arXiv:2602.05585v1 [math.PR] 5 Feb 2026

Airy 漫游者线系综的长期渐近行为

Alexander Clay、Evgeni Dimitrov、Rundong Ding 和 Alex Fu

摘要。我们研究 Airy 流浪者线系综的长期行为。这是一类由无穷多个参数构成的布朗吉布斯线系，源自 Kardar–Parisi–Zhang 普适类中非齐次模型的边缘尺度极限。这些系综由非负参数序列所支配，这些参数刻画了曲线在正无穷和负无穷处的渐近斜率。我们的主要结果刻画了围绕这一领先阶行为的涨落，并为系综在空间轴两端附近建立了函数型极限定理。

我们证明，在宏观尺度上，Airy 流浪者线系综会组织成若干组，每组包含有限条具有共同渐近斜率的曲线。经过适当的中心化和缩放后，每一组都收敛于一个维数等于该组大小的戴森布朗运动。在仅有有限多个斜率参数为正的情形下，我们进一步证明了曲线分离现象：上方曲线沿确定性的抛物线轨迹运动，而其余下方曲线在整体上保持平坦，并收敛于经典 Airy 线系综。

目录

1. 引言与主要结果 2. 核收敛 3. 有限维收敛 1
4. 吉布斯线系综 5. 收敛到 Dyson 布朗运动 11
6. 收敛到 Airy 线系综 参考文献 20
29
41
48
53

1. 引言与主要结果

1.1. 前言。 *Airy* 线系综 $\mathcal{A}$ 是一个序列 $\{\mathcal{A}_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{i\geq 1}$ 由定义在同一概率空间上的随机连续函数组成，并几乎必然满足严格的序关系：$\mathcal{A}_i(t) > \mathcal{A}_{i+1}(t)$，对所有 $i \geq 1$ 及所有 $t \in \mathbb{R}$均成立。该系综是众多概率模型中普适边缘缩放极限，包括含时Wigner矩阵（尤其是戴森布朗运动）、[30], 菱形密铺 [2], 以及若干可积系统中的非相交随机游走和最后通过渗流（LPP） [11]。Airy 线系综的完整构造最早见于 [10], ，其中它被证明是布朗西瓜的弱边缘缩放极限，不过它的若干有限维边缘分布此前已见于文献。特别地，顶端曲线 $\mathcal{A}_1$ 是一个平稳过程，称为*Airy* 过程，最初被确定为多核生长模型 [25, 29]中高度函数的缩放极限。它的单点分布由随机矩阵理论中的（*GUE*）*Tracy–Widom* 分布 [33]给出。由于其普适性以及在构造*Airy* 张量 [12],中的核心作用，Airy 线系综已成为研究*Kardar–Parisi–Zhang*（*KPZ*） 普适类 [9]中的一个基本对象。

日期：2026年2月6日。

在 [13, 14], 中，第二作者引入了 Airy 线系综的无限参数扩展 $\mathcal{A}^{a,\ b,\ c} = \{\mathcal{A}_i^{a,b,c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{i\geq 1}$，我们称之为*Airy* 漫游者线系综。这些系综是非齐次*Schur* 过程的弱极限，等价地说，也是几何*LPP*模型的弱极限；关于这些框架之间分布等价性的简要讨论，见 [20]。 [13,14] 中的构造扩展了此前在 [10], 中得到的 Airy 线系综有限参数推广；这些推广依赖于 [1], 中的相关核公式，而新构造则基于对 [8]中发展的核表示的细致分析。人们预期，Airy 流浪者线系综将作为具有非齐次性或尖峰初始数据的 KPZ 型模型的普适标度极限出现。例如，其顶端曲线的单点边缘分布由 *Baik–Ben Arous–Péché*（*BBP*）分布描述；这类分布出现在多种情境中，包括样本协方差矩阵 [4],、随机矩阵的有限秩扰动 [28], 、非对称排斥过程 [7, 24], 、随机环境中的定向聚合物 [5, 32], 以及指数LPP [8]。

我们将在下文第 1.2 节给出 $\mathcal{A}^{a,b,c}$ 的正式定义；这里先说明，除去水平平移，$\mathcal{A}^{a,b,c}$ 的分布取决于两个非负实数序列 $\{a_i^+\}_{i\geq 1}$、$\{b_i^+\}_{i\geq 1}$ 以及一个实参数 $c^+ \in \mathbb{R}$，它们满足

$$a_1^+ \geq a_2^+ \geq \cdots \geq 0,\ b_1^+ \geq b_2^+ \geq \cdots \geq 0, \text{ and } \sum_{i\geq 1}(a_i^+ + b_i^+) < \infty. \tag{1.1}$$

最近，第二位作者在 [15], 中确立了 Airy 漫游者线系综的若干结构性质；其中一些总结如下。

I. 对称性。 若将 $\mathcal{A}^{a,b,c}$ 沿竖直方向平移 v，则所得系综的分布与 $\mathcal{A}^{a,b,c+v}$相同。此外，若将 $\mathcal{A}^{a,b,c}$ 关于原点反射，则所得系综的分布为 $\mathcal{A}^{b,a,c}$。精确陈述见命题 1.8。

II. 连续性。 $\mathcal{A}^{a,b,c}$的分布随 (a,b,c) 连续变化。见 [15, 命题 1.12].

III. 单调性。 Airy 漫游者线系综在其参数上存在多个 单调耦合。见命题 1.10。

IV. 渐近斜率。 对任意序列 $t_N \uparrow \infty$ 与 $j \in \mathbb{N}$，我们有

$$t_N^{-1}\cdot(\mathcal{A}^{a,\ b,\ j\ \ c}(t_N) - t_N^2) \Rightarrow -2/a_j^+ \text{ if } a_j^+ > 0, \text{ and } t_N^{-1}\cdot(\mathcal{A}_j^{a,b,c}(-t_N) - t_N^2) \Rightarrow -2/b_j^+ \text{ if } b_j^+ > 0. \tag{1.2}$$

此外，当 $a_j^+ = 0$ 时，$\{\mathcal{A}_j^{a,b,c}(t_N)\}_{N\geq 1}$ 是紧的，并且当$b_j^+ = 0$时，$\{\mathcal{A}_j^{a,b,c}(-t_N)\}_{N\geq 1}$ 是紧的。见命题 1.11。

V. 极端性。 Airy 漫游者线系综是 $\mathbb{R}$上满足布朗吉布斯性质的所有线系综空间中的极端点。精确陈述见 [15, 定理 1.19]。

聚焦于上述性质 IV，我们看到参数 $\{a_i^+\}_{i\geq 1}$与 $\{b_i^+\}_{i\geq 1}$ 的物理解释是：它们分别充当系综 $\mathcal{A}^{a,b,c}$ 在 $+\infty$与$-\infty$附近的渐近斜率。在此意义上，(1.2) 应被视为曲线 $\mathcal{A}^{a,b,\ j\ \ c}(t)$ 在 $t \to \pm\infty$时的弱大数定律。本文的主要目标是描述当 $t \to \pm\infty$时围绕这一主导阶行为的涨落，并为该系综的曲线建立函数型极限定理 。虽然我们主要结果的精确陈述推迟到第 1.4 节，但我们在此稍作停留，给出一个非正式概述，重点讨论情形 $t \to \infty$。

由 (1.1) 可知，存在（唯一的）正实数 $v_1^a > v_2^a > \cdots$，以及正整数 m_i^a，使得

$$a_1^+ = a_2^+ = \cdots = a_{\mathsf{m}_1^a}^+ = v_1^a,\ a_{\mathsf{m}_1^a+1}^+ = a_{\mathsf{m}_1^a+2}^+ = \cdots = a_{\mathsf{m}_1^a+\mathsf{m}_2^a}^+ = v_2^a,\ \ldots,$$

换言之，v_i^a 是序列$\{a_i^+\}_{i\geq 1}$中出现的不同的正项，而 m_i^a 是它们的重数。当 $a_j^+ = 0$ 对某个 $j \geq 1$ 成立时，序列 v_i^a、m_i^a 可以是有限的，甚至为空。令 $\mathrm{M}_k^a = \mathrm{m}_1^a + \cdots + \mathrm{m}_k^a$，则由 (1.2) 可知，曲线 $\{\mathcal{A}_i^{a,b,c}(t) - t^2\}_{i\geq 1}$ 分成若干组 $\{\mathcal{A}_i^{a,b,c}(t) - t^2\}_{i=}^{\mathrm{M}_k^a}\mathrm{M}_{k-1}^a+1$，其中第 k 组由 m_k^a 条具有相同渐近斜率 $-2/v_k^a$的曲线组成，见图 1 左侧。在定理 1.14(a) 中，我们证明，当 $t \to \infty$ 时，第 k 组 $\{\mathcal{A}_i^{a,b,c}(t) - t^2\}_{i=}^{\mathrm{M}_k^a}\mathrm{M}_{k-1}^a+1$ （经过适当缩放后）收敛到一组从零出发、包含 m_k^a 条曲线的戴森布朗运动。鉴于上文性质 I 中的反射对称性，在负无穷远附近也有类似结论。特别地，若对序列 $\{b_i^+\}_{i\geq 1}$ 以类似方式定义 v_i^b、m_i^b、M_k^b，那么当 $t \to \infty$ 时，组 $\{\mathcal{A}_i^{a,b,c}(-t) - t^2\}_{i=}^{\mathrm{M}_k^b}\mathrm{M}_{k-1}^b+1$ 收敛到一组从零出发、包含 m_k^b 条曲线的戴森布朗运动。精确结果见定理 1.14(b)。

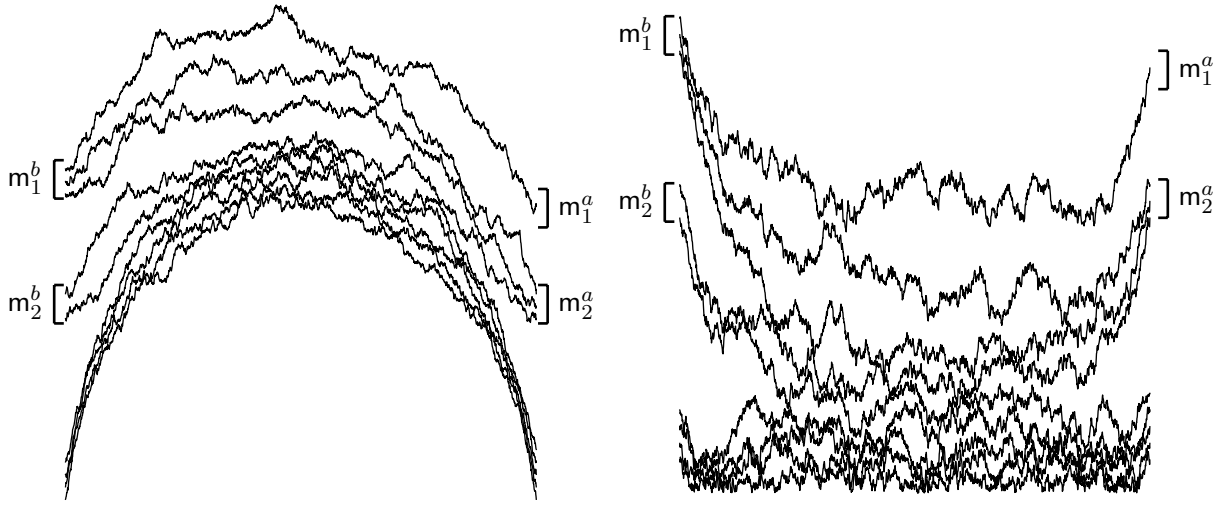

图 1. 左侧描绘了曲线$\{\mathcal{A}_i^{a,b,c}(t)-t^2\}_{i\geq 1}$，右侧描绘了曲线 $\{\mathcal{A}_i^{a,b,c}(t)\}_{i\geq 1}$，其中 $\mathrm{m}_1^a = 1$、$\mathrm{m}_2^a = 3$、$\mathrm{m}_1^b = 3$、$\mathrm{m}_2^b = 2$。这里，$J_a = \mathrm{m}_1^a + \mathrm{m}_2^a = 4$。

如果正参数 a_i^+ 的个数有限，也就是说，存在 $J_a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得$a_{J_a+1}^+ = a_{J_a+2}^+ = \cdots = 0$，那么上面的性质 IV 表明，曲线 $\mathcal{A}^{a,\,b,\,c}_{J_a+i}(t)$ 会随着$t \to \infty$ 保持平坦；而如果 $J_a \geq 1$ 且 $a_{J_a}^+ > 0$，曲线 $\mathcal{A}^{a,\,b,\,J_a\,\,c}(t)$ 则沿着抛物线变化，见图 1 右侧。特别是，在较大的时间下，曲线 $\{\mathcal{A}_i^{a,b,c}(t)\}_{i=1}^{J_a}$ 分离于 $\{\mathcal{A}_{J_a+i}^{a,b,c}(t)\}_{i\geq 1}$，后者收敛到通常的 Airy 线系综。其精确表述见定理 1.16(a)（当 $t \to \infty$ 时）和定理 1.16(b)（当 $t \to -\infty$ 时）。我们提及，近期在半空间几何最后通过点的背景下也确立了类似的曲线分离现象，见 [21]。

尽管本文专注于 Airy 流浪者线系综，但我们预期，对于 KPZ普适类中广泛的一类非齐次模型，也能得到类似的收敛结果，其中包括前文提到的几何 LPP、指数LPP、定向聚合物以及带尖峰的随机矩阵。定理 1.14 和 1.16 的证明依赖于这些系综的行列式点过程结构 $\mathcal{A}^{a,\,b,\,c}$ 以及它们的局部重采样不变性，后者通常称为布朗吉布斯性质。众所周知，几何 LPP、指数LPP以及若干类随机矩阵模型都具有行列式结构，并满足布朗吉布斯性质的离散类比；我们相信，我们的论证可以轻易推广到这些情形。

对于非行列式型模型，例如对数-伽马聚合物 [5,32]，则需要采用不同的技巧；不过，我们预期，我们的方法中的若干部分——尤其是关于吉布斯线系综和曲线分离的部分——在这一背景下仍将具有参考价值。

本引言的其余部分安排如下。在第 1.2 节中，我们正式定义 Airy 漫游者线系综，并回顾 [13] 中的一些结果。在第 1.3 节中，我们总结 [15] 中的结构性质，这些性质将在本文后续论证中用到。本文的主要结果在第 1.4 节中给出，其中定理 1.14 建立了与戴森布朗运动的收敛性，定理 1.16 建立了与 Airy 线系综的收敛性。第 1.5 节概述全文，并讨论我们论证背后的一些关键思想。

1.2. **Airy 漫游者线系综**。本节旨在对 [10,13] 中构造的 Airy 漫游者线系综给出正式定义。这里的叙述基本沿用 [13, 第 1.2] 节的处理方式。我们首先固定模型的参数及一些记号。

定义 1.1。我们假设给定四个非负实数序列 $\{a_i^+\}_{i\geq 1}$、$\{a_i^-\}_{i\geq 1}$、$\{b_i^+\}_{i\geq 1}$、$\{b_i^-\}_{i\geq 1}$，满足

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i^+ + a_i^- + b_i^+ + b_i^-) < \infty \text{ and } a_i^{\pm} \geq a_{i+1}^{\pm}, b_i^{\pm} \geq b_{i+1}^{\pm} \text{ for all } i \geq 1, \tag{1.3}$$

以及两个实参数 c^+, c^-。令 $J_a^{\pm} = \inf\{k \geq 1 \colon a_k^{\pm} = 0\} - 1$，以及 $J_b^{\pm} = \inf\{k \geq 1 \colon b_k^{\pm} = 0\} - 1$。换言之，$J_a^{\pm}$是满足 $a_k^{\pm} > 0$ 的最大指标 k；约定若所有 $a_k^{\pm} = 0$，则 $J_a^{\pm} = 0$；若所有 $a_k^{\pm} > 0$，则 $J_a^{\pm} = \infty$；对于 $J_b^{\pm}$，也类似。为便于后文引用，我们将满足上述条件且使得 $c^- = 0$和 $J_a^- + J_b^- < \infty$成立的参数集合记为 $\mathcal{P}_{\mathsf{fin}}$，并将 $\mathcal{P}_{\mathsf{fin}}$ 中满足 $c^+ = J_a^- = J_b^- = 0$ 的子集记为 $\mathcal{P}_{\mathsf{pos}}$。

最后，我们定义

$$\underline{a} = \begin{cases} 0 & \text{if } a_1^- + b_1^- > 0 \text{ or } c^- \neq 0, \\ \infty & \text{if } a_1^- + b_1^- = c^- = 0 \text{ and } a_1^+ = 0, \\ 1/a_1^+ & \text{if } a_1^- + b_1^- = c^- = 0 \text{ and } a_1^+ > 0, \end{cases} \text{ and } \underline{b} = \begin{cases} 0 & \text{if } a_1^- + b_1^- > 0 \text{ or } c^- \neq 0, \\ -\infty & \text{if } a_1^- + b_1^- = c^- = 0 \text{ and } b_1^+ = 0, \\ -1/b_1^+ & \text{if } a_1^- + b_1^- = c^- = 0 \text{ and } b_1^+ > 0. \end{cases}$$

注意到 $a \in [0, \infty]$ 和 $b \in [-\infty, 0]$。

对于 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，我们定义函数

$$\Phi_{a,b,c}(z) = e^{c^+ z + c^-/z} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1 + b_i^+ z)(1 + b_i^-/z)}{(1 - a_i^+ z)(1 - a_i^-/z)}. \tag{1.4}$$

由 (1.3) 和 [31, 第 5 章命题 3.2], 可知，上述定义在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$上是一个亚纯函数，其零点位于 $\{-(b_i^+)^{-1}\}_{i=1}^{J_b^+}$ 和 $\{-b_i^-\}_{i=1}^{J_b^-}$，而其极点位于 $\{(a_i^+)^{-1}\}_{i=1}^{J_a^+}$和 $\{a_i^-\}_{i=1}^{J_a^-}$。我们还注意到，$\Phi_{a,\,b,\,c}(z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus [a, \infty)$ 上解析，其逆函数在$\mathbb{C} \setminus (-\infty,\, b]$上解析，其中 a，b如定义 1.1 所述。

以下定义给出了艾里游荡者核，该核在 [8], 中引入，首先从其中出现的围道开始。

定义 1.2. 固定 $a \in \mathbb{R}$。令 Γ_a^+表示围道 $\{a + ye^{\pi \mathrm{i}/4}\}_{y\in[0,\infty)}$ 和$\{a + ye^{-\pi \mathrm{i}/4}\}_{y\in[0,\infty)}$的并集，并令 Γ_a^-表示围道 $\{a + ye^{3\pi \mathrm{i}/4}\}_{y\in[0,\infty)}$和 $\{a + ye^{-3\pi \mathrm{i}/4}\}_{y\in[0,\infty)}$的并集。两个围道的方向均为虚部递增的方向。

定义 1.3。 采用定义 1.1 中的相同记号。对于 t_1， t_2， x_1， $x_2 \in \mathbb{R}$ 我们定义

$$
\begin{aligned}
&K_{a,b,c}(t_1,x_1;t_2,x_2) = K^1_{a,b,c}(t_1,x_1;t_2,x_2) + K^2_{a,b,c}(t_1,x_1;t_2,x_2) + K^3_{a,b,c}(t_1,x_1;t_2,x_2), \text{ with}\\
&K^1_{a,b,c}(t_1,x_1;t_2,x_2) = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_\gamma dw \cdot e^{(t_2-t_1)w^2+(t_1^2-t_2^2)w+w(x_2-x_1)+x_1t_1-x_2t_2-t_1^3/3+t_2^3/3}\\
&K^2_{a,b,c}(t_1,x_1;t_2,x_2) = -\frac{\mathbf{1}\{t_2>t_1\}}{\sqrt{4\pi(t_2-t_1)}} \cdot e^{-\frac{(x_2-x_1)^2}{4(t_2-t_1)}-\frac{(t_2-t_1)(x_2+x_1)}{2}+\frac{(t_2-t_1)^3}{12}};\\
&K^3_{a,b,c}(t_1,x_1;t_2,x_2) = \frac{1}{(2\pi \mathsf{i})^2} \int_{\Gamma^+_\alpha} dz \int_{\Gamma^-_\beta} dw \frac{e^{z^3/3-x_1z-w^3/3+x_2w}}{z+t_1-w-t_2} \cdot \frac{\Phi_{a,b,c}(z+t_1)}{\Phi_{a,b,c}(w+t_2)}.
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

在 (1.5) 中， α， $\beta \in \mathbb{R}$ 满足 $\alpha + t_1 < a$ 且 $\beta + t_2 > b$, _函数 $\Phi_{a,\ b,\ c}$ 如 (1.4) 所示， $K^3_{a,\ b,\ c}$ 中的积分围道如定义 1.2 所述。若 $\Gamma^+_{\alpha+t_1} (= t_1 + \Gamma^+_\alpha)$ 与 $\Gamma^-_{\beta+t_2} (= t_2 + \Gamma^-_\beta)$ 有零个或一个交点，则取 $\gamma = \emptyset$， 然后 $K^1_{a,\ b,\ c} \equiv 0$。否则， $\Gamma^+_{\alpha+t_1}$ 与 $\Gamma^-_{\beta+t_2}$恰有两个交点，它们互为复共轭，而 γ 是连接这两个交点的垂直线段，其方向为虚部递增方向。参见图 2。

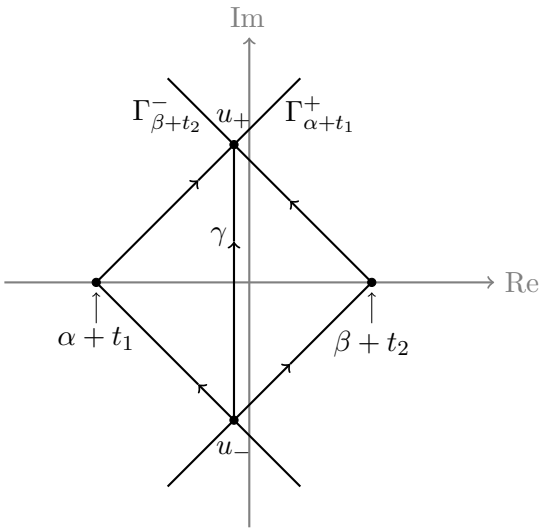

图 2。该图描绘了围道 $\Gamma^+_{\alpha+t_1}$， $\Gamma^-_{\beta+t_2}$ 在具有两个交点时的情形，这两个交点记为 u_- 和 u_+。围道 γ 是从 u_- 到 u_+的线段。

下述　定义引入了本文中反复出现的若干测度。

定义 1.4. 对于有限集合 $\mathsf{S} = \{s_1, \ldots, s_m\} \subset \mathbb{R}$，我们用 μ_{S} 表示$\mathbb{R}$上的计数测度，其定义为 $\mu_{\mathsf{S}}(A) = |A \cap \mathsf{S}|$。我们还用 Leb 表示 $\mathbb{R}$ 上的通常勒贝格测度，并用 $\mu_{\mathsf{S}} \times$Leb 表示 $\mathbb{R}^2$ 上的乘积测度。

采用上述记号后，我们可以引入 Airy 漫游者线系综。以下陈述将给出其定义，该陈述由 [13, 定理 1.8 和 1.10]推出。

命题 1.5。 设定与定义 *1.1* 相同的记号，并固定 $(a, b, c) \in \mathcal{P}_{\mathsf{fin}}$。那么，存在唯一的线系综 $\mathcal{A}^{a,b,c} = \{\mathcal{A}^{a,b,c}_i\}_{i\geq 1}$， 定义在 $\mathbb{R}$ 上，满足以下所有条件。首先，该系综是不相交的，也就是说，几乎必然

$$
\mathcal{A}^{a,b,c}_i(t) > \mathcal{A}^{a,b,c}_{i+1}(t) \text{ for all } i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}. \tag{1.6}
$$

对于每个 $m \in \mathbb{N}$,并且对 $s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$，当 $s_1 < s_2 < \cdots < s_m$ 时，随机测度

$$M(\omega, A) = \sum_{i \geq 1} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}\left\{(s_j, \mathcal{A}_i^{a,b,c}(s_j, \omega)) \in A\right\} \tag{1.7}$$

是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的行列式点过程，其相关核为 $K_{a,b,c}$，如 ***(1.5)*** 所示；参考测度为 $\mu_{\mathsf{S}} \times$勒贝格测度，如定义 ***1.4*** 所示。此外，若我们通过以下方式定义线系综 $\mathcal{L}^{a,b,c}$

$$\left(\sqrt{2} \cdot \mathcal{L}_i^{a,b,c}(t) + t^2 : i \geq 1, t \in \mathbb{R}\right) = \left(\mathcal{A}_i^{a,b,c}(t) : i \geq 1, t \in \mathbb{R}\right), \tag{1.8}$$

则 $\mathcal{L}^{a,b,c}$ 满足　　布朗吉布斯性质，见 *[10,* 定义 *2.2],* ；另见定义 ***4.4***。

备注 **1.6**。我们指出，[13,定理 **1.8** 和 **1.10**]仅在 $c^+ \geq 0$时定义 $\mathcal{A}^{a,b,c}$。对于一般的 $c^+ \in \mathbb{R}$，可以通过从 $\mathcal{A}^{a,b,0}$（即具有相同$a_i^{\pm}$,$b_i^{\pm}$参数但满足 $c^+ = 0$ 的系综）出发来构造这样的系综，然后令 $\mathcal{A}^{a,b,c}(t) := \mathcal{A}^{a,b,0}(t) + c^+$。通过简单的变量替换即可得知，后者满足该命题的条件，见 [15, 命题 **1.10(a)**] 及其证明。

备注 **1.7**。当所有参数 $a_i^{\pm}, b_i^{\pm}$和 $c^{\pm}$ 都等于零时，系综 $\mathcal{A}^{0,0,0}$ 就是文献 [10] 中通常所说的 Airy 线系综。

1.3. Airy 流浪者线系综的性质。本节总结 Airy 漫游者线系综的若干性质，后文将用到这些性质。所有这些性质都可以在 [15,第 1] 节中找到。

以下命题描述了 $\mathcal{A}^{a,b,c}$ 在水平和垂直平移以及关于原点的反射下的行为。

命题 1.8。*[15,* 命题 ***1.10****]*采用定义 ***1.1*** 中的相同记号，固定$(a, b, c) \in \mathcal{P}_{\mathsf{fin}}$，并令 $\mathcal{A}^{a,b,c}$如命题 ***1.5*** 中所述。则以下各项均成立。

(a)（平移）假设 $v \in \mathbb{R}$。则该线系综

$$\bar{\mathcal{A}} := \left(\mathcal{A}_i^{a,b,c}(t) + v : i \geq 1, t \in \mathbb{R}\right).$$

与 $\mathcal{A}^{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}$具有相同的分布，其中$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \in \mathcal{P}_{\mathsf{fin}}$对 $i \geq 1$ 和$\bar{c}^+ = c^+ + v$满足 $\bar{a}_i^{\pm} = a_i^{\pm}$, $\bar{b}_i^{\pm} = b_i^{\pm}$。

(b)（反射）线系综 $\mathcal{A} := \left(\mathcal{A}_i^{a,b,c}(-t) : i \geq 1, t \in \mathbb{R}\right)$ 与 $\mathcal{A}^{b,a,c}$具有相同的分布，即其“a”与“b”参数已互换、但参数 c^+保持相同的 ***Airy*** 流浪者线系综。

(c) 存在　存在 $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) \in \mathcal{P}_{\mathsf{pos}}$ 与 $\Delta \in \mathbb{R}$，使得我们有如下分布等式

$$\left(\mathcal{A}_i^{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}}(t - \Delta) + c^+ : i \geq 1, t \in \mathbb{R}\right) = \left(\mathcal{A}_i^{a,b,c}(t) : i \geq 1, t \in \mathbb{R}\right).$$

注记 **1.9**. 该命题的 **(c)** 部分指出，我们可以将命题 **1.5** 中的任意 $\mathcal{A}^{a,b,c}$ 实现为一个经适当平移、且参数属于 $\mathcal{P}_{\mathsf{pos}}$的 Airy 流浪者线系综。为简化本文后文的叙述，我们将在附加假设 $(a, b, c) \in \mathcal{P}_{\mathsf{pos}}$ 下，对 $\mathcal{A}^{a,b,c}$ 陈述后续结果。然而，鉴于命题 **1.8(c)**，只需对它们进行平移，即可将此类系综的性质转移到所有 Airy 漫游者线系综。我们~指出，参数 $(\tilde{a}, b, \tilde{c})$ 以及 Δ 以非平凡的方式依赖于 (a, b, c)，关于精确关系，我们参阅 [15, 命题 **1.10**] 的证明。

下一个结果表明，存在多种 方式（由 $A, B \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 标记），可以将具有不同参数集合（a, b, c）和（$\tilde{a}, b, \tilde{c}$）的两个 Airy~游荡者线系综耦合起来，从而确保其经过适当重新编号的曲线按随机序排列。

命题 1.10. *[15, 定理 1.13]* 采用定义 *1.1* 和命题 *1.5* 中的相同记号。固定 $A, B \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 以及两组参数 $(a, b, c), (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) \in \mathcal{P}_{\text{pos}}$，使得 $a_{i+A}^{+} \leq \tilde{a}_{i}^{+}$ 且 $b_{i+B}^{+} \leq \tilde{b}_{i}^{+}$ 对于 $i \geq 1$ 成立。那么，我们可以在同一个概率空间上耦合 $\mathcal{A}^{a,b,c}$ 和 $\mathcal{A}^{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}}$，使得几乎必然

$$\mathcal{A}_{k+\max(A,B)}^{a,b,c}(t) \leq \mathcal{A}_{k}^{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}}(t) \text{ for all } k \geq 1, t \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

下一个结果描述了点 $\{\mathcal{A}_{k}^{a,b,c}(t)\}_{k\geq 1}$ 在 $t \to \pm\infty$ 时的全局行为。

命题 1.11. *[15, 定理 1.15]* 假设沿用定义 *1.1* 和命题 *1.5* 中的记号。固定 $(a, b, c) \in \mathcal{P}_{\text{pos}}$ 以及任意一个满足 $t_N \uparrow \infty$ 的序列 $t_N > 0$。那么，以下陈述均成立。

(a) 若 $k \in \{1, \ldots, J_a^{+}\}$，则 $t_N^{-1} \cdot (\mathcal{A}^{a,\ b,\ c}_{\ k}(t_N) - t_N^2) \Rightarrow -2/a_k^{+}$。*(b)* 若 $k \in \{1, \ldots, J_b^{+}\}$，则 $t_N^{-1} \cdot (\mathcal{A}^{a,\ b,\ c}_{\ k}(-t_N) - t_N^2) \Rightarrow -2/b_k^{+}$。*(c)* 若 $J_a^{+} < k < \infty$，则 $\{\mathcal{A}_k^{a,b,c}(t_N)\}_{N\geq 1}$ 是紧的。*(d)* 若 $J_b^{+} < k < \infty$，则 $\{\mathcal{A}_k^{a,b,c}(-t_N)\}_{N\geq 1}$ 是紧的。

1.4. 主要结果。 在本节中，我们给出本文的主要结果。我们首先在以下定义中总结一些有用的记号。

定义 1.12. 采用与定义 1.1 相同的记号，并固定 $(a, b, c) \in \mathcal{P}_{\text{pos}}$。由于 $a_i^{-} = b_i^{-} = c^{+} = c^{-} = 0$ 在此，我们从记号中去掉"加号"，并直接用 $\{a_i\}_{\geq 1}, \{b_i\}_{i\geq 1}, J_a, J_b$ 代替 $\{a_i^{+}\}_{\geq 1}, \{b_i^{+}\}_{i\geq 1}, J_a^{+}, J_b^{+}$。对于这样的参数选取，来自 (1.4) 的函数 $\Phi_{a,b,c}$ 变为

$$\Phi_{a,b,c}(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + b_i z}{1 - a_i z}. \tag{1.10}$$

对于上述参数选取，我们令 $\mathbf{V}_a = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x = a_i$，对某个 $i \leq J_a\}$，并且令 $\mathbf{V}_b = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x = b_i$，对某个 $i \leq J_b\}$。若 $J_a > 0$，则我们可以按 $v_1^a > v_2^a > \cdots$ 对 $\mathbf{V}_a$ 中的元素排序，并且存在唯一的整数 $\mathfrak{m}_1^a, \mathfrak{m}_2^a, \cdots \in \mathbb{N}$，使得

$$a_1 = \cdots = a_{\mathfrak{m}_1^a} = v_1^a,\ \ a_{\mathfrak{m}_1+1} = \cdots = a_{\mathfrak{m}_1^a+\mathfrak{m}_2^a} = v_2^a, \text{ and so on.}$$

换言之，$\mathfrak{m}_i^a$ 是 v_i^a 在序列 $\{a_i\}_{i\geq 1}$ 中出现的次数。类似地，我们对 $J_b > 0$ 定义数值 v_i^b 和 $\mathfrak{m}_i^b$。

最后，我们令 $\mathfrak{M}_0^a = \mathfrak{M}_0^b = 0$，并对 $i \geq 1$ 令 $\mathfrak{M}_i^a = \mathfrak{m}_1^a + \cdots + \mathfrak{m}_i^a$，$\mathfrak{M}_i^b = \mathfrak{m}_1^b + \cdots + \mathfrak{m}_i^b$。

在陈述第一个主要结果之前，我们需要引入戴森布朗运动，具体见下述定义。

定义 1.13。 固定 $n \in \mathbb{N}$，并定义开外尔房和闭外尔房

$$W_n^{\circ} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > \cdots > x_n\},\ \ \overline{W}_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq \cdots \geq x_n\}. \tag{1.11}$$

对于 $\lambda^n(0) = (\lambda_1^n(0) \ldots, \lambda_n^n(0)) \in \overline{W_n}$，我们将 $\lambda(t) = (\lambda_1^n(t) \ldots, \lambda_n^n(t)) \in C([0, \infty)\ W_n)$ 定义为随机微分系统的唯一强解

$$d\lambda_i^n(t) = dB_i(t) + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{dt}{\lambda_i^n(t) - \lambda_j^n(t)}, \tag{1.12}$$

其中 $B_1, \ldots, B_n$ 是独立同分布的标准布朗运动。上述系统存在唯一强解这一事实已在 [3, 命题 4.3.5], 中得到证明，该过程称为戴森布朗运动 （取 $\beta = 2$），初始于 $\lambda^n(0)$。

有了上述记号，我们现在可以陈述第一个主要结果。

定理 1.14。 沿用定义 *1.1*、*1.12*、*1.13* 和命题 *1.5* 中的记号。对于任意满足 $T_N \uparrow \infty$ 的序列 $T_N > 0$，以下结论均成立。

(a) 固定 $k \in \mathbb{N}$，假设$(a, b, c) \in \mathcal{P}_{\mathsf{pos}}$满足 $|\mathsf{V}_a| \geq k$，并定义缩放过程

$$\mathcal{L}_i^N(t) = (2T_N)^{-1/2} \cdot \left(\mathcal{A}^{a,b,c}_{\mathsf{M}^a_{k-1}+i}(tT_N) + 2tT_N/v_k^a - t^2 T_N^2 \right), \tag{1.13}$$

对于 $t > 0$ 和 $i = 1, \ldots, \mathsf{m}_k^a$。那么，

$$\left(\mathcal{L}_i^N(t) : t > 0,\, i = 1, \ldots, \mathsf{m}_k^a\right) \Rightarrow \left(\lambda_i^{\mathsf{m}_k^a}(t) : t > 0,\, i = 1, \ldots, \mathsf{m}_k^a\right). \tag{1.14}$$

(b) 固定 $k \in \mathbb{N}$，假设$(a, b, c) \in \mathcal{P}_{\mathsf{pos}}$满足 $|\mathsf{V}_b| \geq k$，并定义缩放过程

$$\mathcal{L}_i^N(t) = (2T_N)^{-1/2} \cdot \left(\mathcal{A}^{a,b,c}_{\mathsf{M}^b_{k-1}+i}(-tT_N) + 2tT_N/v_k^b - t^2 T_N^2 \right), \tag{1.15}$$

对于 $t > 0$ 和 $i = 1, \ldots, \mathsf{m}_k^b$。那么，

$$\left(\mathcal{L}_i^N(t) : t > 0,\, i = 1, \ldots, \mathsf{m}_k^b\right) \Rightarrow \left(\lambda_i^{\mathsf{m}_k^b}(t) : t > 0,\, i = 1, \ldots, \mathsf{m}_k^b\right). \tag{1.16}$$

注记 1.15. (1.14) 和 (1.16) 中的收敛是指实数集 $C(\{1, \ldots, m\} \times (0, \infty))$ 中随机元素的收敛（其中取 $m = \mathsf{m}_k^a$ 或 $m = \mathsf{m}_k^b$），该空间赋予紧集上一致收敛拓扑。

接下来，我们转向本文的第二个主要结果。

定理 1.16. 沿用定义 *1.1*、*1.12* 和命题 *1.5* 中的记号。对于满足 $T_N \uparrow \infty$ 的任意序列 $T_N > 0$，以下结论成立。

(a) 假设$(a, b, c) \in \mathcal{P}_{\mathsf{pos}}$满足 $J_a < \infty$。定义过程

$$\mathcal{A}_i^N(t) = \mathcal{A}^{a,b,c}_{J_a+i}(t + T_N), \tag{1.17}$$

对 $t \in \mathbb{R}$ 和 $i \in \mathbb{N}$。则，

$$\left(\mathcal{A}_i^N(t) : t \in \mathbb{R},\, i \in \mathbb{N}\right) \Rightarrow \left(\mathcal{A}_i^{0,0,0}(t) : t \in \mathbb{R},\, i \in \mathbb{N}\right). \tag{1.18}$$

(b) 假设$(a, b, c) \in \mathcal{P}_{\mathsf{pos}}$满足 $J_b < \infty$。定义缩放过程

$$\mathcal{A}_i^N(t) = \mathcal{A}^{a,b,c}_{J_b+i}(-t - T_N), \tag{1.19}$$

对 $t \in \mathbb{R}$ 和 $i \in \mathbb{N}$。则，

$$\left(\mathcal{A}_i^N(t) : t \in \mathbb{R},\, i \in \mathbb{N}\right) \Rightarrow \left(\mathcal{A}_i^{0,0,0}(t) : t \in \mathbb{R},\, i \in \mathbb{N}\right). \tag{1.20}$$

注 1.17. (1.18) 和 (1.20) 中的收敛，是指 $C(\mathbb{N} \times \mathbb{R})$ 中随机元素的收敛，其中该空间赋予紧集上一致收敛拓扑。

1.5. 关键思想与论文结构。 本节概述支撑定理 1.14 和 1.16 证明的若干关键思想，并指出这些论证在论文中的位置。我们的讨论聚焦于这两个定理的 (a) 部分；对应的 (b) 部分可利用命题 1.8，将系综关于原点反射，从 (a) 直接推出。

渐近分析的核心在第 2 节展开，我们在那里研究定理 1.14(a) 和 1.16(a) 中两种缩放区间下 (1.5) 的核$K_{a,\,b,\,c}$ 的极限；参见命题 2.1 和 2.3。这两个命题的证明都通过变形 $K_{a,\,b,\,c}$ 定义中的围道，使其穿过 $1/a_i^+$ 处的极点，证明由此产生的留数贡献在渐近意义下可忽略，并通过恰当应用控制收敛定理，证明剩余双重围道积分的收敛。我们注意到，命题 2.1 和 2.3 的证明是在特殊参数假设下进行的，这些假设确保围道变形过程中遇到的所有极点都是单极点。这一简化大大降低了渐近分析的难度，但代价是，我们只能证明定理 1.14(a) 和 1.16(a) 中“几乎所有”而非“所有”参数取值下的收敛性。

这使分析更为容易，但代价是，我们只能得到定理 1.14(a) 和 1.16(a) 中“几乎所有”而非“所有”参数取值下的收敛性。最终，这一限制并无大碍，因为命题 1.10 中的单调耦合使我们之后能够“填补空缺”。

命题 2.3 中的极限核是扩展 Airy 核，它与 (1.5) 中的 $K_{0,0,0}$一致；而命题 2.1 中的极限核记为 $K^{\mathrm{DBM},n}$ ，并由 (2.5) 给出。众所周知，戴森布朗运动具有行列式结构，文献中也存在若干种关于其相关核的表达式，但现有公式都无法直接与 $K^{\mathrm{DBM},n}$对应。因此，第 2.3 节专门阐述 $K^{\mathrm{DBM},n}$ 如何从戴森布朗运动中产生；特别参见命题 2.6。具体而言，我们从 Katori 和 Tanemura 在 [26], 中得到的一个相关核出发，并进行一系列变换——其中最重要的是对戴森布朗运动作时间反演——最终得到 $K^{\mathrm{DBM},n}$。

在第 3 节中，我们证明定理 1.14(a) 和 1.16(a) 中出现的线系综的有限维收敛；参见命题 3.3 和 3.4。为了证明收敛到戴森布朗运动，我们应用 [21,引理 7.1], 中的有限维收敛判据，将问题归结为验证以下两个陈述：

I. 随机测度序列 M^N，定义为

$$M^N(A) = \sum_{i=1}^{\mathsf{m}_k^a} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}\left\{\left(s_j, \mathcal{L}_i^N(s_j)\right) \in A\right\},$$

对于固定时刻 $0 < s_1 < \cdots < s_m$，弱收敛（作为随机测度序列）。

II. 对于每个 i和 j，随机变量序列 $\{\mathcal{L}_i^N(s_j)\}_{N\geq 1}$ 是紧的。

测度 M^N 本身几乎不具备内在结构，因为它们仅由点处的原子组成

$$\left(s_j, (2T_N)^{-1/2}\left(\mathcal{A}_i^{a,b,c}(s_jT_N) + \frac{2s_jT_N}{v_k^a} - s_j^2T_N^2\right)\right), \quad \text{for } i \in \{\mathsf{M}_{k-1}^a + 1, \ldots, \mathsf{M}_k^a\}, j \in \{1, \ldots, m\},$$

这些点对应于在长期极限下系综中形成的第 k 组曲线。因此，直接证明结论 I 有些困难。

关键思路是转而考虑由以下方式构造的辅助测度 $M^{v_k^a,\ T_N}$

$$\left(s_j, (2T_N)^{-1/2}\left(\mathcal{A}_i^{a,b,c}(s_jT_N) + \frac{2s_jT_N}{v_k^a} - s_j^2T_N^2\right)\right), \quad \text{for all } i \in \mathbb{N}, j \in \{1, \ldots, m\}.$$

测度 $M^{v_k^a,\ T_N}$ 是行列式型的，其弱收敛可利用命题 2.1 中的核的渐近性，以及 [13, 命题 2.18]给出的行列式点过程收敛判据来证明。尽管 $M^{v_k^a,\ T_N}$包含的原子比 M^N多，但鉴于命题 1.11 中 $\mathcal{A}^{a,\ b,\ c}$的渐近斜率，所有额外原子都会在 $N \to \infty$时逃向 $+\infty$ 或 $-\infty$ 。因此， $M^{v_k^a,\ T_N}$与 M^N之差收敛到零测度。由于前者弱收敛，后者也如此，从而完成陈述 I 的证明。

为证明陈述 II，我们应用 [21, 引理 7.2]中的紧性判据。论证细节见命题 3.3 证明中的步骤 4；这里我们只指出，关键的额外要素是以下从上方紧性估计：

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\mathcal{L}_1^N(s_j) \geq a\right) = 0,$$

这在第 3.1 节中作为命题 3.1 得到证明，所用思想与命题 2.1 中的思想类似。一旦陈述 I 和 II 得以确立，对于命题 2.1 和 3.1 中出现的受限参数选择，向戴森布朗运动的有限维收敛便随之成立。如

前所述，对所有参数值的推广是通过命题 1.10 中的单调耦合得到的；详见命题 3.3 证明的步骤 1。

命题 3.4 中收敛到 Airy 线系综的有限维收敛证明完全类似。一个关键区别在于，此处处理的是无穷多条曲线，而非有限组曲线。因此，我们采用 [13, 命题 2.19] 中的有限维收敛判据，代替 [21, 引理 7.1], ；这同样将问题归结为上述陈述 I 和 II 的类似情形。陈述 I 所需的弱收敛证明与之前完全相同，只需将命题 2.1 中的核收敛替换为命题 2.3 中的核收敛。此处验证陈述 II 中的紧性条件则更加简单，只需用到命题 1.11(c)。

命题 3.3 和 3.4 建立了定理 1.14(a) 和 1.16(a) 中线系综的有限维收敛。要将这一收敛提升为紧集上的一致收敛，还需证明相应系综序列的紧性。在已有有限维收敛的基础上，剩下的主要难题是控制子序列上系综曲线的连续模。

我们用于实现这一控制的关键依据，是 Airy 漫游者线系综所满足的布朗吉布斯性质；其精确定义见定义 4.4。该性质使定理 1.14(a) 和 1.16(a) 中的系综能够与由有限条互不相交布朗桥构成的系综进行强有力的比较。由于这类布朗桥系综的连续模易于控制，这种比较使我们能够将类似的正则性估计推广到所研究的系综。

在第 4 节中，我们介绍实施这一策略所需的术语和对象，并建立证明定理 1.14(a) 和 1.16(a) 所需的若干技术性估计。这些估计分为两类：第一类涉及由有限条边界数据各异的互不相交布朗桥构成的线系综的最大值和最小值的界（见第 4.3 节）；第二类涉及这类系综的连续模估计（见第 4.4 节）。

定理 1.14 的证明见第 5.2 节，并依赖于以下关键观察：

A. 曲线 $\{\mathcal{L}_i^N\}_{i=1}^{\mathsf{m}_k^a}$ 的单点边缘分布是紧的。这直接源于命题 3.3 中建立的有限维收敛。B. 曲线 $\{(2T_N)^{-1/2}\left(\mathcal{A}_i^{a,b,c}(tT_N) + \frac{2tT_N}{v_k^a} - t^2T_N^2\right)\}_{i=1}^{\mathsf{M}_{k-1}^a}$ 远高于 $\{\mathcal{L}_i^N\}_{i=1}^{\mathsf{m}_k^a}$。这由命题 5.1 得出，而该命题利用命题 3.3 中的有限维收敛以及第 4.3 节中建立的最大值/最小值界加以证明。C. 曲线 $\{(2T_N)^{-1/2}\left(\mathcal{A}_i^{a,b,c}(tT_N) + \frac{2tT_N}{v_k^a} - t^2T_N^2\right)\}_{i\geq \mathsf{M}_k^a+1}$ 远低于 $\{\mathcal{L}_i^N\}_{i=1}^{\mathsf{m}_k^a}$。这一结论由命题 5.1（当 $\mathsf{M}_k^a > J_a$ 时）和命题 5.2（当 $\mathsf{M}_k^a = J_a$ 时）得出。后者利用命题 1.11(c) 中的渐近斜率以及第 4.3 节中的最大值/最小值界加以证明。

上述三个陈述意味着，$\{\mathcal{L}_i^N\}_{i=1}^{\mathsf{m}_k^a}$ 在任意紧区间 $[a,b]$上均有界，并且与适当缩放系综中的所有其他曲线保持充分距离 $\mathcal{A}^{a,\,b,\,c}$。利用布朗吉布斯性质，我们证明 $\{\mathcal{L}_i^N\}_{i=1}^{\mathsf{m}_k^a}$ 的行为类似于有限组互不相交布朗桥。随后，我们可以将引理 4.11 中针对有限布朗桥系综的连续模估计应用于 $\{\mathcal{L}_i^N\}_{i=1}^{\mathsf{m}_k^a}$，从而得到相应的正则性估计。详细内容见第 5.2 节中定理 1.14 证明的步骤 3。

定理 1.16 的证明见第 6.2 节，所依据的观察与上文的 A 和 B 类似。观察 A 中的紧性来自命题 3.4 的有限维收敛，而非命题 3.3。此外，上述曲线在 $\{\mathcal{A}_i^N\}_{i\geq 1}$ 上方的分离性同样来自命题 5.1。建立曲线分离后，我们可以论证，对于每个 $k\in\mathbb{N}$，系综 $\{\mathcal{A}_i^N\}_{i=1}^{k}$ 在任意紧区间 $[a,b]$ 上都保持有界，并且与所有

适当缩放系综 $\mathcal{A}^{a,\ b,\ c}$中的更高曲线充分分离。我们还可以证明曲线 $\mathcal{A}^N_{k+1}$ 不会太高，见命题 6.1。利用布朗吉布斯性质，我们得出结论：$\{\mathcal{A}^N_i\}_{i=1}^k$ 的行为类似于一组有限的互不相交布朗桥，其底边界不会太高。于是，我们可以将引理 4.13 中针对有限布朗桥系综的连续模估计应用于 $\{\mathcal{A}^N_i\}_{i=1}^k$，从而得到相应的正则性估计。需要强调的是，由于附近存在底边界，我们必须使用引理 4.13；它比定理 1.14 的证明中所用的引理 4.11 更强。本段所述思路的详细内容见第 6.2 节定理 1.16 证明中的步骤 3。

致谢。 E.D. 部分得到西蒙斯国际基金会通过 SimonsAward TSM-00014004 的资助。

2. 核收敛

在本节中，我们研究（经适当重新缩放的）核 $K_{a,b,c}$ （来自 (1.5)）的极限。在定理 1.14(a) 的标度区域中，精确的极限陈述出现在命题 2.1 中；而对于定理 1.16(a) 中的情形，则出现在命题 2.3 中。在第 2.3 节（见命题 2.6）中，我们将命题 2.1 的极限核与戴森布朗运动联系起来。在本节中，我们始终采用第 1 节的记号。我们还自由使用来自 [13, 第 2] 节的行列式点过程的定义与记号。

2.1. Dyson布朗运动极限。

本节的目标是分析与定理 1.14(a) 中的缩放相关联的相关核的极限。我们从一些有用的记号开始。

固定 $(a,\ b,\ c) \in \mathcal{P}_{\mathsf{pos}}$。对于任意 $\rho,\ T>0$ 以及有限的 $\mathsf{S} \subset (0,\ \infty)$，其中 $\mathsf{S}=\{s_1,\dots,s_m\}$ 且 $s_1<s_2<\cdots<s_m$，我们定义随机测度

$$M^{\rho,T}(A)=\sum_{i\geq 1}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{1}\left\{\left(s_j,(2T)^{-1/2}\cdot\left(\mathcal{A}_i^{a,b,c}(s_jT)+2s_jT/\rho-s_j^2T^2\right)\right)\in A\right\}. \tag{2.1}$$

若 $\phi\colon\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是满足 $\phi^{-1}(s,\ x)=(sT,\ \sqrt{2Tx-2sT}/\rho+s^2T^2)$ 的双射，我们观察到 $M^{\rho,\ T}=\hat{}M^T\phi^{-1}$，其中

$$\hat{M}^T(A)=\sum_{i\geq 1}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{1}\{(s_jT,\mathcal{A}_i^{a,b,c}(s_jT))\in A\}.$$

由命题 1.5 可知，$\hat{}M^T$ 是一个行列式点过程，其相关核为 $K_{a,\ b,\ c}$，参考测度为 $\mu_{T\cdot\mathsf{S}}\times$勒贝格测度。根据变量替换公式 [13, 命题 2.13(5)]（其中 ϕ 如上所述）、 [13, 命题 2.13(6)] （其中 $c=(2T)^{-1/2}$），以及规范变换 [13,命题 2.13(4)]（其中

$$f(s,x)=\exp\left(-\sqrt{2}sxT^{3/2}-\frac{2s^3T^3}{3}+\frac{x\sqrt{2T}}{\rho}+\frac{2s^2T^2}{\rho}-\frac{sT}{\rho^2}\right),$$

我们得出， $M^{\rho,\ T}$ 是一个以 $\mu_{\mathsf{S}}\times$ 勒贝格测度为参考测度、相关核为

$$\begin{aligned}K^{\rho,T}(s,x;t,y)&=-\frac{\mathbf{1}\{t>s\}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}}+K^{3,\rho,T}(s,x;t,y),\ \text{where}\\ K^{3,\rho,T}(s,x;t,y)&=\frac{\sqrt{2T}}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\Gamma_\alpha^+}dz\int_{\Gamma_\beta^-}dw\frac{\exp\left(H^{\rho,T}(z,s,x)-H^{\rho,T}(w,t,y)\right)}{z-w}\cdot\frac{\Phi_{a,b,c}(z)}{\Phi_{a,b,c}(w)}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

在最后一个方程中，围道与定义 1.2 中相同，其中 $a_1^{-1} > \alpha > \beta > 0$, $\Phi_{a,\ b,\ c}$与 (1.10) 中相同，并且

$$H^{\rho,T}(z,s,x) = \frac{z^3}{3} - z^2 sT + \left(-x\sqrt{2T} + \frac{2sT}{\rho}\right) z + \frac{x\sqrt{2T}}{\rho} - \frac{sT}{\rho^2}. \tag{2.3}$$

我们指出，在推导 (2.2) 时，我们在定义 1.3 中的 $K^3_{a,b,c}$ 公式中应用了变量替换 $z \to z - sT$, $w \to w - tT$。

有了上述记号，我们转向本节的主要结果。

命题 2.1. 采用定义 *1.1*、*1.12* 及命题 *1.5* 中的相同记号。固定$k \in \mathbb{N}$，设 $(a,b,c) \in \mathcal{P}_{\mathsf{pos}}$满足 $|\mathsf{V}_a| \geq k$，且 $\mathsf{m}_1 = \cdots = \mathsf{m}_{k-1} = 1$。若 $s,t > 0$和$x,y \in \mathbb{R}$固定， x_T, y_T有界且 $\lim_{T\to\infty} x_T = x$，并且 $\lim_{T\to\infty} y_T = y$，则

$$\lim_{T\to\infty} K^{v^a_k,T}(s,x_T;t,y_T) = K^{\mathrm{DBM},\mathsf{m}^a_k}(s,x;t,y). \tag{2.4}$$

在最后一个方程中， $K^{v^a_k,T}$ 与 (2.2) 中相同，并且

$$\begin{aligned} K^{\mathrm{DBM},n}(s,x;t,y) &= -\frac{\mathbf{1}\{t>s\}}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}} \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2} \oint_{\mathcal{C}_1} dz \int_{-2+\mathsf{i}\mathbb{R}} dw \frac{\exp(-sz^2/2 - xz + tw^2/2 + yw)}{w-z} \cdot \frac{w^n}{z^n}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 $\mathcal{C}_1$ 是单位半径、以原点为中心且正定向的圆。

备注 2.2。为简化证明，我们在命题 2.1 中施加简化假设 $\mathsf{m}_1 = \cdots = \mathsf{m}_{k-1} = 1$。我们预计，即使没有这一限制，结论仍然成立，但此处不再探讨这一推广。命题 2.1 的当前表述已足以满足我们的需要。

证明。注意，由于 $\mathsf{m}_1 = \cdots = \mathsf{m}_{k-1} = 1$，我们有 $K^{v^a_k,\ T} = K^{a_k,\ T}$。比较式 (2.2) 中 $K^{a_k,\ T}$ 与式 (2.5) 中 $K^{\mathrm{DBM},\ \mathsf{m}^a_k}$ 的表达式可知，只需证明

$$\lim_{T\to\infty} K^{3,a_k,T}(s,x_T;t,y_T) = \frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2} \oint_{\mathcal{C}_1} dz \int_{-2+\mathsf{i}\mathbb{R}} dw \frac{\exp(-sz^2/2 - xz + tw^2/2 + yw)}{w-z} \cdot \frac{w^{\mathsf{m}^a_k}}{z^{\mathsf{m}^a_k}}. \tag{2.6}$$

为方便起见，我们令 $\delta = \pi/48$，并固定足够大的 $A > 0$，使得 $|x_T|,\ |y_T| \leq A$。下文中，$C_i > 0$ 表示足够大的常数， $c_i > 0$ 表示足够小的常数，它们依赖于参数 s， t、$(a,\ b,\ c)$ 和 A。此外，只要 T 足够大（其取值依赖于相同的参数），下文所有不等式均成立。对此不再赘述。为清晰起见，我们将证明分为三个步骤。

步骤 1. 注意到我们的假设 $\mathsf{m}_1 = \cdots = \mathsf{m}_{k-1} = 1$ 意味着 $1/a_1, \ldots, 1/a_{k-1}$是$\Phi_{a,b,c}(z)$ 在 $K^{3,a_k,T}$ (2.2) 中的简单极点。

我们首先将 Γ^+_α变形为 $\Gamma^+_{v_T}$，其中 $v_T = 1/a_k - 1/\sqrt{2T}$；在此过程中，围道会穿过位于 $1/a_1, \ldots, 1/a_{k-1}$的简单极点。随后，我们将 Γ^-_β 变形为 $\Gamma^-_{u_T}$，其中 $u_T = 1/a_k - 2/\sqrt{2T}$；在此过程中，围道不会穿过任何极点。根据留数定理，

$$K^{3,a_k,T}(s,x_T;t,y_T) = V^T + \sum_{j=1}^{k-1} U^T_j, \tag{2.7}$$

其中

$$\begin{aligned} V^T &= \frac{\sqrt{2T}}{(2\pi\mathsf{i})^2} \int_{\Gamma^+_{v_T}} dz \int_{\Gamma^-_{u_T}} dw \frac{\exp(H^{a_k,T}(z,s,x_T) - H^{a_k,T}(w,t,y_T))}{z-w} \cdot \frac{\Phi_{a,b,c}(z)}{\Phi_{a,b,c}(w)}, \\ U^T_j &= \frac{\sqrt{2T}}{2\pi\mathsf{i}} \int_{\Gamma^-_{u_T}} dw \frac{\exp(H^{a_k,T}(1/a_j,s,x_T) - H^{a_k,T}(w,t,y_T))}{(1/a_j - w)\Phi_{a,b,c}(w)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^\infty (1+b_i/a_j)}{a_j \prod_{i=1,i\neq j}^\infty (1-a_i/a_j)}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

我们指出，无穷远附近的围道变形是标准做法，并且由于 H^{a_k} 中 T 的三次项所确保的衰减，这一做法是合理的。例如，参见 [15, (4.9)] 下的讨论。

根据 (2.7)，要证明 (2.6)，只需证明

$$\lim_{T\to\infty} U_j^T = 0 \text{ for } j = 1, \dots, k-1, \tag{2.9}$$

$$\lim_{T\to\infty} V^T = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \oint_{\mathcal{C}_1} dz \int_{-2+\mathrm{i}\mathbb{R}} dw \frac{\exp(-sz^2/2 - xz + tw^2/2 + yw)}{w - z} \cdot \frac{w^{\mathsf{m}_k^a}}{z^{\mathsf{m}_k^a}}. \tag{2.10}$$

我们将在接下来的两个步骤中证明 (2.9) 和 (2.10)。

步骤 2。 在这一步中，我们证明 (2.9)。

根据 (2.3) 中 $H^{a_k,T}$ 的定义，存在 $c_1, C_1 > 0$，使得

$$\begin{aligned} \left|\exp(H^{a_k,T}(1/a_j, s, x_T))\right| &= \exp\left(-sT\left(-\frac{1}{a_j} + \frac{1}{a_k}\right)^2 + x_T\sqrt{2T}\left(-\frac{1}{a_j} + \frac{1}{a_k}\right) + \frac{1}{3a_j^3}\right) \\ &\le \exp(-c_1 T + C_1\sqrt{T}). \end{aligned} \tag{2.11}$$

对于 $a \in \mathbb{R}$, $\phi \in (0, \pi)$，我们将 $\mathcal{C}_a^\phi$ 表示为围道

$$\mathcal{C}_a^\phi = \{a + re^{-\mathrm{i}\phi} : r \in [0, \infty)\} \cup \{a + re^{\mathrm{i}\phi} : r \in [0, \infty)\}, \tag{2.12}$$

方向沿着虚部递增方向。注意，存在 $c_2, C_2 > 0$，使得对所有 $\phi \in [\pi/2 + \delta, 3\pi/4 - \delta]$ 和 $w \in \mathcal{C}_{u_T}^\phi$，都有

$$\begin{aligned} &\left|\exp(-H^{a_k,T}(w, t, y_T))\right| = \exp\left(tT\,\mathrm{Re}\left[\left(w - \frac{1}{a_k}\right)^2\right] + y_T\sqrt{2T}\,\mathrm{Re}\left(w - \frac{1}{a_k}\right) - \frac{\mathrm{Re}(w^3)}{3}\right) \\ &= \exp\left(tT\left|w - \frac{1}{a_k}\right|^2 \cos(2\phi) + y_T\sqrt{2T}\left|w - \frac{1}{a_k}\right|\cos(\phi)\right. \\ &\qquad \left. - \frac{|w - 1/a_k|^3\cos(3\phi)}{3} - \frac{|w - 1/a_k|^2\cos(2\phi)}{a_k} - \frac{|w - 1/a_k|\cos(\phi)}{a_k^2} - \frac{1}{3a_k^3}\right) \\ &\le \exp\left(-c_2\left|w - \frac{1}{a_k}\right|^3 - c_2 T\left|w - \frac{1}{a_k}\right|^2 + C_2\sqrt{2T}\left|w - \frac{1}{a_k}\right| + C_2\right). \end{aligned} \tag{2.13}$$

我们指出，在推导最后一个不等式时，用到了当 $\delta = \pi/48$趋于 $\phi \in [\pi/2 + \delta, 3\pi/4 - \delta]$ 时，$\cos(2\phi) < 0$ 以及 $\cos(3\phi) > 0$ 这一事实。

接下来注意到，存在 $C_3 > 0$，使得对于所有 $j \in \{1, \dots, k-1\}$、$\phi \in [\pi/2 + \delta, 3\pi/4 - \delta]$ 和 $w \in \mathcal{C}_{u_T}^\phi$，都有

$$\left|\frac{1}{1/a_j - w}\right| \le C_3. \tag{2.14}$$

利用以下简单的不等式

$$|1 + z| \le \exp(|z|) \text{ 对所有 } z \in \mathbb{C}, \text{ 以及 } \left|\frac{1}{1+z}\right| \le 1 + \frac{|z|}{|1+z|} \le \exp(|z|/d) \text{ 对 } |1 + z| \ge d > 0, \tag{2.15}$$

特别取 $d = 1/2$，我们可以找到 C_4，$C_5 > 0$，使得对于所有 $\phi \in [\pi/2 + \delta, 3\pi/4 - \delta]$ 和$w \in \mathcal{C}_{u_T}^\phi$，都有

$$\left|\frac{1}{\Phi_{a,b,c}(w)}\right| = \left|\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 - a_i w}{1 + b_i w}\right| \le \exp(C_4|w|) \le \exp\left(C_4\left|w - \frac{1}{a_k}\right| + C_5\right). \tag{2.16}$$

固定 $\phi_w \in [\pi/2 + \delta, 3\pi/4 - \delta]$，例如取 $\phi_w = 2\pi/3$。我们将 (2.8) 中 U_j^T 的定义里的围道 $\Gamma_{u_T}^-$ 变形为 $\mathcal{C}_{u_T}^{\phi_w}$，过程中不穿过任何极点，因此积分的值不变

根据柯西定理。我们指出，无穷远附近的围道变形可由不等式 (2.11)、(2.13)、(2.14) 和 (2.16) 证明其合理性。进行变形并作变量代换 $\tilde{w} = \sqrt{2T}(w - 1/a_k)$ 后，由同样的四个不等式可知，对某个 $C_6 > 0$ 以及所有 $j \in \{1, \dots, k-1\}$，有

$$\left|U_j^T\right| \leq e^{-c_1 T + C_1\sqrt{T}} \int_{\mathcal{C}_{-2}^{\phi_w}} |d\tilde{w}| \exp\left(-c_2|\tilde{w}|^3 - c_2|\tilde{w}|^2 + C_6|\tilde{w}| + C_6\right), \tag{2.17}$$

其中 $|d\tilde{w}|$ 表示关于弧长的积分。由于最后一个积分有限，我们可知最后一个不等式推出 (2.9)。

步骤 3。在这一步中，我们证明 (2.10)。

固定 $\phi_z \in [\pi/6+\delta, \pi/4-\delta]$，例如取 $\phi_z = 3\pi/16$ 和 $\phi_w = 2\pi/3$ 如步骤 2 所示。首先将围道 $\Gamma_{u_T}^-$ 和 $\Gamma_{v_T}^+$ 分别变形为 $\mathcal{C}_{u_T}^{\phi_w}$ 和 $\mathcal{C}_{v_T}^{\phi_z}$，且不穿过任何极点，因此根据柯西定理，积分的值不变。变形的论证与上一步类似，故略去。进行变形并作变量替换$\tilde{z} = \sqrt{2T}(z - 1/a_k)$、 $\tilde{w} = \sqrt{2T}(w - 1/\overline{a_k})$后，我们得到

$$\begin{aligned} V^T &= \frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2} \int_{\mathcal{C}_{-1}^{\phi_z}} d\tilde{z} \int_{\mathcal{C}_{-2}^{\phi_w}} d\tilde{w} G_T(\tilde{z}, \tilde{w}), \text{ where } G_T(\tilde{z}, \tilde{w}) = \frac{\Phi_{a,b,c}(1/a_k + (2T)^{-1/2}\tilde{z})}{\Phi_{a,b,c}(1/a_k + (2T)^{-1/2}\tilde{w})} \\ &\times \frac{\exp(H^{a_k,T}(1/a_k + (2T)^{-1/2}\tilde{z}, s, x_T) - H^{a_k,T}(1/a_k + (2T)^{-1/2}\tilde{w}, t, y_T))}{\tilde{z} - \tilde{w}}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

利用 (2.3) 中关于 $H^{a_k,\,T}$ 的公式，以及 (1.10) 中关于 $\Phi_{a,\,b,\,c}$ 的公式，我们得到逐点极限

$$\lim_{T\to\infty} G_T(\tilde{z}, \tilde{w}) = \frac{\exp(-s\tilde{z}^2/2 - x\tilde{z} + t\tilde{w}^2/2 + y\tilde{w})}{\tilde{z} - \tilde{w}} \cdot \frac{\tilde{w}^{\mathsf{m}_k^a}}{\tilde{z}^{\mathsf{m}_k^a}}. \tag{2.19}$$

此外，对于某个 C_7，$c_7 > 0$ 以及所有 $\tilde{z} \in \mathcal{C}_{-1}^{\phi_z}$ 和 $\tilde{w} \in \mathcal{C}_{-2}^{\phi_w}$，我们有以下界：

$$\begin{aligned} &\left|\exp\left(-H^{a_k,T}(1/a_k + (2T)^{-1/2}\tilde{w}, t, y_T))\right)\right| \leq \exp\left(-c_7|\tilde{w}|^3 - c_7|\tilde{w}|^2 + C_7|\tilde{w}| + C_7\right) \\ &\left|\exp\left(H^{a_k,T}(1/a_k + (2T)^{-1/2}\tilde{z}, s, x_T))\right)\right| \leq \exp\left(-c_7|\tilde{z}|^3 - c_7|\tilde{z}|^2 + C_7|\tilde{z}| + C_7\right) \\ &\left|\frac{1}{\tilde{z} - \tilde{w}}\right| \leq 1 \text{ and } \left|\frac{\Phi_{a,b,c}(1/a_k + (2T)^{-1/2}\tilde{z})}{\Phi_{a,b,c}(1/a_k + (2T)^{-1/2}\tilde{w})}\right| \leq |\tilde{w}|^{\mathsf{m}_k^a} \exp\left(C_7|\tilde{z}| + C_7|\tilde{w}| + C_7\right). \end{aligned} \tag{2.20}$$

事实上，(2.20) 的第一行与 (2.13) 相同（经过变量替换，并将 C_7，c_7，ϕ_w 替换为C_2，c_2，ϕ后），第二行则可用类似方法证明，利用 $\cos(2\phi_z) > 0$ 且 $\cos(3\phi_z) < 0$；这在 $\phi_z = 3\pi/16$ 时成立。第三行中的第一个不等式由围道$\mathcal{C}_{-1}^{\phi_z}$ 与$\mathcal{C}_{-2}^{\phi_w}$ 之间的距离等于一这一事实得出。为证明最后一个不等式，注意到

$$\frac{\Phi_{a,b,c}(z)}{\Phi_{a,b,c}(w)} = I_1 \cdot I_2 \text{ with } I_1 = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + b_i z}{1 + b_i w} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1 - a_i w}{1 - a_i z} \cdot \prod_{j=k+\mathsf{m}_k^a+1}^{\infty} \frac{1 - a_j w}{1 - a_j z} \text{ and } I_2 = \frac{\tilde{w}^{\mathsf{m}_k^a}}{\tilde{z}^{\mathsf{m}_k^a}}.$$

We 利用 (2.15)，可以将 $|I_1|$ 界定为 $\exp(C_7|z| + C_7|w|)$，其中 $d \in (0,\ 1/2]$ 满足

$$d < a_{k-1}/a_k - 1 \text{ if } k \geq 1 \text{ and } d \leq (1/2)(v_{k+1}^a/a_k - 1) \text{ if } |\mathsf{V}_a| \geq k + 1.$$

此外，对于所有 $\tilde{z} \in \mathcal{C}_{-1}^{\phi_z}$，$|I_2|$ 由 $(2|\tilde{w}|)^{\mathsf{m}_k^a}$ 在 $|\tilde{z}| \geq 1/2$ 时有界。最后几条观察得出了 (2.20) 第三行的第二个不等式。

由 (2.20)，我们得出，对某个 $C_8, c_8 > 0$ 以及所有 $\tilde{z} \in \mathcal{C}_{-1}^{\phi_z}$、 $\tilde{w} \in \mathcal{C}_{-2}^{\phi_w}$，有

$$|G_T(\tilde{z}, \tilde{w})| \leq \exp\left(C_8 + C_8|\tilde{z}| + C_8|\tilde{w}| - c_8|\tilde{z}|^2 - c_8|\tilde{z}|^3 - c_8|\tilde{w}|^2 - c_8|\tilde{w}|^3\right).$$

由于后一函数可积，我们由 (2.18)、(2.19) 及控制收敛定理得出

$$\lim_{T\to\infty} V^T = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_{\mathcal{C}_{-1}^{\phi_z}} d\tilde{z}\int_{\mathcal{C}_{-2}^{\phi_w}} d\tilde{w}\frac{\exp(-s\tilde{z}^2/2 - x\tilde{z} + t\tilde{w}^2/2 + y\tilde{w})}{\tilde{z}-\tilde{w}}\cdot\frac{\tilde{w}^{\mathsf{m}_k^a}}{\tilde{z}^{\mathsf{m}_k^a}}. \tag{2.21}$$

将 $\mathcal{C}_{-2}^{\phi_w}$ 变形为 $-2+\mathrm{i}\mathbb{R}$，并将 $\mathcal{C}_{-1}^{\phi_z}$ 变形为 $\mathcal{C}_1$，且不穿过任何极点后，方程 (2.21) 推出 (2.10)。注意，所得围道 $\mathcal{C}_1$ 的方向为负向；反转其方向后，围道即为正定向，且因子 $\tilde{z}-\tilde{w}$ 变为 $\tilde{w}-\tilde{z}$，与 (2.10) 一致。□

2.2. **Airy 线系综极限**。固定 $(a,\ b,\ c)\in\mathcal{P}_{\mathsf{pos}}$。对于任意 $T>0$ 以及有限集 $\mathsf{S}\subset(0,\ \infty)$，其中 $\mathsf{S}=\{s_1,\dots,s_m\}$ 且 $s_1<s_2<\cdots<s_m$，我们定义随机测度

$$M^T(A)=\sum_{i\geq 1}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{1}\left\{\left(s_j,\mathcal{A}_i^{a,b,c}(s_j+T)\right)\in A\right\}. \tag{2.22}$$

若 $\phi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是满足 $\phi^{-1}(s,\ x)=(s+T,\ x)$ 的双射，则我们注意到 $M^T=\tilde{M}^T\phi^{-1}$，其中

$$\tilde{M}^T(A)=\sum_{i\geq 1}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{1}\{(s_j+T,\mathcal{A}_i^{a,b,c}(s_j+T))\in A\}.$$

由命题 1.5 可知，$\tilde{M}^T$ 是一个行列式点过程，其相关核为$K_{a,\ b,\ c}$，参考测度为 $\mu_{T+\mathsf{S}}\times$ 勒贝格测度。由变量替换公式 [13, 命题 2.13(5)]，并取上述的 ϕ，可得 M^T 是一个行列式点过程，参考测度为 $\mu_{\mathsf{S}}\times$勒贝格测度，相关核为

$$\begin{aligned}&K^T(s,x;t,y)=K^2_{a,b,c}(s,x;t,y)+K^{3,T}(s,x;t,y),\ \text{where}\\ &K^{3,T}(s,x;t,y)=\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_{\Gamma_\alpha^+}dz\int_{\Gamma_\beta^-}dw\frac{e^{(z-T)^3/3-(z-T)x-(w-T)^3/3+(w-T)y}}{z+s-w-t}\cdot\frac{\Phi_{a,b,c}(z+s)}{\Phi_{a,b,c}(w+t)}.\end{aligned} \tag{2.23}$$

在最后一个方程中，围道如定义 1.2 中所述，其中有 $a_1^{-1}>\alpha+s>\beta+t>0$，而$\Phi_{a,\ b,\ c}$ 如式 (1.10) 所示。我们指出，在推导 (2.23) 时，我们在定义 1.3 中的$K^3_{a,\ b,\ c}$公式中应用了变量替换$z\to z-T$, $w\to w-T$。

采用上述记号后，我们转而讨论本节的主要结果。

命题 2.3。沿用定义 *1.1*、*1.12* 以及命题 *1.5* 中的记号。固定$(a,b,c)\in\mathcal{P}_{\mathsf{pos}}$，并假设 $|\mathsf{V}_a|=J_a<\infty$。若 $s,t,x,y\in\mathbb{R}$ 固定，x_T,y_T有界且$\lim_{T\to\infty}x_T=x$，并且$\lim_{T\to\infty}y_T=y$，则

$$\lim_{T\to\infty}K^T(s,x_T;t,y_T)=K_{0,0,0}(s,x;t,y). \tag{2.24}$$

在最后一个方程中，K^T 与(2.23) 中的相同，而 $K_{0,\ 0,\ 0}$ 与定义 *1.3* 中的相同，其中所有参数 $a_i^{\pm}$、$b_i^{\pm}$、$c^{\pm}$ 均设为零。

证明。固定一个充分大的 $A>0$，使得 $|x_T|,\ |y_T|\leq A$。下文中，$C_i>0$ 表示充分大的常数，$c_i>0$ 表示充分小的常数，它们依赖于参数 $s,\ t,\ \alpha,\ \beta$、$(a,\ b,\ c)$ 和 A。此外，只要 T 充分大，下面所有不等式均成立；其取值依赖于相同的参数。此后不再赘述。我们给出的证明与命题 2.1 的证明类似，因此从简。

比较 (2.23) 中 K^T 的表达式与定义 1.3 中的 $K_{0,0,0}$，我们看到，要证明 (2.24)，只需证明

$$\lim_{T\to\infty}K^{3,T}(s,x_T;t,y_T)=\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_{\Gamma_\alpha^+}dz\int_{\Gamma_\beta^-}dw\frac{\exp(z^3/3-xz-w^3/3+yw)}{z+s-w-t}. \tag{2.25}$$

注意，条件 $|\mathbb{V}_a| = J_a < \infty$ 意味着 $a_1 > \cdots > a_{J_a}$，也意味着 $a_{J_a+1} = a_{J_a+2} = \cdots = 0$，且 $1/a_1 - s, \ldots, 1/a_{J_a} - s$ 是 (2.23) 中 $\Phi_{a,b,c}(z+s)$ 的简单极点。我们在 (2.23) 中将 Γ_α^+ 变形为 $\Gamma_{\alpha+T}^+$，在此过程中，围道穿过了位于 $1/a_1 - s, \ldots, 1/a_{J_a} - s$ 处的简单极点。随后，我们将 Γ_β^- 变形为 $\Gamma_{\beta+T}^-$，且不穿过任何极点。完成变形、应用留数定理并对变量 $z \to z+T$, $w \to w+T$ 作变换后，我们得到

$$K^{3,T}(s, x_T; t, y_T) = V^T + \sum_{j=1}^{J_a} U_j^T,$$

其中

$$V^T = \frac{1}{(2\pi \mathsf{i})^2} \int_{\Gamma_\alpha^+} dz \int_{\Gamma_\beta^-} dw \frac{\exp(z^3/3 - x_T z - w^3/3 + y_T w)}{z+s-w-t} \cdot \frac{\Phi_{a,b,c}(z+T+s)}{\Phi_{a,b,c}(w+T+t)},$$

$$U_j^T = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{\Gamma_\beta^-} dw \frac{\exp((1/a_j - T - s)^3/3 - x_T(1/a_j - T - s) - w^3/3 + y_T w)}{1/a_j - w - T - t} \times \frac{\prod_{i=1}^\infty (1 + b_i/a_j)}{\Phi_{a,b,c}(w+T+t) a_j \prod_{i=1, i\neq j}^\infty (1 - a_i/a_j)}. \tag{2.26}$$

最后两个显示的方程表明，要证明 (2.25)，只需证明

$$\lim_{T\to\infty} U_j^T = 0 \text{ for } j = 1, \ldots, J_a, \tag{2.27}$$

$$\lim_{T\to\infty} V^T = \frac{1}{(2\pi \mathsf{i})^2} \int_{\Gamma_\alpha^+} dz \int_{\Gamma_\beta^-} dw \frac{\exp(z^3/3 - xz - w^3/3 + yw)}{z+s-w-t}. \tag{2.28}$$

我们注意到，对于某个 $C_1 > 0$ 以及所有 $w \in \Gamma_\beta^-$ 和 $j \in \{1, \ldots, J_a\}$，我们有 ve

$$\left|\frac{1}{1/a_j - w - T - t}\right| \le 1, \quad \left|\frac{1}{\Phi_{a,b,c}(w+T+t)}\right| = \frac{\prod_{i=1}^{J_a} |1 - a_i(w+T+t)|}{\prod_{i=1}^\infty |1 + b_i(w+T+t)|} \le \exp(C_1|w| + C_1 T),$$

其中，在最后一个不等式中，我们对 $d = \sqrt{2}/2$ 使用了 (2.15)。此外，通过考察 $\mathrm{Re}[w^3]$，我们看到，对于某个 $C_2, c_2 > 0$ 以及所有 $w \in \Gamma_\beta^-$，我们有

$$|\exp(-w^3/3 + y_T w)| \le \exp(-c_2|w|^3 + C_2|w|^2 + C_2).$$

最后两个显示的不等式表明，存在某个 $C_3 > 0$，使得对所有 $j \in \{1, \ldots, J_a\}$，均有

$$\left|U_j^T\right| \le e^{-T^3/3 + C_3 T^2} \cdot \int_{\Gamma_\beta^-} |dw| \exp\left(-c_2|w|^3 + C_1|w| + C_2|w|^2\right), \tag{2.29}$$

这就推出了 (2.27)。

在证明的剩余部 分中，我们证明 (2.28)。首先注意到，对于 $w \in \Gamma_\beta^-$ 和 $z \in \Gamma_\alpha^+$

$$\left|\prod_{i=1}^{J_a} \frac{1 - a_i(w+T+t)}{1 - a_i(z+T+s)}\right| = \prod_{i=1}^{J_a} \frac{|(a_i T)^{-1} - wT^{-1} - tT^{-1} - 1|}{|(a_i T)^{-1} - zT^{-1} - sT^{-1} - 1|} \le 2^{J_a} \cdot (2 + |w|)^{J_a},$$

其中，在最后一个不等式中，我们利用了对于较大的 T，$T^{-1}\Gamma_\alpha^+$ 与 -1 的距离为 $1 - \alpha T^{-1}$。此外，对于某个 $C_4 > 0$ 以及所有 $w \in \Gamma_\beta^-$ 和 $z \in \Gamma_\alpha^+$，有

$$\left|\prod_{i\ge 1} \frac{1 + b_i(z+T+s)}{1 + b_i(w+T+t)}\right| = \prod_{i\ge 1} \frac{\left|1 + \frac{b_i(z+s)}{1+b_i T}\right|}{\left|1 + \frac{b_i(w+t)}{1+b_i T}\right|} \le \exp\left(C_4|z+s| + C_4|w+t|\right),$$

其中，在最后一个不等式中，我们利用了 $d=\sqrt{2}/2$ 处的(2.15) 以及 $\beta+t>0$，参见 (2.23) 下方的讨论。通过考察 $\mathrm{Re}[w^3]$ 和 $\mathrm{Re}[z^3]$，我们还可得，对于某个 C_5，$c_5>0$，以及所有 $w\in\Gamma_\beta^-$ 和 $z\in\Gamma_\alpha^+$，有

$$|\text{例如}(z^3/3-x_Tz-w^3/3+y_Tw)|\le\exp\left(-c_5|z|^3-c_5|w|^3+C_5+C_5|z|^2+C_5|w|^2\right)$$

最后，since $\alpha+s>\beta+t$，我们知道存在某个 $C_6>0$，对所有 $w\in\Gamma_\beta^-$ 和 $z\in\Gamma_\alpha^+$，都有

$$\left|\frac{1}{z+s-w-t}\right|\le C_6.$$

结合上述四个估计，我们得出存在某个 $C_7>0$，对所有 $w\in\Gamma_\beta^-$ 和 $z\in\Gamma_\alpha^+$，都有

$$\left|\frac{\exp(z^3/3-x_Tz-w^3/3+y_Tw)}{z+s-w-t}\cdot\frac{\Phi_{a,b,c}(z+T+s)}{\Phi_{a,b,c}(w+T+t)}\right|\le e^{-c_2|w|^3-c_2|z|^3+C_7|z|^2+C_7|w|^2+C_7}. \tag{2.30}$$

由于左侧可积，且

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\exp(z^3/3-x_Tz-w^3/3+y_Tw)}{z+s-w-t}\cdot\frac{\Phi_{a,b,c}(z+T+s)}{\Phi_{a,b,c}(w+T+t)}=\frac{\exp(z^3/3-xz-w^3/3+yw)}{z+s-w-t},$$

由此根据控制收敛定理，得到 (2.28)。 □

2.3. 戴森布朗运动的行列式结构。 本节说明戴森布朗运动与核 $K^{\mathrm{DBM},n}$ （见 (2.5)）之间的关系。其精确表述见下文的命题 2.6。在陈述该命题之前，我们先建立证明所需的两个辅助结果。

引理 2.4。 固定 $k\in\mathbb{N}$，并设 M 是 $\mathbb{R}^k$ 上的行列式点过程，其相关核为 K，参考测度为 λ，如定义 2.11中所述。设 μ 是 $\mathbb{R}^k$上的测度，且$f\colon\mathbb{R}^k\to[0,\infty)$ 是可测函数，满足 $\mu(V)<\infty$，并且对所有紧$V\subset\mathbb{R}^k$，$\sup_{x\in V}f(x)<\infty$。进一步设 λ 关于 μ绝对连续，其拉东-尼科迪姆导数为 $f=\frac{d\lambda}{d\mu}$。那么 M 也是 $\mathbb{R}^k$ 上的行列式点过程，其参考测度为 μ，相关核为 $f(x)^\alpha K(x,y)f(y)^{1-\alpha}$，对任意 $\alpha\in[0,1]$ 均成立（采用约定 $0^0=1$）。

证明。 固定 $m\in\mathbb{N}$、n_1、..... $n_m\in\mathbb{N}$、$n=n_1+\cdots+n_m$ 以及 m 两两不交的有界博雷尔集合A_1、... ... $A_m\subset\mathbb{R}^k$。由 [13,（2.13）] 和 [13, 定义 2.11], 可知

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^m\frac{M(A_j)!}{(M(A_j)-n_j)!}\right]&=\int_{A_1^{n_1}\times\cdots\times A_m^{n_m}}\det\left[K(x_i,x_j)\right]_{i,j=1}^n\lambda^n(dx)\\&=\int_{A_1^{n_1}\times\cdots\times A_m^{n_m}}\det\left[K(x_i,x_j)\right]_{i,j=1}^n\prod_{i=1}^n f(x_i)\mu^n(dx)\\&=\int_{A_1^{n_1}\times\cdots\times A_m^{n_m}}\det\left[f(x_i)^\alpha K(x_i,x_j)f(x_j)^{1-\alpha}\right]_{i,j=1}^n\mu^n(dx),\end{aligned}$$

从第一行到第二行时我们用了 $f=\frac{d\lambda}{d\mu}$，从第二行到第三行时则利用了行列式的线性性。最后显示的方程和 [13, 引理 2.8],推出了该引理的结论。□

引理 2.5。 固定 $n\in\mathbb{N}$，并设 $(\lambda^n(t):\,t\ge0)$ 为从 $\lambda^n(0)=0$~出发的戴森布朗运动，如定义 1.13 所述。对于 $t>0$，定义 $\lambda_i^n(t)=t\lambda_i^n(1/t)$，并令 $\lambda_i^n(0)=0$。那么，几乎必然有~$\lambda^n\in C([0,\infty)\,W_n)$，且 λ^n 与 λ^n同分布。

证明。令

$$X(t)=[X_{ij}(t)]_{i,j=1}^{n}=\begin{cases}B_{ii}(t), & i=j,\\ 2^{-1/2}B_{ij}(t)+\mathrm{i}2^{-1/2}\cdot\widetilde{B}_{ij}(t), & i<j,\\ 2^{-1/2}B_{ij}(t)-\mathrm{i}2^{-1/2}\cdot\widetilde{B}_{ij}(t), & i>j,\end{cases}$$

其中 B_{ij} 和 $\widetilde{B}_{ij}$ 是独立同分布的标准布朗运动。令 $Y(t)=tX(1/t)$，其中 $t>0$ 和 $Y(0)=0$。由于对于标准布朗运动 B，有 $tB(1/t)\overset{d}{=}B(t)$，见 [22, 定理 7.2。6]，我们得出 $X(t)\overset{d}{=}Y(t)$。

将 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的特征值过程分别记为

$$\lambda^{n,X}(t)=\left(\lambda_1^{n,X}(t),\lambda_2^{n,X}(t),\dots,\lambda_n^{n,X}(t)\right)\text{ and }\lambda^{n,Y}(t)=\left(\lambda_1^{n,Y}(t),\lambda_2^{n,Y}(t),\dots,\lambda_n^{n,Y}(t)\right),$$

。由于 $X(t)\overset{d}{=}Y(t)$，我们得出 $\lambda^{n,\,X}(t)\overset{d}{=}\lambda^{n,\,Y}(t)$。由 [23,定理 3 和 4],可知 $\lambda^{n,\,X}(t)\overset{d}{=}\lambda^{n}(t)$。由于 $Y(t)\overset{a.s.}{=}tX(1/t)$，我们得出 $\lambda^{n,\,Y}(t)\overset{a.s.}{=}t\lambda^{n,\,X}(1/t)\overset{d}{=}\tilde{\lambda}^{n}(t)$。最后这三点观察给出了该引理的结论。□

命题 2.6。固定 $n\in\mathbb{N}$，令 $(\lambda^n(t):\ t\geq 0)$ 为从 $\lambda^n(0)=0$ 出发的戴森布朗运动，如定义 *1.13* 所述。固定 $m\in\mathbb{N}$、$0<t_1<t_2<\cdots<t_m$，并令 $\mathcal{T}=\{t_1,\dots,t_m\}$。那么，随机测度

$$M(A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{1}\{(t_j,\lambda_i^n(t_j))\in A\}$$

是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的行列式点过程，其相关核为 $K^{\mathrm{DBM},\,n}$，如 *(2.5)* 所示；参考测度为 $\mu_{\mathcal{T}}\times$勒贝格测度，如定义 *1.4* 所述。

证明。为清晰起见，我们将证明分为两个步骤。步骤 1 中，我们证明 M 是一个参考测度为 $\mu_{\mathcal{T}}\times$ Leb、相关核为 K（如 (2.31) 所示）的行列式点过程。步骤 2 中，我们定义一个辅助随机测度 $\tilde{M}$，并利用步骤 1 中的结果和引理 2.5 证明它是行列式型的。我们还证明，对于一个适当的双射 $\tilde{\phi}$，有 $\tilde{M}\tilde{\phi}^{-1}=M$。通过适当结合变量替换、规范变换和引理 2.4，我们得出结论：M 也是行列式型的，其相关核为 $K^{\mathrm{DBM},\,n}$。

步骤 1. 在 $\mathbb{R}^2$ 上定义随机测度

$$\hat{M}(A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{1}\{(j,\lambda_i^n(t_j))\in A\}.$$

由 [26, 命题 2.1] 的证明可知，$\hat{M}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的行列式型点过程，其参考测度为 $\mu_{\{1,\dots,m\}}\times$勒贝格测度，相关核为

$$\hat{K}(u,x;v,y)=S^{u,v}(x,y)-\mathbf{1}\{u>v\}\cdot\frac{e^{-(x-y)^2/2(t_u-t_v)}}{\sqrt{2\pi(t_u-t_v)}},$$

其中

$$S^{u,v}(x,y)=\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\oint_{\mathcal{C}_1}dz\frac{e^{-(z-x)^2/2t_u}}{\sqrt{t_u}}\int_{\mathrm{i}\mathbb{R}}dw\frac{e^{(w-y)^2/2t_v}}{\sqrt{t_v}}\cdot\frac{w^n-z^n}{z^n(w-z)},$$

且 $\mathcal{C}_1$ 是以原点为中心、取正向的单位圆。上述公式可通过对 [26, 第 482] 页最后显示的方程令 $N=n$, $x_1=\cdots=x_N=0$, $m=u$, $n=v$，并作变量替换 $z\mapsto z/\sqrt{t_u}$, $y'\mapsto -\mathrm{i}w/\sqrt{t_v}$ 得出。

令 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个分段线性递增双射，使得 $f(j)=t_j$ 对于 $j\in\{1,\dots,m\}$ 成立。令 $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$，使其满足 $\phi(s,\ x)=(f(s)\ x)$，并注意到 $M=\hat{M}\phi^{-1}$。因此，

由 [13, 命题 2.13(5)] 可得， M 是行列式型的，其参考测度为 $\mu_{\mathcal{T}}\times$勒贝格测度，相关核为 $K(s,\ x;\ t,\ y) = \hat{}K(\hat{}f^{-1}(s)\ x;\hat{}f^{-1}(t)\ y)$，其等于

$$K(s,x;t,y)=\frac{-\mathbf{1}\{s>t\}e^{-\frac{(x-y)^2}{2(s-t)}}}{\sqrt{2\pi(s-t)}}+\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\oint_{\mathcal{C}_1}dz\int_{2+\mathrm{i}\mathbb{R}}dw\frac{e^{-(z-x)^2/2s}e^{(w-y)^2/2t}}{\sqrt{st}(w-z)}\cdot\frac{w^n}{z^n}. \tag{2.31}$$

我们指出，在推导最后一个方程时，我们将围道 $\mathrm{i}\mathbb{R}$ in $S^{u,\ v}$ 变形为 $2+\mathrm{i}\mathbb{R}$，随后利用柯西定理将最后一个分式中的项 $-z^n$ in 积分为零。

˜**步骤 2.** 定义 $\lambda_i^n(t) = t\lambda_i^n(1/t)$，其中 $t>0$。取 $\mathsf{S} = \{s_1,\dots,s_m\}\subset(0,\ \infty)$，满足 $s_1<\cdots<s_m$，并定义随机测度

$$\tilde{M}(A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{1}\{(s_j,\tilde{\lambda}_i^n(s_j))\in A\}.$$

由引理 2.5 可知，只要 $\mathsf{S}=\mathcal{T}$，就有 $M\overset{d}{=}\tilde{M}$。因此， $\tilde{M}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的行列式点过程，其参考测度为 $\mu_{\mathsf{S}}\times$勒贝格测度，相关核为 (2.31) 中的 K。

在证明余下部分中，我们令 $s_j=1/t_{m-j+1}$表示 $j=1,\ \dots,\ m$。定义双射$\tilde{\phi}\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，使得对于 $s>0$， $\tilde{\phi}(s,\ x)=(1/s,\ x/s)$；对于 $s\le 0$， $\tilde{\phi}(s,\ x)=(s,\ x)$；并且 $x\in\mathbb{R}$。我们注意到

$$\begin{aligned}\tilde{M}\tilde{\phi}^{-1}(A)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{1}\{(1/t_{m-j+1},\tilde{\lambda}_i^n(1/t_{m-j+1}))\in\tilde{\phi}^{-1}(A)\}\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{1}\{\tilde{\phi}(1/t_{m-j+1},\tilde{\lambda}_i^n(1/t_{m-j+1}))\in A\}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{1}\{(t_{m-j+1},t_{m-j+1}\cdot\tilde{\lambda}_i^n(1/t_{m-j+1}))\in A\}\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{1}\{(t_{m-j+1},\lambda_i^n(t_{m-j+1}))\in A\}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{1}\{(t_j,\lambda_i^n(t_j))\in A\}=M(A),\end{aligned}$$

从而 $\tilde{M}\tilde{\phi}^{-1}=M$ 几乎必然成立。

由 [13, 命题 2.13(5)], ，我们得出 $\tilde{M}\tilde{\phi}^{-1}$，因此 M 是行列式型的，其相关核为 $K(\tilde{\phi}^{-1}(s,\ x);\ \tilde{\phi}^{-1}(t,\ y))$，参考测度为 ($\mu_{\mathsf{S}}\times$勒贝格测度) $\tilde{\phi}^{-1}$。注意， $\mu_{\mathcal{T}}\times$勒贝格测度相对于 ($\mu_{\mathsf{S}}\times$勒贝格测度)$\tilde{\phi}^{-1}$绝对连续，且密度为 $t^{-1}\cdot\mathbf{1}\{t\in\mathcal{T}\}$。由引理 2.4 及 $\alpha=1/2$，我们得出 M 是行列式型的，参考测度为 $\mu_{\mathcal{T}}\times$勒贝格测度，相关核为 $\bar{K}(s,\ x;\ t,\ y)=(st)^{-1/2}K(\tilde{\phi}^{-1}(s,\ x);\ \tilde{\phi}^{-1}(t,\ y))$，根据式 (2.31)，这等于

$$\bar{K}(x,s;t,y)=\frac{-\mathbf{1}\{t>s\}e^{-\frac{(x/s-y/t)^2}{2(1/s-1/t)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}+\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\oint_{\mathcal{C}_1}dz\int_{2+\mathrm{i}\mathbb{R}}dw\frac{e^{-s(z-x/s)^2/2}e^{t(w-y/t)^2/2}}{w-z}\cdot\frac{w^n}{z^n}.$$

应用规范变换，参见 [13, 命题 2.13(4)]，其中 $f(s,x)=e^{x^2/2s}$，我们得出 M是行列式型的，其参考测度为 $\mu_{\mathcal{T}}\times$ 勒贝格测度，相关核为 $^{f_{(s,x)}f(t,y)}\bar{K}(x,s;\ t,y)$，经过一些代数运算可知它等于

$$\frac{-\mathbf{1}\{t>s\}e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}+\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\oint_{\mathcal{C}_1}dz\int_{2+\mathrm{i}\mathbb{R}}dw\frac{e^{-sz^2/2+xz+tw^2/2-yw}}{w-z}\cdot\frac{w^n}{z^n}.$$

最后一个 fo 现在的公式与 (2.5) 一致，只需对变量 $z\to-z$ 和 $w\to-w$ 作变换。 □

3. 有限维收敛

本节的目标是建立定理 1.14 和 1.16 中出现的线系综的有限维收敛性。我们将在第 3.3 节和第 3.4 节中完成这一目标，参见命题 3.3 和 3.4。为了建立这些结果，我们需要两个上尾估计。第一个对应于定理 1.14 中的缩放，参见第 3.1 节中的命题 3.1；第二个对应于定理 1.16 中的缩放，参见第 3.2 节中的命题 3.2。本节始终采用第 1 节中的记号。我们也将自由使用 [13, 第 2] 节中关于行列式点过程的定义和记号。

3.1. Dyson布朗运动极限的上尾估计。

本节旨在证明以下结果，该结果表明，定理 1.14(a) 中曲线 $\mathcal{L}_1^N$ 的单点边缘分布从上方是紧的。

命题 3.1。 采用定义 *1.1*、*1.12* 和命题 *1.5* 中的相同记号。固定 $k \in \mathbb{N}$，设 $(a,b,c) \in \mathcal{P}_{\mathsf{pos}}$ 满足 $|\mathsf{V}_a| \geq k$，并设 $\mathsf{m}_1 = \cdots = \mathsf{m}_{k-1} = 1$。对固定的 $t \in (0,\infty)$，定义

$$X_i^T = (2T)^{-1/2}\left(\mathcal{A}_i^{a,b,c}(tT) + 2tT/v_k^a - (tT)^2\right) \text{ for each } i \geq 1.$$

于是，以下结论成立：

$$\lim_{A\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}\left(X_k^T \geq A\right) = 0. \tag{3.1}$$

证明。 为清晰起见，我们将证明分为两个步骤。第一步，我们将命题的证明归结为证明某些单重积分和二重积分在 $T \to \infty$ 时趋于零，见 (3.4) 和 (3.5)，以及某些概率趋于 1，见 (3.6)。在步骤 2 中，我们利用命题 2.1 证明中的步骤 2 和步骤 3 所得的界，证明 (3.4) 和 (3.5)。我们还利用命题 1.11(a) 中 Airy 漫游者线系综的渐近斜率证明 (3.6)。

步骤 1. 这一步的论证基本上重复了 [15, 引理 4.2], 证明中的步骤 1 和步骤 2，因此我们从简叙述。设 $M^{v_k^a,T}$ 如 (2.1) 中对 $\mathsf{S} = \{t\}$的定义。注意，根据 X_i^T的定义，我们有 $M^{v_k^a,T}(\cdot) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}\{(t, X_i^T) \in \cdot\}$。此外，根据我们在第 2.1 节中的工作，我们知道$_{M^{v_k^a,T}}$ 是行列式型的，其相关核为 $K^{v_k^a,T}$，如 (2.2) 所示。由 [13, (2.13)], 可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(X_i^T \geq A) &= \mathbb{E}\left[M^{v_k^a,T}(\{t\}\times[A,\infty))\right] = \int_A^{\infty} K^{v_k^a,T}(t,x;t,x)dx \\ &= \frac{\sqrt{2T}}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\Gamma_\alpha^+} dz \int_{\Gamma_\beta^-} dw \int_A^{\infty} dx \frac{\exp(H^{a_k,T}(z,t,x) - H^{a_k,T}(w,t,x))}{z-w}\cdot\frac{\Phi_{a,b,c}(z)}{\Phi_{a,b,c}(w)} \\ &= \frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\Gamma_\alpha^+} dz \int_{\Gamma_\beta^-} dw \frac{\exp(H^{a_k,T}(z,t,A) - H^{a_k,T}(w,t,A))}{(z-w)^2}\cdot\frac{\Phi_{a,b,c}(z)}{\Phi_{a,b,c}(w)}.\end{aligned}$$

我们回顾一下， $0 < \beta < \alpha < 1/a_1$ 且 $H^{a_k,T}$ 如 (2.3) 中所定义。需要指出的是，交换积分次序是合理的，因为富比尼定理适用；其适用性可由 [15, (4.4)]之后建立的同样的界保证。

与命题 2.1 的证明中一样，我们将 Γ_α^+变形为 $\Gamma_{v_T}^+$，其中 $v_T = 1/v_k^a - 1/\sqrt{2T}$；在此过程中，围道会穿过位于 $1/a_1, \ldots, 1/a_{k-1}$ 的简单极点。随后，我们将 Γ_β^- 变形为 $\Gamma_{u_T}^-$，其中$u_T = 1/v_k^a - 2/\sqrt{2T}$；在此过程中，围道确实会穿过位于 $1/a_1, \ldots, 1/a_{k-1}$ 的极点。这些极点在命题 2.1 证明的步骤 1 中并不存在，可以追溯到我们现在的分母是 $(z-w)^2$，而不是 $z-w$。此外，我们注意到，额外的

$k-1$ 我们得到的留数都等于 1。根据留数定理，我们得出 e

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(X_i^T\geq A)=k-1+V^T(A)+\sum_{j=1}^{k-1}U_j^T(A), \tag{3.2}$$

其中

$$\begin{aligned}V^T(A)&=\frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\Gamma^+_{v_T}}dz\int_{\Gamma^-_{u_T}}dw\frac{\exp(H^{a_k,T}(z,t,A)-H^{a_k,T}(w,t,A))}{(z-w)^2}\cdot\frac{\Phi_{a,b,c}(z)}{\Phi_{a,b,c}(w)},\\ U_j^T(A)&=\frac{\sqrt{2T}}{2\pi\mathsf{i}}\int_{\Gamma^-_{u_T}}dw\frac{\exp(H^{a_k,T}(1/a_j,t,A)-H^{a_k,T}(w,t,A))}{(1/a_j-w)^2\Phi_{a,b,c}(w)}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{\infty}(1+b_i/a_j)}{a_j\prod_{i=1,i\neq j}^{\infty}(1-a_i/a_j)}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

由 (3.2) 可知，若能证明

$$\lim_{T\to\infty}\left|U_j^T(A)\right|=0\text{ for }j=1,\dots,k-1\text{ and }A\in\mathbb{R}, \tag{3.4}$$

$$\lim_{A\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\left|V^T(A)\right|=0, \tag{3.5}$$

$$\lim_{T\to\infty}\mathbb{P}(X_j^T\geq A)=1,\text{ for }j=1,\dots,k-1\text{ and }A\in\mathbb{R}. \tag{3.6}$$

我们将在下一步证明最后三个方程。

步骤 2. 由 (3.3) 可知，对于 $x_T=y_T=A$， $U_j^T(A)$ 与 (2.8) 中的 U_j^T 一致，唯一的区别是被积函数的分母多了一个 $(1/a_j-w)$。因此，我们可以重复命题 2.1 的证明中步骤 2 的相同论证，得到以下与 (2.17) 类似的结果:

$$\left|U_j^T(A)\right|\leq C_3e^{-c_1T+C_1\sqrt{T}}\int_{\mathcal{C}_{-2}^{\phi_w}}|d\tilde{w}|\exp\left(-c_2|\tilde{w}|^3-c_2|\tilde{w}|^2+C_6|\tilde{w}|+C_6\right),$$

其中 $C_i,c_i>0$ 是正常数，除 t、(a,b,c) 外，还取决于 A。我们指出，额外因子 C_3 来源于额外项 $(1/a_j-w)$ 和 (2.14)。此外，回顾一下，围道 $\mathcal{C}_{-2}^{\phi_w}$ 与 (2.12) 中相同，而 $\phi_w=2\pi/3$ 和 $|d\tilde{w}|$ 表示关于弧长的积分。最后显示的不等式证明了 (3.4)。

接下来，我们可以重复命题 2.1 的证明中步骤 3 的论证，从而得到下述与 (2.18) 类似的结果:

$$V^T(A)=\frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_{-1}^{\phi_z}}d\tilde{z}\int_{\mathcal{C}_{-2}^{\phi_w}}d\tilde{w}\frac{G_T(\tilde{z},\tilde{w})}{\tilde{z}-\tilde{w}}, \tag{3.7}$$

where $G_T(\tilde{z},\tilde{w})$ is as in (2.18) and th$^{\text{e con}}$ tours $\mathcal{C}_{-2}^{\phi_w},\mathcal{C}_{-1}^{\phi_z}$ 是 in (2.12) w与 $\phi_w=2\pi/3,\phi_z=3\pi/16$ 。根据 (2.3) 中 $H^{\rho,T}$ 的定义，以及将前两个不等式 (2.20) 应用于 $x_T=y_T=0$，对于某个依赖于 t、(a,b,c) 的 $C_7',c_7'>0$，以及所有 $A\geq 0$、 $\tilde{z}\in\mathcal{C}_{-1}^{\phi_z}$ 和 $\tilde{w}\in\mathcal{C}_{-2}^{\phi_w}$，我们有

$$\begin{aligned}&\left|\exp\left(H^{a_k,T}(1/a_k+(2T)^{-1/2}\tilde{z},t,A)-H^{a_k,T}(1/a_k+(2T)^{-1/2}\tilde{w},t,A)\right)\right|\\ &=\left|\exp\left(H^{a_k,T}(1/a_k+(2T)^{-1/2}\tilde{z},t,0)-H^{a_k,T}(1/a_k+(2T)^{-1/2}\tilde{w},t,0)\right)\right|\cdot\left|e^{A(\tilde{w}-\tilde{z})}\right|\\ &\leq\exp\left(-c_7'|\tilde{w}|^3-c_7'|\tilde{w}|^2+C_7'|\tilde{w}|-c_7'|\tilde{z}|^3-c_7'|\tilde{z}|^2+C_7'|\tilde{z}|+C_7'-A\right),\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中我们利用了 $\left|e^{A(\tilde{w}-\tilde{z})}\right|=e^{A\operatorname{Re}(\tilde{w}-\tilde{z})}\leq e^{-A}$，因为 $\mathcal{C}_{-1}^{\phi_z}$ 到 $\mathcal{C}_{-2}^{\phi_w}$ 的水平距离至少为 1。结合 (3.7)、(3.8) 中的界以及 (2.20) 的第三行，我们得出，对某个

$C_8', c_8' > 0$，它取决于 t,(a,b,c)，且对所有 $A \geq 0$

$$\left|V^T(A)\right| \leq e^{-A} \cdot \int_{\mathcal{C}_{-1}^{\phi_z}} |d\tilde{z}| \int_{\mathcal{C}_{-2}^{\phi_w}} |d\tilde{w}| e^{C_8'+C_8'|\tilde{z}|+C_8'|\tilde{w}|-c_8'|\tilde{z}|^2-c_8'|\tilde{z}|^3-c_8'|\tilde{w}|^2-c_8'|\tilde{w}|^3}.$$

最后一个展示的不等式证明了 (3.5)。

最后，我们关注 (3.6)。由命题 1.11(a) 和斯勒茨基定理，对每个 $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ 当 $T \to \infty$ 时，以下弱收敛成立：

$$\frac{\sqrt{2T}X_i^T + (-2/a_k + 2/a_i)tT}{tT} = \frac{(\mathcal{A}_i^{a,b,c}(tT) + (2/a_i)tT - t^2T^2)}{tT} \Rightarrow 0.$$

由于根据假设 $a_i > a_k$，最后一个陈述蕴含 (3.6)。 □

3.2. **Airy 线系综极限的上尾**。 本节旨在证明以下结果，该结果表明定理 1.16(a) 中曲线 $\mathcal{A}_1^N$ 的单点边缘分布从上方是紧的。

命题 3.2. 采用定义 *1.1*、*1.12* 和命题 *1.5* 中的相同记号。固定$(a,b,c) \in \mathcal{P}_{\mathsf{pos}}$，并假设 $|\mathsf{V}_a| = J_a < \infty$。对于固定的 $t \in \mathbb{R}$，有

$$\lim_{A\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}\left(\mathcal{A}_{1+J_a}^{a,b,c}(T+t) \geq A\right) = 0. \tag{3.9}$$

证明。 为清晰起见，我们将证明分为两个步骤。第一步中，我们将命题的证明归结为证明某些单重积分和二重积分在 $T \to \infty$ 时趋于零，见 (3.12) 和 (3.13)，以及某些概率趋于 1，见 (3.14)。在步骤 2 中，我们利用命题 2.3 证明中的界来证明 (3.12) 和 (3.13)。我们还利用命题 1.11(a) 中 Airy 漫游者线系综的渐近斜率证明 (3.14)。

步骤 1. 令 M^T如 (2.22) 中所定义，其中 $\mathsf{S} = \{t\}$。根据我们在第 2.2 节中的工作，我们知道 M^T 是行列式型的，其相关核 K^T 如 (2.23) 所示。由 [13, (2.13)] 和富比尼定理，我们得出

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\mathcal{A}_i^{a,b,c}(T+t) \geq A) = \mathbb{E}\left[M^T(\{t\} \times [A,\infty))\right] = \int_A^{\infty} K^T(t,x;t,x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_{\Gamma_\alpha^+} dz \int_{\Gamma_\beta^-} dw \int_A^{\infty} dx \frac{\exp((z-T)^3/3 - zx - (w-T)^3/3 + wx)}{z-w} \cdot \frac{\Phi_{a,b,c}(z+t)}{\Phi_{a,b,c}(w+t)} \\
&= \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_{\Gamma_\alpha^+} dz \int_{\Gamma_\beta^-} dw \frac{\exp((z-T)^3/3 - zA - (w-T)^3/3 + wA)}{(z-w)^2} \cdot \frac{\Phi_{a,b,c}(z+t)}{\Phi_{a,b,c}(w+t)}.
\end{aligned}$$

我们回顾一下 (2.23)，其中 $0 < \beta + t < \alpha + t < 1/a_1$。

如命题 2.3 的证明中所述，我们将 Γ_α^+ 变形为 $\Gamma_{\alpha+T}^+$；在此过程中，围道穿过了位于 $1/a_1 - t$、……、$1/a_{J_a} - t$ 处的简单极点。随后，我们将 Γ_β^- 变形为 $\Gamma_{\beta+T}^-$；在此过程中，围道确实穿过了位于 $1/a_1 - t$、……、$1/a_{J_a} - t$ 处的极点。这些极点在命题 2.3 的证明中并不存在，其来源可追溯至我们当前的分母为 $(z-w)^2$，而非 $z-w$。此外，我们注意到，所收集的额外 J_a 留数均等于 1。根据留数定理，并作变量变换 $z \to z+T$、 $w \to w+T$，我们得到

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\mathcal{A}_i^{a,b,c}(T+t) \geq A) = J_a + V^T(A) + \sum_{j=1}^{J_a} U_j^T(A), \tag{3.10}$$

其中

$$V^T(A) = \frac{1}{(2\pi \mathsf{i})^2}\int_{\Gamma_\alpha^+} dz \int_{\Gamma_\beta^-} dw \frac{\exp(z^3/3 - zA - w^3/3 + wA)}{(z-w)^2} \cdot \frac{\Phi_{a,b,c}(z+T+t)}{\Phi_{a,b,c}(w+T+t)},$$

$$U_j^T(A) = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}}\int_{\Gamma_\beta^-} dw \frac{\exp((1/a_j - T - t)^3/3 - A(1/a_j - T - t) - w^3/3 + Aw)}{(1/a_j - w - T - t)^2} \times \frac{\prod_{i=1}^\infty (1 + b_i/a_j)}{\Phi_{a,b,c}(w+T+t)a_j \prod_{i=1, i\neq j}^\infty (1 - a_i/a_j)}. \tag{3.11}$$

由 (3.10) 可知，若能证明

$$\lim_{T\to\infty} \left|U_j^T(A)\right| = 0 \text{ for } j = 1, \ldots, J_a \text{ and } A \in \mathbb{R}, \tag{3.12}$$

$$\lim_{A\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \left|V^T(A)\right| = 0, \tag{3.13}$$

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{P}(\mathcal{A}_j^{a,b,c}(T+t) \geq A) = 1, \text{ for } j = 1, \ldots, J_a \text{ and } A \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

我们将在下一步证明最后三个方程。

步骤 2. 由 (3.11) 可知， $U_j^T(A)$ 与 (2.26) 中的 U_j^T 在 $x_T = y_T = A$ 时一致，唯一的区别是被积函数的分母多了一个 $(1/a_j - w - T - t)$。因此，我们可以重复命题 2.3 的证明中的论证，得到 (2.29) 的如下类似结果：

$$\left|U_j^T(A)\right| \leq e^{-T^3/3 + C_3 T^2} \cdot \int_{\Gamma_\beta^-} |dw| \exp\left(-c_2|w|^3 + C_1|w| + C_2|w|^2\right),$$

其中 C_i， $c_i > 0$ 是正常数，除依赖于 t、$(a,\ b,\ c)$ 外，还依赖于 A。最后显示的不等式证明了 (3.12)。

将 (2.30) 应用于 $x_T = y_T = 0$ ，并利用显然成立的界

$$|e^{-zA+wA}| \leq e^{-A(\alpha-\beta)} \text{ and } \left|\frac{1}{z-w}\right| \leq \frac{1}{\alpha - \beta},$$

由于对所有 $A \geq 0$、 $z \in \Gamma_\alpha^+$、 $w \in \Gamma_\beta^-$， Γ_α^+ 与 Γ_β^- 之间的水平距离等于 $\alpha - \beta$，因此我们得到

$$\left|V^T(A)\right| \leq e^{-A(\alpha-\beta)} \cdot \int_{\Gamma_\alpha^+} |dz| \int_{\Gamma_\beta^-} |dw| \frac{e^{-c_2|w|^3 - c_2|z|^3 + C_7|z|^2 + C_7|w|^2 + C_7}}{\alpha - \beta}.$$

最后一个展示的不等式证明了 (3.13)。

最后，我们聚焦于 (3.14)。由命题 1.11(a) 和斯勒茨基定理可知，对于每个 $i \in \{1, \ldots, J_a\}$，当 $T \to \infty$ 时，以下弱收敛成立：

$$\frac{\mathcal{A}_i^{a,b,c}(T+t)}{T+t} - (T+t) + \frac{2}{a_i} \Rightarrow 0.$$

最后一个陈述意味着（3.14）。 □

3.3. **有限维收敛至戴森布朗运动**。本节的目标是证明定理1.14(a)中的线系综的有限维收敛。

命题 3.3。 设所用符号与定理 *1.14(a)* 中相同。那么，

$$\left(\mathcal{L}_i^N(t) : t>0,\, i=1,\dots,\mathsf{m}_k^a\right) \overset{f.d.}{\to} \left(\lambda_i^{\mathsf{m}_k^a}(t) : t>0,\, i=1,\dots,\mathsf{m}_k^a\right).$$

证明。 固定 $\mathsf{S}=\{s_1,\dots,s_m\}\subset(0,\infty)$，其中 $s_1<\cdots<s_m$，并对 $s\in$定义 S

$$X_i^N(s) := (2T_N)^{-1/2}\left(\mathcal{A}_i^{a,b,c}(sT_N)+\frac{2sT_N}{v_k^a}-s^2T_N^2\right). \tag{3.15}$$

由 (1.13) 中 $\mathcal{L}^N$ 的定义可知，只需证明

$$\begin{aligned}&\left(X_{i+K}^N(s_j) : i\in\{1,\dots,\mathsf{m}_k^a\},\, j\in\{1,\dots,m\}\right)\\ &\overset{f.d.}{\to}\left(\lambda_i^{\mathsf{m}_k^a}(s_j) : i\in\{1,\dots,\mathsf{m}_k^a\},\, j\in\{1,\dots,m\}\right),\end{aligned} \tag{3.16}$$

其中我们令 $K=\mathsf{M}_{k-1}^a$。

为清晰起见，我们将 (3.16) 的证明分为四个步骤。在步骤 1 中，我们将该命题的证明化归为 $a_1>a_2>\cdots>a_{K+1}$ 的情形。一旦得到了这类参数下的结果，就可以利用命题 1.10 中的单调耦合，将 $\mathcal{A}^{a,\ b,\ c}$ “夹”在两个系综 $\mathcal{A}^{a^-,\ b^-,\ c^-}$ 和 $\mathcal{A}^{a^+,\ b^+,\ c^+}$ 之间；这两个系综的参数满足 $a_1^{\pm}>a_2^{\pm}>\cdots>a_{K+1}^{\pm}$，且 (3.16) 对它们成立。由此即可得到定理 1.14(a) 中所有参数对应的结果。在证明的其余部分，我们假设 $a_1>a_2>\cdots>a_{K+1}$，这样便可以使用命题 2.1 和 3.1。

在步骤 2 中，我们使用 [21, 引理 7.1] ，将命题的证明归结为两个陈述，见 (3.22) 和 (3.23)。第一个陈述 (3.22) 意味着，由 $(s,\mathcal{L}_i^N(s))$ 在 $\mathbb{R}^2$上构成的点过程弱收敛于由 $(s,\lambda_i^{\mathsf{m}_k^a}(s))$ 构成的点过程。我们在步骤 3 中证明这一点，方法是结合命题 2.1 中的核收敛、命题 1.11 中 Airy 游荡者线系综的渐近斜率，以及 [13, 命题 2.18]中的行列式点过程弱收敛判据。第二个陈述 (3.23) 意味着序列 $\{\mathcal{L}_i^N(s_j)\}_{N\geq1}$ 是紧的。我们在步骤 4 中证明这一点，方法是结合命题 2.1 和 1.11（如步骤 3 中那样），以及 [21,引理 7.2]中的紧性判据。

步骤 1. 在这一步中，我们假设当 $a_1>a_2>\cdots>a_{K+1}$、$K=\mathsf{M}_{k-1}^a$时，(3.16) 成立，并着手证明它对定理 1.14(a) 陈述中的一般参数 k，$(a,\ b,\ c)$ 成立。

固定一个足够小的 $\varepsilon>0$，使得 $v_{k-1}^a>v_k^a+K\varepsilon$，并采用约定 $v_0^a=\infty$。我们定义 $(a^+,\ b^+,\ c^+)$，$(a^-,\ b^-,\ c^-)\in\mathcal{P}_{\mathsf{pos}}$与 $(a,\ b,\ c)$ 相同，只是

$$a_i^+=a_i+(K-i+1),\ \text{and}\ a_i^-=a_i-i\varepsilon\ \text{for}\ i=1,\dots,K,$$

并注意到，根据我们对 ε 的选择，有

$$\begin{aligned}&a_1^+>a_2^+>\cdots>a_{K+1}^+=a_{K+1},\ \ a_1^->a_2^->\cdots>a_{K+1}^-=a_{K+1}\\ &a_i^-\leq a_i\leq a_i^+\ \text{for}\ i\in\mathbb{N},\ \ c^+=c=c^-=0,\ \ b_i^-=b_i=b_i^+\ \text{for}\ i\in\mathbb{N}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

由 (3.17) 的第二行以及应用于 $A=B=0$ 的命题 1.10，我们可以将 $\mathcal{A}^{a^-}$、$^{b^-}$、$^{c^-}$ 与 $\mathcal{A}^a$、^{b}、^{c} 耦合，使得对所有 $(i,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}$，有 $\mathcal{A}^{a^-}$、$^{b^-}$ $^{c^-}$、$(t)\leq\mathcal{A}^a$、^{b}、$_i$ $^c(t)$。类似地，我们可以将 $\mathcal{A}^{a^+}$、$^{b^+}$、$^{c^+}$ 与 $\mathcal{A}^a$、^{b}、^{c} 耦合，使得对所有 $(i,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}$，有 $\mathcal{A}^a$、^{b}、$_i$ $^c(t)\leq\mathcal{A}^{a^+}$、$^{b^+}$ $^{c^+}$、(t)。令 $X^{\pm}$、$_i$ ^{N} 如 (3.15) 中那样，其中 $\mathcal{A}^a$、^{b}、^{c} 替换为 $\mathcal{A}^{a^\pm}$、$^{b^\pm}$、$^{c^\pm}$，并注意到我们的^{i}两个单调耦合对所有 r_i、$_j\in\mathbb{R}$ 蕴含

$$\begin{aligned}&P^{+,N}\leq\mathbb{P}\left(X_{i+K}^N(s_j)\leq r_{i,j} : i\in\{1,\dots,\mathsf{m}_k^a\},\, j\in\{1,\dots,m\}\right)\leq P^{-,N},\ \text{where}\\ &P^{\pm,N}=\mathbb{P}\left(X_{i+K}^{\pm,N}(s_j)\leq r_{i,j} : i\in\{1,\dots,\mathsf{m}_k^a\},\, j\in\{1,\dots,m\}\right).\end{aligned} \tag{3.18}$$

The (3.17) 中的第一行以及我们在该步骤开头的假设表明

$$\lim_{N\to\infty} P^{\pm,N} = \mathbb{P}\left(\lambda_i^{\mathsf{m}_k^a}(s_j) \le r_{i,j} : i \in \{1,\dots,\mathsf{m}_k^a\},\, j \in \{1,\dots,m\}\right).$$

将后者与 (3.18) 结合，我们便得出 (3.16)。

步骤 2。 在证明的其余部分，我们假设 $a_1 > a_2 > \cdots > a_{K+1}$，其中 $K = \mathbf{M}_{k-1}^a$，因此特别有 $K = k-1$，$\mathsf{m}_1^a = \cdots = \mathsf{m}_{k-1}^a = 1$，且对于 $i = 1,\dots,K+1$，有 $v_i^a = a_i$。我们继续证明 (3.16)。为方便记号起见，我们从 X_{i+K}^N 切换回 $\mathcal{L}_i^N$。具体而言，由 (1.13) 和 (3.15)，(3.16) 等价于

$$\left(\mathcal{L}_i^N(s_j) : i \in \{1,\dots,\mathsf{m}_k^a\},\, j \in \{1,\dots,m\}\right) \overset{f.d.}{\to} \left(\lambda_i^{\mathsf{m}_k^a}(s_j) : i \in \{1,\dots,\mathsf{m}_k^a\},\, j \in \{1,\dots,m\}\right). \tag{3.19}$$

我们的策略是使用 [21, 引理 7。1], ，接下来列出应用这一结果所需的条件。首先，我们定义测度

$$M^{\mathrm{DBM}}(A) = \sum_{i=1}^{\mathsf{m}_k^a}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}\left\{\left(s_j, \lambda_i^{\mathsf{m}_k^a}(s_j)\right) \in A\right\}, \tag{3.20}$$

根据命题 2.6，这是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的行列式点过程，其相关核为 $K^{\mathrm{DBM},\,\mathsf{m}_k^a}$，参考测度为 μ_{S} ×勒贝格测度。我们还定义测度

$$M^N(A) = \sum_{i=1}^{\mathsf{m}_k^a}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}\left\{\left(s_j, \mathcal{L}_i^N(s_j)\right) \in A\right\}, \tag{3.21}$$

我们断言

$$M^N \Rightarrow M^{\mathrm{DBM}}, \tag{3.22}$$

$$\text{the sequence } \{\mathcal{L}_i^N(s_j)\}_{N\ge1} \text{ is tight for each } i \in \{1,\dots,\mathsf{m}_k^a\} \text{ and } j \in \{1,\dots,m\}. \tag{3.23}$$

结合 (3.22) 和 (3.23)，并注意到 $\mathcal{L}_1^N(s) > \cdots > \mathcal{L}_{\mathsf{m}_k^a}^N(s)$，这是由 $\mathcal{A}^{a\text{的}b、c}$的不相交性质推出的，见 (1.6)，可知满足 [21, 引理 7.1] 的条件，因此该引理推出 (3.19)。这样，我们就将命题的证明归结为证明 (3.22) 和 (3.23)。我们将在接下来的两个步骤中证明这两个结论。

步骤 3. 在这一步中，我们证明 (3.22)。首先注意，如果 $M^{v_k^a,T_N}$ 如 (2.1) 中所定义，那么对任意$A \subseteq \mathbb{R}^2$，都有

$$M^{v_k^a,T_N}(A) = \sum_{i\ge1}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}\left\{\left(s_j, X_i^N(s_j)\right) \in A\right\}. \tag{3.24}$$

根据我们在第 2.1 节中的工作，我们知道 $M^{v_k^a,T_N}$ 是一个行列式点过程，其相关核为 $K^{v_k^a,T}$，如 (2.2) 所示，参考测度为 μ_{S} ×勒贝格测度。根据命题 2.1，我们知道对每个 $s,t \in \mathsf{S}$

$$\lim_{N\to\infty} K^{v_k^a,T_N}(s,x;t,y) = K^{\mathrm{DBM},\mathsf{m}_k^a}(s,x;t,y)$$

当 (x,y) 在 $\mathbb{R}^2$ 中的紧集内变化时一致成立。后者验证了 [13, 命题 2.18] 的条件，由此我们得出 $M^{v_k^a,T_N}$ 弱收敛于 $\mathbb{R}^2$ 上的一个行列式点过程，其相关核为 $K^{\mathrm{DBM},\mathsf{m}_k^a}$，参考测度为 μ_{S} ×勒贝格测度。由于行列式点过程的分布完全由其相关核和参考测度刻画，参见 [13,命题 2.13(3)]，，我们得出

$$M^{v_k^a,T_N} \Rightarrow M^{\mathrm{DBM}}. \tag{3.25}$$

接下来我们断言，对每个固定的 $s \in \mathsf{S}$ 以及每个指标 $i \notin \{\mathsf{M}_{k-1}^a + 1, \ldots, \mathsf{M}_k^a\}$ ，

$$X_i^N(s) \xrightarrow{\mathbb{P}} \begin{cases} +\infty, & i \le k-1, \\ -\infty, & i \ge \mathsf{M}_k^a + 1. \end{cases} \tag{3.26}$$

事实上，由 (3.15)，对于每个 $i \in \{1, \ldots, J_a\}$ 和 $s \in \mathsf{S}$，我们有

$$X_i^N(s) = \sqrt{2T_N}\left(\xi_i^N(s) + \frac{s}{a_k} - \frac{s}{a_i}\right), \text{ where } \xi_i^N(s) = \frac{\mathcal{A}_i^{a,b,c}(sT_N)}{2T_N} + \frac{s}{a_i} - s^2 T_N/2. \tag{3.27}$$

由命题 1.11(a)，我们知道 $\xi_i^N(s)$ 弱收敛到零，因此当 $i \le J_a$ as $a_i > a_k$ for $i \le k-1$ 且 $a_i < a_k$ for $i \in \{\mathsf{M}_k^a + 1, \ldots\ldots, J_a\}$ 时，(3.27) 蕴含 (3.26)。若 $J_a < \infty$，则由 (3.15) 我们还对所有 $i \ge 1$ 有

$$X_{i+J_a}^N(s) = \xi_{i+J_a}^N(s) + \frac{s\sqrt{2T_N}}{a_k} - 2^{-1/2} s^2 T_N^{3/2}, \text{ where } \xi_{i+J_a}^N(s) = (2T_N)^{-1/2} \mathcal{A}_{i+J_a}^{a,b,c}(sT_N). \tag{3.28}$$

由命题 1.11(c)，我们知道 $\xi_{i+J_a}^N(s)$ 弱收敛到零，因此对于 $i \ge J_a + 1$，(3.28) 蕴含 (3.26)。

由 (3.24)，我们知道

$$M^{v_k^a, T_N} = M^N + \hat{M}^N, \text{ where} \tag{3.29}$$

$$\hat{M}^N(A) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}\left\{\left(s_j, X_i^N(s_j)\right) \in A\right\} + \sum_{i \ge \mathsf{M}_k^a + 1} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}\left\{\left(s_j, X_i^N(s_j)\right) \in A\right\}.$$

最后一个方程、(3.26) 以及 $X_1^N(s) > X_2^N(s) > \cdots$ 这一事实共同蕴含 $\hat{M}^N \Rightarrow 0$ (零测度)。结合 (3.25) 和 (3.29)，我们得出 (3.22)。

步骤 4。 在此步骤中，我们证明（3.23）。在下文中，我们固定 $j \in \{1, \ldots, m\}$。我们的策略是使用 [21, 引理 7。2], 接下来我们列出应用这一结果所需的条件。首先，我们在 $\mathbb{R}$ 上定义如下随机测度

$$M^{j,\mathrm{DBM}}(A) = \sum_{i=1}^{\mathsf{m}_k^a} \mathbf{1}\left\{\lambda_i^{\mathsf{m}_k^a}(s_j) \in A\right\}, \quad M^{j,N}(A) = \sum_{i=1}^{\mathsf{m}_k^a} \mathbf{1}\left\{\mathcal{L}_i^N(s_j) \in A\right\}, \tag{3.30}$$

我们断言

$$M^{j,N} \Rightarrow M^{j,\mathrm{DBM}}, \tag{3.31}$$

$$\mathbb{P}\left(M^{j,\mathrm{DBM}}(\mathbb{R}) \ge \mathsf{m}_k^a\right) = 1, \tag{3.32}$$

$$\lim_{a \to \infty} \limsup_{N \to \infty} \mathbb{P}\left(\mathcal{L}_1^N(s_j) \ge a\right) = 0. \tag{3.33}$$

结合（3.31）、（3.32）和（3.33），以及由 $\mathcal{A}^{a,\,b,\,c}$ 的不相交性质和（1.6）可得的事实 $\mathcal{L}_1^N(s_j) > \cdots > \mathcal{L}_{\mathsf{m}_k^a}^N(s_j)$，我们看到，引理 7 的条件得到了满足，因此该引理推出（ 3.23 ）。至此，我们将命题的证明归结为建立（3.31）、（3.32）和（3.33）。

由于 $\lambda_i^{\mathsf{m}_k^a}(s_j) \in \mathbb{R}$ 几乎必然成立，我们看到 $M^{j,\,\mathrm{DBM}}(\mathbb{R}) = \mathsf{m}_k^a$ 几乎必然成立，这意味着 (3.32)。此外，根据 (1.13) 中 $\mathcal{L}_1^N$ 的定义和命题 3.1，可得 (3.33)。因此，我们只需证明 (3.31)。

定义这些测度

$$M^{j,v_k^a,T_N}(A)=\sum_{i\geq 1}\mathbf{1}\left\{X_i^N(s_j)\in A\right\}. \tag{3.34}$$

根据我们在第 2.1 节中的工作和 [13, 引理 2.17], , 我们知道 M^{j,v_k^a,T_N} 是定义在 $\mathbb{R}$ 上、参考测度为勒贝格测度且相关核为

$$K^{j,v_k^a,T_N}(x,y)=K^{v_k^a,T_N}(s_j,x;s_j,y),$$

其中 $K^{\rho,T}$ 如 (2.2) 所示。根据命题 2.1，我们知道

$$\lim_{N\to\infty}K^{j,v_k^a,T_N}(x,y)=K^{\mathrm{DBM},\mathsf{m}_k^a}(s_j,x;s_j,y),$$

且该收敛在 $\mathbb{R}^2$ 的紧子集上一致。从 [13, 命题 2.15], 我们得出， M^{j,v_k^a,T_N} 弱收敛到定义在 $\mathbb{R}$ 上、参考测度为勒贝格测度且相关核为 $K^{\mathrm{DBM},\mathsf{m}_k^a}(s_j,x;s_j,y)$ 的行列式点过程。然而，根据 [13, 引理 2.17] 和命题 2.6，我们知道 $M^{j,\mathrm{DBM}}$ 也是定义在 $\mathbb{R}$ 上、参考测度为勒贝格测度且相关核为 $K^{\mathrm{DBM},\mathsf{m}_k^a}(s_j,x;s_j,y)$ 的行列式点过程。由于行列式点过程的分布完全由其相关核和参考测度确定, 参见 [13, 命题 2.13(3)], , 我们得出

$$M^{j,v_k^a,T_N}\Rightarrow M^{j,\mathrm{DBM}}. \tag{3.35}$$

由 (3.34)，我们知道

$$M^{j,v_k^a,T_N}=M^{j,N}+\hat{M}^{j,N},\text{ where} \tag{3.36}$$

$$\hat{M}^{j,N}(A)=\sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{1}\left\{X_i^N(s_j)\in A\right\}+\sum_{i\geq\mathsf{M}_k^a+1}\mathbf{1}\left\{X_i^N(s_j)\in A\right\}.$$

最后一个方程、(3.26) 以及 $X_1^N(s_j)>X_2^N(s_j)>\cdots$ 这一事实共同意味着 $\hat{M}^{j,N}\Rightarrow 0$（零测度）。结合 (3.35) 和 (3.36)，我们得出 (3.31)。至此，命题的证明完成。□

3.4. **有限维收敛到 Airy 线系综**。本节的目标是确立定理 1.16(a) 中线系综的有限维收敛。

命题 3.4。假设使用与定理 *1.16(a)* 相同的记号。那么，

$$\left(\mathcal{A}_i^N(t):t\in\mathbb{R},\,i\in\mathbb{N}\right)\overset{f.d.}{\to}\left(\mathcal{A}_i^{0,0,0}(t):t\in\mathbb{R},\,i\in\mathbb{N}\right).$$

证明。我们给出的证明与命题 3.3 的证明类似，因此省略部分细节。固定满足 $s_1<\cdots<s_m$ 的 $\mathsf{S}=\{s_1,\ldots,s_m\}\subset\mathbb{R}$。由 (1.17) 中 $\mathcal{A}^N$ 的定义可知，只需证明

$$\left(\mathcal{A}_{i+J_a}^{a,b,c}(s_j+T_N):i\in\mathbb{N},\,j\in\{1,\ldots,m\}\right)\overset{f.d.}{\to}\left(\mathcal{A}_i^{0,0,0}(s_j):i\in\mathbb{N},\,j\in\{1,\ldots,m\}\right). \tag{3.37}$$

为清晰起见，我们将 (3.37) 的证明分为三个步骤。在步骤 1 中，我们利用命题 1.10 中的单调耦合，将该命题的证明归结为 $a_1>a_2>\cdots>a_{J_a}$ 的情形。在步骤 2 中，我们利用 [13, 命题 2.19] ，将该命题的证明归结为两个陈述，见 (3.42) 和 (3.43)，并在步骤 3 中证明它们。第一个陈述 (3.42) 表明，由 $(s_j,\ \mathcal{A}^{a,b,c}_{i+J_a}(s_j+T_N))$ 构成的 $\mathbb{R}^2$ 上的点过程，弱收敛到由 $(s,\ \mathcal{A}^{0,0,0}_i(s))$ 构成的点过程。我们结合命题 2.3 中的核收敛、命题 1.11(a) 中 Airy 流浪者线系综的渐近斜率, 以及 [13, 命题 2.18] 中关于行列式点过程弱收敛的判据，证明这一点。第二个陈述 (3.43) 表明, 序列 $\{\mathcal{A}^{a,b,c}_{i+J_a}(s_j+T_N)\}_{N\geq 1}$ 是紧的，而这可由

命题 1.11(c)。

步骤 1. 在这一步中，我们假设当 $a_1 > a_2 > \cdots > a_{J_a}$ 时 (3.37) 成立，并继续证明对于定理 1.16(a) 陈述中的一般参数 $(a,\ b,\ c)$，该结论也成立。

固定 $\varepsilon > 0$ 足够小，使得 $v^a_{J_a} > J_a\varepsilon$，并采用约定 $v^a_0 = \infty$。我们将 $(a^+,\ b^+,\ c^+)$，$(a^-,\ b^-,\ c^-) \in \mathcal{P}_{\mathsf{pos}}$ 定义为与 $(a,\ b,\ c)$ 相同，只是

$$a^+_i = a_i + (J_a - i + 1),\ \text{and}\ a^-_i = a_i - i\varepsilon\ \text{for}\ i = 1, \ldots, J_a,$$

并注意到，根据我们对 ε 的选择，有

$$\begin{aligned} &a^+_1 > a^+_2 > \cdots > a^+_{J_a} > 0 = a^+_{J_a+1},\ \ a^-_1 > a^-_2 > \cdots > a^-_{J_a} > 0 = a^-_{J_a+1} \\ &a^-_i \le a_i \le a^+_i\ \text{for}\ i \in \mathbb{N},\ \ c^+ = c = c^- = 0,\ \ b^-_i = b_i = b^+_i\ \text{for}\ i \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

由 (3.38) 的第二行以及应用于 $A = B = 0$ 的命题 1.10，我们可以将 $\mathcal{A}^{a^-}$、$_{b^-}$、$^{c^-}$ 与 $\mathcal{A}^a$、$_b$、^{c} 耦合起来，使得对于所有 $(i,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$，$\mathcal{A}^{a^-}$、$_{b^-}$ $^{c^-}$、$(t) \le \mathcal{A}^a$、$_b$、$_i$ $^c(t)$。类似地，我们可以将 $\mathcal{A}^{a^+}$、$_{b^+}$、$^{c^+}$ 与 $\mathcal{A}^a$、$_b$、^{c} 耦合起来，使得对于所有 $(i,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$，$\mathcal{A}^a$、$_b$、$_i$ $^c(t) \le \mathcal{A}^{a^+}$、$_{b^+}$ $^{c^+}$、$_i$ (t)。我们的两个单调耦合意味着，对于所有 $k \in \mathbb{N}$ 以及 r_i、$_j \in \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned} &P^{+,N} \le \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^{a,b,c}_{i+J_a}(s_j + T_N) \le r_{i,j} : i \in \{1,\ldots,k\},\, j \in \{1,\ldots,m\}\right) \le P^{-,N},\ \text{where} \\ &P^{\pm,N} = \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^{a^\pm,b^\pm,c^\pm}_{i+J_a}(s_j + T_N) \le r_{i,j} : i \in \{1,\ldots,k\},\, j \in \{1,\ldots,m\}\right). \end{aligned} \tag{3.39}$$

（3.38）中的第一行以及本步骤开头的假设表明

$$\lim_{N\to\infty} P^{\pm,N} = \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^{0,0,0}_i(s_j) \le r_{i,j} : i \in \{1,\ldots,k\},\, j \in \{1,\ldots,m\}\right).$$

将后者与（3.39）结合，我们得出（3.37）。

步骤 2. 在证明的剩余部分中，我们假设 $a_1 > a_2 > \cdots > a_{J_a}$，从而特别地有 $\mathfrak{m}^a_1 = \cdots = \mathfrak{m}^a_{J_a} = 1$，并且对 $i = 1, \ldots, J_a$ 有 $v^a_i = a_i$。

我们接着证明（3.37），我们的策略是使用 [13, 命题 2.19]。接下来我们列出应用该结果所需的条件。首先，我们定义测度

$$M^{\mathrm{Airy}}(A) = \sum_{i\ge1}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}\left\{\left(s_j, \mathcal{A}^{0,0,0}_i(s_j)\right) \in A\right\}, \tag{3.40}$$

由命题 1.5 可知，它是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个行列式点过程，其相关核为 $K_{0,0,0}$，如（1.5）所示，参考测度为 $\mu_{\mathsf{S}}\times$勒贝格测度。我们还定义测度

$$M^N(A) = \sum_{i\ge1}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}\left\{\left(s_j, \mathcal{A}^{a,b,c}_{i+J_a}(s_j + T_N)\right) \in A\right\}, \tag{3.41}$$

我们断言

$$M^N \Rightarrow M^{\mathrm{Airy}}, \tag{3.42}$$

$$\text{the sequence } \{\mathcal{A}^{a,b,c}_{i+J_a}(s_j + T_N)\}_{N\ge1} \text{ is tight for each } i \in \mathbb{N} \text{ and } j \in \{1,\ldots,m\}. \tag{3.43}$$

结合 (3.42) 和 (3.43)，再利用 $\mathcal{A}^a$、$_b$、^{c} 的不相交性质（见 (1.6)），可知 [13,命题 2.19] 的条件均已满足，因此该命题推出 (3.37)。这样，我们便将该命题的证明归结为证明 (3.42) 和 (3.43)。

步骤 3. 我们注意到，(3.43) 可由命题 1.11(c) 得出。下面我们证明 (3.42)。定义测度

$$\tilde{M}^N(A) = \sum_{i\geq 1}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}\left\{\left(s_j, \mathcal{A}_i^{a,b,c}(s_j+T_N)\right) \in A\right\}, \tag{3.44}$$

并注意到

$$\tilde{M}^N = M^N + \hat{M}^N, \text{ where } \hat{M}^N(A) = \sum_{i=1}^{J_a}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}\left\{\left(s_j, \mathcal{A}_i^{a,b,c}(s_j+T_N)\right) \in A\right\}, \tag{3.45}$$

根据我们在第 2.2 节中的工作，我们知道 $\tilde{M}^N$ 是一个行列式点过程，其相关核为 K^{T_N}（如式 (2.23) 所示），参考测度为 $\mu_{\mathsf{S}}\times$勒贝格测度。由命题 2.3 可知，对于每个 $s,\ t\in\mathsf{S}$

$$\lim_{N\to\infty} K^{T_N}(s,x;t,y) = K_{0,0,0}(s,x;t,y)$$

当 $(x,\ y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的一个紧集内变化时，一致成立。后者验证了命题 2.18] 的条件，由此我们得出

$$\tilde{M}^N \Rightarrow M^{\mathrm{Airy}}. \tag{3.46}$$

接下来我们声称，对于每个固定的 $i\in\{1,\dots,J_a\}$ 和 $j\in\{1,\dots,m\}$，都有

$$\mathcal{A}_i^{a,b,c}(s_j+T_N) \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty. \tag{3.47}$$

事实上，若令 $\xi_i^N(s_j) = \frac{\mathcal{A}_{i}^{a,b,c}(s_j+T_N)}{s_j+T_N} + \frac{2}{a_i} - (s_j+T_N)$，则有

$$\mathcal{A}_i^{a,b,c}(s_j+T_N) = (s_j+T_N)\left(\xi_i^N(s_j) - \frac{2}{a_i} + (s_j+T_N)\right),$$

并且 $\xi_i^N(s_j)\Rightarrow 0$ 由命题 1.11(a) 得出，这意味着 (3.47)。

结合 (3.45)、(3.46) 和 (3.47)，我们得出 (3.42)。 □

4. 吉布斯线系综

命题 3.3 和 3.4 建立了定理 1.14 和 1.16 中出现的线系综的有限维收敛。要将这一收敛加强为紧集上的一致收敛，还需证明相应系综序列的紧性。

建立紧性的主要困难在于控制子序列中系综曲线的连续模。正如命题 1.5 所指出的，抛物型 Airy 漫游者线系综满足布朗吉布斯性质。该性质使我们能够将定理 1.14 和 1.16 中的系综与由有限条互不相交布朗桥构成的系综进行有力比较。由于这类布朗桥系综的连续模易于控制，这种比较使我们能够将类似的正则性估计推广到所研究的系综。

在第 4.1 节中，我们引入实施这一策略所需的术语和对象。第 4.2 节总结了文献中关于布朗吉布斯系综的一些相关结果。在第 4.3 节和第 4.4 节中，我们建立了证明定理 1.14 和 1.16 所需的技术性估计；这两个定理的证明分别在第 5 节和第 6 节中完成。

4.1. 线系综的定义与记号。 本节回顾有关线系综的一些基本定义和记号，主要沿用 [16, 第 2] 节。

给定两个整数 $a\le b$，我们用 $[\![a,b]\!]$ 表示集合 $\{a,a+1,\dots,b\}$。此外，当 $a>b$ 时，我们令 $[\![a,b]\!]=\emptyset$，其中 $[\![a,\infty]\!]=\{a,a+1,a+2,\dots\}$、$[\![-\infty,b]\!]=\{b,b-1,b-2,\dots\}$，且 $[\![-\infty,\infty]\!]=\mathbb{Z}$。给定一个区间 $\Lambda\subseteq\mathbb{R}$，我们赋予它 $\mathbb{R}$ 上通常拓扑的子空间拓扑。我们用 $(C(\Lambda)\ \mathcal{C})$ 表示连续函数 $f:\ \Lambda\to\mathbb{R}$ 构成的空间，其拓扑为紧集上一致收敛拓扑，参见 [27, 第 7 章、第 46], 节以及 Borel σ-代数 $\mathcal{C}$。给定一个

集合 $\Sigma \subseteq \mathbb{Z}$，我们赋予它离散拓扑，并用 $\Sigma \times \Lambda$ 表示由所有满足 $i \in \Sigma$ 且 $x \in \Lambda$ 的有序对 (i, x) 构成的集合，其拓扑为积拓扑。我们还用 $(C(\Sigma \times \Lambda)\ \mathcal{C}_\Sigma)$ 表示 $\Sigma \times \Lambda$ 上实值连续函数构成的空间，其拓扑为紧集上一致收敛拓扑，并赋予 Borel σ-代数 $\mathcal{C}_\Sigma$。通常我们取 $\Sigma = [\![1, N]\!]$，其中 $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。现在我们定义线系综的概念。

定义 4.1. 设 $\Sigma \subseteq \mathbb{Z}$ 和 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间。一个以 Σ为指标的线系综 $\mathcal{L}$ 是定义在概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上、取值于 $(C(\Sigma \times \Lambda)\ \mathcal{C}_\Sigma)$ 的随机变量。直观来说，$\mathcal{L}$是由随机连续曲线（有时称为线）组成的集合，以 Σ为指标，其中每条曲线都将 Λ映射到 $\mathbb{R}$。我们常会稍微宽泛地使用记号，写作 $\mathcal{L}\colon \Sigma \times \Lambda \to \mathbb{R}$，尽管充当此类函数的并非 $\mathcal{L}$，而是对每个 $\omega \in \Omega$ 都有 $\mathcal{L}(\omega)$。对于 $i \in \Sigma$，我们写作 $\mathcal{L}_i(\omega) = (\mathcal{L}(\omega))(i, \cdot)$，表示指标为 i 的曲线，并注意后者是一个映射 $\mathcal{L}_i : \Omega \to C(\Lambda)$，它是可测的。如果 $a, b \in \Lambda$ 满足 $a \le b$，我们用 $\mathcal{L}_i[a, b]$ 表示 $\mathcal{L}_i$ 在 $[a, b]$上的限制。我们还称线系综 $\mathcal{L}$ 是不相交的，如果几乎必然有 $\mathbb{P}$ 下的 $\mathcal{L}_i(t) > \mathcal{L}_j(t)$ 对所有 $i < j$ 和 $t \in \Lambda$都成立。

注4.2。 如 [16, 引理 2.2], 所示，$C(\Sigma \times \Lambda)$ 是一个波兰空间，因此线系综 $\mathcal{L}$ 就是按 [6, 第 3]节意义下的 $C(\Sigma \times \Lambda)$ 中的一个随机元素。

若 W_t 表示标准一维布朗运动，则该过程

$$\tilde{B}(t) = W_t - tW_1, \quad 0 \le t \le 1,$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$称为布朗桥（从 $B(0) = 0$ 到 $B(1) = 0$）。给定 a，b，x，$y \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$，我们通过下式在 $(C([a, b])\ \mathcal{C})$ 上定义一个随机变量

$$B(t) = (b-a)^{1/2} \cdot \tilde{B}\left(\frac{t-a}{b-a}\right) + \left(\frac{b-t}{b-a}\right) \cdot x + \left(\frac{t-a}{b-a}\right) \cdot y, \tag{4.1}$$

并将该随机变量的分布称为布朗桥（从 $B(a) = x$ 到 $B(b) = y$）。若 $\vec{x}$，$\vec{y} \in \mathbb{R}^k$，则令 $\mathbb{P}^{a,\ b,\ \vec{x},\ \vec{y}}$ 自由表示 k 个相互独立的布朗桥 $\{B_i$ 的分布：它们从 $B_i(a) = x_i$ 到 $B_i(b) = y_i$。我们用 $\mathbb{E}^{a,\ b,\ \vec{x},\ \vec{y}}$ 自由表示相对于该测度的期望。

我们以回顾 [10, 定义 2.2], （另见 [16, 定义 2.8]）来结束本节。为陈述该性质，我们需要 [16, 定义 2.7]中的（f, g）-回避布朗桥系综的概念。我们记得，W_k°和 W_k 分别是 $\mathbb{R}^k$中的开外尔室和闭外尔室，见（1.11）。

定义 4.3. 固定 $k \in \mathbb{N}$、$\vec{x}$、$\vec{y} \in W_k^\circ$、a、$b \in \mathbb{R}$，其中 $a < b$，以及两个连续函数$f\colon [a, b] \to$（$-\infty$、∞]和 $g\colon [a, b] \to [-\infty, \infty)$。这意味着 $f \in C$（$[a, b]$）或 $f \equiv \infty$，对 g 也同样如此。此外，我们假设，对于 $t \in [a, b]$、f（a）$> x_1$、f（b）$> y_1$、g（a）$< x_k$、g（b）$< y_k$，有 f（t）$> g$（t）。给定这些数据，我们令 $\mathbb{P}^{a}$、$_{b}$、$_{\vec{x}}$、$_{\vec{y}}$、$_{f}$、^{g} avoid 表示以下事件条件下，k 相互独立的布朗桥 $\{B_i\}_{i=1}^k$（其分布为 $\mathbb{P}^{a}$、$_{b}$、$_{\vec{x}}$、$^{\vec{y}}$ free）的分布

$$E_{\text{avoid}}^{f,g} = \{f(t) > B_1(t) > B_2(t) > \cdots > B_k(t) > g(t) \text{ for all } t \in [a, b]\}. \tag{4.2}$$

如 [16, 定义 2.7], 所述，我们有 $E^{f,g}$ avoid 是可测的，且 $\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y}}$ free $(E^{f,g}$ avoid$) > 0$，因此分布 $\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y},f,g}$ avoid 在实数集 $C([\![1, k]\!] \times [a, b])$ 上定义良好。关于 $\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y},f,g}$ avoid 的期望记为 $\mathbb{E}^{a,b,\vec{x},\vec{y},f,g}$ avoid。当 $f = \infty$ 且 $g = -\infty$时，我们将它们从记号中省略，直接写作 $\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y}}$ avoid 和 $\mathbb{E}^{a,b,\vec{x},\vec{y}}$ avoid。

对于后续论证，我们还需要一类测度，仍记为$\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y},\infty,g}$ avoid。这类测度对应于上述定义，其中 $f \equiv \infty$ 和

$$g(t) = \begin{cases} g_0 & \text{if } t = t_0, \\ -\infty & \text{for } t \in [a, b] \setminus \{t_0\}, \end{cases} \tag{4.3}$$

其中 $g_0 \in \mathbb{R}$ 和 $t_0 \in (a,b)$。注意，在这种情况下，测度 $\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y},\infty,g}$ avoid 是良定义的。事实上，集合 $E^{\infty,g}$ avoid 是可测的，因为它是 $C([\![1,k]\!]\times[a,b])$ 中某个开集的原像，并且具有正概率。后者由包含关系 $E^{\infty,g}$ avoid $\subseteq E^{\infty,g}$ avoid 得出，其中 $\tilde{g}$ 定义为

$$\tilde{g}(a) = x_k - 1,\ \ \tilde{g}(b) = y_k - 1,\ \ \tilde{g}(t_0) = g_0,$$

并且 $\tilde{g}$ 在 $[a,t_0]$ 和 $[t_0,b]$上是线性的。

定义 4.4。若一个以 $\mathbb{N}$ 为指标的线系综 $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_i\}_{i\geq 1}$ 定义在区间 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ 上，且满足不相交条件，并且对所有 $[a,b] \subseteq \Lambda$ 和 $1 \leq k_1 \leq k_2$ 均满足以下条件，则称其具有 布朗吉布斯性质。若令 $K = [\![k_1,\ k_2]\!]$，那么对于任意有界博雷尔可测函数 $F : C(K\times[a,b]) \to \mathbb{R}$，我们几乎必然有 $\mathbb{P}$

$$\mathbb{E}\left[F\left(\mathcal{L}|_{K\times[a,b]}\right)\middle|\mathcal{F}_{\mathrm{ext}}(K\times(a,b))\right] = \mathbb{E}^{a,b,\vec{x},\vec{y},f,g}_{\mathrm{avoid}}\left[F(\tilde{\mathcal{Q}})\right]. \tag{4.4}$$

在 (4.4) 的左侧，我们有

$$\mathcal{F}_{\mathrm{ext}}(K\times(a,b)) = \sigma\left\{\mathcal{L}_i(s) : (i,s) \in (\mathbb{N}\times\Lambda)\setminus(K\times(a,b))\right\},$$

并且 $\mathcal{L}|_{K\times[a,b]}$ 是 $\mathcal{L}$ 在集合 $K\times[a,b]$ 上的限制。在 (4.4) 的右侧，我们有$\vec{x} = (\mathcal{L}_{k_1}(a)\ldots\ldots,\ \mathcal{L}_{k_2}(a))$，$\vec{y} = (\mathcal{L}_{k_1}(b)\ldots\ldots,\ \mathcal{L}_{k_2}(b))$, $f = \mathcal{L}_{k_1-1}[a,b]$，约定若 $k_1 = 1$，则 $f = \infty$，并且 $g = \mathcal{L}_{k_2+1}[a,b]$。此外，$\mathcal{Q} = \{\mathcal{Q}_i\}_{i=1}^{k_2-k_1+1}$ 的分布为 $\mathbb{P}^{a,\ b,\ \vec{x},\ \vec{y},\ f,\ g}$ 避开，如定义 4.3 所述，并且 $\tilde{\mathcal{Q}} = \{\tilde{\mathcal{Q}}_i\}_{i=k_1}^{k_2}$ 满足 $\tilde{\mathcal{Q}}_i = \mathcal{Q}_{i-k_1+1}$。

4.2. **先前论文中的结果**。本节的目标是回顾若干关于线系综的已知结果，这些线系综的分布为 $\mathbb{P}^{a,\ b,\ \vec{x},\ \vec{y},\ f,\ g}$ 回避，如定义 4.3 所述。

下述结果给出测度 $\mathbb{P}^{a,\ b,\ \vec{x},\ \vec{y},\ f,\ g}$ 回避 关于其边界数据的单调耦合。

引理 *4.5.* 固定 $k \in \mathbb{N}$、$a < b$，以及两个连续函数 g^{t}、g^{b}：$[a,b] \to [-\infty,\infty)$，使得对所有 $t \in [a,b]$，有 $g^{\mathsf{t}}(t) \geq g^{\mathsf{b}}(t)$。我们还固定 $\vec{x}$、$\vec{y}$、$\vec{x}'$、$\vec{y}' \in W_k^{\circ}$，使得 $g^{\mathsf{b}}(a) < x_k$、$g^{\mathsf{b}}(b) < y_k$、$g^{\mathsf{t}}(a) < x'_k$、$g^{\mathsf{t}}(b) < y'_k$，并且对 $i \in [\![1,\ k]\!]$ 有 $x_i \leq x'_i$、$y_i \leq y'_i$。于是，存在一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，它支撑两个以 $[\![1,\ k]\!]$ 为指标、定义在 $[a,b]$ 上的线系综 $\mathcal{L}^{\mathsf{t}}$ 与 $\mathcal{L}^{\mathsf{b}}$，使得 $\mathcal{L}^{\mathsf{t}}$（相应地，$\mathcal{L}^{\mathsf{b}}$）在 $\mathbb{P}$ 下的分布为 $\mathbb{P}^{a,\ b,\ \vec{x}',\ \vec{y}',\ \infty,\ g^{\mathsf{t}}}$ 回避（相应地，$\mathbb{P}^{a,\ b,\ \vec{x},\ \vec{y},\ \infty,\ g^{\mathsf{b}}}$ 回避），并且 $\mathbb{P}$-几乎必然地，对所有 $(i,\ t) \in [\![1,\ k]\!]\times[a,b]$，有 $\mathcal{L}_i^{\mathsf{t}}(t) \geq \mathcal{L}_i^{\mathsf{b}}(t)$。

此外，如果 g^{b} 不是连续的，而是具有形式 *(4.3)*，只要 $g^{\mathsf{t}}(t_0) \geq g^{\mathsf{b}}(t_0)$，引理的结论仍然成立。

证明。当 $g^{\mathsf{t}}, g^{\mathsf{b}}$ 均连续时，结果可见 [17, 引理 A.6], ，其证明基于一种马尔可夫链蒙特卡罗论证，该论证源自 [10, 引理 2.6 和 2.7]。

当 g^{b} 不是连续的，而是具有形式 (4.3) 时，使用完全相同的论证，可以为 $f^n = \infty$ 和 $g^n = g^{\mathsf{b}}$ 证明 [17, 引理 A.5]。唯一的区别是，在 [17,引理 A.5]证明末尾附近的恒等式$\mathbb{P}(E_1\cup E_2) = 1$ 不再仅由 [17, 引理 2.2], 推出，而是由该引理与事实 $\mathbb{P}(\mathcal{L}_k(t_0) = g^{\mathsf{b}}(t_0)) = 0$共同推出。用本文的记号，这一陈述等价于

$$\mathbb{P}^{a',b',\vec{x},\vec{y}}_{\mathrm{free}}\left(\mathcal{Q}_k(t_0) = g^{\mathsf{b}}(t_0)\right) = 0,$$

这成立，因为 $\mathcal{Q}_k(t_0)$ 是一个非退化正态变量，因此其分布是非原子的。

一旦对 $f^n = \infty$ 和 $g^n = g^{\mathsf{b}}$ 证明了 [17, 引理 A.5]，就可以原样重复 [17, 引理 A.6] 的证明，从而在 g^{b} 具有 (4.3) 的形式时得到当前引理。□

第二个所需结果表明，若一列避开 $(\infty,-\infty)$ 的布朗桥系综的边界数据收敛，则该系综弱收敛。

引理 4.6。 固定 $k \in \mathbb{N}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \overline{W_k}$和 $a, b \in \mathbb{R}$，满足 $a < b$。设 $\vec{x}^n, \vec{y}^n \in W_k^\circ$ 满足极限 $\lim_{n\to\infty} \vec{x}^n = \vec{x}$，极限$\lim_{n\to\infty} \vec{y}^n = \vec{y}$。那么，当 $n \to \infty$ 时，测度 $\mathbb{P}^{a,b,\vec{x}^n,\vec{y}^n}_{\text{避开}}$ 弱收敛至定义在 $C([\![1, k]\!] \times [a, b])$ 上的一个概率测度，记为 $\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y}}_{\text{避开}}$。

证明。 该结论是 [19, 引理 4.17], 关于 $f_n = f = \infty$ 和$g_n = g = -\infty$的一个特例。 □

我们以一个引理结束本节，该引理说明布朗吉布斯性质在仿射平移和布朗运动缩放下保持不变。

引理 4.7。 设 $\mathcal{L}$ 是定义在 $\mathbb{R}$上的一个以 $\mathbb{N}$为指标的线系综，满足布朗吉布斯性质。~ ~那么，对于任意 $\lambda > 0$ 以及任意 a、h、$v \in \mathbb{R}$，由下式定义的线系综 $\tilde{\mathcal{L}} = \{\tilde{\mathcal{L}}_i\}_{i\geq 1}$

$$\tilde{\mathcal{L}}_i(t) = \lambda^{-1}\mathcal{L}_i(\lambda^2 t + h) + v + at, \ \textit{for } i \geq 1, t \in \mathbb{R},$$

也满足布朗吉布斯性质。

证明。 当 $a = 0$时，结论由 [18, 引理 2.5] 取 $N = \infty$ 和 $A_i = 0$ （对于 $i \geq 1$）即可得出。一般情形 $a \in \mathbb{R}$ 则由 [18, 引理 2.8] 取 $N = \infty$ 和 $A = 0$即可得出。 □

4.3. 布朗线系综的最大值与最小值估计。 本节旨在建立一些关于线系综的最大值和最小值的结果，其分布为$\mathbb{P}^{a,\ b,\ \vec{x},\ \vec{y},\ f,\ g}_{\text{避免}}$ 如定义4.3所述。

以下结果表明，分布为 $\mathbb{P}^{a,\ b,\ \vec{x},\ \vec{y}}_{\text{避免}}$ 的线系综很可能保持在零附近，只要边界数据 $\vec{x}$，$\vec{y}$ 接近零。

引理 4.8。 固定 $k \in \mathbb{N}$、 a、 $b \in \mathbb{R}$，满足 $a < b$，且 $M^{\text{side}} > 0$。对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $A > 0$，其取决于 k、a、 b、 M^{side}和 ϵ，使得以下结论成立。若 $\vec{x}$、$\vec{y} \in W_k^\circ$以及 $|x_i|$、 $|y_i| \leq M$侧对于 $i \in [\![1$、 $k]\!]$，则

$$\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y}}_{\text{avoid}}(|\mathcal{Q}_i(t)| \geq A \ \textit{for some } (i,t) \in [\![1,k]\!] \times [a,b]) < \epsilon. \tag{4.5}$$

证明。 反设这样的 $A > 0$ 不存在。那么，对于每个 $A_n = n$，都存在 $\vec{x}^n$， $\vec{y}^n \in W_k^\circ$，使得 $|x_i^n|$, $|y_i^n| \leq M^{\text{side}}$，满足

$$\mathbb{P}^{a,b,\vec{x}^n,\vec{y}^n}_{\text{avoid}}(|\mathcal{Q}_i(t)| \geq A_n \text{ for some } (i,t) \in [\![1,k]\!] \times [a,b]) \geq \epsilon. \tag{4.6}$$

经过适当选取子序列后，我们可以假设，对于某个$\vec{x}$， $\vec{y} \in W_k$，有 $\vec{x}^n \to \vec{x}$且 $\vec{y}^n \to \vec{y}$。因此，对于任意 $A_0 > 0$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y}}_{\text{avoid}}(|\mathcal{Q}_i(t)| \geq A_0 \text{ for some } (i,t) \in [\![1,k]\!] \times [a,b]) \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}^{a,b,\vec{x}^n,\vec{y}^n}_{\text{avoid}}(|\mathcal{Q}_i(t)| \geq A_0 \text{ for some } (i,t) \in [\![1,k]\!] \times [a,b]) \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}^{a,b,\vec{x}^n,\vec{y}^n}_{\text{avoid}}(|\mathcal{Q}_i(t)| \geq A_n \text{ for some } (i,t) \in [\![1,k]\!] \times [a,b]) \geq \epsilon,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

第一个不等式由引理 4.6 和 Portmanteau 定理得出，第二个由 $A_n \uparrow \infty$ 得出，第三个则由 (4.6) 得出。由 $\mathcal{Q}_i$ 的连续性可知,

$$\sup_{i\in[\![1,k]\!], t\in[a,b]} |\mathcal{Q}_i(t)| < \infty, \quad \mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y}}_{\text{avoid}}\text{-a.s.}$$

由有界收敛定理可得

$$\lim_{A_0\to\infty} \mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y}}_{\text{avoid}}(|\mathcal{Q}_i(t)| \geq A_0 \text{ for some } (i,t) \in [\![1,k]\!] \times [a,b]) = 0,$$

这便与 (4.7) 矛盾，得证。 □

以下结果表明，当边界数据 $\vec{x}$， $\vec{y}$接近于零，且函数 g在 $[a, b]$上不会过高时，分布为 $\mathbb{P}^{a,\ b,\ \vec{x},\ \vec{y},\ \infty,\ g}_{\text{避免}}$ 的线系综在 $[a, b]$ 上处于很高位置的可能性很小。

引理 4.9。固定 $k \in \mathbb{N}$、a、$b \in \mathbb{R}$，其中 $a < b$，以及 M侧 $M^{\text{bot}} > 0$。对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $A > 0$，其取决于 k、a、b、M侧、M^{bot}和 ϵ，使得以下结论成立。若 $\vec{x}$、$\vec{y} \in W_k^\circ$满足$|x_i|$、$|y_i| \le M^{\text{side}}$（对于 $i \in [\![1, k]\!]$），且 $g\colon [a,b] \to [-\infty, \infty)$是连续的，并满足 $x_k > g(a)$、$y_k > g(b)$，以及 $g(t) \le M^{\text{bot}}$对所有 $t \in [a,b]$，则

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{x},\vec{y},\infty,g}\left(\mathcal{Q}_i(t) \ge A \text{ for some } (i,t) \in [\![1,k]\!] \times [a,b]\right) < \epsilon. \tag{4.8}$$

证明。令 $\epsilon_0 \in (0,1)$足够小，使得 $\epsilon_0(1-\epsilon_0)^{-1} < \epsilon$。根据当前设定，将引理 4.8 应用于$k$，$a$，$b$、$M^{\text{side}} = k$ 和 $\epsilon = \epsilon_0$，我们可以找到 $A_1 > 0$，使得若 $\vec{x}$，$\vec{y} \in W_k^\circ$，且 $|x_i|$，$|y_i| \le k$ 对于 $i \in [\![1,\ k]\!]$，则

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{x},\vec{y}}\left(|\mathcal{Q}_i(t)| \ge A_1 \text{ for some } (i,t) \in [\![1,k]\!] \times [a,b]\right) < \epsilon_0. \tag{4.9}$$

通过以下方式定义函数 $G_g\colon C([\![1,\ k]\!] \times [a,b]) \to [0,1]$

$$G_g\left(\{h_i\}_{i=1}^k\right) = \mathbf{1}\left\{h_k(t) > g(t) \text{ for all } t \in [a,b]\right\},$$

并且对于 $r > 0$ 这一事件

$$F_r = \{\mathcal{Q}_i(t) \ge r \text{ for some } (i,t) \in [\![1,k]\!] \times [a,b]\}.$$

通过 $u_i = v_i = C - i$ 和 $x_i' = y_i' = -i$ 定义 $C = A_1 + k + M_{\text{边}} + M^{\text{bot}}$，$\vec{u}$，$\vec{v}$，$\vec{x}'$，$\vec{y}' \in W_k^\circ$，其中$i \in [\![1,\ k]\!]$，并注意到

$$x_i \le u_i,\ \ y_i \le v_i \text{ for } i \in [\![1,k]\!]. \tag{4.10}$$

注意，我们有以下不等式链

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{x},\vec{y},\infty,g}\left(F_{C+A_1}\right) &\le \mathbb{P}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{u},\vec{v},\infty,g}\left(F_{C+A_1}\right) = \frac{\mathbb{E}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{u},\vec{v}}\left[\mathbf{1}_{F_{C+A_1}} \cdot G_g(\mathcal{Q})\right]}{\mathbb{E}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{u},\vec{v}}\left[G_g(\mathcal{Q})\right]} \\
&\le \frac{\mathbb{E}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{u},\vec{v}}\left[\mathbf{1}_{F_{C+A_1}}\right]}{\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{u},\vec{v}}\left(\mathcal{Q}_k(t) > M^{\text{bot}} \text{ for all } t \in [a,b]\right)} = \frac{\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{x}',\vec{y}'}\left(F_{A_1}\right)}{\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{x}',\vec{y}'}\left(\mathcal{Q}_k(t) > M^{\text{bot}} - C \text{ for all } t \in [a,b]\right)} \\
&\le \frac{\epsilon_0}{\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{x}',\vec{y}'}\left(\mathcal{Q}_k(t) > -A_1 \text{ for all } t \in [a,b]\right)} \le \frac{\epsilon_0}{1-\epsilon_0} < \epsilon.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

事实上，第一个不等式由引理 4.5 中的单调耦合以及（4.10）推出。第一行的等号由定义 4.3 得出。从第一行到第二行时，我们用到了 $G_g(\mathcal{Q}) \in [0,1]$ 以及 $g(t) \le M^{\text{bot}}$对所有 $t \in [a,b]$均成立。第二行的等号可由将边界数据垂直平移 C 得出。从第二行到第三行时，我们用到了 A_1的定义和（4.9），以及 $M^{\text{bot}} - C \le -A_1$这一事实。第三行的第二个不等式再次由（4.9）推出，最后一个不等式则由 ϵ_0的定义得出。

方程（4.11）推出（4.8），其中 $A = A_1 + C$。 □

我们以一个引理结束本节。粗略地说，该引理表明，若边界数据 $\vec{x}, \vec{y}$不太低，则分布为 $\mathbb{P}^{a,\ b,\ \vec{x},\ \vec{y},\ \infty,\ g}$ 避开的线系综在 $[a,b]$ 上不会太低。

引理 4.10。固定 $k \in \mathbb{N}$、a、$b \in \mathbb{R}$，其中 $a < b$，以及 P_1、$P_2 \in \mathbb{R}$。对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $A > 0$，其取决于 k 和 ϵ，使得以下结论成立。若 $\vec{x}$、$\vec{y} \in W_k^\circ$、$x_k \ge P_1$、$y_k \ge P_2$，且 $g\colon [a,b] \to [-\infty, \infty)$是连续的，并满足 $x_k > g(a)$、$y_k > g(b)$，则

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{x},\vec{y},\infty,g}\left(\mathcal{Q}_k(t) \le P_1 \cdot \frac{b-t}{b-a} + P_2 \cdot \frac{t-a}{b-a} - A\sqrt{b-a} \text{ for some } t \in [a,b]\right) < \epsilon. \tag{4.12}$$

证明。根据引理 4.5，只需在 $g = -\infty$ 的情况下证明 (4.12)，以下均假设这一点。根据定义 4.3，如果我们定义

$$\mathcal{Q}_i(s) = (b-a)^{-1/2}\left(\mathcal{Q}_i(a + s(b-a)) - P_1 \cdot (1-s) - P_2 \cdot s\right) \text{ for } i \in [\![1,k]\!] \text{ and } s \in [0,1],$$

那么 $\tilde{\mathcal{Q}} = \{\tilde{\mathcal{Q}}_i\}_{i=1}^k$ 服从 $\mathbb{P}^{0,\ 1,\ \vec{u},\ \vec{v}\ \text{避免}}$，其中 $u_i = (b-a)^{-1/2}(x_i - P_1)$，$v_i = (b-a)^{-1/2}(y_i - P_2)$，对于 $i \in [\![1,\ k]\!]$。将 (4.12) 改写为关于 $\mathcal{Q}$ 的表述，然后从记号中去掉波浪号，我们看到，只需证明存在 $A > 0$，使得如果 $u_k,\ v_k \geq 0$，那么

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{0,1,\vec{u},\vec{v}}\left(\inf_{t\in[0,1]} \mathcal{Q}_k(t) \leq -A\right) < \epsilon. \tag{4.13}$$

令 $\epsilon_0 \in (0,1)$ 足够小，使得 $\epsilon_0(1-\epsilon_0)^{-k} < \epsilon$。由引理 4.8，应用于 $k=1$、$M^{\text{side}}=1$、$\epsilon = \epsilon_0$ 以及 $a=0$、$b=1$，可得 $A_1 > 0$，使得

$$\mathbb{P}_{\text{free}}^{0,1,0,0}\left(\sup_{t\in[0,1]} |B(t)| < A_1\right) > 1 - \epsilon_0. \tag{4.14}$$

注意，当 $k=1$ 分布 $\mathbb{P}^{0,1,0,0\ \text{避开}}$ 时，它恰好是从 $B(0)=0$ 到 $B(1)=0$ 的布朗桥 B，如 (4.1) 所示。在证明的其余部分，我们令 $A = (2k+1)A_1$，并着手证明在此 A 取值下的 (4.13)。

我们通过以下方式定义 $\vec{u}_{\text{新的}} = (u_1^{\text{new}}, \ldots, u_k^{\text{new}}) \in W_k^\circ$ 和 $\vec{v}_{\text{新的}} = (v_1^{\text{new}}, \ldots, v_k^{\text{new}}) \in W_k^\circ$

$$u_i^{\text{new}} = -2iA_1, \quad v_i^{\text{new}} = -2iA_1, \text{ for } i \in [\![1,k]\!].$$

注意，由于 $u_k,\ v_k \geq 0$，我们有 $u_i^{\text{new}} \leq u_i$, $v_i^{\text{new}} \leq v_i$ 对于 $i \in [\![1,\ k]\!]$，因此根据引理 4.5

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{0,1,\vec{u},\vec{v}}\left(\inf_{t\in[0,1]} \mathcal{Q}_k(t) \leq -A\right) \leq \mathbb{P}_{\text{avoid}}^{0,1,\vec{u}^{\text{new}},\vec{v}^{\text{new}}}\left(\inf_{t\in[0,1]} \mathcal{Q}_k(t) \leq -A\right). \tag{4.15}$$

此外，我们 注意，若 E_{avoid} 对于 $f=\infty$ 和 $g=-\infty$如 (4.2) 所示，则根据定义 4.3

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{0,1,\vec{u}^{\text{new}},\vec{v}^{\text{new}}}\left(\inf_{t\in[0,1]} \mathcal{Q}_k(t) \leq -A\right) \leq \frac{\mathbb{P}_{\text{free}}^{0,1,\vec{u}^{\text{new}},\vec{v}^{\text{new}}}\left(\inf_{t\in[0,1]} B_k(t) \leq -A\right)}{\mathbb{P}_{\text{free}}^{0,1,\vec{u}^{\text{new}},\vec{v}^{\text{new}}}(E_{\text{avoid}})}. \tag{4.16}$$

由包含关系

$$\cap_{i=1}^k E_i \subseteq E_{\text{avoid}}, \text{ where } E_i = \left\{\sup_{t\in[0,1]} |B_i(t) + 2iA_1| < A_1\right\},$$

以及独立性，我们得出结论

$$\mathbb{P}_{\text{free}}^{0,1,\vec{u}^{\text{new}},\vec{v}^{\text{new}}}(E_{\text{avoid}}) \geq \prod_{i=1}^k \mathbb{P}_{\text{free}}^{0,1,u_i^{\text{new}},v_i^{\text{new}}}\left(\sup_{t\in[0,1]} |B(t) + 2iA_1| < A_1\right) > (1-\epsilon_0)^k. \tag{4.17}$$

在推导 (4.17) 中最后一个不等式时，我们利用了这样一个事实：最后一行的每个概率在竖直平移 $2iA_1$ 后，都等于 (4.14) 中的概率。

最后，我们注意到，由于 $A = (2k+1)A_1$，因此有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{\text{free}}^{0,1,\vec{u}^{\text{new}},\vec{v}^{\text{new}}}\left(\inf_{t\in[0,1]} B_k(t) \leq -A\right) = \mathbb{P}_{\text{free}}^{0,1,-2kA_1,-2kA_1}\left(\inf_{t\in[0,1]} B(t) \leq -(2k+1)A_1\right) \\
&= \mathbb{P}_{\text{free}}^{0,1,0,0}\left(\inf_{t\in[0,1]} B(t) \leq -A_1\right) < \epsilon_0,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

在最后一个不等式中，我们使用了 (4.14)。结合 (4.16)、(4.17) 和 (4.18)，我们得出

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{0,1,\vec{u}^{\text{new}},\vec{v}^{\text{new}}}\left(\inf_{t\in[0,1]} \mathcal{Q}_k(t) \leq -A\right) \leq \epsilon_0(1-\epsilon_0)^{-k}.$$

利用后者、(4.15)以及 $\epsilon_0(1-\epsilon_0)^{-k} < \epsilon$ 由构造成立这一事实，我们得出(4.13)，从而得到该引理。□

4.4. **布朗线系综的连续模估计**。对于 a，$b \in \mathbb{R}$ 满足 $a < b$，$f \in C([a,b])$，以及 $\delta > 0$，我们定义通常的连续模

$$w(f,\delta) = \sup_{\substack{x,y\in[a,b]\\ |x-y|\le\delta}} |f(x) - f(y)|. \tag{4.19}$$

以下结果表明，当边界数据 $\vec{x}$、$\vec{y}$ 在有界窗口内变化时，具有分布 $\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y}}$ 避免 的线系综具有一致良好的连续模。

引理 4.11。固定 $k \in \mathbb{N}$、a、$b \in \mathbb{R}$，满足 $a < b$，并令 $M^{\mathrm{side}} > 0$。对于任意 ϵ、$\eta > 0$，存在 $\delta > 0$，其取决于 k、a、b、M^{side}、ϵ 和 η，使得以下结论成立。若对于 $i \in [\![1, k]\!]$，有 $\vec{x}$、$\vec{y} \in W_k^\circ$，且有 $|x_i|$、$|y_i| \le M^{\mathrm{side}}$，则

$$\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y}}_{\mathrm{avoid}} \left(\max_{i\in[\![1,k]\!]} w(\mathcal{Q}_i, \delta) \ge \eta \right) < \epsilon. \tag{4.20}$$

证明。为导出矛盾，假设不存在这样的 $\delta > 0$。于是，对每个 $\delta_n = 1/n$，都存在 $\vec{x}^n$、$\vec{y}^n \in W_k^\circ$，满足 $|x_i^n|$、$|y_i^n| \le M^{\mathrm{side}}$，使得

$$\mathbb{P}^{a,b,\vec{x}^n,\vec{y}^n}_{\mathrm{avoid}} \left(\max_{i\in[\![1,k]\!]} w(\mathcal{Q}_i, \delta_n) \ge \eta \right) \ge \epsilon. \tag{4.21}$$

通过适当选取子序列，我们可以假设 $\vec{x}^n \to \vec{x}$ 和 $\vec{y}^n \to \vec{y}$ 对某个 $\vec{x}, \vec{y} \in W_k$ 成立。因此，对于任意 $\delta_0 > 0$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y}}_{\mathrm{avoid}} \left(\max_{i\in[\![1,k]\!]} w(\mathcal{Q}_i, \delta_0) \ge \eta \right) \ge \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}^{a,b,\vec{x}^n,\vec{y}^n}_{\mathrm{avoid}} \left(\max_{i\in[\![1,k]\!]} w(\mathcal{Q}_i, \delta_0) \ge \eta \right) \\ &\ge \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}^{a,b,\vec{x}^n,\vec{y}^n}_{\mathrm{avoid}} \left(\max_{i\in[\![1,k]\!]} w(\mathcal{Q}_i, \delta_n) \ge \eta \right) \ge \epsilon, \end{aligned} \tag{4.22}$$

其中，第一个不等式由引理 4.6 和 Portmanteau 定理得出，第二个不等式由 $\delta_n \downarrow 0$ 得出，第三个不等式则由 (4.21) 得出。由 $\mathcal{Q}_i$ 的连续性可知，

$$\max_{i\in[\![1,k]\!]} w(\mathcal{Q}_i, \delta_0) \to 0 \text{ as } \delta_0 \to 0, \quad \mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y}}_{\mathrm{avoid}}\text{-a.s.}$$

由有界收敛定理可得

$$\lim_{\delta_0\to 0+} \mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y}}_{\mathrm{avoid}} \left(\max_{i\in[\![1,k]\!]} w(\mathcal{Q}_i, \delta_0) \ge \eta \right) = 0,$$

这便与 (4.22) 矛盾，得到了所需的矛盾。 □

在陈述本节的第二个连续模估计（即下面的引理 4.13）之前，我们先证明一个证明该引理所需的辅助结果。下面的引理指出，具有分布 $\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y}}$ 避开 的线系综，其边界数据 $\vec{x}, \vec{y}$ 与某个 Lipschitz 连续函数 g 相距足够远时，在整个区间 $[a,b]$ 上都高于 g 的概率至少为某个小的正数。

引理 4.12. 固定 $k \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$，使得 $a < b$，以及 $\delta^{\mathrm{sep}}, M^{\mathrm{side}}, L > 0$。我们可以找到 $\rho > 0$，它依赖于 k, a, b, δ^{sep}, M^{side} 和 L，使得下述结论成立。若 $\vec{x}, \vec{y} \in W_k^\circ$ 和 $g \in C([a,b])$ 满足

- $|x_i|$, $|y_i| \le M$ 侧对于 $i \in [\![1, k]\!]$,
- $|g(a)|$, $|g(b)| \le M$ 侧,
- $g(a) \le x_k - \delta$ 分离, $g(b) \le y_k - \delta$ 分离,
- g 是具有参数 L 的 *Lipschitz* 连续函数,

then

$$\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y}}_{\mathrm{avoid}} \left(\mathcal{Q}_k(t) > g(t) \text{ for all } t \in [a,b] \right) > \rho. \tag{4.23}$$

证明。 反设不存在这样的 $\rho>0$ 。那么，对于每个 $\rho_n=1/n$，都存在 $\vec{x}^{\,n},\vec{y}^{\,n}\in W_k^\circ$以及函数 $g^n\in C([a,b])$，它们满足引理陈述中的四个条件，并且

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{x}^{\,n},\vec{y}^{\,n}}\left(\mathcal{Q}_k(t)>g^n(t)\text{ for all }t\in[a,b]\right)\le\rho_n. \tag{4.24}$$

令 $\delta=(2k)^{-1}\cdot\delta^{\text{sep}}$，并由 $u_i^n=g^n(a)+(2k-i)\delta$ 与 $v_i^n=g^n(b)+(2k-i)\delta$ 定义 $\vec{u}^{\,n},\ \vec{v}^{\,n}\in W_k^\circ$。由上述前三点，我们得出

(1) $x_i^n\ge u_i^n$与 $y_i^n\ge v_i^n$ 对 $i\in[\![1,\ k]\!]$，(2) $u_i^n-u_{i+1}^n=\delta$ 与 $v_i^n-v_{i+1}^n=\delta$ 对 $i\in[\![1,\ k-1]\!]$，(3) $u_k^n=k\delta+g^n(a)$ 与 $v_k^n=k\delta+g^n(b)$，(4) $|u_i^n|\le M^{\text{侧}}$ 与 $|v_i^n|\le M^{\text{side}}$ 对 $i\in[\![1,k]\!]$。

将条件 (1) 与 (4.24) 以及引理 4.5 中的单调耦合相结合，我们得出

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{u}^{\,n},\vec{v}^{\,n}}\left(\mathcal{Q}_k(t)>g^n(t)\text{ for all }t\in[a,b]\right)\le\rho_n. \tag{4.25}$$

由引理的第二点和第四点，我们得出 $\{g^n\}_{n\ge1}$ 满足 Arzelà–Ascoli定理的条件，因此经过可能的子序列选取后，我们可以假设 g^n 在 $[a,b]$ 上一致收敛到连续函数 g^∞。此外，利用上述条件 (4)，经过可能的子序列选取后，我们可以假设 $\vec{u}^{\,n}\to\vec{u}^{\,\infty}$和 $\vec{v}^{\,n}\to\vec{v}^{\,\infty}$，其中$\vec{u}^{\,\infty},\ \vec{v}^{\,\infty}\in W_k$。事实上，由条件 (2) 和 (3)，我们必有 $u_i^\infty-u_{i+1}^\infty=\delta$和 $v_i^\infty-v_{i+1}^\infty=\delta$，对 $i\in[\![1,\ k-1]\!]$成立，并且 $u_k^\infty=k\delta+g^\infty(a)$ 和 $v_k^\infty=k\delta+g^\infty(b)$，因此 $\vec{u}^{\,\infty},\ \vec{v}^{\,\infty}\in W_k^\circ$ 且 $u_k^\infty>g^\infty(a)+\delta/2$, $v_k^\infty>g^\infty(b)+\delta/2$。

如定义 4.3 中所述，详见定义 2.7] ，我们知道存在某个 $\epsilon>0$，它取决于 a、 b、 k、 $\vec{u}^{\,\infty}$、 $\vec{v}^{\,\infty}$、 g^∞，使得

$$\mathbb{P}_{\text{free}}^{a,b,\vec{u}^{\,\infty},\vec{v}^{\,\infty}}\left(\mathcal{Q}_1(t)>\cdots>\mathcal{Q}_k(t)>g^\infty(t)+\delta/2\text{ for all }t\in[a,b]\right)\ge\epsilon.$$

后者与定义 4.3 推出

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{u}^{\,\infty},\vec{v}^{\,\infty}}\left(\mathcal{Q}_k(t)>g^\infty(t)+\delta/2\text{ for all }t\in[a,b]\right)\ge\epsilon. \tag{4.26}$$

最后，我们注意到以下不等式链

$$\begin{aligned}\epsilon&\le\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{u}^{\,\infty},\vec{v}^{\,\infty}}\left(\mathcal{Q}_k(t)>g^\infty(t)+\delta/2\text{ for all }t\in[a,b]\right)\\&\le\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{u}^{\,n},\vec{v}^{\,n}}\left(\mathcal{Q}_k(t)>g^\infty(t)+\delta/2\text{ for all }t\in[a,b]\right)\\&\le\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{u}^{\,n},\vec{v}^{\,n}}\left(\mathcal{Q}_k(t)>g^n(t)\text{ for all }t\in[a,b]\right)\le\liminf_{n\to\infty}\rho_n=0.\end{aligned} \tag{4.27}$$

事实上，第一个不等式由 (4.26) 得出，第二个不等式由引理 4.6 和 Portmanteau 定理得出。第三个不等式来自 g^n 到 g^∞ 的一致收敛，第四个则来自 (4.25)。不等式 (4.27) 导出了所需的矛盾。□

我们以如下结果结束本节。该结果表明，分布为 $\mathbb{P}^{c,\ d,\ \vec{x},\ \vec{y},\ \infty,\ g}$ 且避开 的线系综，其边界数据 $\vec{x}$, $\vec{y}$接近于零，且 g 在 $[c,d]$ 上不会太高，那么它很可能在稍微小一些的区间 $[a,b]\subset(c,\ d)$ 上具有良好的连续模。

引理 *4.13.* 固定 $k\in\mathbb{N}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$，满足 $c<a<b<d$, $M^{\text{side}}>0$ 且 $M^{\text{bot}}>0$。对于任意 $\epsilon,\eta>0$, 存在 $\delta>0$，它取决于 k, a, b, c, d, M侧、 M^{bot}, ϵ 和 η，使得以下结论成立。若 $\vec{x},\vec{y}\in W_k^\circ$，且 $|x_i|$, $|y_i|\le M^{\text{side}}$ 对于 $i\in[\![1,k]\!]$ 成立，并且 $g\colon[c,d]\to[-\infty,\infty)$ 连续且满足 $x_k>g(c)$、 $y_k>g(d)$ 和 $g(t)\le M^{\text{bot}}$ 对所有 $t\in[c,d]$ 成立，那么

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{c,d,\vec{x},\vec{y},\infty,g}\left(\max_{i\in[\![1,k]\!]}w(\mathcal{Q}_i[a,b],\delta)\ge\eta\right)<\epsilon. \tag{4.28}$$

注4.14。我们强调，(4.28) 中的连续模针对的是 (4.19) 中的区间 $[a,b]$ ，而不是 $[c,d]$。

证明。 在整个证明中，我们所遇到的所有常数都依赖于 k、 a、 b、 c、 d、 M^{side}、 $M_{\text{底}}$、ϵ 和 η。对此我们不再赘述。为清晰起见，我们将证明分为三个步骤。在步骤 1 中，我们将该引理的证明归结为证明：对某个 $\epsilon_1 > 0$，我们有

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{c,d,\vec{x},\vec{y},\infty,g}\left(\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{X},\vec{Y}}(\tilde{\mathcal{Q}}_k(t) > g(t) \text{ for all } t \in [a,b]) \geq \epsilon_1\right) > 1 - \epsilon/4,$$

→ →见 (4.29)。在最后一个方程中， $X_i = \mathcal{Q}_i(a)$、 $Y_i = \mathcal{Q}_i(b)$ 对 $i \in [\![1,k]\!]$ 且 $\tilde{\mathcal{Q}}$ 服从分布 $\mathbb{P}^{a,b,X,Y\text{ 避开}}$。→ →概率 $\mathbb{P}^{a,b,X,Y\text{ 避开}}(\tilde{\mathcal{Q}}_k(t) > g(t)$ 对所有 $t \in [a,b])$ 有时被称为接受概率，而该概率的一个下界使我们能够将估计从没有下边界的系综 g 转移到具有下边界的系综 g。特别地，稍加努力，我们将能够证明：只要接受概率以高概率具有下界，(4.28) 中的连续模界便可由引理 4.11 中的相应界推出。在步骤 2 中，我们通过证明它在如下事件上成立来建立 (4.29) 中的接受概率下界： $\mathcal{Q}_k$ 在 a 与 b 的一个小邻域内与 g 充分分离——关于这一分离的精确表述见 (4.36)。(4.36) 中的分离界在步骤 3 中证明，方法是将g 替换为如 (4.3) 中的尖峰函数。对于这样的函数，分离更不容易发生，但通过适当地应用单调耦合引理 4.5 与引理 4.12，我们仍然证明其概率被一致地下界控制。现在我们转而给出上述提纲的细节。

步骤 1. 对于 $[a,b]$ 上的函数 u，定义函数 G_u：$C([\![1,k]\!] \times [a,b]) \to [0,1]$ 如下

$$G_u\left(\{h_i\}_{i=1}^k\right) = \mathbf{1}\left\{h_k(t) > u(t) \text{ for all } t \in [a,b]\right\}.$$

此外 ，令 $\tilde{g}$ 为 g 在 $[a,b]$ 上的限制，并通过以下方式定义随机 $\vec{X},\vec{Y} \in W_k^\circ$

$$X_i = \mathcal{Q}_i(a),\ Y_i = \mathcal{Q}_i(b) \text{ for } i \in [\![1,k]\!].$$

我们声称存在 $\epsilon_1 \in (0,1)$，使得

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{c,d,\vec{x},\vec{y},\infty,g}(E^{\text{ap}}) > 1 - \epsilon/4, \text{ where } E^{\text{ap}} = \left\{\mathbb{E}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{X},\vec{Y}}\left[G_{\tilde{g}}(\tilde{\mathcal{Q}})\right] \geq \epsilon_1\right\}, \tag{4.29}$$

→ →和 $\tilde{\mathcal{Q}} = \{\tilde{\mathcal{Q}}_i\}_{i=1}^k \in C([\![1,k]\!] \times [a,b])$ 按照 $\mathbb{P}^{a,b,X,Y\text{avoid}}$ 分布。我们指出，(随机)期望 $\mathbb{E}^{a,b,\vec{X},\vec{Y}\text{avoid}}\left[G_{\tilde{g}}(\tilde{\mathcal{Q}})\right]$ 是 $\vec{X},\vec{Y}$ 的可测函数（由 [17, 引理 3.4], ），因此其自身也是一个随机变量，故 E^{ap} 是一个事件。我们将在以下步骤中证明 (4.29)。这里，我们假设其成立，并据此完成引理的证明。

由引理 4.9 应用于 k， $M_{\text{侧}}$ M^{bot}（如本引理中所述），并将 $a = c$、 $b = d$ 和 ϵ 替换为 $\epsilon/16$，可找到 $A_1 > 0$，使得

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{c,d,\vec{x},\vec{y},\infty,g}(\max(X_1,Y_1) > A_1) < \epsilon/16. \tag{4.30}$$

另一方面，由引理 4.8 应用于 k， M^{side}、 $a = c$、 $b = d$，并将 ϵ 替换为 $\epsilon/16$，可找到 $A_2 > 0$，使得

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{c,d,\vec{x},\vec{y}}(\min(X_k,Y_k) < -A_2) < \epsilon/16.$$

将后者与引理 4.5 中的单调耦合相结合，我们得出

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{c,d,\vec{x},\vec{y},\infty,g}(\min(X_k,Y_k) < -A_2) < \epsilon/16. \tag{4.31}$$

令 $\hat{A} = \max(A_1, A_2)$，并对 (4.30) 和 (4.31) 应用并集界，我们得出 t

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{c,d,\vec{x},\vec{y},\infty,g}\left(E^{\text{bdd}}\right) > 1 - \epsilon/8, \text{ where } E^{\text{bdd}} = \{|X_i|,|Y_i| \leq \hat{A} \text{ for } i \in [\![1,k]\!]\}. \tag{4.32}$$

由引理 4.11，取 k, a, b, η 如本引理所示，并将 $M^{\text{side}} = \hat{} A$ 和 ϵ 替换为 $\epsilon\epsilon_1/2$，可得存在 $\delta > 0$，使得对于 $\vec{x}', \vec{y}' \in W_k^\circ$，其中 $|x_i'|, |y_i'| \leq \hat{} A$，且 $i \in [\![1, k]\!]$，有

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{x}',\vec{y}'}\left(\max_{i\in[\![1,k]\!]} w(\mathcal{Q}_i, \delta) \geq \eta\right) < \epsilon\epsilon_1/2. \tag{4.33}$$

这就确定了 引理陈述中的 δ，接下来我们证明 (4.28) 成立 s.

定义函数 $H\colon\ C([\![1,\ k]\!] \times [c,d]) \to \mathbb{R}$, $\tilde{H}\colon\ C([\![1,\ k]\!] \times [a,b]) \to \mathbb{R}$ 通过

$$H\left(\{f_i\}_{i=1}^k\right) = \max_{i\in[\![1,k]\!]} \sup_{\substack{x,y\in[a,b]\\|x-y|\leq\delta}} |f_i(x) - f_i(y)| \text{ and } \tilde{H}\left(\{f_i\}_{i=1}^k\right) = \max_{i\in[\![1,k]\!]} \sup_{\substack{x,y\in[a,b]\\|x-y|\leq\delta}} |f_i(x) - f_i(y)|.$$

于是我们得到以下恒等式

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\text{avoid}}^{c,d,\vec{x},\vec{y},\infty,g}\left[\mathbf{1}_{E^{\text{bdd}}} \cdot \mathbf{1}_{E^{\text{ap}}} \cdot \mathbf{1}\{H(\mathcal{Q}) \geq \eta\}\right] \\
&= \mathbb{E}_{\text{avoid}}^{c,d,\vec{x},\vec{y},\infty,g}\left[\mathbf{1}_{E^{\text{bdd}}} \cdot \mathbf{1}_{E^{\text{ap}}} \cdot \mathbb{E}_{\text{avoid}}^{c,d,\vec{x},\vec{y},\infty,g}\left[\mathbf{1}\{H(\mathcal{Q}) \geq \eta\}|\mathcal{F}_{\text{ext}}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_{\text{avoid}}^{c,d,\vec{x},\vec{y},\infty,g}\left[\mathbf{1}_{E^{\text{bdd}}} \cdot \mathbf{1}_{E^{\text{ap}}} \cdot \mathbb{E}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{X},\vec{Y},\infty,\tilde{g}}\left[\mathbf{1}\{\tilde{H}(\tilde{\mathcal{Q}}) \geq \eta\}\right]\right]
\end{aligned} \tag{4.34}$$

其中 $\mathcal{F}_{\text{ext}} = \sigma\{\mathcal{Q}_i(s) : (i,s) \in [\![1,k]\!] \times [c,d] \setminus ([\![1,k]\!] \times (a,b))\}$。事实上，第一个等式由条件期望的塔式性质以及 $E^{\text{bdd}}, E^{\text{ap}} \in \mathcal{F}_{\text{ext}}$ 这一事实得出。第二个等式稍微微妙一些。当 $g = -\infty$ 时，由于 $\mathcal{Q}$ 的分布为 $\mathbb{P}^{c,d,\vec{x},\vec{y}}$ 避开，并且满足布朗吉布斯性质，作为定义在区间 $[c,d]$ 上、以 $[\![1,k]\!]$ 为指标的线系综（按照定义 2.5], 的含义），该等式便成立；而这由引理 2.13] 可知。当 g 是一个取有限值的连续函数时，由以下事实可得该等式：若 $\mathcal{Q}$ 的分布为 $\mathbb{P}^{c,d,\vec{x},\vec{y},\infty,g}$ 避开，且 $\mathcal{L}$ 是定义在 $[c,d]$ 上、由 $\mathcal{L}_i = \mathcal{Q}_i$ 给出的 $[\![1,k+1]\!]$ 指标线系综，其中 $i \in [\![1,k]\!]$ 且 $\mathcal{L}_{k+1} = g$，那么 $\mathcal{L}$ 满足定义 2.7] 中的部分布朗吉布斯性质。最后一个结论由引理 2.6] 和 $A = 0$ 得出。

现在我们注意到，在事件 $E^{\text{bdd}} \cap E^{\text{ap}}$ 上，有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{X},\vec{Y},\infty,\tilde{g}}\left[\mathbf{1}\{\tilde{H}(\tilde{\mathcal{Q}}) \geq \eta\}\right] &= \frac{\mathbb{E}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{X},\vec{Y}}\left[\mathbf{1}\{\tilde{H}(\tilde{\mathcal{Q}}) \geq \eta\} \cdot G_{\tilde{g}}(\tilde{\mathcal{Q}})\right]}{\mathbb{E}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{X},\vec{Y}}\left[G_{\tilde{g}}(\tilde{\mathcal{Q}})\right]} \\
&\leq \epsilon_1^{-1}\mathbb{E}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{X},\vec{Y}}\left[\mathbf{1}\{\tilde{H}(\tilde{\mathcal{Q}}) \geq \eta\}\right] \leq \epsilon/2.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

事实上，第一行的等式由定义 4.3 得出。从第一行到第二~行时，我们用到了 $G_{\tilde{g}}(\mathcal{Q}) \in [0,1]$ 以及 E^{ap} 的定义。最后一个不等式中，我们使用了 (4.33)，其中 $\vec{X}$，$\vec{Y}$ 分别对应其中的 $\vec{x}'$，$\vec{y}'$，并用到了 E^{bdd} 和 $\tilde{H}$ 的定义。

结合 (4.34) 和 (4.35)，并回顾 H 的定义，我们得到

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{c,d,\vec{x},\vec{y},\infty,g}\left(E^{\text{bdd}} \cap E^{\text{ap}} \cap \left\{\max_{i\in[\![1,k]\!]} w(\mathcal{Q}_i[a,b], \delta) \geq \eta\right\}\right) \leq \epsilon/2.$$

将最后一个不等式与 (4.29) 和 (4.32) 结合，我们便得到 (4.28)。

St第 2 步。我们声称可以找到 $\delta^{\text{sep}} \in (0,\ 1)$ 和 $\Delta^{\text{sep}} \in (0,\ (b-a)/2)$，使得 at

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{c,d,\vec{x},\vec{y},\infty,g}\left(E_1^{\text{sep}} \cap E_2^{\text{sep}}\right) > 1 - \epsilon/8, \text{ where} \\
&E_1^{\text{sep}} = \left\{\mathcal{Q}_k(a) \geq \max_{t\in[a,a+\Delta^{\text{sep}}]} g(t) + \delta^{\text{sep}}\right\} \text{ and } E_2^{\text{sep}} = \left\{\mathcal{Q}_k(b) \geq \max_{t\in[b-\Delta^{\text{sep}},b]} g(t) + \delta^{\text{sep}}\right\}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

我们证明 (4.36) 在下一步中。这里，我们假设其有效性，并完成对 (4.29) 的证明 .

ˆ令 A 如步骤 1 中所述，见 (4.32)，并令 ρ 如引理 4.12 中所述，其中 k， a， b， δ^{sep} 取当前设定中的值， $M^{\mathrm{side}} = \hat{A} + 1$ 且 $L = (2\hat{A} + M_{\mathrm{bot}} + \delta^{\mathrm{sep}})/\Delta^{\mathrm{sep}}$。下文证明 $\epsilon_1 = \rho$ 的 (4.29)。

考虑由下式给出的（随机）函数 $\hat{g} \in C([a,b])$

$$\hat{g}(a) = X_k - \delta^{\mathrm{sep}},\ \hat{g}(b) = Y_k - \delta^{\mathrm{sep}},\ \hat{g}(t) = \hat{A} + M^{\mathrm{bot}} \text{ for } t \in [a + \Delta^{\mathrm{sep}}, b - \Delta^{\mathrm{sep}}],$$

且 $\hat{g}$ 在 [上是线性的 a， $a + \Delta^{\mathrm{sep}}$] 且 $[b - \Delta^{\mathrm{sep}}, b]$。注意，以下结论在 $E^{\mathrm{bdd}} \cap E_1^{\mathrm{sep}} \cap E^{\mathrm{se}}$ 上成立 $_2$ p

$$\hat{g}(t) \geq g(t) \text{ for all } t \in [a,b], \text{ and } \hat{g} \text{ is Lipschitz continuous with parameter } L. \tag{4.37}$$

事实上，由于 $X_k \in [-\hat{A}, \hat{A}]$ 在 E^{bdd} 上，我们知道

$$\hat{g}(a + \Delta^{\mathrm{sep}}) - \hat{g}(a) \in [0, 2\hat{A} + M^{\mathrm{bot}} + \delta^{\mathrm{sep}}].$$

最后一个方程表明，$\hat{g}$ 在 $[a, a + \Delta^{\mathrm{sep}}]$ 上的斜率至多为 L。对 $[b - \Delta^{\mathrm{sep}}, b]$ 可作类似论证，且$\hat{g}$在 $[a + \Delta^{\mathrm{sep}}, b - \Delta^{\mathrm{sep}}]$上为常数，从而验证了(4.37)中的第二个陈述。此外，最后所展示的方程表明$\hat{g}$在 $[a, a + \Delta^{\mathrm{sep}}]$上递增，由 E_1^{sep} 的定义，这对 $t \in [a, a + \Delta^{\mathrm{sep}}]$给出

$$\hat{g}(t) \geq \hat{g}(a) = X_k - \delta^{\mathrm{sep}} \geq \max_{s \in [a, a + \Delta^{\mathrm{sep}}]} g(s) \geq g(t).$$

这验证了当 $t \in [a, a + \Delta^{\mathrm{sep}}]$时(4.37)中的不等式，类似的论证表明当 $t \in [b - \Delta^{\mathrm{sep}}, b]$时该不等式也成立。对于 $t \in [a + \Delta^{\mathrm{sep}}, b - \Delta^{\mathrm{sep}}]$，由我们的假设 $g(t) \leq M^{\mathrm{bot}}$ 以及$\hat{g}(t) = \hat{A} + M_{\text{底}}$，该不等式是直接可得的。

上述工作表明，在 $E = E^{\mathrm{bdd}} \cap E_1^{\mathrm{sep}} \cap E_2^{\mathrm{sep}}$ 上， $\vec{x} = \vec{X}$、 $\vec{y} = \vec{Y}$ 和 $g = \hat{g}$ （采用我们先前选定的参数）满足引理 4.12 的条件，因此在 E

$$\mathbb{E}_{\mathrm{avoid}}^{a,b,\vec{X},\vec{Y}} \left[G_{\hat{g}}(\tilde{\mathcal{Q}}) \right] \geq \epsilon_1.$$

˜ ˜由于根据 (4.37)，我们有 $\hat{g}(t) \geq \tilde{g}(t) = g(t)$，因此 $G_{\hat{g}}(\mathcal{Q}) \leq G_{\tilde{g}}(\mathcal{Q})$，由此得出，在 E

$$\mathbb{E}_{\mathrm{avoid}}^{a,b,\vec{X},\vec{Y}} \left[G_{\tilde{g}}(\tilde{\mathcal{Q}}) \right] \geq \epsilon_1.$$

最后一个方程意味着

$$\mathbb{P}_{\mathrm{avoid}}^{c,d,\vec{x},\vec{y},\infty,g} \left(\mathbb{E}_{\mathrm{avoid}}^{a,b,\vec{X},\vec{Y}} \left[G_{\tilde{g}}(\tilde{\mathcal{Q}}) \right] \geq \epsilon_1 \right) \geq \mathbb{P}_{\mathrm{avoid}}^{c,d,\vec{x},\vec{y},\infty,g}(E) > 1 - \epsilon/4,$$

其中，最后一个不等式用到了 (4.32) 和 (4.36)。这就证明了 (4.29)。

步骤 3. 在这一步中，我们证明 (4.36)。我们将证明存在 $\delta_i^{\mathrm{sep}} \in (0,1)$ 和 $\Delta_i^{\mathrm{sep}} \in (0, (b-a)/2)$，使得

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{\mathrm{avoid}}^{c,d,\vec{x},\vec{y},\infty,g} \left(\mathcal{Q}_k(a) < \max_{t \in [a, a + \Delta_1^{\mathrm{sep}}]} g(t) + \delta_1^{\mathrm{sep}} \right) \leq \epsilon/16, \\ &\mathbb{P}_{\mathrm{avoid}}^{c,d,\vec{x},\vec{y},\infty,g} \left(\mathcal{Q}_k(b) < \max_{t \in [b - \Delta_2^{\mathrm{sep}}, b]} g(t) + \delta_2^{\mathrm{sep}} \right) \leq \epsilon/16. \end{aligned} \tag{4.38}$$

对 (4.38) 中的两行应用并集界，可得 (4.36)，其中 $\delta^{\mathrm{sep}} = \min(\delta_1^{\mathrm{sep}}, \delta_2^{\mathrm{sep}})$ 和 $\Delta^{\mathrm{sep}} = \min(\Delta_1^{\mathrm{sep}}, \Delta_2^{\mathrm{sep}})$。由于证明类似，我们只证明 (4.38) 中的第一行。

反设不存在这样的 δ_1^{sep}， Δ_1^{sep}。那么，我们可以找到序列$\delta_{1,\ n}^{\mathrm{sep}} \in (0,\ 1)$、$\Delta_{1,\ n}^{\mathrm{sep}} \in (0,\ (b-a)/2)$、 $\vec{x}^n,\ \vec{y}^n \in W_k^\circ$，满足$|x_i^n|,\ |y_i^n| \le M^{\mathrm{side}}$，以及连续函数 $g^n\colon [c,d] \to [-\infty,\infty)$，使得对于 $t \in [c,d]$， $g^n(t) \le M^{\mathrm{bot}}$，且 $g^n(c) < x_k^n, g^n(d) < y_k^n$，从而

$$\mathbb{P}_{\mathrm{avoid}}^{c,d,\vec{x}^n,\vec{y}^n,\infty,g^n}\left(\mathcal{Q}_k(a) < \max_{t\in[a,a+\Delta_{1,n}^{\mathrm{sep}}]} g^n(t) + \delta_{1,n}^{\mathrm{sep}}\right) > \epsilon/16. \tag{4.39}$$

由于 g^n 连续，我们可以找到 $t_n \in [a, a+\Delta_{1,n}^{\mathrm{sep}}]$，使得

$$g^n(t_n) = \max_{t\in[a,a+\Delta_{1,n}^{\mathrm{sep}}]} g^n(t).$$

令 q^n 为满足 $q^n(t_n) = g^n(t_n)$ 且 $q^n(t) = -\infty$ （ $t \in [c,d]\setminus\{t_n\}$）的函数。此外，令 $\vec{u}$, $\vec{v} \in W_k^\circ$由 $u_i = v_i = -M^{\mathrm{side}} - i$ 定义，并注意到

$$u_i \le x_i^n,\ \ v_i \le y_i^n \text{ for } i \in [\![1,k]\!], \text{ and } q^n(t) \le g^n(t) \text{ for } t \in [c,d].$$

根据引理 4.5 中的单调耦合以及 (4.39)，我们得出

$$\mathbb{P}_{\mathrm{avoid}}^{c,d,\vec{u},\vec{v},\infty,q^n}\left(\mathcal{Q}_k(a) < q^n(t_n) + \delta_{1,n}^{\mathrm{sep}}\right) > \epsilon/16. \tag{4.40}$$

令 $q \in C([c,d])$ 在 $[c,a]$、 $[a,b]$ 和 $[b,d]$ 上为线性函数，且满足

$$q(c) = -M^{\mathrm{side}} - k - 1 = q(d), \text{ and } q(a) = q(b) = M^{\mathrm{bot}}.$$

我们注意到 q 是 Lipschitz 连续的，其常数为

$$L_q = (M^{\mathrm{bot}} + M^{\mathrm{side}} + k + 1)\cdot \max\left((a-c)^{-1}, (d-b)^{-1}\right).$$

此外，我们注意到对于 $t \in [c,d]$，有 $q(t) \ge q^n(t)$，且 $q(c) = q(d) = u_k - 1 = v_k - 1$。因此，

$$\mathbb{P}_{\mathrm{avoid}}^{c,d,\vec{u},\vec{v}}\left(\mathcal{Q}_k(t_n) > q^n(t_n)\right) \ge \mathbb{P}_{\mathrm{avoid}}^{c,d,\vec{u},\vec{v}}\left(\mathcal{Q}_k(t) > q(t) \text{ for all } t \in [c,d]\ \right) \ge \rho_q, \tag{4.41}$$

其中 ρ_q 是引理 4.12 中的 ρ，将其应用于当前设定中的 k，令 $a=c$、 $b=d$、 M^{side} 取为 $M^{\mathrm{side}}+k+1$、 $\delta^{\mathrm{sep}} = 1$和 $L = L_q$。

结合 (4.40) 和 (4.41)，由定义 4.3 可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{\mathrm{avoid}}^{c,d,\vec{u},\vec{v}}\left(\mathcal{Q}_k(a) < q^n(t_n) + \delta_{1,n}^{\mathrm{sep}} \text{ and } \mathcal{Q}_k(t_n) > q^n(t_n)\right)\\ &= \mathbb{P}_{\mathrm{avoid}}^{c,d,\vec{u},\vec{v},\infty,q^n}\left(\mathcal{Q}_k(a) < q^n(t_n) + \delta_{1,n}^{\mathrm{sep}}\right)\cdot \mathbb{P}_{\mathrm{avoid}}^{c,d,\vec{u},\vec{v}}\left(\mathcal{Q}_k(t_n) > q^n(t_n)\right) > \rho_q\epsilon/16.\end{aligned} \tag{4.42}$$

由于 $q^n(t_n) \le M^{\mathrm{bot}}$，通过适当取子序列，我们可以假设 $q^n(t_n) \to \alpha \in [-\infty, M^{\mathrm{bot}}]$。利用在 $\mathbb{P}^{c,\ d,\ \vec{u},\ \vec{v}}_{\text{避免}}$ 曲线 $\mathcal{Q}_k$ 几乎处处连续这一事实，以及 $t_n \to a$ 和 $\delta_{1,\ n}^{\mathrm{sep}} \to 0$，我们得到

$$\mathbb{P}_{\mathrm{avoid}}^{c,d,\vec{u},\vec{v}}\left(\mathcal{Q}_k(a) = \alpha\right) \ge \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\mathrm{avoid}}^{c,d,\vec{u},\vec{v}}\left(\mathcal{Q}_k(a) \le q^n(t_n) + \delta_{1,n}^{\mathrm{sep}} \text{ and } \mathcal{Q}_k(t_n) \ge q^n(t_n)\right) \ge \frac{\rho_q\epsilon}{16}, \tag{4.43}$$

其中，第一个不等式由 Fatou 引理得出，第二个不等式由 (4.42) 得出。

若 E_{avoid} 如 (4.2) 所示，且满足 $f = \infty$和 $g = -\infty$，则由定义 4 可得。 3

$$\mathbb{P}_{\mathrm{avoid}}^{c,d,\vec{u},\vec{v}}\left(\mathcal{Q}_k(a) = \alpha\right) = \frac{\mathbb{P}_{\mathrm{free}}^{c,d,\vec{u},\vec{v}}(\{B_k(a)=\alpha\}\cap E_{\mathrm{avoid}})}{\mathbb{P}_{\mathrm{free}}^{c,d,\vec{u},\vec{v}}(E_{\mathrm{avoid}})} = 0,$$

其中，在最后一个等式中，我们用到了 $B_k(a)$ 的分布是非原子的，因为这是一个具有非零方差的正态变量，这是由于 $a \in (c,d)$。

最后一个显示的方程和 (4.43) 表明 $0 \ge \rho_q\epsilon/16$，这正是我们所需的矛盾。这个矛盾源于我们的假设：不存在满足 (4.38) 第一行的 $\delta_1^{\mathrm{sep}} \in (0,\ 1)$ 和 $\Delta_1^{\mathrm{sep}} \in (0,\ (b-a)/2)$。至此，(4.38) 的证明完成，从而引理得证。□

5. 收敛到戴森布朗运动

本节的目标是证明定理 1.14。我们将在第 5.1 节建立两个技术性命题后，于第 5.2 节证明该定理。本节中我们继续沿用第 1 节和第 4 节中的相同记号。

5.1. 曲线位置的近似。 本节将确立两个技术性结果，它们是证明定理 1.14 所需的。采用定理 1.14(a) 中相同的记号，并引入辅助线系综 $\tilde{\mathcal{L}}^N = \{\tilde{\mathcal{L}}_i^N\}_{i\geq 1}$，定义如下：

$$\tilde{\mathcal{L}}_i^N(t) = (2T_N)^{-1/2} \cdot \left(\mathcal{A}_i^{a,b,c}(tT_N) + 2tT_N/v_k^a - t^2T_N^2\right), \text{ for } (i,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}. \tag{5.1}$$

由命题 1.5 可知，$\mathcal{L}^{a,\ b,\ c}$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足布朗吉布斯性质，进而由引理 4.7 可得 $\tilde{\mathcal{L}}^N$ 也满足同样的性质。此外，由 (1.13) 可得

$$\mathcal{L}_i^N(t) = \tilde{\mathcal{L}}^N_{\mathsf{M}^a_{k-1}+i}(t) \text{ for } (i,t) \in [\![1,\mathsf{m}_k^a]\!]\times(0,\infty). \tag{5.2}$$

以下结果表明，定理 1.14 中的曲线 $\mathcal{L}_i^N$ 在紧区间上一致地很可能接近零（尺度为 $T_N^{1/2}$）。

命题 5.1。 采用定理 *1.14(a)* 中相同的记号。对于任意 $0<\alpha<\beta$ 和 $\epsilon>0$，存在 $M>0$，它依赖于 α、β、ϵ、参数 $(a$、b、$c)$以及序列 $\{T_N\}_{N\geq 1}$，使得对所有 $N\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{(i,t)\in[\![1,\mathsf{m}_k^a]\!]\times[\alpha,\beta]} |\mathcal{L}_i^N(t)| > M\right) < \epsilon. \tag{5.3}$$

证明。 在整个证明过程中，我们遇到的所有常数都依赖于 α,β,ϵ、参数 (a,b,c) 以及序列 $\{T_N\}_{N\geq 1}$。下文不再特别说明。为清晰起见，我们将证明分为三个步骤。

步骤 1。 设 $\tilde{\mathcal{L}}^N$ 如 (5.1) 所示。我们断言，可以找到 $M_1>0$，使得

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[\alpha,\beta]} \tilde{\mathcal{L}}^N_{\mathsf{M}^a_{k-1}+1}(t) > M_1\right) < \epsilon/2. \tag{5.4}$$

此外，我们断言，可以找到 $M_2>0$，使得

$$\mathbb{P}\left(\inf_{t\in[\alpha,\beta]} \tilde{\mathcal{L}}^N_{\mathsf{M}^a_k}(t) < -M_2\right) < \epsilon/2. \tag{5.5}$$

由于 $\tilde{\mathcal{L}}^N$ 满足布朗吉布斯性质，对所有 $t\in\mathbb{R}$，我们有

$$\tilde{\mathcal{L}}_1^N(t) > \tilde{\mathcal{L}}_2^N(t) > \cdots > \tilde{\mathcal{L}}^N_{\mathsf{M}^a_k}(t). \tag{5.6}$$

Co因此，对 (5.4) 和 (5.5) 应用并集界可得，对于 $M=\max(M_1,M_2)$，有 t

$$\mathbb{P}\left(\sup_{(i,t)\in[\![1,\mathsf{m}_k^a]\!]\times[\alpha,\beta]} |\tilde{\mathcal{L}}^N_{i+\mathsf{M}^a_{k-1}}(t)| > M\right) < \epsilon.$$

最后一个不等式与 (5.2) 蕴含 (5.3)。

因此，我们已将命题的证明归结为确立（5.4）和（5.5）).

步骤 2. 在此步骤中，我们证明（5.4）。

为方便起见，令 $K_1 = \mathsf{M}_{k-1}^a + 1$、 $K_2 = \mathsf{M}_k^a$、 $\Delta = \beta - \alpha$、 $\gamma = \alpha + 4\Delta$。根据命题 3.3 ˆ 和（5.2），我们可以找到充分大的 M，使得对于所有 $N \in \mathbb{N}$ 和 $r \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$$\mathbb{P}(H_N^r) < \epsilon/8, \text{ where } H_N^r = \left\{ |\tilde{\mathcal{L}}_i^N(r)| \geq \hat{M} \text{ for some } i \in [\![K_1, K_2]\!] \right\}. \tag{5.7}$$

我们还定义

$$\tilde{H}_N^\beta = \left\{ \tilde{\mathcal{L}}_{K_1}^N(\beta) \geq \hat{M} \right\}, \text{ and note } \mathbb{P}\left(\tilde{H}_N^\beta\right) < \epsilon/8, \text{ as } \tilde{H}_N^\beta \subseteq H_N^\beta. \tag{5.8}$$

令 A 如引理 4.10 中所述，将 $k = K_1$ 和 ϵ 替换为 $\epsilon/4$。由 (4.12) 可得，若 $\vec{x}$， $\vec{y} \in W_{K_1}^\circ$ 满足 $x_{K_1} > \max(P_1,\ g(a))$， $y_{K_1} > \max(P_2,\ g(b))$，其中某个 P_1， $P_2 \in \mathbb{R}$ 以及连续的 g，则对每个 $t \in [a, b]$

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{a,b,\vec{x},\vec{y},\infty,g}\left(\mathcal{Q}_{K_1}(t) \leq P_1 \cdot \frac{b-t}{b-a} + P_2 \cdot \frac{t-a}{b-a} - A\sqrt{b-a} \right) < \epsilon/4. \tag{5.9}$$

ˆ 取充分大的 $M_1 > 0$，使得 $3M_1/4 \geq 2M + A\sqrt{\gamma - \alpha}$，并注意到对于 $s \in [\alpha, \beta]$

$$M_1 \cdot \frac{\gamma - \beta}{\gamma - s} - \hat{M} \cdot \frac{\beta - s}{\gamma - s} - A\sqrt{\gamma - s} \geq \hat{M}. \tag{5.10}$$

下文将证明在此 M_1 的选择下，(5.4) 成立。

固定一个有限集合 $\mathsf{S} = \{s_1, \ldots, s_m\} \subset [\alpha, \beta]$，满足 $s_1 < s_2 < \cdots < s_m$，并定义这些事件

$$E_N^v = \left\{ \tilde{\mathcal{L}}_{K_1}^N(s_v) > M_1 \text{ and } \tilde{\mathcal{L}}_{K_1}^N(s_i) \leq M_1 \text{ for } i \in [\![1, v-1]\!] \right\}.$$

我们还令 $E_N^{\mathsf{S}} = \bigsqcup_{v=1}^m E_N^v$。进一步，我们通过以下方式定义 $\vec{x}^v, \vec{y} \in W_{K_1}^\circ$

$$x_i^v = \tilde{\mathcal{L}}_i^N(s_v),\ \ y_i = \tilde{\mathcal{L}}_i^N(\gamma) \text{ for } i \in [\![1, K_1]\!],$$

并注意到在 $E_N^v \cap (H_N^\gamma)^c$ 上，我们有

$$x_{K_1}^v > M_1,\ \ y_{K_1} > -\hat{M}.$$

ˆ 将后者与应用于 $a = s_v$, $b = \gamma$, $t = \beta$, $P_1 = M_1$, $P_2 = -M$, $g = \tilde{\mathcal{L}}_{K_1+1}[s_v, \gamma]$ 的 (5.9) 以及 (5.10) 结合起来，我们得出在 $E_N^v \cap (H_N^\gamma)^c$ 上有

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{s_v,\gamma,\vec{x}^v,\vec{y},\infty,\tilde{\mathcal{L}}_{K_1+1}[s_v,\gamma]}\left(\mathcal{Q}_{K_1}(\beta) < \hat{M} \right) < \epsilon/4. \tag{5.11}$$

我们注意到有以下不等式链

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(E_N^v \cap (\tilde{H}_N^\beta)^c \cap (H_N^\gamma)^c \right) = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{E_N^v \cap (H_N^\gamma)^c} \cdot \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{(\tilde{H}_N^\beta)^c} | \mathcal{F}_{\text{ext}}([\![1, K_1]\!] \times (s_v, \gamma)) \right] \right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{E_N^v \cap (H_N^\gamma)^c} \cdot \mathbb{P}_{\text{avoid}}^{s_v,\gamma,\vec{x}^v,\vec{y},\infty,\tilde{\mathcal{L}}_{K_1+1}[s_v,\gamma]}\left(\mathcal{Q}_{K_1}(\beta) < \hat{M} \right) \right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{E_N^v \cap (H_N^\gamma)^c} \cdot \epsilon/4 \right] = \mathbb{P}\left(E_N^v \cap (H_N^\gamma)^c \right) \cdot \epsilon/4. \end{aligned} \tag{5.12}$$

事实上，第一个等式由条件期望的塔式性质以及 $\tilde{H}_N^\beta, E_N^v \in \mathcal{F}_{\text{ext}}([\![1, K_1]\!] \times (s_v, \gamma))$ 这一事实得出，其中后者的 σ-代数如定义 4.4 所述。第二个等式由 $\tilde{\mathcal{L}}^N$ 的布朗吉布斯性质得出。第三行的不等式由 (5.11) 得出。

Sum将 (5.12) 对 $v \in [\![1, m]\!]$ 求和，并利用 E_N^v 两两不相交这一事实，我们得出

$$\mathbb{P}\left(E_N^{\mathsf{S}} \cap (\tilde{H}_N^\beta)^c \cap (H_N^\gamma)^c \right) \leq \mathbb{P}\left(E_N^{\mathsf{S}} \cap (H_N^\gamma)^c \right) \cdot \epsilon/4 \leq \epsilon/4.$$

对 S 取上确界，并利用 $\tilde{\mathcal{L}}^N_{K_1}$ 连续这一事实，我们得出

$$\mathbb{P}\left(\left\{\sup_{s\in[\alpha,\beta]}\tilde{\mathcal{L}}^N_{K_1}(s)>M_1\right\}\cap(\tilde{H}^\beta_N)^c\cap(H^\gamma_N)^c\right)\le\epsilon/4,$$

这与 (5.7) 和 (5.8) 一起蕴含 (5.4)。

步骤 3. 在本步骤中，我们证明 (5.5)。

设 H^r_N 如 (5.7) 中所定义，并注意到我们有

$$\mathbb{P}\left(E^{\text{side}}_N\right)<\epsilon/4,\ \text{where } E^{\text{side}}_N=H^\alpha_N\cup H^\beta_N. \tag{5.13}$$

设 $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{u},\ \vec{v}\in W^\circ_{K_2}$由下式定义

$$x_i=\tilde{\mathcal{L}}^N_i(\alpha),\ \ y_i=\tilde{\mathcal{L}}^N_i(\beta),\ \ u_i=v_i=-\hat{M}-i,\ \text{for } i\in[\![1,K_2]\!].$$

由 (5.6)，我们在 $(E^{\text{side}}_N)^c$ 上有

$$x_i\ge u_i \text{ and } y_i\ge v_i \text{ for } i\in[\![1,K_2]\!]. \tag{5.14}$$

设 A 如引理 4.8 中对 $a=\alpha$、$b=\beta$、$k=K_2(=\mathbf{M}^a_k)$、$M^{\text{side}}=\hat{}M+K_2$、$\epsilon$ 替换为$\epsilon/4$时那样，并引入事件

$$F_N=\left\{\inf_{t\in[\alpha,\beta]}\tilde{\mathcal{L}}^N_{K_2}(t)<-A\right\}.$$

我们注意到，存在以下不等式链

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(F_N\cap(E^{\text{side}}_N)^c\right)=\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{(E^{\text{side}}_N)^c}\cdot\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{F_N}\middle|\mathcal{F}_{\text{ext}}([\![1,K_2]\!]\times(\alpha,\beta))\right]\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{(E^{\text{side}}_N)^c}\cdot\mathbb{P}^{\alpha,\beta,\vec{x},\vec{y},\infty,\tilde{\mathcal{L}}_{K_2+1}[\alpha,\beta]}_{\text{avoid}}\left(\inf_{t\in[\alpha,\beta]}\mathcal{Q}_{K_2}(t)<-A\right)\right]\\
&\le\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{(E^{\text{side}}_N)^c}\cdot\mathbb{P}^{\alpha,\beta,\vec{u},\vec{v}}_{\text{avoid}}\left(\inf_{t\in[\alpha,\beta]}\mathcal{Q}_{K_2}(t)<-A\right)\right]\le\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{(E^{\text{side}}_N)^c}\cdot\epsilon/4\right]\le\epsilon/4.
\end{aligned}\tag{5.15}$$

事实上，第一个等式由条件期望的塔式性质以及 $E^{\text{side}}_N\in\mathcal{F}_{\text{ext}}([\![1,\ K_2]\!]\times(\alpha,\ \beta))$ 得出（此 σ-代数与定义 4.4 中的相同）。第二个等式源自 $\tilde{\mathcal{L}}^N$ 所满足的布朗吉布斯性质。从第二行到第三行时，我们用到了 (5.14) 以及引理 4.5 中的单调耦合。第三行中间的不等式用到了 A 的定义，以及引理 4.8 中与上文相同的参数（注意，该引理中的 $\vec{x},\ \vec{y}$ 由 $\vec{u},\ \vec{v}$ 给出；根据构造，它们满足引理中的条件）。最后一个不等式显然成立。

由 (5.13) 和 (5.15)，我们得出

$$\mathbb{P}(F_N)=\mathbb{P}\left(F_N\cap(E^{\text{side}}_N)^c\right)+\mathbb{P}\left(F_N\cap E^{\text{side}}_N\right)\le\epsilon/4+\mathbb{P}\left(E^{\text{side}}_N\right)<\epsilon/2,$$

由此可知，(5.5) 对 $M_2=A$ 成立。 □

以下结果表明，如果 $J_a<\infty$，则曲线 $\mathcal{L}^{a,b,c}_{J_a+1}$ 在一个大区间上以高概率位于略微抬高的倒置抛物线 $-2^{-1/2}t^2$ 之下。

命题 5.2. 采用定义 *1.1*、*1.12* 和命题 *1.5* 中的相同记号，并假设 $J_a<\infty$。固定 $0<\alpha<\beta$、ϵ、$\delta>0$，以及满足 $T_N\uparrow\infty$ 的序列 $T_N>0$ 。我们可以找到$N_0>0$，它依赖于 α、β、ϵ、δ、参数 $(a$、b、$c)$以及序列 $\{T_N\}_{N\ge1}$，使得对于$N\ge N_0$，有

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[\alpha,\beta]}\left(\mathcal{L}^{a,b,c}_{J_a+1}(tT_N)+2^{-1/2}t^2T_N^2\right)>\delta T_N^2\right)<\epsilon. \tag{5.16}$$

证明。 在整个证明过程中，遇到的所有常数都依赖于 α、 β、 ϵ、 δ、参数 $(a$、 b、 $c)$ 以及序列 $\{T_N\}_{N\geq 1}$；只要 N 足够大（具体取决于同一组参数），所有不等式都成立。下文不再赘述。为清晰起见，我们将证明分为两个步骤。

步骤 1. 令 $\gamma=\beta+1$，并将区间 $[\alpha,\gamma]$ 分成 $n\geq 1$ 个等长区间 $[t_{i-1},t_i]$ $(\rho_n=)\gamma-\alpha$，其中 $/n$。令 $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\gamma($ $f)$ t，并取充分大的 $=-2^{-1/2}t^2$，其取值依赖于 $n\geq 1$，，使得 β，且对每个 $\rho_n<1$，， $n-1]\!]$，都有

$$(f(t)+\delta)\cdot\frac{t_{i+1}-t_i}{t_{i+1}-t}+f(t_{i+1})\cdot\frac{t_i-t}{t_{i+1}-t}\geq f(t_i)+\frac{\delta}{4}. \tag{5.17}$$

我们简要说明为何可以作出这样的选择。令 $\rho=t_i-t\in[0,\rho_n]$，并注意到 (5.17) 等价于

$$-2^{-1/2}(t_i-\rho)^2\cdot\frac{\rho_n}{\rho+\rho_n}+\delta\cdot\frac{\rho_n}{\rho+\rho_n}-2^{-1/2}(t_i+\rho_n)^2\cdot\frac{\rho}{\rho+\rho_n}\geq -2^{-1/2}t_i^2+\frac{\delta}{4},$$

经过整理后，这等价于

$$-2^{-1/2}\rho\rho_n+\delta\cdot\frac{\rho_n}{\rho+\rho_n}\geq\frac{\delta}{4}.$$

显然，只要 n 足够大，使得 $2^{-1/2}\rho_n^2<\delta/4$，当 $\rho\in[0,\rho_n]$ 时，后者就成立 .

我们声称，对每个 $i_0\in[\![1,n-1]\!]$，都可以找到 $W_{i_0}\in\mathbb{N}$，使得对于 N $\geq W_{i_0}$，我们有

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[t_{i_0-1},t_{i_0}]}\left(\mathcal{L}^{a,b,c}_{J_a+1}(tT_N)+2^{-1/2}t^2T_N^2\right)>\delta T_N^2\right)<\frac{\epsilon}{n}. \tag{5.18}$$

由构造可知 $[\alpha,\beta]\subseteq\cup_{i_0=1}^{n-1}[t_{i_0-1},t_{i_0}]$，因此对 (5.18) 使用并集界，可得 (5.16) 在取 $N_0=\max_{1\leq i_0\leq n-1}W_{i_0}$ 时成立。于是，我们将证明归结为确立 (5.18)。

在证明的其余部分，我们固定 $i_0\in[\![1,n-1]\!]$。由命题 1.11(c)，我们可以找到充分大的 $M_1>0$，使得对于 $i\in\{i_0,i_0+1\}$，有

$$\mathbb{P}(F_N^i)<(4n)^{-1}\cdot\epsilon,\text{ where }F_N^i=\left\{\left|\mathcal{L}^{a,b,c}_{J_a+1}(t_iT_N)+2^{-1/2}t_i^2T_N^2\right|>M_1\right\}. \tag{5.19}$$

令 A 如引理 4.10 所述，其中 $k=J_a+1$ 和 ϵ 分别替换为 $(2n)^{-1}\cdot\epsilon$。由 (4.12) 可知，若 $\vec{x},\vec{y}\in W^\circ_{J_a+1}$ 满足 $x_{J_a+1}>\max(P_1,g(a))$， $y_{J_a+1}>\max(P_2,g(b))$，其中某个 $P_1,P_2\in\mathbb{R}$，且 g 连续，则对每个 $t\in[a,b]$

$$\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y},\infty,g}_{\text{avoid}}\left(\mathcal{Q}_{J_a+1}(t)\leq P_1\cdot\frac{b-t}{b-a}+P_2\cdot\frac{t-a}{b-a}-A\sqrt{b-a}\right)<\frac{\epsilon}{2n}. \tag{5.20}$$

我们假设 t 足够大，使得对于 $N\geq W_{i_0}$ 和所有 $s\in[t_{i_0-1},t_{i_0}]$，我们有

$$A\sqrt{T_N(t_{i_0+1}-s)}+M_1\leq(\delta/4)T_N^2. \tag{5.21}$$

接下来，我们证明在此选择的 W_{i_0} 下，式 (5.18) 成立。

步骤 2. 我们在这里给出的论证与命题 5.1 证明中的步骤 2 类似。

Fix $\mathsf{S}=\{s_1、\cdots\cdots、s_m\}\subset[t_{i_0-1},t_{i_0}]$ 其中 $s_1<s_2<\cdots<s_m$，并定 fi义这些事件

$$E_N^v=\left\{\mathcal{L}^{a,b,c}_{J_a+1}(s_vT_N)+2^{-1/2}s_v^2T_N^2>\delta T_N^2\text{ and }\mathcal{L}^{a,b,c}_{J_a+1}(s_iT_N)+2^{-1/2}s_i^2T_N^2\leq\delta T_N^2\text{ for }i\in[\![1,v-1]\!]\right\}.$$

我们还令 $E_N^{\mathsf{S}}=\bigsqcup_{v=1}^m E_N^v$。进一步定义 $\vec{x}^v$， $\vec{y}\in W^\circ_{J_a+1}$ 如下：

$$x_i^v=\mathcal{L}_i^{a,b,c}(s_vT_N),\ \ y_i=\mathcal{L}_i^{a,b,c}(t_{i_0+1}T_N)\text{ for }i\in[\![1,J_a+1]\!],$$

并注意到，在 $E_N^v \cap (F_N^{i_0+1})^c$ 上，我们有

$$x^v_{J_a+1} > -2^{-1/2}s_v^2 T_N^2 + \delta T_N^2,\ \ y_{J_a+1} \geq -2^{-1/2}t_{i_0+1}^2 T_N^2 - M_1. \tag{5.22}$$

如果我们令

$$P_1 = -2^{-1/2}s_v^2 T_N^2 + \delta T_N^2,\ \ P_2 = -2^{-1/2}t_{i_0+1}^2 T_N^2 - M_1,$$

$$a_v = s_v T_N,\ \ b = t_{i_0+1}T_N,\ \ t = t_{i_0}T_N,\ \ g_v(s) = \mathcal{L}^{a,b,c}_{J_a+2}(s) \text{ for } s \in [s_v T_N, t_{i_0+1}T_N],$$

我们得出　　在 $E_N^v \cap (F_N^{i_0+1})^c$ 上，对于 $N \geq W_{i_0}$，我们有以下不等式链

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{a_v,b,\vec{x}^v,\vec{y},\infty,g_v}_{\text{avoid}}\left(\mathcal{Q}_{J_a+1}(t) \leq -2^{-1/2}t_{i_0}^2 T_N^2 + M_1\right)\\
&= \mathbb{P}^{a_v,b,\vec{x}^v,\vec{y},\infty,g_v}_{\text{avoid}}\left(\mathcal{Q}_{J_a+1}(t) \leq f(t_{i_0})T_N^2 + M_1\right)\\
&\leq \mathbb{P}^{a_v,b,\vec{x}^v,\vec{y},\infty,g_v}_{\text{avoid}}\left(\mathcal{Q}_{J_a+1}(t) \leq \left[(f(s_v)+\delta)\frac{t_{i_0+1}-t_{i_0}}{t_{i_0+1}-s_v} + f(t_{i_0+1})\frac{t_{i_0}-s_v}{t_{i_0+1}-s_v} - \frac{\delta}{4}\right]T_N^2 + M_1\right)\\
&= \mathbb{P}^{a_v,b,\vec{x}^v,\vec{y},\infty,g_v}_{\text{avoid}}\left(\mathcal{Q}_{J_a+1}(t) \leq P_1\frac{t_{i_0+1}-t_{i_0}}{t_{i_0+1}-s_v} + P_2\frac{t_{i_0}-s_v}{t_{i_0+1}-s_v} - \frac{\delta T_N^2}{4} + M_1\right)\\
&\leq \mathbb{P}^{a_v,b,\vec{x}^v,\vec{y},\infty,g_v}_{\text{avoid}}\left(\mathcal{Q}_{J_a+1}(t) \leq P_1\frac{t_{i_0+1}-t_{i_0}}{t_{i_0+1}-s_v} + P_2\frac{t_{i_0}-s_v}{t_{i_0+1}-s_v} - A\sqrt{T_N(t_{i_0+1}-s_v)}\right) < \frac{\epsilon}{2n}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

从第一行到第二行，我们利用了 $f(t) = -2^{-1/2}t^2$；从第二行到第三行，我们利用了 (5.17)。从第三行到第四行，我们利用了 P_1, P_2 的定义；从第四行到第五行，我们利用了 $N \geq W_{i_0}$ 以及 (5.21)。在最后一个不等式中，我们利用了 (5.20) 和 (5.22)。

使用与上文相同的记号，对于 $N \geq W_{i_0}$，我们有以下不等式链

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(E_N^v \cap (F_N^{i_0})^c \cap (F_N^{i_0+1})^c\right) = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{E_N^v \cap (F_N^{i_0+1})^c} \cdot \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{(F_N^{i_0})^c}\middle|\mathcal{F}_{\text{ext}}([\![1, J_a+1]\!] \times (a_v, b))\right]\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{E_N^v \cap (F_N^{i_0+1})^c} \cdot \mathbb{P}^{a_v,b,\vec{x}^v,\vec{y},\infty,g_v}_{\text{avoid}}\left(\left|\mathcal{Q}_{J_a+1}(t_{i_0}T_N) + 2^{-1/2}t_{i_0}^2 T_N^2\right| \leq M_1\right)\right]\\
&\leq \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{E_N^v \cap (F_N^{i_0+1})^c} \cdot \frac{\epsilon}{2n}\right] \leq \frac{\epsilon}{2n} \cdot \mathbb{P}\left(E_N^v \cap (F_N^{i_0+1})^c\right).
\end{aligned} \tag{5.24}$$

第一个等号由条件期望的塔式性质以及如下事实推出：E_N^v, $F_N^{i_0+1} \in \mathcal{F}_{\text{ext}}([\![1,\ J_a+1]\!] \times (a_v,\ b))$（这个 σ-代数与定义 4.4 中的相同）。第二个等号由 $\mathcal{L}^{a,\ b,\ c}$ 的布朗吉布斯性质推出，见命题 1.5。从第二行到第三行，我们利用了 (5.23)。

Sum对 $v \in [\![1, m]\!]$ 取 (5.24) 的 ming，并利用 E_N^v 两两不相交这一事实，我们得出

$$\mathbb{P}\left(E_N^{\mathsf{S}} \cap (F_N^{i_0})^c \cap (F_N^{i_0+1})^c\right) \leq \mathbb{P}\left(E_N^{\mathsf{S}} \cap (F_N^{i_0+1})^c\right) \cdot \frac{\epsilon}{2n} \leq \frac{\epsilon}{2n}.$$

对 S 取上确界，并利用 $\mathcal{L}^{a}{}_{,b,J_a+1}{}^{c}$ 是连续的这一事实，我们得出

$$\mathbb{P}\left(\left\{\sup_{t\in[t_{i_0-1},t_{i_0}]}\left(\mathcal{L}^{a,b,c}_{J_a+1}(tT_N) + 2^{-1/2}t^2T_N^2\right) > \delta T_N^2\right\} \cap (F_N^{i_0})^c \cap (F_N^{i_0+1})^c\right) \leq \frac{\epsilon}{2n},$$

结合 (5.19) 即可推出 (5.18)。 □

5.2. **定理 1.14 的证明**。 我们继续沿用定理陈述中的记号。为清晰起见，我们将证明分为三个步骤。步骤 1 中，我们将定理的证明归结为：证明对于每个 $i \in [\![1,\mathsf{m}_k^a]\!]$，$\mathcal{L}_i^N$ 的连续模以高概率表现良好，见 (5.25)。步骤 2 中，我们总结第 4 节和第 5.1 节中若干结果的重要推论。特别地，我们证明，若 $\tilde{\mathcal{L}}^N = \{\tilde{\mathcal{L}}_i^N\}_{i\geq 1}$ 如 (5.1) 所示，则在任意紧区间上，$\tilde{\mathcal{L}}^N_{\mathsf{M}^a_{k-1}}$ 都非常高，而 $\tilde{\mathcal{L}}^N_{\mathsf{M}^a_k+1}$ 都非常低，且这一结论以高概率成立，见 (5.32)。由此可知，曲线 $\{\tilde{\mathcal{L}}_i^N\colon\ i \in [\![\mathsf{M}^a_{k-1}+1,\mathsf{M}^a_k]\!]\}$ 与系综 $\tilde{\mathcal{L}}^N$ 中其他曲线相距甚远，其行为类似于有限布朗 ensemble。根据引理 4.11，此类系综的连续模表现良好，因此我们可以推断 $\{\tilde{\mathcal{L}}_i^N\colon\ i \in [\![\mathsf{M}^a_{k-1}+1,\mathsf{M}^a_k]\!]\}$ 也具有同样性质，并由 (5.2) 推得 $\{\mathcal{L}_i^N\colon\ i \in [\![1,\mathsf{m}^a_k]\!]\}$ 亦然。我们在步骤 3 中详细说明上一句所概述论证的依据，并最终证明 (5.25)。

步骤 1. 我们注意到，定理的 (b) 部分由 (a) 部分和命题 1.8(b) 推出。因此，我们只需证明 (a) 部分。下文中，我们固定 $k \in \mathbb{N}$ 和 $(a,b,c) \in \mathcal{P}_{\mathsf{pos}}$，使得 $|\mathbb{V}_a| \geq k$，并着手证明 (1.14)。

我们声称，对于每个 $\epsilon,\eta>0$ 和 $\beta>\alpha>0$，都可以找到 $N_0 \in \mathbb{N}$ 和 $\delta>0$，它们取决于$\epsilon,\eta,\beta,\alpha$、参数 (a,b,c) 以及序列 $\{T_N\}_{N\geq 1}$，使得对于 $N \geq N_0$ 和 $i \in [\![1,\mathsf{m}_k^a]\!]$

$$\mathbb{P}\left(w(\mathcal{L}_i^N[\alpha,\beta],\delta) \geq \eta\right) < \epsilon, \tag{5.25}$$

这里我们回顾一下，连续模 $w(\mathcal{L}_i^N[\alpha,\beta],\delta)$ 与 (4.19) 中的定义相同，其中 $a=\alpha$ 和 $b=\beta$。我们将在以下步骤中证明 (5.25)。此处，我们假设其成立，并完成 (a) 部分的证明。

由命题 3.3，我们知道

$$\left(\mathcal{L}_i^N(t) : t>0,\, i=1,\dots,\mathsf{m}_k^a\right) \overset{f.d.}{\to} \left(\lambda_i^{\mathsf{m}_k^a}(t) : t>0,\, i=1,\dots,\mathsf{m}_k^a\right). \tag{5.26}$$

方程 (5.26) 特别表明，对于每个 $i \in [\![1,\mathsf{m}_k^a]\!]$，序列 $\{\mathcal{L}_i^N(1)\}_{N\geq 1}$ 是紧的；结合 (5.25)，这表明 [16, 引理 2.4] 的紧性判据得到满足$\mathcal{L}^N = \{\mathcal{L}_i^N\}_{i=1}^{\mathsf{m}_k^a}$。

由 [16, 引理 2.4], ，我们得出 $\{\mathcal{L}^N\}_{N\geq 1}$ 是取值于 $C([\![1,\mathsf{m}_k^a]\!]\times(0,\infty))$ 中的随机元素紧序列。此外，(5.26) 表明，任何子序列极限都与 $\{\lambda_i^{\mathsf{m}_k^a}\}_{i=1}^{\mathsf{m}_k^a}$ 具有相同的有限维分布。由于有限维集合构成一个分离类，参见 [17,引理 3.1], ，我们得出 $\mathcal{L}^N \Rightarrow \{\lambda_i^{\mathsf{m}_k^a}\}_{i=1}^{\mathsf{m}_k^a}$，这正是 (1.14)。

步骤 2。 在这一步中，我们指定 N_0 和 δ 的取值，并将证明 (5.25)。由 (5.26) 可知，我们可以找到一个依赖于 ϵ 的 $M_1>0$，使得对所有 $N \geq 1$，

$$\mathbb{P}\left(E_N^{\text{side}}\right) < \epsilon/4, \text{ where } E_N^{\text{side}} = \{|\mathcal{L}_i^N(\gamma)| > M_1 \text{ for some } (i,\gamma) \in [\![1,\mathsf{m}_k^a]\!]\times\{\alpha,\beta\}\}. \tag{5.27}$$

由引理 4.8，取 $a=\alpha$、$b=\beta$、$k=\mathsf{m}_k^a$、$M^{\mathsf{side}}=M_1$ 和 $\epsilon=1/2$，我们可以找到 $A>0$，使得对于 $\vec{x}$，$\vec{y} \in W^{\circ}{}_{\mathsf{m}_k^a}$，其中 $|x_i|$，$|y_i| \leq M^{\mathsf{side}}$，对于 $i \in [\![1,\ \mathsf{m}_k^a]\!]$，有

$$\mathbb{P}^{\alpha,\beta,\vec{x},\vec{y}}_{\text{avoid}}\left(|\mathcal{Q}_i(t)| \geq A \text{ for some } (i,t) \in [\![1,\mathsf{m}_k^a]\!]\times[\alpha,\beta]\right) < 1/2. \tag{5.28}$$

由引理 4.11，取 $a=\alpha$、$b=\beta$、$k=\mathsf{m}_k^a$、$M^{\mathsf{side}}=M_1$、η（如上所述），并将 ϵ 替换为 $\epsilon/4$，我们可以找到 $\delta>0$，使得对于 $\vec{x}$，$\vec{y} \in W^{\circ}{}_{\mathsf{m}_k^a}$，其中 $|x_i|$，$|y_i| \leq M^{\mathsf{side}}$，对于 $i \in [\![1,\ \mathsf{m}_k^a]\!]$，有

$$\mathbb{P}^{\alpha,\beta,\vec{x},\vec{y}}_{\text{avoid}}\left(\max_{i\in[\![1,\mathsf{m}_k^a]\!]} w(\mathcal{Q}_i[\alpha,\beta],\delta) \geq \eta\right) < \epsilon/4. \tag{5.29}$$

这明确了我们对 δ 的选择。

接下来令 $\tilde{\mathcal{L}}^N = \{\tilde{\mathcal{L}}^N_i\}_{i\geq 1}$ 如 (5.1) 所示，并采用约定 $\tilde{\mathcal{L}}^N_0 = \infty$。如下文所述，根据第 5.1 节中的结果，我们有

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\inf_{t\in[\alpha,\beta]} \tilde{\mathcal{L}}^N_{\mathsf{M}^a_{k-1}}(t) > A \right) = 1. \tag{5.30}$$

and

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[\alpha,\beta]} \tilde{\mathcal{L}}^N_{\mathsf{M}^a_{k}+1}(t) < -A \right) = 1. \tag{5.31}$$

事实上，若 $k = 1$，因而 $\mathsf{M}^a_{k-1} = 0$，则有 $\tilde{\mathcal{L}}^N_0 = \infty$，且 (5.30) 自动成立。若 $k \geq 2$，则由命题 5.1 应用于 $k-1$，可知序列

$$\sup_{t\in[\alpha,\beta]} \left| \tilde{\mathcal{L}}^N_{\mathsf{M}^a_{k-1}}(t) + t(2T_N)^{1/2} \cdot (1/v^a_{k-1} - 1/v^a_k) \right|$$

是紧的。由于 $v^a_{k-1} > v^a_k$，且 $T_N \uparrow \infty$，后者蕴含 (5.30)。

为说明 (5.31) 成立的原因，我们再次分两种情况讨论。若 $|\mathbb{V}_a| > k$，则由命题 5.1 应用于 $k+1$，可知序列

$$\sup_{t\in[\alpha,\beta]} \left| \tilde{\mathcal{L}}^N_{\mathsf{M}^a_{k}+1}(t) + t(2T_N)^{1/2} \cdot (1/v^a_{k+1} - 1/v^a_k) \right|,$$

是紧的。由于 $v^a_{k+1} < v^a_k$，且 $T_N \uparrow \infty$，后者蕴含 (5.31)。若 $|\mathbb{V}_a| = k$，则 $\mathsf{M}^a_k = J_a$，并由命题 5.2 可知，对任意 $\delta_0 > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[\alpha,\beta]} \left(\mathcal{L}^{a,b,c}_{J_a+1}(tT_N) + 2^{-1/2}t^2T_N^2 \right) > \delta_0 T_N^2 \right) = 0.$$

将后者与 (5.1) 结合，对任意 $\delta_0 > 0$，我们得到

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[\alpha,\beta]} \left(\tilde{\mathcal{L}}^N_{\mathsf{M}^a_{k}+1}(t) - 2^{1/2}tT_N^{1/2}/v^a_k + 2^{-1/2}t^2T_N^{3/2} \right) > \delta_0 T_N^{3/2} \right) = 0.$$

取 $\delta_0 < 2^{-1/2}\alpha^2$，可见最后一个方程蕴含 (5.31)。

通过组合 (5.30) 和 (5.31)，我们可以找到 $N_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $N \geq N_0$，

$$\mathbb{P}\left(F^{\mathrm{tb}}_N\right) < \epsilon/4, \text{ where } F^{\mathrm{tb}}_N = \left\{ \inf_{t\in[\alpha,\beta]} \tilde{\mathcal{L}}^N_{\mathsf{M}^a_{k-1}}(t) \leq A \right\} \cup \left\{ \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \tilde{\mathcal{L}}^N_{\mathsf{M}^a_{k}+1}(t) \geq -A \right\}. \tag{5.32}$$

这就确定了我们对 N_0 的选择。

步骤 3。在最后这一步中，我们证明对于 N_0，δ，结论 (5.25) 成立，方法与步骤 2 相同。

We d义 $\vec{x}^N$，$\vec{y}^N \in W^\circ_{\mathsf{m}^a_k}$，$f^N\colon [\alpha,\beta] \to (-\infty, \infty]$ 以及 $g^N\colon [\alpha,\beta] \to [-\infty,\infty)$，定义如下

$$x^N_i = \tilde{\mathcal{L}}^N_{\mathsf{M}^a_{k-1}+i}(\alpha),\ y^N_i = \tilde{\mathcal{L}}^N_{\mathsf{M}^a_{k-1}+i}(\beta), \text{ for } i \in [\![1, \mathsf{m}^a_k]\!],\ f^N = \tilde{\mathcal{L}}^N_{\mathsf{M}^a_{k-1}}[\alpha,\beta],\ g^N = \tilde{\mathcal{L}}^N_{\mathsf{M}^a_{k}+1}[\alpha,\beta],$$

并注意到在 $(E^{\mathrm{side}}_N)^c \cap (F^{\mathrm{tb}}_N)^c$ 上，我们有

$$\left|x^N_i\right|, \left|y^N_i\right| \leq M_1, \text{ for } i \in [\![1, \mathsf{m}^a_k]\!],\ f^N(t) > A,\ g^N(t) < -A, \text{ for } t \in [\alpha,\beta]. \tag{5.33}$$

我们还定义了对于任意 $f\colon [\alpha,\beta] \to (-\infty,\infty]$ 以及 $g\colon [\alpha,\beta] \to [-\infty,\infty)$，函数 $G_{f,g}\colon C([\![1,\mathsf{m}^a_k]\!] \times [\alpha,\beta]) \to [0,1]$ 如下

$$G_{f,g}\left(\{h_i\}_{i=1}^{\mathsf{m}^a_k}\right) = \mathbf{1}\left\{ f(t) > h_1(t) \text{ and } h_{\mathsf{m}^a_k}(t) > g(t) \text{ for all } t \in [\alpha,\beta] \right\}.$$

我们观察到 th在处，我们有关于 $(E_N^{\mathrm{side}})^c \cap (F_N^{\mathrm{tb}})^c$ 的以下不等式链，适用于 $N \geq N_0$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{\mathrm{avoid}}^{\alpha,\beta,\vec{x}^N,\vec{y}^N,f^N,g^N}\left(\max_{i\in[\![1,\mathsf{m}_k^a]\!]} w(\mathcal{Q}_i[\alpha,\beta],\delta)\geq\eta\right)\\
&=\frac{\mathbb{E}_{\mathrm{avoid}}^{\alpha,\beta,\vec{x}^N,\vec{y}^N}\left[\mathbf{1}\left\{\max_{i\in[\![1,\mathsf{m}_k^a]\!]} w(\mathcal{Q}_i[\alpha,\beta],\delta)\geq\eta\right\}\cdot G_{f^N,g^N}(\mathcal{Q})\right]}{\mathbb{E}_{\mathrm{avoid}}^{\alpha,\beta,\vec{x}^N,\vec{y}^N}\left[G_{f^N,g^N}(\mathcal{Q})\right]}\\
&\leq 2\mathbb{E}_{\mathrm{avoid}}^{\alpha,\beta,\vec{x}^N,\vec{y}^N}\left[\mathbf{1}\left\{\max_{i\in[\![1,\mathsf{m}_k^a]\!]} w(\mathcal{Q}_i[\alpha,\beta],\delta)\geq\eta\right\}\cdot G_{f^N,g^N}(\mathcal{Q})\right]<\epsilon/2.
\end{aligned}\tag{5.34}$$

事实上，从第一行到第二行时，我们用到了定义 4.3；从第二行到第三行时，我们用到了

$$\mathbb{E}_{\mathrm{avoid}}^{\alpha,\beta,\vec{x}^N,\vec{y}^N}\left[G_{f^N,g^N}(\mathcal{Q})\right]\geq\mathbb{E}_{\mathrm{avoid}}^{\alpha,\beta,\vec{x}^N,\vec{y}^N}\left[G_{A,-A}(\mathcal{Q})\right]>1/2,$$

其中，第一个不等式由 (5.33) 得出，第二个不等式则由 (5.28) 得出。(5.34) 中的最后一个不等式由 (5.29) 以及 $G_{f^N,\ g^N}(\mathcal{Q})\ \in[0,1]$ 这一事实得出。

沿用上文的记号，并且 $E_N=E_N^{\mathrm{side}}\cup F_N^{\mathrm{tb}}$，我们对 $N\geq N_0$ 有以下不等式链

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(E_N^c\cap\left\{\max_{i\in[\![1,\mathsf{m}_k^a]\!]} w(\tilde{\mathcal{L}}^N_{i+\mathsf{M}^a_{k-1}}[\alpha,\beta],\delta)\geq\eta\right\}\right)\\
&=\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{E_N^c}\cdot\mathbb{E}\left[\left\{\max_{i\in[\![1,\mathsf{m}_k^a]\!]} w(\tilde{\mathcal{L}}^N_{i+\mathsf{M}^a_{k-1}}[\alpha,\beta],\delta)\geq\eta\right\}\middle|\mathcal{F}_{\mathrm{ext}}([\![\mathsf{M}^a_{k-1}+1,\mathsf{M}^a_k]\!]\times(\alpha,\beta))\right]\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{E_N^c}\cdot\mathbb{P}_{\mathrm{avoid}}^{\alpha,\beta,\vec{x}^N,\vec{y}^N,f^N,g^N}\left(\max_{i\in[\![1,\mathsf{m}_k^a]\!]} w(\mathcal{Q}_i[\alpha,\beta],\delta)\geq\eta\right)\right]\leq\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{E_N^c}\cdot(\epsilon/2)\right]\leq\epsilon/2.
\end{aligned}\tag{5.35}$$

事实上，第一个等号由条件期望的塔式性质以及 $E_N\in\mathcal{F}_{\mathrm{ext}}([\![\mathsf{M}^a_{k-1}+1,\ \mathsf{M}^a_k]\!]\times(\alpha,\ \beta))$ 这一事实得出（该 σ-代数与定义 4.4 中的一致）。第二个等号由 $\tilde{\mathcal{L}}^N$ 的布朗吉布斯性质得出，第三行中的第一个不等式则由 (5.34) 得出。

结合 (5.27)、(5.32) 和 (5.35)，我们得出，对于 $N\geq N_0$

$$\mathbb{P}\left(\max_{i\in[\![1,\mathsf{m}_k^a]\!]} w(\tilde{\mathcal{L}}^N_{i+\mathsf{M}^a_{k-1}}[\alpha,\beta],\delta)\geq\eta\right)\leq\epsilon/2+\mathbb{P}(E_N^{\mathrm{side}})+\mathbb{P}(F_N^{\mathrm{tb}})<\epsilon.$$

最后一个不等 式以及 $\mathcal{L}_i^N(t)\ =\tilde{\mathcal{L}}^N_{\mathsf{M}^a_{k-1}+i}(t)$ 对于 $(i,\ t)\ \in[\![1,\ \mathsf{m}_k^a]\!]\times(0,\ \infty)$，参见 (5.2)，蕴含 (5.25)。

6. 收敛到 Airy 线系综

本节的目标是证明定理 1.16。我们将在第 6.2 节中证明该定理，此前先在第 6.1 节建立一个技术性命题。本节中我们继续采用第 1 节和第 4 节中的相同记号。

6.1. No big max. 本节中，我们建立一个证明定理 1.16 所需的技术性结果。假设采用定理 1.16(a) 中的相同记号，并定义辅助线系综 $\hat{\mathcal{L}}^N=\{\hat{\mathcal{L}}_i^N\}_{i\geq1}$ 如下

$$\hat{\mathcal{L}}_i^N(t)=2^{-1/2}\left(\mathcal{A}_i^{a,b,c}(t+T_N)-t^2\right)\ \text{for}\ (i,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}.\tag{6.1}$$

根据命题 1.5，我们知道 $\mathcal{L}^{a,\ b,\ c}$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足布朗吉布斯性质，由引理 4.7 可得，$\hat{\mathcal{L}}^N$ 也满足该性质。此外，由 (1.17) 可知

$$\mathcal{A}_i^N(t)=2^{1/2}\cdot\hat{\mathcal{L}}^N_{J_a+i}(t)+t^2\ \text{for}\ (i,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}.\tag{6.2}$$

以下结果表明，在任意固定区间上，曲线 $\hat{\mathcal{L}}^N_{J_a+k}$ 很可能不会太高。

命题 6.1。设采用定理 *1.16(a)* 中的相同记号，并令 $\hat{\mathcal{L}}^N = \{\hat{\mathcal{L}}^N_i\}_{i\geq 1}$ 如 *(6.1)* 中所述。固定 β、$\epsilon > 0$ 和 $k \in \mathbb{N}$。我们可以找到 $M > 0$，它取决于 β、ϵ、参数 $(a$、b、$c)$以及序列 $\{T_N\}_{N\geq 1}$，使得对所有 $N \in \mathbb{N}$，都有

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[-\beta,\beta]} \hat{\mathcal{L}}^N_{J_a+k}(t) > M\right) < \epsilon. \tag{6.3}$$

证明。在整个证明过程中，我们遇到的所有常数都取决于 β, ϵ、参数 (a, b, c) 以及序列 $\{T_N\}_{N\geq 1}$。为清晰起见，我们将证明分为两个步骤。

步骤 1。由于 $\hat{\mathcal{L}}^N$ 满足布朗吉布斯性质，对所有 $t \in \mathbb{R}$，都有

$$\hat{\mathcal{L}}^N_1(t) > \hat{\mathcal{L}}^N_2(t) > \cdots.$$

因此，只需找到 $M > 0$，使得

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[-\beta,\beta]} \hat{\mathcal{L}}^N_{J_a+1}(t) > M\right) < \epsilon. \tag{6.4}$$

令 $\gamma_1 = 2\beta$、$\gamma_2 = 4\beta$ 和 $K = J_a + 1$。根据命题 3.4 和 (6.2)，我们可以找到充分大的 $M_1 > 0$，使得对所有 $N \in \mathbb{N}$ 和 $r \in \{\gamma_1, \gamma_2\}$

$$\mathbb{P}(H^r_N) < \epsilon/4, \text{ where } H^r_N = \left\{|\hat{\mathcal{L}}^N_K(r)| \geq M_1\right\}. \tag{6.5}$$

我们还定义

$$\tilde{H}^{\gamma_1}_N = \left\{\hat{\mathcal{L}}^N_K(\gamma_1) \geq M_1\right\}, \text{ and note } \mathbb{P}\left(\tilde{H}^{\gamma_1}_N\right) < \epsilon/4, \text{ as } \tilde{H}^{\gamma_1}_N \subseteq H^{\gamma_1}_N. \tag{6.6}$$

令 A 如引理 4.10 中所述，其中将 $k = J_a + 1$ 和 ϵ 替换为 $\epsilon/4$。由 (4.12) 可知，若 $\vec{x}$，$\vec{y} \in W^\circ_{J_a+1}$ 满足 $x_{J_a+1} > \max(P_1,\ g(a))$、$y_{J_a+1} > \max(P_2,\ g(b))$，其中某个 P_1，$P_2 \in \mathbb{R}$ 以及连续的 g，则对每个 $t \in [a, b]$

$$\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y},\infty,g}_{\text{avoid}}\left(\mathcal{Q}_{J_a+1}(t) \leq P_1 \cdot \frac{b-t}{b-a} + P_2 \cdot \frac{t-a}{b-a} - A\sqrt{b-a}\right) < \frac{\epsilon}{4}. \tag{6.7}$$

我们假设 M 足够大，使得 $2M/5 - A\sqrt{5\beta} \geq 2M_1$。特别地，注意到若 $s \in [-\beta, \beta]$，则有

$$M \cdot \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 - s} - M_1 \cdot \frac{\gamma_1 - s}{\gamma_2 - s} - A\sqrt{\gamma_2 - s} \geq M_1. \tag{6.8}$$

接下来证明在此选择的 M 下，(6.4) 成立。

步骤 2。这里给出的论证与命题 5.1 证明中的步骤 2 类似。固定一个有限集合 $\mathsf{S} = \{s_1, \ldots, s_m\} \subset [-\beta, \beta]$，使得 $s_1 < s_2 < \cdots < s_m$，并定义这些事件

$$E^v_N = \left\{\hat{\mathcal{L}}^N_{J_a+1}(s_v) > M \text{ and } \hat{\mathcal{L}}^N_{J_a+1}(s_i) \leq M \text{ for } i \in [\![1, v-1]\!]\right\}.$$

我们还设定 $E^{\mathsf{S}}_N = \bigsqcup_{v=1}^m E^v_N$。进一步定义 $\vec{x}^v$，$\vec{y} \in W^\circ_{J_a+1}$ 如下

$$x^v_i = \hat{\mathcal{L}}^N_i(s_v),\ \ y_i = \hat{\mathcal{L}}^N_i(\gamma_2) \text{ for } i \in [\![1, J_a + 1]\!],$$

并且注意到在 $(H^{\gamma_2}_N)^c \cap E^v_N$ 上，我们有

$$x^v_{J_a+1} > M,\ \ y_{J_a+1} > -M_1. \tag{6.9}$$

注意到在 $(H_N^{\gamma_2})^c \cap E_N^v$ 上，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{s_v,\gamma_2,\vec{x}^v,\vec{y},\infty,g_v}\left(\mathcal{Q}_{J_a+1}(\gamma_1) \le M_1\right)\\&\le \mathbb{P}_{\text{avoid}}^{s_v,\gamma_2,\vec{x}^v,\vec{y},\infty,g_v}\left(\mathcal{Q}_{J_a+1}(\gamma_1) \le M\cdot\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2-s_v} - M_1\cdot\frac{\gamma_1-s_v}{\gamma_2-s_v} - A\sqrt{\gamma_2-s_v}\right) < \frac{\epsilon}{4}.\end{aligned} \tag{6.10}$$

第一个不等式由 (6.8) 得出，第二个则由 (6.9) 和 (6.7) 得出，其中

$$P_1 = M,\ \ P_2 = -M_1,\ \ a = s_v,\ \ b = \gamma_2,\ \ t = \gamma_1,\ \ g_v(s) = \hat{\mathcal{L}}_{J_a+2}^N(s) \text{ for } s \in [s_v,\gamma_2].$$

沿用上文的记号，我们有以下不等式链

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(E_N^v \cap (\tilde{H}_N^{\gamma_1})^c \cap (H_N^{\gamma_2})^c\right) = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{E_N^v\cap(H_N^{\gamma_2})^c}\cdot\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{(\tilde{H}_N^{\gamma_1})^c}\middle|\mathcal{F}_{\text{ext}}(\llbracket 1, J_a+1\rrbracket\times(s_v,\gamma_2))\right]\right]\\&= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{E_N^v\cap(H_N^{\gamma_2})^c}\cdot\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{s_v,\gamma_2,\vec{x}^v,\vec{y},\infty,g_v}\left(|\mathcal{Q}_{J_a+1}(\gamma_1)| \le M_1\right)\right]\\&\le \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{E_N^v\cap(H_N^{\gamma_2})^c}\cdot\frac{\epsilon}{4}\right] = \frac{\epsilon}{4}\cdot\mathbb{P}\left(E_N^v\cap(H_N^{\gamma_2})^c\right).\end{aligned} \tag{6.11}$$

事实上，第一个等式由条件期望的塔式性质以及 $E_N^v,\ H_N^{\gamma_2} \in \mathcal{F}_{\text{ext}}(\llbracket 1,\ J_a+1\rrbracket\times(s_v,\ \gamma_2))$ 这一事实得出（此 σ-代数与定义 4.4 中的相同）。第二个等式由 $\hat{}\mathcal{L}^N$ 的布朗吉布斯性质得出。从第二行到第三行时，我们使用了 (6.10)。

对 $v \in \llbracket 1,\ m\rrbracket$ 求和，并利用 E_N^v 两两不交，可得

$$\mathbb{P}\left(E_N^{\mathsf{S}} \cap (\tilde{H}_N^{\gamma_1})^c \cap (H_N^{\gamma_2})^c\right) \le \mathbb{P}\left(E_N^{\mathsf{S}} \cap (H_N^{\gamma_2})^c\right)\cdot\frac{\epsilon}{4} \le \frac{\epsilon}{4}.$$

对 S 取上确界，并利用 $\hat{}\mathcal{L}_{J_a+1}^N$ 连续这一事实，可得

$$\mathbb{P}\left(\left\{\sup_{t\in[-\beta,\beta]}\hat{\mathcal{L}}_{J_a+1}^N(t) > M\right\}\cap(\tilde{H}_N^{\gamma_1})^c\cap(H_N^{\gamma_2})^c\right) \le \frac{\epsilon}{4},$$

结合 (6.5) 和 (6.6)，即可推出 (6.4)。 □

6.2. **定理 1.16 的证明**。 我们沿用定理陈述中的记号。为清晰起见，我们将证明分为三个步骤。在步骤 1 中，我们将定理的证明归结为证明：对于每个 $k \in \mathbb{N}$，$\hat{}\mathcal{L}_{J_a+k}^N$ 的连续模（其中 $\hat{}\mathcal{L}^N = \{\hat{}\mathcal{L}_i^N\}_{i\ge1}$ 如 (6.1) 所示）以高概率表现良好，见 (6.12)。在步骤 2 中，我们总结第 4、5.1 和 6.1 节结果的若干关键推论。具体而言，我们证明在任意紧区间上，$\hat{}\mathcal{L}_{J_a}^N$ 都非常高，见 (6.20)；而 $\hat{}\mathcal{L}_{J_a+k+1}^N$ 以高概率不会太高，见 (6.15)。后者意味着，曲线 $\{\hat{}\mathcal{L}_{J_a+i}^N:\ i \in \llbracket 1,\ k\rrbracket\}$ 与 $\hat{}\mathcal{L}_{J_a}^N$ 相距过远，并且表现得像一个具有良好底边界 $g = \hat{}\mathcal{L}_{J_a+k+1}^N$的有限布朗 ensemble。根据引理 4.13，这类系综的连续模表现良好，因此我们可以推断 $\{\hat{}\mathcal{L}_{J_a+i}^N:\ i \in \llbracket 1,\ k\rrbracket\}$ 也具有同样性质，进而 $\hat{}\mathcal{L}_{J_a+k}^N$ 亦然。我们在步骤 3 中给出上一句所述论证的细节，并最终证明 (6.12)。

步骤 1. 我们注意到，该定理的 (b) 部分可由 (a) 部分与命题 1.8(b) 推出。因此，我们只需证明 (a) 部分。下文中我们固定 $(a,b,c) \in \mathcal{P}_{\mathsf{pos}}$，使得$J_a < \infty$，并着手证明 (1.18)。

我们声称，对于每个 $k \in \mathbb{N}$和 $\epsilon,\ \eta,\ \alpha > 0$，都可以找到 $N_0 \in \mathbb{N}$和 $\delta > 0$，它们取决于$k,\ \epsilon,\ \eta,\ \alpha$、参数（$a,\ b,\ c$）以及序列 $\{T_N\}_{N\ge1}$，使得对于 $N \ge N_0$

$$\mathbb{P}\left(w(\hat{\mathcal{L}}_{J_a+k}^N[-\alpha,\alpha],\delta) \ge \eta\right) < \epsilon, \tag{6.12}$$

其中，连续模 $w(\hat{\mathcal{L}}^N_{J_a+k}[-\alpha,\alpha],\ \delta)$ 与（4.19）中的相同，且 $a=-\alpha$ 和 $b=\alpha$。我们按以下步骤证明（6.12）。这里，我们假设其成立，并完成（a）部分的证明。

由 (6.2) 和 (6.12)，我们得出，对任意 $\alpha,\ \eta>0$ 和 $k\in\mathbb{N}$，

$$\lim_{\delta\to 0+}\limsup_{N\to\infty}\mathbb{P}\left(w(\mathcal{A}^N_k[-\alpha,\alpha],\delta)\geq\eta\right)=0. \tag{6.13}$$

由命题 3.4，我们知道

$$\left(\mathcal{A}^N_i(t):t\in\mathbb{R},\,i\in\mathbb{N}\right)\overset{f.d.}{\to}\left(\mathcal{A}^{0,0,0}_i(t):t\in\mathbb{R},\,i\in\mathbb{N}\right). \tag{6.14}$$

方程 (6.14) 特别表明，对于每个 $k\in\mathbb{N}$，序列 $\{\mathcal{A}^N_k(0)\}_{N\geq 1}$ 都是紧的；结合 (6.13)，可知 [16, 引理 2.4] 的紧性判据适用于 $\mathcal{A}^N$。

由 [16, 引理 2.4], ，我们得出 $\{\mathcal{A}^N\}_{N\geq 1}$ 是$C(\mathbb{N}\times\mathbb{R})$ 中随机元素的紧序列。此外，(6.14) 表明，任何子序列极限都与 $\mathcal{A}^{0,\ 0,\ 0}$ 具有相同的有限维分布。由于有限维集合构成一个分离类，参见 [17,引理 3.1], ，我们得出 $\mathcal{A}^N\Rightarrow\mathcal{A}^{0,\ 0,\ 0}$，这正是 (1.18)。

步骤 2. 在这一步中，我们明确指定 N_0 和 δ的取值，并将证明 (6.12)。下文中，我们固定 $\beta=\alpha+1$，并采用约定 $\hat{\mathcal{L}}^N_0=\infty$。

由命题 6.1，将 k 替换为 $k+1$，并将 ϵ 替换为 $\epsilon/4$，我们可以找到 $M>0$，使得

$$\mathbb{P}\left(F^{\mathrm{bot}}_N\right)<\epsilon/4,\ \text{where } F^{\mathrm{bot}}_N=\left\{\sup_{t\in[-\beta,\beta]}\hat{\mathcal{L}}^N_{J_a+k+1}(t)>M\right\}. \tag{6.15}$$

由 (6.2) 和 (6.14)，我们可以找到 $M_1>0$，使得

$$\mathbb{P}\left(E^{\mathrm{side}}_N\right)<\epsilon/4,\ \text{where } E^{\mathrm{side}}_N=\left\{\left|\hat{\mathcal{L}}^N_{J_a+i}(\gamma)\right|>M_1\text{ for some }(i,\gamma)\in[\![1,k]\!]\times\{-\beta,\beta\}\right\}. \tag{6.16}$$

由引理 4.9 应用于当前设定中的 k，$a=-\beta$、$b=\beta$、$M_{\text{侧}}=M_1$、$M_{\text{底}}=M$ 以及 $\epsilon=1/2$，我们可以找到 $A>0$，使得以下成立。若

(i) $\vec{x},\vec{y}\in W^\circ_k$，其中 $|x_i|,|y_i|\leq M_1$ 对于 $i\in[\![1,k]\!]$，(ii) $g:\ [-\beta,\beta]\to[-\infty,\infty)$ 是连续的，并且对所有 $t\in[-\beta,\beta]$ 满足 $x_k>g(a)$、$y_k>g(b)$ 和 $g(t)\leq M$，

then

$$\mathbb{P}^{-\beta,\beta,\vec{x},\vec{y},\infty,g}_{\text{avoid}}\left(\mathcal{Q}_i(t)\geq A\text{ for some }(i,t)\in[\![1,k]\!]\times[-\beta,\beta]\right)<1/2. \tag{6.17}$$

由将引理 4.13 应用于 k，η（如本设置中所述），$c=-\beta$、$a=-\alpha$、$b=\alpha$、$d=\beta$、$M_{\text{边}}=M_1$、$M^{\mathrm{bot}}=M$，并将 ϵ 替换为 $\epsilon/8$，我们可以找到 $\delta>0$，使得如果 $\vec{x}$，$\vec{y}$，g满足上述条件 (i) 和 (ii)，那么

$$\mathbb{P}^{-\beta,\beta,\vec{x},\vec{y},\infty,g}_{\text{avoid}}\left(\max_{i\in[\![1,k]\!]}w(\mathcal{Q}_i[-\alpha,\alpha],\delta)\geq\eta\right)<\epsilon/8. \tag{6.18}$$

这就确定了我们对 δ 的选择。

最后，我们注意到有

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\left(\inf_{t\in[-\beta,\beta]}\hat{\mathcal{L}}^N_{J_a}(t)>A\right)=1. \tag{6.19}$$

事实上，如果 $J_a=0$，我们有 $\hat{\mathcal{L}}^N_0=\infty$，因此 (6.19) 自动成立。如果 $J_a>0$，那么对于某个 $p\in\mathbb{N}$，$J_a=\mathbf{M}^a_p$，并且由命题 5.1 应用于 $\alpha=1/2$、$\beta=2$ 和 $k=p$，我们得到序列

$$\sup_{s\in[1/2,2]}\left|\mathcal{L}^N_{\mathsf{m}^a_p}(s)\right|=\sup_{s\in[1/2,2]}(2T_N)^{-1/2}\cdot\left|\mathcal{A}^{a,b,c}_{J_a}(sT_N)+2sT_N/v^a_p-s^2T^2_N\right|$$

是紧的。上述等式由 (5.1) 和 (5.2) 得出。结合最后一个结论、(6.1) 以及对所有 $t \in [-\beta, \beta]$ 和充分大的 N， $T_N + t \in [T_N/2, 2T_N]$ 这一事实，我们得出序列

$$\sup_{t\in[-\beta,\beta]} (2T_N)^{-1/2} \cdot \left| \left(2^{1/2} \hat{\mathcal{L}}^N_{J_a}(t) + t^2 \right) + 2(t + T_N)/v^a_p - (t + T_N)^2 \right|$$

是紧的，这意味着 (6.19)。

根据 (6.19)，我们可以找到 $N_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $N \geq N_0$

$$\mathbb{P}\left(F^{\text{top}}_N\right) < \epsilon/4, \text{ where } F^{\text{top}}_N = \left\{ \inf_{t\in[-\beta,\beta]} \hat{\mathcal{L}}^N_{J_a}(t) \leq A \right\}. \tag{6.20}$$

这确定了我们对 N_0 的选择。

步骤 3. 在最后这一步中，我们证明对于 N_0, δ，(6.12) 成立，其中的 N_0, δ 与步骤 2 中相同。

定义 $\vec{x}^N, \vec{y}^N \in W^\circ_k$, $f^N \colon [-\beta, \beta] \to (-\infty, \infty]$ 以及 $g^N \colon [-\beta, \beta] \to [-\infty, \infty)$ 如下

$$x^N_i = \hat{\mathcal{L}}^N_{J_a+i}(-\beta), \ y^N_i = \hat{\mathcal{L}}^N_{J_a+i}(\beta), \text{ for } i \in [\![1, k]\!], \ f^N = \hat{\mathcal{L}}^N_{J_a}[-\beta, \beta], \ g^N = \hat{\mathcal{L}}^N_{J_a+k+1}[-\beta, \beta],$$

并注意到，在 $(E^{\text{side}}_N)^c \cap (F^{\text{top}}_N)^c \cap (F_{\text{底部}N})^c$ 上，我们有

$$\left|x^N_i\right|, \left|y^N_i\right| \leq M_1, \text{ for } i \in [\![1, k]\!], \ f^N(t) > A, \ g^N(t) \leq M, \text{ for } t \in [-\beta, \beta]. \tag{6.21}$$

我们还对任意 f 定义： $[-\beta, \beta] \to (-\infty, \infty]$，函数 $G_f \colon C([\![1, k]\!] \times [-\beta, \beta]) \to [0, 1]$ 如下

$$G_f\left(\{h_i\}_{i=1}^k\right) = \mathbf{1}\left\{f(t) > h_1(t) \text{ for all } t \in [-\beta, \beta]\right\}.$$

We h对于 $N \geq N$，在 $(E^{\text{side}}_N)^c \cap (F_{\text{顶部}\,N})^c \cap (F^{\text{bot}}_N)^c$ 上有如下不等式链 $_0$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{-\beta,\beta,\vec{x}^N,\vec{y}^N,f^N,g^N}_{\text{avoid}}\left(\max_{i\in[\![1,k]\!]} w(\mathcal{Q}_i[-\alpha,\alpha],\delta) \geq \eta\right) \\
&= \frac{\mathbb{E}^{-\beta,\beta,\vec{x}^N,\vec{y}^N,\infty,g^N}_{\text{avoid}}\left[\mathbf{1}\left\{\max_{i\in[\![1,k]\!]} w(\mathcal{Q}_i[-\alpha,\alpha],\delta) \geq \eta\right\} \cdot G_{f^N}(\mathcal{Q})\right]}{\mathbb{E}^{-\beta,\beta,\vec{x}^N,\vec{y}^N,\infty,g^N}_{\text{avoid}}\left[G_{f^N}(\mathcal{Q})\right]} \\
&\leq 2\mathbb{E}^{-\beta,\beta,\vec{x}^N,\vec{y}^N,\infty,g^N}_{\text{avoid}}\left[\mathbf{1}\left\{\max_{i\in[\![1,k]\!]} w(\mathcal{Q}_i[-\alpha,\alpha],\delta) \geq \eta\right\} \cdot G_{f^N}(\mathcal{Q})\right] < \epsilon/4.
\end{aligned} \tag{6.22}$$

事实上，从第一行到第二行时，我们用了定义 4.3；从第二行到第三行时，我们用了

$$\mathbb{E}^{-\beta,\beta,\vec{x}^N,\vec{y}^N,\infty,g^N}_{\text{avoid}}\left[G_{f^N}(\mathcal{Q})\right] \geq \mathbb{E}^{-\beta,\beta,\vec{x}^N,\vec{y}^N,\infty,g^N}_{\text{avoid}}\left[G_A(\mathcal{Q})\right] > 1/2,$$

其中，第一个不等式由 (6.21) 得出，第二个不等式由 (6.17) 得出。(6.22) 中最后一个不等式由 (6.18) 以及 $G_{f^N}(\mathcal{Q}) \in [0, 1]$ 这一事实得出。

沿用上述记号，并令 $E_N = E^{\text{side}}_N \cup F_{\text{top}\,N} \cup F^{\text{bot}}_N$，我们对 $N \geq N_0$ 有如下不等式链

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(E^c_N \cap \left\{\max_{i\in[\![1,k]\!]} w(\hat{\mathcal{L}}^N_{J_a+i}[-\alpha,\alpha],\delta) \geq \eta\right\}\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{E^c_N} \cdot \mathbb{E}\left[\mathbf{1}\left\{\max_{i\in[\![1,k]\!]} w(\hat{\mathcal{L}}^N_{J_a+i}[-\alpha,\alpha],\delta) \geq \eta\right\} \middle| \mathcal{F}_{\text{ext}}([\![J_a+1, J_a+k]\!] \times (-\beta,\beta))\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{E^c_N} \cdot \mathbb{P}^{-\beta,\beta,\vec{x}^N,\vec{y}^N,f^N,g^N}_{\text{avoid}}\left(\max_{i\in[\![1,k]\!]} w(\mathcal{Q}_i[-\alpha,\alpha],\delta) \geq \eta\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{E^c_N} \cdot (\epsilon/4)\right] \leq \epsilon/4.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

事实上，第一个等式由条件期望的塔式性质以及$E_N \in \mathcal{F}_{\text{ext}}([\![J_a+1, \ J_a+k]\!] \times (-\beta, \ \beta))$这一事实得出（这个 σ-代数与定义 4.4 中的一致）。第二个等式

则由$\hat{}\mathcal{L}^N$的布朗吉布斯性质得出，第三行中的第一个不等式由 (6.22) 得出。

结合（6.15）、（6.16）、（6.20）和（6.23），我们得出 $N \geq N_0$：

$$\mathbb{P}\left(\max_{i\in[\![1,k]\!]} w(\hat{\mathcal{L}}^N_{J_a+i}[-\alpha,\alpha],\delta) \geq \eta\right) \leq \epsilon/4 + \mathbb{P}(E_N^{\mathrm{side}}) + \mathbb{P}(F_N^{\mathrm{top}}) + \mathbb{P}(F_N^{\mathrm{bot}}) < \epsilon.$$

最后一个不等式意味着（6.12）。

参考文献

1. M. Adler、P. Ferrari 和 P. Van Moerbeke，《带有漫游者的 Airy 过程与新的普适类》，《概率年刊》38（2010），714–769。2. A. Aggarwal 和 J. Huang，《多边形菱形密铺的边缘统计，II：Airy 线系综》，arXiv:2021:12874v3（2021）。3. G.W Anderson、A. Guionnet 和 O. Zeitouni，《随机矩阵导论》，剑桥大学出版社，2010。4. J. Baik、G. Ben Arous 和 S. Péché，《非零复样本协方差矩阵最大特征值的相变》，《概率年刊》33（2005），1643–1697。5. G. Barraquand、I. Corwin 和 E. Dimitrov，《一般参数与斜率下对数-伽马聚合物自由能的涨落》，《概率理论及相关领域》181（2021），113–195。6. P. Billingsley，《概率测度的收敛》，第2版，John Wiley and Sons，纽约，1999。7. A. Borodin、P.L. Ferrari 和 T. Sasamoto，《双速TASEP》，《统计物理学杂志》137（2009），936–977。8. A. Borodin 和 Péché，《定向渗流与随机矩阵理论中具有两组参数的Airy核》，《统计物理学杂志》132（2008），275–290。9. I. Corwin，《Kardar-Parisi-Zhang方程与普适类》，《随机矩阵：理论与应用》1（2012）。10. I. Corwin 和 A. Hammond，《Airy 线系综的布朗吉布斯性质》，《数学发明》195（2014），441–508。11. D. Dauvergne、M. Nica 和 B. Virág，《一致收敛到Airy 线系综》，《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》59（2023），第4期，2220–2256。12. D. Dauvergne、J. Ortmann 和 B. Virág，《定向景观》，《数学学报》229（2022），第2期，201–285。13. E. Dimitrov，《Airy 漫游者线系综》，arXiv:2408.08445（2024）。14.，《交错几何随机游走桥的紧性》，arXiv:2410.23899（2024）。15.，《Airy 流浪者线系综的结构性质》（2025），预印本：arXiv:2512.20593。16. E. Dimitrov、X. Fang、L. Fesser、C. Serio、C. Teitler、A. Wang 和 W. Zhu，《伯努利吉布斯线系综的紧性》，《电子概率学杂志》26（2021），1–93，DOI：10.1214/21-EJP698。17. E. Dimitrov 和 K. Matetski，《布朗吉布斯线系的刻画》，《概率年刊》49（2021），第5期，2477–2529。18. E. Dimitrov 和 C. Serio，《Dyson Ferrari–Spohn扩散一致收敛到Airy 线系综》，《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》61（2025），第1期，385–402。19. E. Dimitrov、C. Serio 和 Z. Yang，《钉扎半空间Airy线系综》（2026），预印本：arXiv:2601.04546。20. E. Dimitrov 和 Z. Yang，《关于最后通过渗流与Schur 过程的札记》（2025），预印本：arXiv:2510.04713。21. E. Dimitrov 和 Z. Zhou，《超临界半空间最后通过渗流中的曲线分离》（2025），预印本：arXiv:2510.07508。22. R. Durrett，《概率：理论与例子》，第4版，剑桥大学出版社，剑桥，2010。23. D. J. Grabiner，《外尔室中的布朗运动、非碰撞粒子与随机矩阵》，《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》35卷，1999，177–204页。24. T. Imamura 和 T. Sasamoto，《阶梯初始条件下非对称排斥过程中示踪粒子的动力学》，《统计物理学杂志》128（2007），799–846。25. K. Johansson，《离散多核生长与行列式过程》，《数学物理通讯》242（2003），277–329。26. M. Katori 和 H. Tanemura，《无限粒子Dyson模型的非平衡动力学》，《数学物理通讯》293（2010），469–497。27. J. Munkres，《拓扑学》，第2版，Prentice Hall, Inc.，Upper Saddle River，NJ，2003。28. S. Péché，《埃尔米特随机矩阵的小秩扰动的最大特征值》，《概率理论及相关领域》134（2006），127–173。29. M. Prähofer 和 H. Spohn，《PNG液滴与Airy 过程的尺度不变性》，《统计物理学杂志》108（2002），1071–1106。30. S. Sodin，《含时Wigner矩阵角点的谱边极限定理》，《国际数学研究通知》2015（2015），7575–7607。

31. E. Stein 和 R. Shakarchi，《复分析》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2003。32. Z. Talyigás 和 B. Vetõ，《定向随机聚合物模型中自由能的*Borodin-Péché*涨落》，《**理论概率学杂志33**》（2020），1426–1444。33. C. Tracy 和 H. Widom，《能级间距分布与*Airy*核》，《数学物理通讯》**159**（1994），151–174。