不规则数据集中，非线性变换容易导致过拟合，并造成不稳定的样本外表现。因此，本研究旨在估计变换矩阵 $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N\times N}$，以导出残差矩阵 $\mathbf{R} = \mathbf{W}\mathbf{X}$。我们的目标是最小化资产 i 与 j之间皮尔逊相关系数绝对值，其定义为 $\frac{|\mathbf{r}_i^\top \mathbf{r}_j|}{\|\mathbf{r}_i\|_2 \|\mathbf{r}_j\|_2}$。

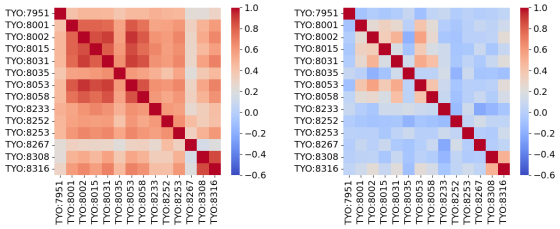
2.2 相关研究

最直接的方法是白化（Hyv¨arinen等，2001；Kessy等，2018；Hyv¨arinen等， 2023],），即估计一个变换矩阵 $\mathbf{W}$ ，使得在训练数据中$\mathbf{R}\mathbf{R}^\intercal = \mathbf{I}$。尽管这种方法展现出一定潜力，但在金融时间序列的特征值谱变化显著时，为均衡方差而计算特征值的倒数，是数值不稳定性的主要来源。一种可能的解决方案是采用收缩估计（Ledoit 和 Wolf，2004；Chen等， 2010], ），以稳定特征值。尽管这种方法提高了数值稳定性，却可能同时降低残差因子的估计准确性。

基于主成分分析，通过从收益率序列中剔除最大主成分的贡献来获得残差因子（Bai 和 Ng，2002；Fan等，2013；Imajo等，2021]）。这种方法通常使用信息准则来确定统计显著因子的数量，并将其余成分视为残差因子。已有若干扩展方法（Bai 和 Wang， 2016],），例如引入新的信息准则（Onatski，2010；Ahn 和 Horenstein， 2013] ），或对时间变动进行建模（Ahn等，2013；Bai 和 Li， 2021]）。尽管我们所提出的方法以最基本的方法为基础（Bai 和 Ng， 2002], ），但分析可以自然地扩展到这些替代设定。

3 基于信息准则的主成分分析

为说明基于 PCA 的因子去除，我们首先将收益矩阵的紧致奇异值分解（SVD）定义为 $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top$，其中 $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N\times M}$ 和$\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{T\times M}$ 是满足正交归一条件的矩阵



(a) 原始收益　　(b) PCA残差因子

图2:　TOPIX 500资产之间的相关矩阵

（2024年）。

$\mathrm{U}^\top\mathrm{U} = \mathrm{V}^\top\mathrm{V} = \mathrm{I}$，其中 $M = \min(N, T)$。矩阵 $\mathbf{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_M)$ 为对角矩阵，其对角元素对应按降序排列的奇异值，即 $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_M > 0$。等价的表示形式为 $\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{M} \sigma_i \mathrm{u}_{:,i}\mathrm{v}_{:,i}^\top$，其中 $\mathrm{u}_{:,i} \in \mathbb{R}^N$ 和 $\mathrm{v}_{:,i} \in \mathbb{R}^T$ 分别表示 U 和 V 的第 i 列向量。与第k个奇异值对应的因子提取可用线性投影算子表示。具体而言，由于满足正交归一条件 $\mathrm{u}_{:,i}^\top \mathrm{u}_{:,j} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j), \end{cases}$ 对收益矩阵左乘 $\mathrm{u}_{:,k}\mathrm{u}_{:,k}^\top \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 可得

$$\mathbf{u}_{:,k}\mathbf{u}_{:,k}^\top \mathbf{X} = \sum_{i=1}^{M} \sigma_i \mathbf{u}_{:,k}\mathbf{u}_{:,k}^\top \mathbf{u}_{:,i}\mathbf{v}_{:,i}^\top = \sigma_k \mathbf{u}_{:,k}\mathbf{v}_{:,k}^\top. \tag{1}$$

基于上述方程，此步骤提取对应于前 k 个奇异值的分量。通过定义$\mathbf{U}_k = [\mathbf{u}_{:,1}, \mathbf{u}_{:,2}, \ldots, \mathbf{u}_{:,k}] \in \mathbb{R}^{N\times k}$，其中包含左奇异向量矩阵的前 k 个列向量，我们构造一个线性投影，以去除相应的主因子：$\mathbf{W}_{\mathrm{PCA}} = \mathbf{I} - \mathbf{U}_k\mathbf{U}_k^\top$。

为确定成分数量 k，该方法采用信息准则。具体而言，选择 k 使其最大化

$$IC_k = \log \sum_{i=k+1}^{M} \sigma_i^2 + k\frac{\log(M)}{M}. \tag{2}$$

对于与较小奇异值相关的纯特质波动，我们有 $\sum \sigma_i^2 \approx 0$，这意味着式（2）中的第一项取值极小。因此，最大化式（2）能够选出与残差因子对应的奇异向量，同时缓解数值不稳定性，并降低由较小特征值导致的过拟合风险。

然而，该方法存在一个局限性，即无法移除相对较弱的因子。图2展示了TOPIX500成分股的（a）原始收益率和（b）通过最大化公式（2）获得的PCA残差因子的相关矩阵。这些结果表明，尽管PCA残差因子成功消除了市场整体因子，但仍存在一些偏相关（例如TYO:8001、TYO:8002、TYO:8015和TYO:8031之间），且这些资产属于同一行业板块（例如，TYO:80**表示贸易公司板块）。这一发现表明，基于信息准则的方法无法消除相对较弱的因子，例如行业特定因子，在识别完全独立的残差因子方面仍有改进空间。

4 所提出的方法：MTP$_2$ 基于GGM的因子移除

4.1 优化问题

所提出的方法采用高斯图模型（GGM）去除 PCA 未能去除的共同因子。令$\mathbf{Z} = \mathbf{W}_{\mathrm{PCA}}\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N\times T}$ 表示经过基于 PCA 的因子去除后的收益矩阵。高斯图模型假设跨资产收益向量$\mathbf{z}_{:,t}$ 服从正态分布 $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Lambda}^{-1})$，我们的目标是估计精度矩阵 $\mathbf{\Lambda}$。可以对高斯图模型施加额外约束，作为归纳偏置。由于金融时间序列常呈现正相关，如图2所示，该方法对精度矩阵$\mathbf{\Lambda}$ 施加约束，使其属于 $N \times N$对称M-矩阵 [Plem- mons, 1977] $\mathcal{M}^N$:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} = \max_{\mathbf{\Lambda}} &\left\{ \log|\mathbf{\Lambda}| - \frac{1}{T}\mathrm{tr}\left(\mathbf{\Lambda}\mathbf{Z}\mathbf{H}\mathbf{Z}^\top\right) \right\}, \\ &\text{s.t.} \quad \mathbf{\Lambda} \in \mathcal{M}^N. \end{aligned} \tag{3}$$

其中，$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{1}{T}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top$ 是中心化矩阵，而 $\mathcal{M}^N$表示对称M矩阵的集合，其定义为非对角元素非正的半正定矩阵。

我们考察M矩阵约束的含义。$\mathbf{\Lambda}$ 非对角元素的非正性确保任意两个资产之间的偏相关系数$\rho_{i,j} = -\frac{\Lambda_{ij}}{\sqrt{\Lambda_{ii}\Lambda_{jj}}}$为正。

在某个假设情境中，若已知特定时点某些股票的价格，我们假设其他股票之间呈正相关的走势可以预测，而缺乏正相关的走势则难以预料。这体现了共同市场假说 [Fama 和 French, 1992] 即资产价格会在特定行业或股票群组内同步变动。因此，施加M矩阵约束，通过假设资产之间存在理性动态关系，有助于提取共同因子。

4.2 优化算法

公式（3）的解无法以闭式形式求得，通常使用基于梯度的方法求解 [Ying等人, 2023]。我们采用投影梯度法求解该问题。该算法沿梯度方向迭代更新 $\mathbf{\Lambda}$，随后将其投影回可行域 $\mathcal{M}^N$（**算法1**）。投影算子 $\Pi_{\mathcal{M}^N}(\cdot)$是使更新后的矩阵与可行集之间的 Frobenius 范数最小的最近距离投影:

$$\Pi_{\mathcal{M}^N}(\mathbf{\Lambda}) = \arg\min_{\mathbf{Y}\in\mathcal{M}^N} ||\mathbf{\Lambda} - \mathbf{Y}||_{\mathrm{F}}^2. \tag{4}$$

注意，式（4）中的投影等价于近端算子，当示性函数 $1_{\mathcal{M}^N} =$

算法1 问题（3）的投影梯度上升。

1: $\mathbf{\Lambda}^{(0)} = \Pi_{\mathcal{M}^N}(\mathbf{ZHZ}^\top)$，学习率 α，数量训练轮次 O ITER，$k \leftarrow 0$
2: **当** $k <$ O ITER**执行**
3: $\quad \mathbf{\Lambda}' \leftarrow \mathbf{\Lambda}^{(k)} + \alpha \nabla f(\mathbf{\Lambda}^{(k)})$
4: $\quad \mathbf{\Lambda}^{(k+1)} \leftarrow \Pi_{\mathcal{M}^N}(\mathbf{\Lambda}')$
5: $\quad k \leftarrow k + 1$
6: **结束循环**
7: **返回** $\mathbf{\Lambda}^{(k)}$

$\begin{cases} 0 & (\mathbf{\Lambda} \in \mathcal{M}^N) \\ \infty & \text{（否则）} \end{cases}$ 在问题（3）中用作惩罚项。这保证了**算法1**至少收敛到一个鞍点。

然而，公式（4）也无法通过解析方法求得闭式解。为解决这一问题，我们采用 Dykstra 投影法 [Boyle and Dykstra, 1986], 该方法计算多个凸集交集上的投影（**算法2**）。集合 $\mathcal{M}^N$ 可表示为 N维半正定矩阵锥 $\mathcal{S}_+^N$ 与非正对角元素的 N维矩阵集合 $\mathcal{Z}^N$的交集，如下所示:

$$\mathcal{M}^N = \mathcal{S}_+^N \cap \mathcal{Z}^N. \tag{5}$$

到每个凸集上的投影表示如下:

$$\Pi_{\mathcal{S}_+^N}(\mathbf{\Lambda}) = \arg\min_{\mathbf{Y} \in \mathcal{S}_+^N} ||\mathbf{\Lambda} - \mathbf{Y}||_{\mathrm{F}}^2, \tag{6}$$

$$\Pi_{\mathcal{Z}^N}(\mathbf{\Lambda}) = \arg\min_{\mathbf{Y} \in \mathcal{Z}^N} ||\mathbf{\Lambda} - \mathbf{Y}||_{\mathrm{F}}^2. \tag{7}$$

虽然计算 $\Pi_{\mathcal{M}^N}(\cdot)$ 在计算上颇具挑战，但其组成部分的投影 $\Pi_{\mathcal{S}_{++}^N}(\cdot)$ 和 $\Pi_{\mathcal{Z}^N}(\cdot)$ 均可写成闭式表达。

定理1. 设 $\mathbf{\Lambda}$ 为一个 $N \times N$ 方阵，其特征值分解为 $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{Q\Omega Q}^\top$。则投影 $\Pi_{\mathcal{S}_{++}^N}(\cdot)$ 和 $\Pi_{\mathcal{Z}^N}(\cdot)$ 为

$$\Pi_{\mathcal{S}_{++}^N}(\mathbf{\Lambda}) = \mathbf{Q\Omega}_+\mathbf{Q}^\top, \tag{8}$$

$$\Pi_{\mathcal{Z}^N}(\mathbf{\Lambda}) = \begin{cases} \min(\Lambda_{i,j}, 0) & (i \neq j), \\ \Lambda_{i,j} & (i = j), \end{cases} \tag{9}$$

其中$\mathbf{\Omega}_+ = \mathrm{diag}(\max(\omega_1, 0) \ldots, \max(\omega_N, 0))$ 表示包含正特征值的对角矩阵。

证明。 见附录A。 □

我们通过迭代应用这些算法来求解公式（3）。

4.3 用于因子移除的投影

我们使用**算法1** 和**算法2**获得最优 $\mathbf{\Lambda}$ 。随后，该方法将精度矩阵转换回收益空间中的信息。为此，我们采用收益的条件均值，其表达式为

$$\mathbb{E}[z_{i,t} \mid \mathbf{z}_{-i,t}] = -\sum_{j \neq i} \frac{\Lambda_{i,j}}{\Lambda_{i,i}} z_{j,t}, \tag{10}$$

算法2 用于$\Pi_{\mathcal{M}^N}(\mathbf{\Lambda})$的Dykstra投影法

1: $\mathbf{\Lambda}'^{(0)} \leftarrow \mathbf{\Lambda}'$, $\mathbf{E}_S^{(0)} \leftarrow \mathbf{O}$, $\mathbf{E}_Z^{(0)} \leftarrow \mathbf{O}$, number of iterations I_ITER, $k \leftarrow 0$
2: **while** $k <$ I 迭代 **do**
3: $\quad \mathbf{A}^{(k)} \leftarrow \Pi_{\mathcal{S}_+^N}\left(\mathbf{\Lambda}'^{(k)} + \mathbf{E}_S^{(k)}\right)$
4: $\quad \mathbf{E}_S^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{\Lambda}'^{(k)} + \mathbf{E}_S^{(k)} - \mathbf{A}^{(k)}$
5: $\quad \mathbf{\Lambda}'^{(k+1)} \leftarrow \Pi_{\mathcal{Z}^N}\left(\mathbf{A}^{(k)} + \mathbf{E}_Z^{(k)}\right)$
6: $\quad \mathbf{E}_Z^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{A}^{(k)} + \mathbf{E}_Z^{(k)} - \mathbf{\Lambda}'^{(k+1)}$
7: $\quad k \leftarrow k + 1$
8: **end while**
9: **return** $\mathbf{\Lambda}'^{(k)}$

其中$\mathbf{z}_{-i,t}$ 表示从$\mathbf{z}_{:,t}$中删除第 i个元素后得到的向量。公式（10）等价于基于所有其他资产的因子，预测资产 i 在时刻 t 的因子。该方法将这一预测收益视为与资产 i 相关联的共同因子，因为它可以由其他相关收益估计得到。因此，剩余的残差因子如下所示:

$$z_{i,t} - \mathbb{E}[z_{i,t} | \mathbf{z}_{-i,t}] = \sum_{j=1}^{N} \frac{\Lambda_{i,j}}{\Lambda_{i,i}} x_{j,t}. \tag{11}$$

令 $\mathbf{\Lambda}$ 的对角元素为 $\mathbf{D}$。则根据公式（11）进行的变换可写为 $\mathbf{W}_{\mathrm{GGM}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{\Lambda}$。

由上可知，该方法通过分层采用主成分分析和基于 MTP_2 的移除来提取残差因子，所得线性投影算子为:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \mathbf{W}_{\mathrm{GGM}}\mathbf{W}_{\mathrm{PCA}} \\ &= \mathbf{D}^{-1}\mathbf{\Lambda}(\mathbf{I} - \mathbf{U}_k\mathbf{U}_k^\top). \end{aligned} \tag{12}$$

我们的方法所得的残差因子也表示为:

$$\mathbf{R} = \mathbf{W}_{\mathrm{GGM}}\mathbf{W}_{\mathrm{PCA}}\mathbf{X} = \mathbf{W}_{\mathrm{GGM}}\mathbf{Z} \tag{13}$$

4.4 理论分析

本小节考察由所提出的方法得到的残差因子的理论性质。我们用 $\mathrm{cov}(\cdot)$ 表示给定变量的样本协方差矩阵，用 $\mathrm{cor}(\cdot)$ 表示其样本相关矩阵。两个变量之间的样本协方差记为 $\mathrm{cov}(\cdot, \cdot)$。首先给出推导这些结果所需的唯一假设。

假设 1。 我们假设$\mathbf{Z}$的协方差矩阵满足

$$\mathrm{cov}(\mathbf{Z}) = \mathbf{\Lambda}^{-1}.$$

换言之，由问题 (3)估计得到的协方差矩阵等于$\mathbf{Z}$的协方差矩阵。

注意，无约束问题（3）的驻点满足 $\mathbf{\Lambda}^{-1} = \frac{1}{T}\mathbf{ZHZ}^\top = \mathrm{cov}(\mathbf{Z})$，而 MTP_2条件对于金融时间序列尤为自然。因此，前述假设有充分依据。

在此假设下，我们得到关于$\mathbf{R}$与$\mathbf{Z}$之间协方差的以下性质。

表 1：不同训练/测试期间跨资产相关性的 ℓ_1 和 ℓ_2 均值。粗体表示最佳结果，下划线表示次佳结果。

资产	训练开始时间（3 年） 验证开始时间（1年）	2015/01 2018年1月	2016/01 2019年1月	2017/01 2020年1月	2018年1月 2021年1月	2019年1月 2022年1月	2020年1月 2023年1月	2021年1月 2024年1月
标准普尔500指数	ℓ_1 均值							
	ICA	0.2085	0.1995	0.2686	0.1917	0.2001	0.2038	0.1937
	白化	0.0763	0.0780	0.1345	0.0771	0.0811	0.0783	0.0776
	收缩白化	0.0709	0.0729	0.1301	0.0731	0.0772	0.0742	0.0727
	PCA	0.0670	0.0704	0.1384	0.0678	0.0747	0.0696	0.0683
	主成分分析+高斯图模型	**0.0639**	**0.0658**	**0.1270**	**0.0649**	**0.0694**	**0.0663**	**0.0650**
	ℓ_2 均值							
	ICA	0.0727	0.0657	0.1101	0.0591	0.0636	0.0661	0.0616
	白化	0.0092	0.0097	0.0295	0.0093	0.0104	0.0097	0.0096
	收缩白化	0.0080	0.0085	0.0278	0.0084	0.0095	0.0088	0.0085
	PCA	0.0076	0.0084	0.0312	0.0076	0.0093	0.0082	0.0079
	主成分分析+高斯图模型	**0.0068**	**0.0072**	**0.0262**	**0.0068**	**0.0078**	**0.0073**	**0.0071**
TOPIX 500	ℓ_1 均值							
	ICA	0.1874	0.1767	0.2318	0.1912	0.1865	0.1805	0.1829
	白化	0.0809	0.0810	0.1177	0.0792	0.0836	0.0824	0.0868
	收缩白化	0.0748	0.0747	0.1126	0.0721	0.0772	0.0752	0.0806
	PCA	0.0651	0.0655	0.1102	0.0630	0.0703	0.0654	0.0745
	主成分分析+高斯图模型	**0.0645**	**0.0652**	**0.1056**	**0.0620**	**0.0684**	**0.0651**	**0.0731**
	ℓ_2 均值							
	ICA	0.0557	0.0501	0.0822	0.0575	0.0554	0.0524	0.0531
	白化	0.0103	0.0103	0.0220	0.0098	0.0110	0.0107	0.0119
	收缩白化	0.0088	0.0088	0.0204	0.0082	0.0094	0.0090	0.0103
	PCA	0.0070	0.0071	0.0199	0.0066	0.0083	0.0072	0.0092
	主成分分析+高斯图模型	**0.0068**	**0.0069**	**0.0180**	**0.0062**	**0.0076**	**0.0071**	**0.0088**

命题 1. 在进行**主成分分析**后，残差因子$\mathbf{R}$与*PCA*残差因子$\mathbf{Z}$之间的协方差满足

$$\mathrm{cov}(\mathbf{R}, \mathbf{Z}) = \mathbf{D}^{-1}, \tag{14}$$

其中 $\mathbf{D}$ 是一个由 $\mathbf{\Lambda}$构成的对角矩阵。

证明。 见附录 B。 □

命题 1 意味着残差因子$\mathbf{R}$ 与 PCA残差因子正交。$\mathbf{R}$ 表示$\mathbf{Z}$ 中无法由其他资产解释、且为每项资产所特有的部分。

接下来，我们给出以下不等式，涉及 PCA残差因子与所提出的方法得到的因子之间的相关性。

命题 2。 *PCA*残差因子$\mathbf{Z}$ 的相关矩阵与所提出的方法的残差因子$\mathbf{R}$的相关矩阵满足

$$|\mathrm{cor}(\mathbf{R})| \leq |\mathrm{cor}(\mathbf{Z})|. \tag{15}$$

证明。 见附录 C。 □

命题 2表明，在主成分分析之后引入基于高斯图模型的去除，可以降低跨资产相关性，从而使残差因子更加正交。如前所述，当残差因子被解释为由资产特有风险驱动的波动时，残差因子之间的相关性越低越理想。因此，这一性质支持了所提出方法的有效性。

5 实验

5.1 实验设置

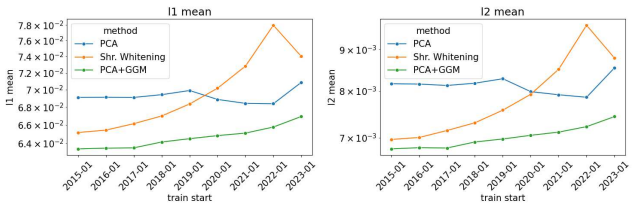
我们根据标准普尔500指数（美国）和 TOPIX 500（日本）成分股的收盘价构建了日收益序列。随后，将所得收益序列划分为多个训练期和测试期，用于各项实验设置。

我们将所提出的方法与以下方法进行了比较:

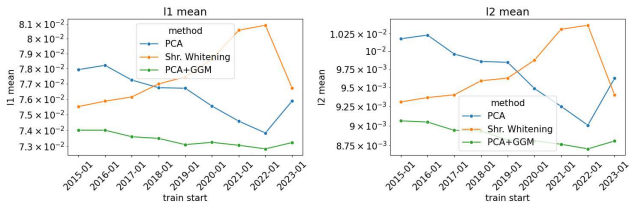
•**独立成分分析**：独立成分分析（ICA）是一种广泛使用的正交化方法，它根据峰度计算变换。在本研究中，我们采用了常用的 Fast ICA 算法 [Hyv¨arinen等人, 2001]。

• **白化**：白化是一种寻找变换的方法，可使给定数据正交化，并被认为有助于获得相互独立的残差因子。在本研究中，我们采用了 ZCA 白化 [Kessy 等人, 2018], 该方法在收益空间中进行正交化。

•**收缩白化（收缩白化）**：标准白化需要对特征值取倒数，因此



(a) 标准普尔500指数



(b) TOPIX 500

图3：不同训练数据期限下跨资产相关性的 ℓ_1 均值和 ℓ_2 均值。横轴表示训练期的起始时间戳。向右移动表示训练期更短。

在处理奇异矩阵时表现不稳定。为了解决这一问题，我们比较了一种将 OAS收缩估计量 [Chen等人，2010] 应用于协方差矩阵的方法。

- **主成分分析**：作为基线，我们采用了所提方法中使用的基于信息准则的残差因子提取方法。与主成分分析进行比较，可以验证新引入的基于GGM的因子的有效性。

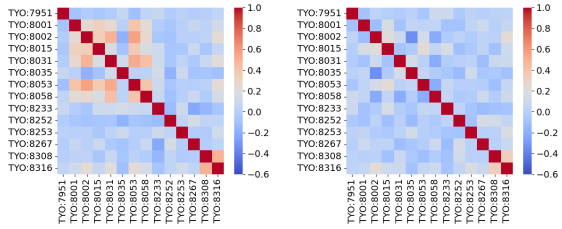
5.2 基于滑动测试窗口的评估

本实验评估了各方法在2015年至2024年多个训练-测试划分上的表现。我们定义了三年训练窗口（例如2015/01–2017/12），随后是一年测试窗口（例如2018/01–2018/12）。变换矩阵在训练期估计，并在测试期保持固定。我们通过跨资产相关性的 ℓ_1 均值（衡量绝对相关幅度）和 ℓ_2 均值（强调较大相关性的影响）评估测试期内残差因子的正交性。所有实验均重复十次，并报告平均结果以供比较。

表1分别总结了标准普尔500指数和TOPIX500的结果。对于这两个数据集，未处理近奇异特征结构的独立成分分析和白化方法始终产生较高的跨资产相关性。相比之下，采用OAS估计量的收缩白化方法，其跨资产相关性低于标准白化方法，这证实了处理近奇异性有助于提高金融时间序列的正交性。PCA残差因子进一步降低了相关性，表明去除高方差成分能够提升残差因子的质量。所提出的方法在每个样本期内都取得了最低的相关性，证明其在不同市场体制下均有效。

5.3 不同训练数据期限下的评估

接下来，我们考察预测精度如何随训练窗口跨度变化。我们使用2015年1月至2023年12月的数据进行训练，并使用2024年1月至2024年12月的数据进行测试，随后逐次将训练窗口缩短一年。所有实验均重复十次。根据前一项实验中观察到的表现，并为确保图表易于阅读，我们在本次实验中采用主成分分析和 Shr.Whitening 作为基线进行比较



(a) 主成分分析

(b) 主成分分析+高斯图模型

图4：相关矩阵的消融研究（训练期：2020/01–2023/12，测试期：2024/01–2024/12）。

。每年约包含250条时间序列，因此，当仅使用2022年1月至2023年12月或2023年1月至2023年12月作为训练期时，样本协方差矩阵会变得奇异。

图3展示了结果。在所有图中，横轴表示训练开始时间。位置越靠右，表示训练窗口越短、训练样本越少。在所有验证期内，所提出的方法在相关矩阵的 ℓ_1和 ℓ_2 均值指标上均优于主成分分析和收缩白化方法。这表明，无论训练窗口的长度如何，残差因子都能保持更优的正交性。值得注意的是，依赖收缩估计的收缩白化方法，其表现随着训练窗口缩短而急剧下降。这一趋势表明，随着协方差估计变得病态（即接近奇异），收缩引入的误差会增加。尽管在训练窗口较长时，收缩白化方法优于主成分分析，但所提出的方法在所有设置下始终优于两者，凸显了基于层次化高斯图模型的方法的有效性。

图4报告了对在2020年1月–2023年12月时间窗口内训练的模型所生成的相关矩阵进行比较的消融研究。为清晰起见，每个相关矩阵仅展示其中的一个子集。在图4（a）所示的主成分分析结果中，可以明显观察到块结构相关模式。该区块对应于股票代码以 TYO:80** 开头的贸易公司，表明主成分分析提取的残差因子未能完全消除行业内部相关性。相比之下，图4（b）展示了所提出方法的结果，其中行业相关性得到了有效消除，证实了该方法的有效性。

此外，还针对随机选取的股票进行了实验，

表2：残差因子在标准普尔500指数和TOPIX 500上的表现。夏普比率（SR）越高越好，而最大回撤（MDD）和条件风险价值（CVaR）越低越好。最佳值以粗体显示，次佳值以下划线标出。

数据划分	方法	S&P SR ↑	S&P 最大回撤 ↓	S&P 条件风险价值 ↓	TPX SR ↑	TPX 最大回撤 ↓	TPX 条件风险价值 ↓
训练 2012/01-2016/12 Test 2017/01-2021/12	基线	0.4015	0.0865	0.0066	0.0693	0.0934	0.0055
	PCA	0.7601	0.0531	0.0039	0.5242	0.0421	0.0032
	收缩白化	0.8164	0.0481	0.0039	0.5687	0.0399	0.0030
	主成分分析+高斯图模型	**0.9022**	**0.0441**	**0.0034**	**0.5992**	**0.0378**	**0.0030**
训练 2013/01-2017/12 Test 2018/01-2022/12	基线	0.4396	0.0895	0.0073	0.1184	0.0965	0.0059
	PCA	0.6845	0.0619	0.0046	0.6385	0.0422	0.0033
	收缩白化	0.6455	0.0549	0.0045	0.5652	0.0390	0.0032
	主成分分析+高斯图模型	**0.7973**	**0.0522**	**0.0040**	**0.7041**	**0.0384**	**0.0030**
训练 2014/01-2018/12 Test 2019/01-2023/12	基线	0.4470	0.0758	0.0074	0.1027	0.0819	0.0056
	PCA	0.7303	0.0582	0.0044	**0.6549**	0.0421	0.0030
	收缩白化	0.6341	0.0547	0.0042	0.6455	0.0405	0.0029
	主成分分析+高斯图模型	**0.7943**	**0.0495**	**0.0038**	0.6489	**0.0386**	**0.0026**
训练 2015/01-2019/12 Test 2020年1月-2024年12月	基线	0.5780	0.0851	0.0075	0.2294	0.0748	0.0057
	PCA	0.6712	0.0562	0.0044	**0.6608**	0.0435	0.0031
	收缩白化	0.6895	0.0503	0.0042	0.5705	0.0398	0.0029
	主成分分析+高斯图模型	**0.6924**	**0.0474**	**0.0039**	0.6021	**0.0396**	**0.0028**

其他方法的定性结果见附录D。

5.4 使用回测评估表现

先前研究表明，基于残差因子的动量策略效果显著 [Blitz 等人， 2011] 因为这类策略能够去除随时间变化的共同市场因子。受这一前提启发，我们在正交残差因子能够提升动量交易表现的假设下比较了各种方法。在此设定中，我们实施了一种短期反向策略。时点 t 的残差因子作为信号。随后，我们在 d个交易日后建立相反头寸，并于第 $t + d + 1$天平仓。收益根据收盘价计算，而反弹速度可能因股票而异。因此，为了构建适用于现实交易的策略，我们将执行延迟 d设为两至五天，并比较这些延迟下的平均表现。每个时间步，我们通过建立美元敞口相匹配、权重相等的多头和空头头寸，确保投资组合为零投资组合。

与前述设置一致，我们使用了2012年至2024年标准普尔500指数和TOPIX 500成分股的历史价格数据。我们采用滚动窗口评估，设置5年训练期，随后为5年测试期；每次将窗口向前移动一年，共进行四折评估。我们将主成分分析和收缩白化作为对比方法，并以相对于各指数（即标准普尔500指数和TOPIX 500）的超额收益作为**基线**。我们使用夏普比率（**SR**）、最大回撤（**MDD**）和条件风险价值（**CVaR**）评估表现。SR衡量单位风险所对应的收益，通常是策略效率的主要指标。MDD是累积收益从峰值到谷值的最大跌幅。

CVaR反映尾部风险，我们报告交易期间最差5%损失的平均值。这些指标的详细信息见附录E。

表2报告了交易结果。与基于各指数超额收益的基线相比，所有基于残差因子的方法在每个样本期都取得了更高的SR以及更低的最大回撤和条件风险价值，证实了残差因子方法的优势。在大多数时期，所提出的方法在残差方法中取得了最高的SR，表明其残差因子在反向交易中尤为有效。就最大回撤和条件风险价值而言，所提出的方法在所有情形下均持续优于其他方法，说明去除共同因子敞口有助于更好地控制风险。这些发现与先前关于基于残差收益信号的策略有效性的证据一致，也表明我们构建的方法在多个窗口期内表现稳健。总体而言，这些回测表明，所提出的因子分解框架适用于实际交易。

6 结论

本文提出了一种从金融时间序列中估计资产特定残差因子的方法。该方法先应用主成分分析（PCA），再应用满足 MTP_2 约束的高斯图模型（GGM）。我们从理论上证明，与单独使用 PCA 得到的结果相比，纳入 MTP_2 GGM 能够得到跨资产相关性更正交的残差因子。实证结果支持这一分析，并表明该方法有效。回测结果显示，利用残差因子去除市场范围的共同因子，可以大幅降低风险。未来的工作包括对残差因子进行详细分析、研究能够考虑金融时间序列时间依赖性的方法，以及提升可扩展性。

参考文献

[Agrawal等人， 2022] Raj Agrawal、Uma Roy 和 Caroline Uhler。《基于全正性进行投资组合选择的协方差矩阵估计》。金融计量经济学杂志，20(2):367–389，2022年。[Ahn 和 Horenstein， 2013] Seung C Ahn 和 Alex R Horenstein。用于确定因子数量的特征值比率检验。《计量经济学》，81(3):1203–1227，2013年。[Ahn等人， 2013] Seung C Ahn、Young H Lee 和 Peter Schmidt。具有多个时变个体效应的面板数据模型。《计量经济学杂志》，174(1):1–14，2013年。[Bai 和 Li， 2021] Jushan Bai 和 Kunpeng Li。具有共同冲击的动态空间面板数据模型。《计量经济学杂志》，224(1):134–160，2021年。[Bai 和 Ng， 2002] Jushan Bai 和 Serena Ng。确定近似因子模型中的因子数量。《计量经济学》，70(1):191–221，2002年。[Bai 和 Wang， 2016] Jushan Bai 和 Peng Wang。大型因子模型的计量经济学分析。《经济学年度评论》，8(1):53–80，2016年。[Blitz等人， 2011] David Blitz、Joop Huij 和 Martin Martens。残差动量。《实证金融》，18(3):506–521，2011年。[Boyle 和 Dykstra， 1986] James P Boyle 和 Richard L Dykstra。在希尔伯特空间中求凸集交集上的投影的一种方法。载于《序约束统计推断研讨会论文集》，第28–47页。Springer，1986年。[Chamberlain 和 Rothschild， 1983] Gary Chamberlain 和 Michael Rothschild。大型资产市场中的套利、因子结构与均值—方差分析。《计量经济学》，51(5)，1983年。[Chen等人， 2010] Yilun Chen、Ami Wiesel、Yonina C Eldar 和 Alfred O Hero。用于最小均方误差协方差估计的收缩算法。《IEEE信号处理汇刊》，58(10):5016–5029，2010年。[Choi等人， 2005] Seungjin Choi、Andrzej Cichocki、Hyung-Min Park 和 Soo-Young Lee。盲源分离与独立成分分析：综述。《神经信息处理——通讯与评论》，6(1):1–57，2005年。[Chudik等人， 2011] Alexander Chudik、M Hashem Pesaran 和 Elisa Tosetti。弱截面相关性与强截面相关性及大型面板的估计。《计量经济学杂志》，14(1)，2011年。[Coates等人， 2011] Adam Coates、Andrew Ng 和 Honglak Lee。无监督特征学习中单层网络的分析。载于《第十四届人工智能与统计国际会议论文集》，第215–223页。JMLR研讨会与会议论文集，2011年。[Fama 和 French， 1992] Eugene F Fama 和 Kenneth R French。预期股票收益的截面。《金融学杂志》，47(2):427–465，1992年。

[Fan等人， 2013] Jianqing Fan、Yuan Liao 和 Martina Mincheva。通过对主正交补进行阈值处理来估计大规模协方差。《英国皇家统计学会会刊B辑：统计方法论》，75(4):603–680，2013年。[Friedman等人， 2008] Jerome Friedman、Trevor Hastie 和 Robert Tibshirani。使用图形套索进行稀疏逆协方差估计。《生物统计学》，9(3):432–441，2008年。[Huang等人， 2018] Lei Huang、Dawei Yang、Bo Lang 和 Jia Deng。去相关批归一化。载于《IEEE计算机视觉与模式识别会议论文集》，第791–800页，2018年。[Hyv¨arinen等人， 2001] Aapo Hyv¨arinen、Jarmo Hurri 和 Patrik O Hoyer。独立成分分析。载于《自然图像统计：计算机视觉早期研究的概率方法》，第151–175页。Springer，2001年。[Hyv¨arinen等人， 2023] Aapo Hyv¨arinen、Ilyes Khemakhem 和 Hiroshi Morioka。用于无监督深度学习中有原则解耦的非线性独立成分分析。《Patterns》，4(10)，2023年。[Imajo等人， 2021] Kentaro Imajo、Kentaro Minami、Katsuya Ito 和 Kei Nakagawa。通过残差因子的分布预测进行深度投资组合优化。载于AAAI人工智能会议论文集，第35卷，第213–222页，2021年。[Karlin 和 Rinott， 1983] Samuel Karlin 和 Yosef Rinott。M矩阵作为多元正态分布的协方差矩阵。《线性代数及其应用》，52:419–438，1983年。[Kessy等人， 2018] Agnan Kessy、Alex Lewin 和 Korbinian Strimmer。最优白化与去相关。《美国统计学家》，72(4):309–314，2018年。[Laloux等人， 1999] Laurent Laloux、Pierre Cizeau、Jean-Philippe Bouchaud 和 Marc Potters。金融相关矩阵的噪声修饰。《物理评论快报》，83(7):1467，1999年。[Lauritzen等人， 2019] Steffen L Lauritzen、Caroline Uhler 和 Piotr Zwiernik。全正性约束下高斯模型中的最大似然估计。《统计年鉴》，47(4):1835–1863，2019年。[Ledoit 和 Wolf， 2004] Olivier Ledoit 和 Michael Wolf。用于高维协方差矩阵的良态估计量。《多元分析杂志》，88(2):365–411，2004年。[Markham， 1972] Thomas L Markham。逆矩阵为m矩阵的非负矩阵。《美国数学会会刊》，36(2):326–330，1972年。[Onatski， 2010] Alexei Onatski。根据特征值经验分布确定因子数量。《经济学与统计学评论》，92(4):1004–1016，2010年。[Onatski， 2012] Alexei Onatski。弱影响因子大型因子模型中主成分估计量的渐近性质。《计量经济学杂志》，168(2):244–258，2012年。

[Pan 和 Sinha， 2007] Raj Kumar Pan 和 Sitabhra Sinha。新兴市场中股票价格变动的集体行为。《物理评论*E*：统计、非线性与软物质物理》，76(4):046116，2007年。[Plemmons， 1977] Robert J Plemmons。M矩阵的刻画：I——非奇异m矩阵。《线性代数及其应用》，18(2):175–188，1977年。[Plerou等人， 2002] Vasiliki Plerou、Parameswaran Gopikrishnan、Bernd Rosenow、Luis A Nunes Amaral、Thomas Guhr 和 H Eugene Stanley。金融数据交叉相关性的随机矩阵方法。《物理评论*E*》，65(6):066126，2002年。[Ross， 1976] Stephen A Ross。资本资产定价的套利理论。《经济理论杂志》，13(3):341–360，1976年。[Sharpe， 1964] William F Sharpe。资本资产价格：风险条件下市场均衡理论。《金融学杂志》，19(3):425–442，1964年。[Slawski 和 Hein， 2015] Martin Slawski 和 Matthias Hein。正定M矩阵的估计以及吸引型高斯马尔可夫随机场的结构学习。《线性代数及其应用》，473:145–179，2015年。[Ying等人， 2023] Jiaxi Ying、José Vinícius De Miranda Cardoso 和 Daniel P Palomar。全正性约束下图模型的自适应估计。载于国际机器学习会议，第40054–40074页。PMLR，2023年。[Yuan 和 Lin， 2007] Ming Yuan 和 Yi Lin。高斯图模型中的模型选择与估计。《生物统计学》，94(1):19–35，2007年。

A 定理1的证明

首先，我们给出 $\Pi_{\mathcal{S}^N_{++}}(\cdot)$的结果。利用正交变换下弗罗贝尼乌斯范数的不变性，可得

$$\|\mathbf{\Lambda}-\mathbf{Y}\|_{\mathrm{F}}^2=\|\mathbf{\Omega}-\mathbf{Q}^\top\mathbf{Y}\mathbf{Q}\|_{\mathrm{F}}^2.$$

由于$\mathbf{\Omega}$是对角矩阵，极小化元$\mathbf{Y}$ 必须满足$\mathbf{Q}^\top\mathbf{Y}\mathbf{Q}$ 的非对角元素为零。此外，要求$\mathbf{Y}$ 为正定，可知极小化元满足$\mathbf{Y}$ 满足$\mathbf{Q}^\top\mathbf{Y}\mathbf{Q}\ =\mathbf{\Omega}_+$。由此可得$\mathbf{Y}\ =\mathbf{Q}\mathbf{\Omega}_+\mathbf{Q}^\top$。

接下来，我们给出 $\Pi_{\mathcal{Z}^N}(\cdot)$ 的结果。$\|\mathbf{\Lambda}-\ \|_{\mathrm{F}}^2=\sum_{i\ j}\ \Lambda_{i\ j}-y_{i\ j}\ ^2$，由$\mathbf{Y}_{,j}(,)$可知，在满足式 (7) 的点处，对角元素满足$y_{i,j}\ =\ \Lambda_{i,j}$，而非对角元素满足$y_{i,j}\ =\min(\Lambda_{i,j},0)$。因此，式 (9) 成立。

B 命题 1 的证明

代入$\mathbf{R}$后，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{cov}(\mathbf{R},\mathbf{Z})\\&=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{\Lambda}\ \mathrm{cov}(\mathbf{Z})\\&=\mathbf{D}^{-1}.\end{aligned}$$

C 命题 2 的证明

首先定义证明中使用的术语。令$\mathbf{Z}$表示通过主成分分析变换$\mathbf{W}_{\mathrm{PCA}}$ 得到的收益矩阵，其中$\mathbf{Z}\ =\mathbf{W}_{\mathrm{PCA}}\mathbf{X}$；令 $\mathbf{R}\ =\mathbf{W}\mathbf{X}$ 表示通过最终变换得到的残差因子矩阵

$$\mathbf{W}=\mathbf{W}_{\mathrm{GGM}}\mathbf{W}_{\mathrm{PCA}}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}_{\mathrm{PCA}},$$

其中，$\mathbf{\Lambda}$ 是由公式（3）中的 MTP_2 高斯图模型估计得到的精度矩阵。我们将估计所得精度矩阵的逆记为 $\mathbf{\Sigma}\ =\mathbf{\Lambda}^{-1}$，并令 $C(\cdot)$表示协方差矩阵的标准化函数。因此，我们将 PCA残差因子的相关矩阵记为$C(\mathbf{Z}\mathbf{H}\mathbf{Z}^\top)$，将残差因子的相关矩阵记为 $C(\mathbf{R}\mathbf{H}\mathbf{R}^\top)$，其中$\mathbf{H}\ =\mathbf{I}-\frac{1}{T}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top$。我们用 cov(·) 表示给定变量的协方差矩阵，用 cor(·) 表示其相关矩阵。对于矩阵$\mathbf{A}$ 和$\mathbf{B}$，记号$\mathbf{A}\ \geq 0$表示$\mathbf{A}$ 的所有元素均非负，而$\mathbf{A}\ \geq\mathbf{B}$ 表示对于所有 $i,j,\ a_{i,j}\geq b_{i,j}$成立。最后，令 $\mathcal{IM}$ 表示逆M-矩阵的集合，即其逆矩阵为M-矩阵的矩阵 $\mathcal{M}$。

首先，我们给出以下适用于M矩阵和逆M矩阵的引理：

引理1. 逆M矩阵的所有元素均非负 *[Markham, 1972]*。换句话说，

$$\mathbf{\Sigma}\in\mathcal{IM}\ \rightarrow\ \mathbf{\Sigma}\geq 0.$$

引理2. M矩阵的每个主子矩阵本身也是M矩阵 *[Plemmons, 1977]*。

引理3. 逆M矩阵的每个主子矩阵本身也是逆M矩阵 *[Markham, 1972]*。

引理 4. 对于 $\mathbf{\Sigma}$、$\mathbf{\Gamma}\in\mathcal{IM}$，以下成立 *[Karlin 和 Rinott, 1983]*：

$$\mathbf{\Gamma}^{-1}\leq\mathbf{\Sigma}^{-1}\ \rightarrow\ C(\mathbf{\Sigma})\leq C(\mathbf{\Gamma}).$$

利用上述引理，我们按以下步骤证明正文中的命题 2。

命题 2 的证明概要

1. 根据引理 5，$\mathbf{R}$ 中的绝对相关系数等于$\mathbf{Z}$中的偏相关：

$$|\mathrm{cor}(\mathbf{R})|=\mathrm{pcor}(\mathbf{Z}).$$

2. 根据引理6，对于$\mathbf{Z}_1\ =[\mathbf{z}_i,\ \mathbf{z}_j]^\top$ 重新排列变量后，

$$\begin{aligned}\mathrm{cor}(\mathbf{Z}_1)&=C(\mathbf{\Sigma}_{11}),\\\mathrm{pcor}(\mathbf{Z}_1)&=C\big(\mathbf{\Sigma}_{11}-\mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}\big).\end{aligned}$$

3. 引理7给出

$$\big(\mathbf{\Sigma}_{11}-\mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}\big)^{-1}\geq\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}.$$

4. 根据引理4，这意味着

$$C\big(\mathbf{\Sigma}_{11}-\mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}\big)\leq C(\mathbf{\Sigma}_{11}).$$

5. 将上述结果应用于所有分块$\mathbf{Z}_1\ =[\mathbf{z}_i,\ \mathbf{z}_j]$即可证明命题 2。

接下来，我们将证明上述所需的每个引理。

引理 5. $\mathbf{R}$的相关系数的绝对值与$\mathbf{Z}$的偏相关相同：

$$|\mathrm{cor}(\mathbf{R})|=\mathrm{pcor}(\mathbf{Z}).\tag{16}$$

证明。 首先，由 $\mathrm{cov}(\mathbf{R})\ =\mathrm{cov}(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Z})\ =\mathbf{D}^{-1}\mathbf{\Lambda}\ \mathbf{D}^{-1}$，可得 $[\mathrm{cov}(\mathbf{R})]_{i,\ j}=\frac{\Lambda_i}{\ \Lambda_{i\ i}\Lambda_{j,\ \ j}}{}^{j}$。因此，相关矩阵 $[\mathrm{cor}(\mathbf{R})]_{i,\ j}$ 的第 $(i,\ j)$ 个元素可写为

$$[\mathrm{cor}(\mathbf{R})]_{i,j}=\frac{\Lambda_{i,j}}{\sqrt{\Lambda_{i,i}}\sqrt{\Lambda_{j,j}}}.\tag{17}$$

此外，$_{j}\ \mathbf{Z}$ 的偏相关 $\rho_p(\mathbf{z}_i,\ \mathbf{z}j)$ 由下式给出$_\quad{}^{\Lambda_{i,}}_{\sqrt{\Lambda_{i\ \ i}}\sqrt{\Lambda_{j,\ \ j}}}$。由于 $\mathbf{\Lambda}\in\mathcal{M}$，我们有 $\Lambda_{i,\ j}\leq 0$。因此，

$$\big|[\mathrm{cor}(\mathbf{R})]_{i,j}\big|=\rho_p(\mathbf{z}_i,\mathbf{z}_j).$$

根据上述结果，令 $\mathrm{pcor}(\mathbf{\Sigma})$ 表示协方差矩阵 $\mathbf{\Sigma}$ 的偏相关矩阵，则可写为$|\mathrm{cor}(\mathbf{R})|\ =\mathrm{pcor}(\mathbf{Z})$。因此，证明命题 2 等价于证明 $\mathrm{pcor}(\mathbf{Z})\ \leq\mathrm{cor}(\mathbf{Z})$。 □

引理6。 首先，将 $\mathbf{Z}$ 分块为

$$\mathbf{Z}=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1\\\mathbf{Z}_2\end{bmatrix},$$

并令 $\mathbf{\Sigma}=\mathrm{cov}(\mathbf{Z})$由下式给出

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}&=\begin{bmatrix}\mathrm{cov}(\mathbf{Z}_1)&\mathrm{cov}(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)\\\mathrm{cov}(\mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_1)&\mathrm{cov}(\mathbf{Z}_2)\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\mathbf{\Sigma}_{11}&\mathbf{\Sigma}_{12}\\\mathbf{\Sigma}_{21}&\mathbf{\Sigma}_{22}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{\Sigma}_{12}=\mathbf{\Sigma}_{21}^\top$。在这种情况下，有如下结论：

$$\begin{aligned}\mathrm{cor}(\mathbf{Z}_1)&=C(\mathbf{\Sigma}_{11}),\\\mathrm{pcor}(\mathbf{Z}_1)&=C\left(\mathbf{\Sigma}_{11}-\mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}\right).\end{aligned}\tag{18}$$

证明。 根据偏相关的定义，偏相关是给定除$\mathbf{Z}_1$之外所有变量后的相关系数。根据多元正态向量条件分布的性质，引理6可立即得出。

□

这里，通过取$\mathbf{Z}_1 = [\mathbf{z}_i,\ \mathbf{z}_j]^\top$并重新排列变量，分块矩阵形式的结果可直接应用于$\mathbf{z}_i$与$\mathbf{z}_j$之间的相关。

由引理3可知，$\mathbf{\Sigma}_{11} \in \mathcal{IM}$。最后，我们证明以下关于逆*M*-矩阵的引理。

引理7. 若 $\mathbf{\Sigma} \in \mathcal{IM}$，则 $\mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21} \in \mathcal{IM}$且

$$\left(\mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}\right)^{-1} \geq \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}$$

成立。

这里，我们给出以下引理，它有助于证明引理7。

引理8. 设 $\mathbf{\Gamma} \in \mathcal{IM}^{N+1}$ 由下式给出

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma & \boldsymbol{\gamma}^\top \\ \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{\Gamma}' \end{bmatrix}.$$

那么，以下结论成立：

$$(\mathbf{\Gamma}')^{-1}\boldsymbol{\gamma} \geq 0.$$

证明。设 $\mathbf{\Xi} = \mathbf{\Gamma}^{-1}$，$\mathbf{\Xi}' = (\mathbf{\Gamma}')^{-1}$，且 $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N]^\top$。根据余子式展开定理，令~ting $\mathbf{\Gamma}'_{i,j}$ 表示 $\mathbf{\Gamma}'$ 的第 (i,j) 个伴随矩阵，则有

$$[\mathbf{\Xi}']_{i,j} = \frac{1}{\det(\mathbf{\Gamma}')}(-1)^{i+j}\det(\tilde{\mathbf{\Gamma}}'_{i,j}),$$

因此

$$\begin{aligned}[\mathbf{\Xi}'\boldsymbol{\gamma}]_i &= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\det(\mathbf{\Gamma}')}(-1)^{i+j}\gamma_j \det(\tilde{\mathbf{\Gamma}}'_{i,j}) \\ &= \frac{(-1)^i}{\det(\mathbf{\Gamma}')}\sum_{j=1}^{N}(-1)^j\gamma_j\det(\tilde{\mathbf{\Gamma}}'_{i,j}).\end{aligned}$$

这里，令 ^$\mathbf{\Gamma}'_{i,:}$ 表示通过删除 $\mathbf{\Gamma}'$ 的第 i 行得到的矩阵。根据余子式展开定理，以下等式成立：

$$\sum_{j=1}^{N}(-1)^j\gamma_j\det(\tilde{\mathbf{\Gamma}}'_{i,j}) = -\det\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}^\top \\ \hat{\mathbf{\Gamma}}'_{i,:}\end{bmatrix}\right).$$

此外，根据用余子式表示逆矩阵的表达式，$\mathbf{\Xi}$ 的第 $(i+1,1)$ 个元素可写为

$$[\mathbf{\Xi}]_{i+1,1} = \frac{1}{\det(\mathbf{\Gamma})}(-1)^{i+2}\gamma_i\det\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}^\top \\ \hat{\mathbf{\Gamma}}'_{i,:}\end{bmatrix}\right).$$

将其代入前面的表达式，我们得到

$$\begin{aligned}[\mathbf{\Xi}'\boldsymbol{\gamma}]_i &= -\frac{(-1)^i}{\det(\mathbf{\Gamma}')}\det\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}^\top \\ \hat{\mathbf{\Gamma}}'_{i,:}\end{bmatrix}\right) \\ &= -\frac{\det(\mathbf{\Gamma})}{\det(\mathbf{\Gamma}')}\cdot\frac{[\mathbf{\Xi}]_{i+1,1}}{\gamma_i}.\end{aligned}$$

由于 $\mathbf{\Gamma} \in \mathcal{IM}^{N+1}$，引理1推出 $\gamma_i \geq 0$。此外，因为 $\mathbf{\Xi} \in \mathcal{M}^{N+1}$，我们有$[\mathbf{\Xi}]_{i+1,\,1} \leq 0$。由于$\mathbf{\Gamma}$和 $\mathbf{\Gamma}'$ 均为正定，因此 $\det(\mathbf{\Gamma}) > 0$且 $\det(\mathbf{\Gamma}') > 0$。因此，$[\mathbf{\Xi}'\mathbf{\Gamma}]_i \geq 0$，从而$\mathbf{\Xi}'\mathbf{\Gamma} \geq 0$。

□

现在利用引理8证明引理7。

证明。首先，根据伍德伯里恒等式，我们可以将其展开为

$$\begin{aligned}&(\mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21})^{-1} \\ &= \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} + \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{S}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1},\end{aligned} \tag{19}$$

其中定义

$$\mathbf{S}_{22} = \mathbf{\Sigma}_{22} - \mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}.$$

根据舒尔补的表达式，分块矩阵的逆可以写成

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix}(\mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21})^{-1} & -\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{S}_{22}^{-1} \\ -\mathbf{S}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} & \mathbf{S}_{22}^{-1}\end{bmatrix}.$$

由此可得 $(\mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21})^{-1} \in \mathcal{M}$（引理2），因此 $\mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21} \in \mathcal{IM}$。

接下来，我们判断式（19）中第二项的符号。首先，由于 $\mathbf{\Sigma} \in \mathcal{IM}$，可知 $\mathbf{\Sigma}^{-1} \in \mathcal{M}$。根据*M*-矩阵的性质，非对角元非正，因此

$$\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{S}_{22}^{-1} \geq 0.$$

接下来，我们判断 $\mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}$ 的符号。由于所有主子矩阵都是*M*-矩阵（引理3），引理8适用于每一行，从而得到

$$\mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} \geq 0.$$

因此，由 $\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{S}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} \geq 0$，我们得到

$$(\mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21})^{-1} \geq \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}.$$

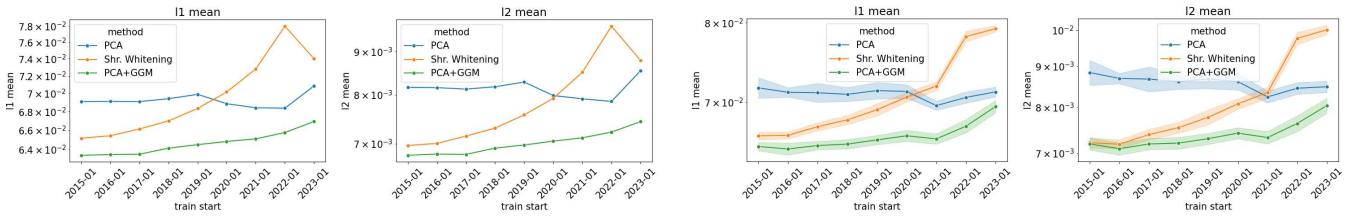
□

D 其他结果

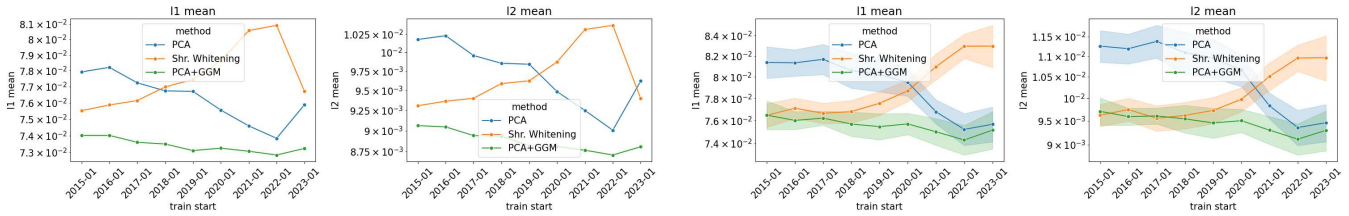
D.1 随机选择数据集的结果

本小节展示了第 5.3 节实验的补充结果。与这些实验一样，我们将2015年1月至2023年12月作为训练期，将2024年1月至2024年12月作为测试期。我们逐年缩短训练期。为进一步评估时间段数量的影响，我们还评估了一种设置：在随机选出的300只股票上进行正交化，从而提高时间段数量与股票数量的比值。

图 5 展示了实验结果。该图表明，在许多评估期内，所提出的方法在两项指标上——即相关矩阵的 ℓ_1-和 ℓ_2-均值——均比主成分分析和收缩白化的相关性更低。无论训练窗口的长度如何，所提出的方法生成的残差因子都表现出很强的正交性。在随机选择下也观察到了类似的模式，其中

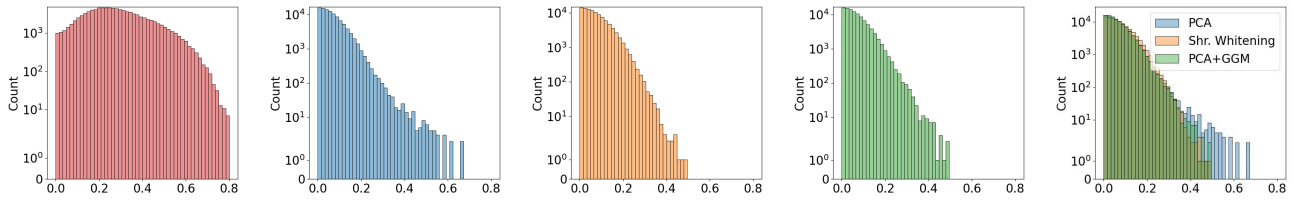


(a) 全部资产（标准普尔500指数）　(b) 随机选取的资产（标准普尔500指数）



(c) 全部资产（TOPIX500）　(d) 随机选取的资产（TOPIX500）

图5：随着训练样本长度变化，标准普尔500指数和TOPIX 500的交叉相关性的 ℓ_1 和 ℓ_2 均值与标准差。横轴表示训练期开始的时间戳。左列报告使用全部成分股的结果；右列报告随机选取300只成分股时的结果。所有结果均为10次试验的平均值。



(a) 原始相关性　(b) 主成分分析　(c) 收缩白化　(d) 主成分分析+高斯图模型　(e) 所有方法

图 6：训练期设为 2023/01– 2023/12、验证期设为 2024/01–2024/12 时，TOPIX 500 成分股两两相关系数绝对值的直方图。请注意， y 轴采用对数刻度。

所提出的方法在大多数情况下都实现了更优的正交性。

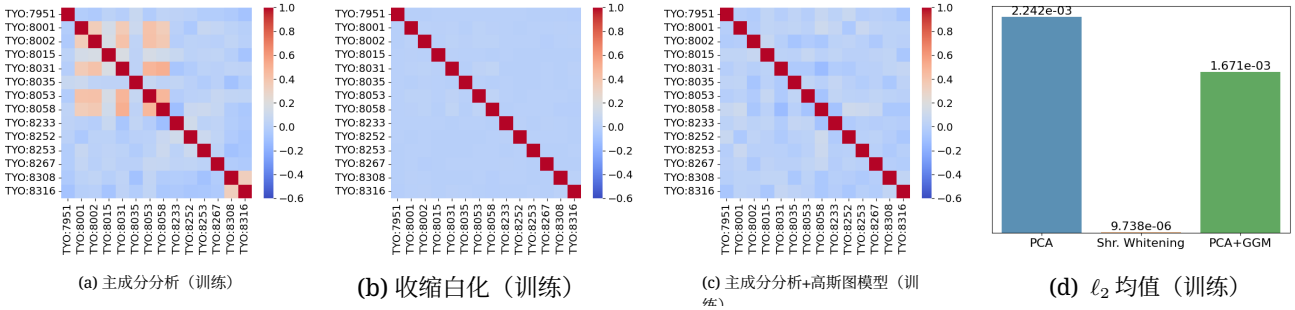
为进一步考察细节，我们在图 6 中展示了 TOPIX 500 成分股残差因子的绝对相关系数直方图。训练期为 2023/01–2023/12 这一年，请注意， y 轴采用对数刻度。图 6 (a) 显示，原始收益率序列之间的相关性大多为正，峰值约在 0.2；而残差收益率序列的峰值则移向 0。比较图 6 (b) 中的主成分分析与图 6 (d) 中所提出的方法可见，主成分分析后仍有许多绝对相关系数高于 0.4，表明存在信息准则未能消除的相关性。图 6 (c) 中的收缩白化没有留下很大的绝对相关系数。然而，图 6 (e) 显示，与所提出的方法相比，仍有更多相关系数集中在 0.2–0.4 区间。图 6 (d) 中所提出的方法成功消除了主成分分析下观察到的大绝对相关系数，表明基于高斯图模型的过程实现了更强的正交化。

D.2 更多定性结果

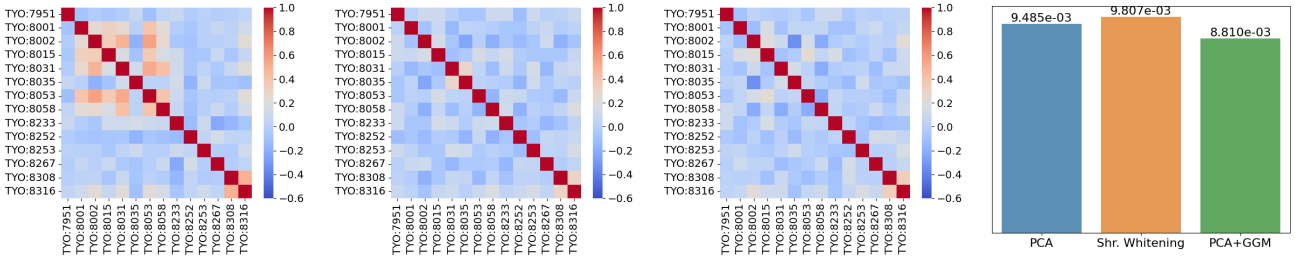
在本小节中，我们使用 TOPIX 500 成分股的收益数据，对相关结构进行定性评估。

在本实验中，我们使用 2020年1月至2023年12月的收益序列进行训练，并将2024年1月至2024年12月作为测试期。与之前的实验一样，我们采用收缩白化和主成分分析作为比较基线，并使用 ℓ_2 均值作为评估指标。

图 7 展示了相关矩阵的比较以及评估指标的数值。此外，图8–11展示了验证期内更大的相关矩阵。为清晰起见，所有情况下我们都只展示相关矩阵的部分内容。首先，在图 7 (a)、图 7 (e) 和图9所示的主成分分析结果中，可以观察到特定行业之间存在残余相关性。在图 7 (b) 和图 7 (f) 所示的收缩白化结果中，则未观察到行业内相关性。然而，与图 7 (d)、图 7 (h) 和图10比较可知，验证期内相关性的 ℓ_2 平均值较大，这表明白化无法在样本外实现适当的正交化。相比之下，所提出的方法（见图 7 (c)、图 7 (g) 和图11）消除了行业内相关性，同时使验证期内相关性的 ℓ_2 平均值保持较低，从而证实了所提方法的有效性。



(a) 主成分分析（训练）　(b) 收缩白化（训练）　(c) 主成分分析+高斯图模型（训练）　(d) ℓ_2 均值（训练）



(e) 主成分分析（验证）　(f) 收缩白化（验证）　(g) 主成分分析+高斯图模型（验证）　(h) ℓ_2 均值（验证）

图 7：(a)–(c)：比较各方法在训练期估计的相关矩阵。(e)–(g)：比较各方法在验证期估计的相关矩阵。比较结果针对部分股票展示，坐标轴对应相应的股票代码。(d)、(h)：训练期和验证期相关矩阵的 ℓ_2均值。

E 评估指标

本节将详细介绍用于评估交易表现的评估指标。设$\mathbf{r}^* = [r_1^*, r_2^*, \ldots, r_{T^*}^*] \in \mathbb{R}^{T^*}$表示在长度为 T^*的评估期内每个时间步获得的收益向量。在此设定下，收益以收益序列的均值 $m^* = \frac{1}{T^*}\sum_{t=1}^{T^*} r_t^*$表示，风险则以收益序列的标准差$\sqrt{\frac{1}{T^*}\sum_{t=1}^{T^*}(r_t^* - m^*)^2}$表示。夏普比率按照以下公式计算，其中无风险利率记为 r_f：

$$\mathrm{SR} = \frac{m^* - r_f}{s^*}. \tag{20}$$

不同市场的无风险利率各不相同。由于每个时间步都会平仓，因此无风险利率的影响可以忽略；所以我们设定 $r_f = 0$。我们使用条件风险价值（CVaR）评估下行风险，其定义为收益分布左尾部的平均损失。令 $\mathcal{T}_-^*$ 表示策略收益中最差 α 比例所对应的时间索引集合（即收益低于或等于经验α分位数的时间点），并令 r_t^* 表示策略在时间 t的收益。我们将 CVaR 报告为正数：

$$\mathrm{CVaR} = \left| \frac{1}{|\mathcal{T}_-^*|} \sum_{t \in \mathcal{T}_-^*} r_t^* \right|. \tag{21}$$

较小的条件风险价值意味着极端情景下的损失较轻，因此交易策略更稳定。最大回撤（MDD）定义为累积收益序列的最大值与最小值之差，计算如下：

累积收益序列的最小值，计算方法如下：

$$\mathrm{MDD} = \frac{\max_t(\mathbf{c}^*) - \min_t(\mathbf{c}^*)}{\max_t(\mathbf{c}^*)}, \tag{22}$$

其中，$\mathbf{c}^* \in \mathbb{R}^{T^*-1}$ 是$\mathbf{r}^*$的累积收益。

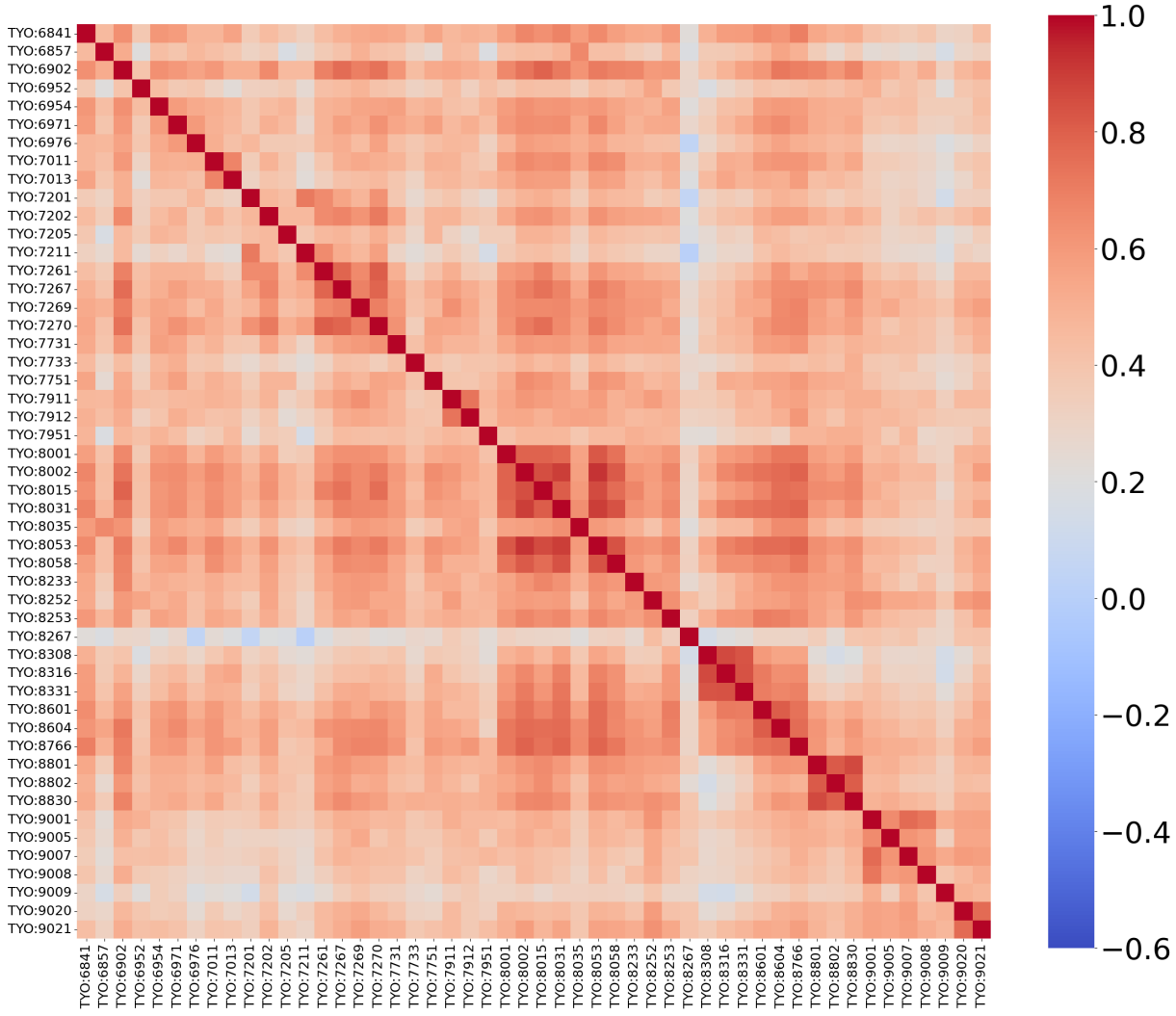


图 8：TOPIX 500 资产间**原始收益率**的相关矩阵（训练期：2020/01–2023/12，测试期：2024/01–2024/12）。

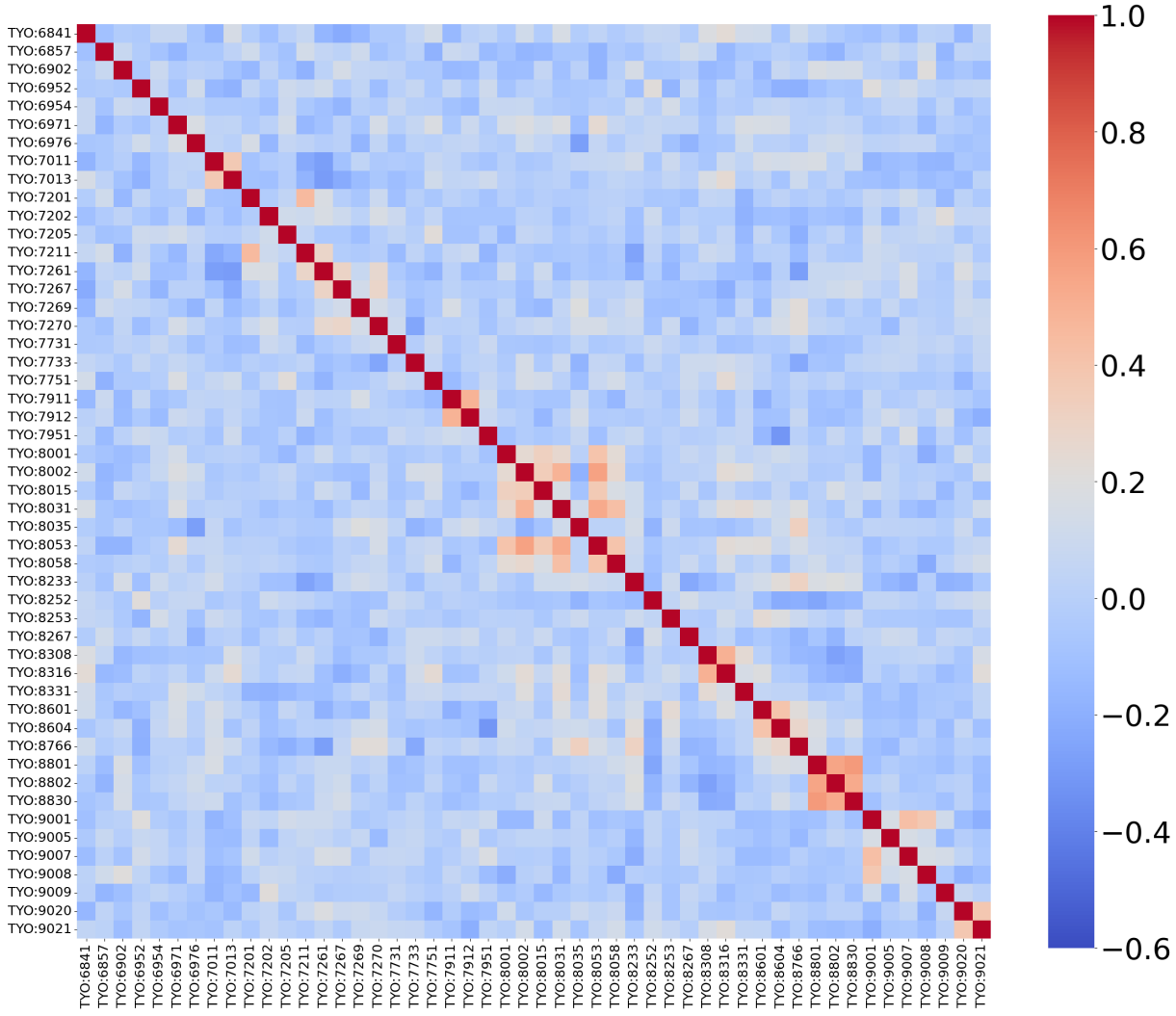


图9：TOPIX 500资产之间的**PCA残差因子**相关矩阵（训练期：2020/01–2023/12，测试期：2024/01–2024/12）。

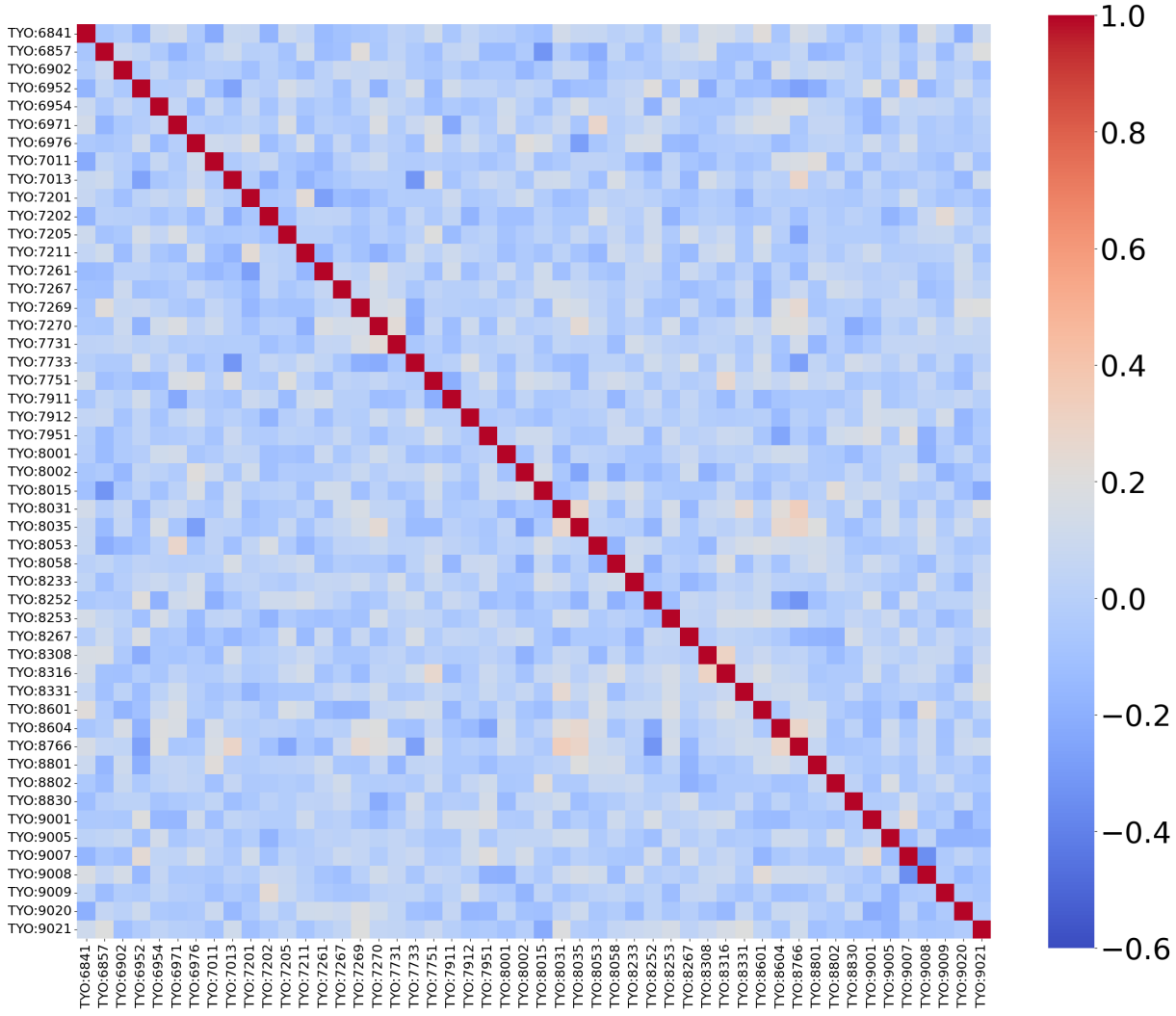


图10：TOPIX 500 资产之间**收缩白化残差因子**的相关矩阵（训练期：2020/01–2023/12，测试期：2024/01–2024/12）。

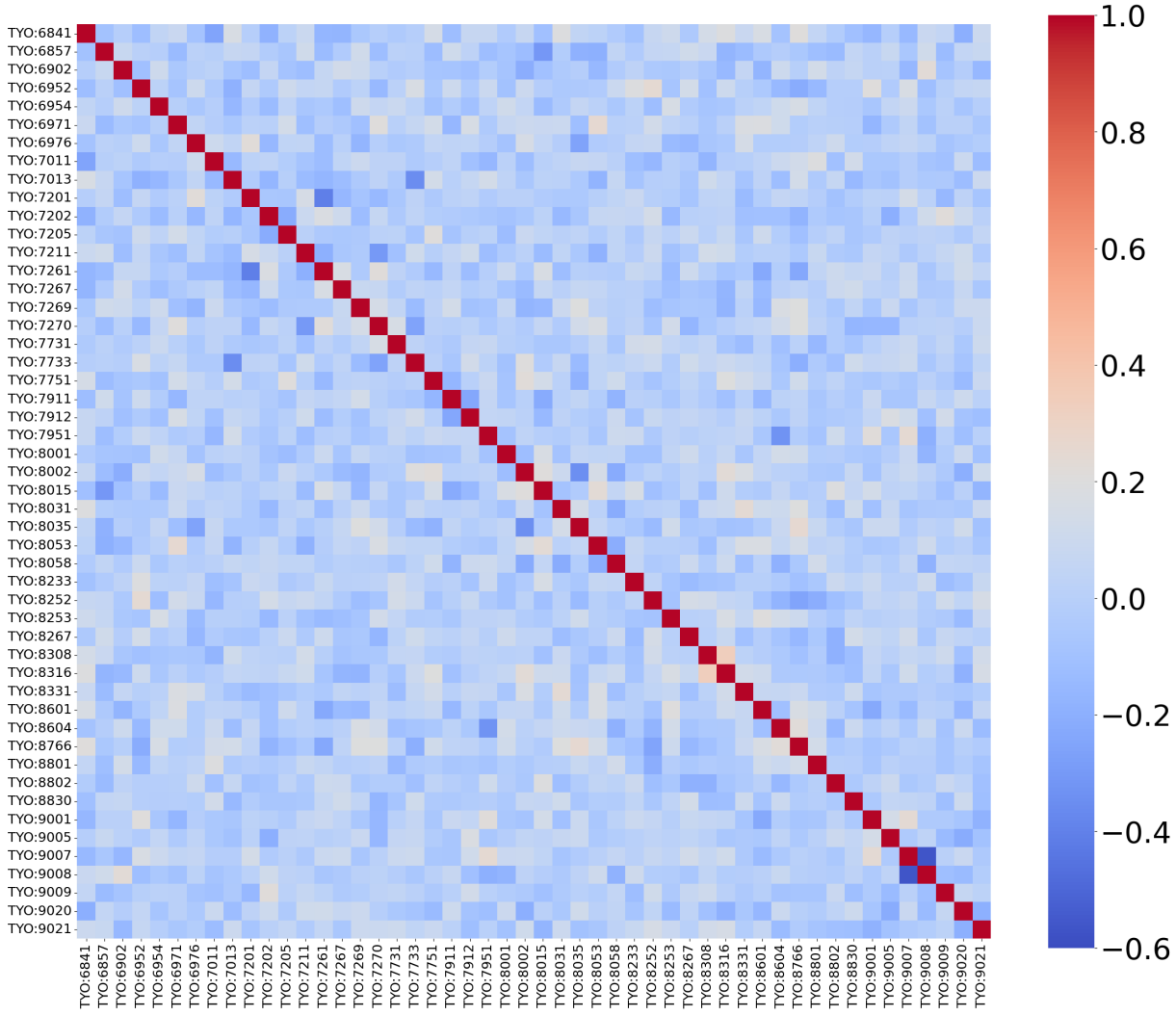


图11：TOPIX 500资产之间的**主成分分析+高斯图模型残差因子**的相关矩阵（训练期：2020/01–2023/12，测试期：2024/01–2024/12）。