arXiv:2602.05592v1 [math.ST] 5 Feb 2026

双线性型检验的不变性修正

ÁNGELO G´ARATE，FELIPE OSORIO 和 FEDERICO C RUDU

ABSTRACT. 某些基于似然的渐近检验及其针对 M-估计、估计函数和广义矩估计法的扩展，其不变性已得到充分研究。 Cruduand Osorio [《经济学快报》187: 108885, 2020] 的模拟研究表明，双线性型检验对参数空间的一一变换不具有不变性。本文给出一组适当条件，以确立极值估计中线性或非线性假设下双线性型检验在重新参数化时的不变性，并据此对检验统计量作出简单修改。蒙特卡洛模拟实验的结果表明，所提出的方法表现良好。

1. INTRODUCTION

近年来，Dufour 等人(2017研究了在 M-估计、推断函数和广义矩估计（广义矩估计）背景下，针对非线性假设的各种检验程序对于感兴趣假设的等价重述和重新参数化的不变性。其研究的主要结论是，与似然框架中的情形一样（见 Dagenais 和 Dufour，1991年），拉格朗日乘子型统计量、 $C(\alpha$型统计量以及 Newey 和 West(1987年)提出的距离度量准则，对于原假设的重述和参数空间的一一变换具有不变性，而 Wald型统计量则不具备这些性质。尽管在这种情况下不建议使用 Wald型统计量，但已有一些方案（Kemp，2001年）被提出，以使检验对于一般重新参数化具有不变性。

值得强调的是，Dufour 等人（2017年）所考虑的估计机制属于极值估计量这一类（例如参见Gourieroux 和 Monfort，1995年；Hayashi，2000年）。此外，他们仅考虑了对应于所谓“神圣三位一体”扩展的检验统计量（参见Muggeo 和 Lovison，2014年）。相比之下，Crudu and Osorio （2020年）在极值估计背景下，提出了一种用于检验非线性假设的具有竞争力的方法。该方法基于双线性形式（BF）统计量，并推广了Terrell（2002年）的梯度统计量。正如Rao （2005年）所指出的，还需要开展更多研究，以更好地理解梯度统计量的行为。这促成了一系列关于梯度统计量渐近行为各个方面的研究（参见Lemonte，2013年及其中的参考文献）。Cruduand Osorio（2020年）的模拟研究

Key words and phrases. 双线性型检验、极值估计、梯度统计量、不变性、非线性假设、重新参数化。*Orcid ID:* 0000-0002-4675-5201 (F. Osorio)，0000-0003-3969-5914(F. Crudu)。

揭示了BF检验在等价零假设下不具有不变性。本文的主要目标是给出适当条件，以确保基于极值估计的BF检验具有重新参数化不变性。

本文结构安排如下。第2节回顾了极值估计中的双线性型检验。第3 节给出了双线性型检验统计量具有不变性的充分条件。第4节报告了我们的数值结果，以说明该检验统计量对参数空间的一一变换（即重新参数化）具有不变性。最后，第5节讨论总结性意见。

2. The bilinear form test

称为极值估计的一般估计方法(Gourier- oux 和 Monfort，1995年)通过优化目标函数 $Q_n(\boldsymbol{\theta}$来定义，该函数取决于观测数据 $\boldsymbol{z}_1$，……， $\boldsymbol{z}_n$ 和参数向量 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$，其中包括广义矩估计（Hansen，1982）、 M估计（Huber，1981），以及模型设定错误下的最大似然估计（White，1982）。在Crudu and Osorio (2020年中，引入了 BF 统计量，用于检验以下形式的非线性假设：

$$H_0 : \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}, \qquad \text{against} \qquad H_1 : \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) \neq \mathbf{0}, \tag{2.1}$$

其中， $\boldsymbol{g}$ ： $\Theta \to \mathbb{R}^q$ 是关于 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta})$ $=\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})/\partial \boldsymbol{\theta}^\top$ 的连续可微函数，且为满行秩 $q \times p$ 矩阵。定义 $\boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{\theta})$ $= \partial^2 Q_n(\boldsymbol{\theta})/\partial \boldsymbol{\theta}\partial \boldsymbol{\theta}^\top$。假设以下正则条件成立：

A1. $\boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{\text{a.s.}} \boldsymbol{A}$ uniformly in $\boldsymbol{\theta}$ with $\boldsymbol{A}$ nonsingular matrix;
A2. $\sqrt{n}\,\partial Q_n(\boldsymbol{\theta})/\partial \boldsymbol{\theta} \xrightarrow{\text{D}} \mathsf{N}_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{B})$.

那么，用于检验(2.1) 中所定义假设的BF统计量为

$$BF_n(\boldsymbol{g}) = n\Big\{\frac{\partial Q_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n)}{\partial \boldsymbol{\theta}}\Big\}^\top \boldsymbol{G}^+ \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{g}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n), \tag{2.2}$$

其中， $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta})$、 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{G}(-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{G}^\top$、$\boldsymbol{\Omega}$ $= \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{G}^\top$ 满足 $\boldsymbol{G}^+ = \boldsymbol{G}^\top(\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^\top)^{-1}$，其中$\widehat{\ }$是 $\boldsymbol{G}$的Moore-Penrose逆， $\boldsymbol{\theta}_n$ 是无约束极值估计量$\widetilde{\ }$，而约束估计量 $\boldsymbol{\theta}_n$ 是以下问题的解：

$$\max_{\theta \in \Theta} \; Q_n(\boldsymbol{\theta}), \qquad \text{subject to: } \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}.$$

给定假设 *A1-A2* 且在 H_0 条件下， $BF_n(\boldsymbol{g})$ 中给出的统计量（见（2.2）渐近服从自由度为 q 的卡方分布。关于BF统计量渐近分布及其与拉格朗日乘数检验统计量渐近等价的详细信息，参见 Crudu和Osorio(2020年）。

注释 2.1. 方程 $BF_n(\boldsymbol{g})$ 中的检验统计量(2.2) 不可行，因为矩阵$\boldsymbol{G}^+$, $\boldsymbol{S}$ 和$\boldsymbol{\Omega}$通常是未知的。为了使 $BF_n(\boldsymbol{g})$ 可行，我们可以用相合估计量替换这些$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$矩阵，例如 $\boldsymbol{G}^+$, $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$，并在 $\boldsymbol{\theta}_n$ 处取值。

3. An invariant bilinear form test

考虑对参数空间进行重新参数化（例如参见 Du- four 等人，2017），该重新参数化由一一可微变换 $\phi:\Theta\to\Theta_*$定义，其中 $\Theta\subset\mathbb{R}^p$ 且 $\Theta_*\subset\mathbb{R}^p$ 满足 $\phi(\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{\theta}_*$，且 ϕ的反函数满足 $\phi^{-1}(\boldsymbol{\theta}_*)=\boldsymbol{\theta}$。假设以下条件成立

$$\boldsymbol{g}_*(\boldsymbol{\theta}_*)=\boldsymbol{g}(\phi^{-1}(\boldsymbol{\theta}_*)), \tag{3.1}$$

那么，原假设 $H_0:\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})=\mathbf{0}$ 和 $H_0^*:\ \boldsymbol{g}_*(\boldsymbol{\theta}_*)=\mathbf{0}$ 可视为同一假设的等价表示，前提是 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})=\mathbf{0}$ 当且仅当 $\boldsymbol{g}_*(\boldsymbol{\theta}_*)=\mathbf{0}$，在这种情况下，我们称该检验对重新参数化具有不变性（Dufour 等人，2017）。以下定理给出了 BF 检验对重新参数化具有不变性的充分条件。

定理 3.1. 设 $\boldsymbol{g}:\ \Theta_*\to\mathbb{R}^q$ 是定义在 $\boldsymbol{\theta}_*\in\Theta_*$ 上的连续可微函数，且 $\boldsymbol{g}_*(\phi(\boldsymbol{\theta}))=\mathbf{0}$ 当且仅当 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})=\mathbf{0}$。考虑以下假设：

B1. $\boldsymbol{G}_*(\boldsymbol{\theta}_*)=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{K}(\phi(\boldsymbol{\theta}))$, *where* $\boldsymbol{G}_*(\boldsymbol{\theta}_*)=\partial\boldsymbol{g}_*(\boldsymbol{\theta}_*)/\partial\boldsymbol{\theta}_*^\top$, $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\theta}_*)=\partial\phi^{-1}(\boldsymbol{\theta}_*)/\partial\boldsymbol{\theta}_*^\top$;
B2. $[\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{K}(\phi(\boldsymbol{\theta}))]^+=\boldsymbol{K}^+(\phi(\boldsymbol{\theta}))\boldsymbol{G}^+(\boldsymbol{\theta})$;
B3. $\partial Q_n(\boldsymbol{\theta}_*)/\partial\boldsymbol{\theta}_*=\boldsymbol{K}^\top(\phi(\boldsymbol{\theta}))\,\partial Q_n(\boldsymbol{\theta})/\partial\boldsymbol{\theta}$;
B4. $\boldsymbol{A}_*(\boldsymbol{\theta}_*)=\boldsymbol{K}^\top(\phi(\boldsymbol{\theta}))\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}(\phi(\boldsymbol{\theta}))$;
B5. $\boldsymbol{B}_*(\boldsymbol{\theta}_*)=\boldsymbol{K}^\top(\phi(\boldsymbol{\theta}))\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}(\phi(\boldsymbol{\theta}))$;
B6. $\boldsymbol{g}_*(\boldsymbol{\theta}_*)=\boldsymbol{g}(\phi^{-1}(\boldsymbol{\theta}_*))$.

那么，方程（2.2）中给出的双线性型检验统计量具有不变性，即$BF_n(\boldsymbol{g}_*)=BF_n(\boldsymbol{g})$。

证明。为简化记号，我们定义 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta})$ 和 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}(\phi(\boldsymbol{\theta}))$。利用假设 *B1* 和*B4*，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_*&=\boldsymbol{G}_*(\boldsymbol{\theta}_*)(-\boldsymbol{A}_*(\boldsymbol{\theta}_*))^{-1}\boldsymbol{G}_*^\top(\boldsymbol{\theta}_*)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{K}(-\boldsymbol{K}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{K})^{-1}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{K})^\top\\&=\boldsymbol{G}\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1}(-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{K}^\top)^{-1}\boldsymbol{K}^\top\boldsymbol{G}^\top=\boldsymbol{G}(-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{G}^\top=\boldsymbol{S}.\end{aligned}$$

此外，根据假设*B1* 和*B5*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_*&=\boldsymbol{G}_*(\boldsymbol{\theta}_*)\boldsymbol{A}_*^{-1}(\boldsymbol{\theta}_*)\boldsymbol{B}_*(\boldsymbol{\theta}_*)\boldsymbol{A}_*^{-1}(\boldsymbol{\theta}_*)\boldsymbol{G}_*^\top(\boldsymbol{\theta}_*)\\&=\boldsymbol{G}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{K}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{K}^\top\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{K}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{K})^{-1}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{K})^\top\\&=\boldsymbol{G}\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{K}^\top)^{-1}\boldsymbol{K}^\top\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{K}^\top)^{-1}\boldsymbol{K}^\top\boldsymbol{G}^\top\\&=\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{G}^\top=\boldsymbol{\Omega}.\end{aligned}$$

最后，根据假设$B2$、$B3$和$B6$，我们得到，

$$\begin{aligned} BF_n(\boldsymbol{g}_*) &= n\Big\{\frac{\partial Q_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_*)}{\partial \boldsymbol{\theta}_*}\Big\}^\top \boldsymbol{G}_*^+(\boldsymbol{\theta}_*)\boldsymbol{S}_*\boldsymbol{\Omega}_*^{-1}\boldsymbol{g}_*(\boldsymbol{\theta}_*) \\ &= n\Big\{\frac{\partial Q_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n)}{\partial \boldsymbol{\theta}}\Big\}^\top \boldsymbol{K}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{K})^+\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{g}(\phi^{-1}(\boldsymbol{\theta}_*)) \\ &= n\Big\{\frac{\partial Q_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n)}{\partial \boldsymbol{\theta}}\Big\}^\top \boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^+\boldsymbol{G}^+\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) \\ &= n\Big\{\frac{\partial Q_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n)}{\partial \boldsymbol{\theta}}\Big\}^\top \boldsymbol{G}^+\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) = BF_n(\boldsymbol{g}), \end{aligned}$$

如所需。 □

显然，当 $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}$ 时，可以忽略条件 $B4$ 和 $B5$；例如，当目标函数 $Q_n(\boldsymbol{\theta})$ 基于拟得分估计方程时就是如此。这在广义矩估计的背景下尤为重要，因为采用不变检验可以避免计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$。

值得注意的是，Greville（1966指出了验证类似于$B2$中所述假设所需的条件。为确立$B2$，只需验证以下恒等式（见Greville，1966），

$$\boldsymbol{G}^+\boldsymbol{G}\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^\top = \boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^\top\boldsymbol{G}^+\boldsymbol{G}. \tag{3.2}$$

这里，$\boldsymbol{G}$ 是一个满行秩矩阵，这意味着其 Moore-Penrose逆为 $\boldsymbol{G}^+ = \boldsymbol{G}^\top(\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^\top)^{-1}$。该表达式有助于验证恒等式（3.2）。此外，$\boldsymbol{K}$ 被假设为满秩矩阵，因此有$\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^+ = \boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1} = \boldsymbol{I}$，这可用于证明乘积 $\boldsymbol{G}^\top\boldsymbol{G}\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^+$的对称性。有趣的是，假设 $B2$ 是 BF检验特有的，而假设 $B4$ 和 $B5$ 则与 $C(\alpha)$ 型统计量共有，而且拉格朗日乘子型检验也需要这些假设（见 Dufour 等人，2017）。定理 3.1 中的条件集使我们能够引入以下对双线性形式统计量的修正，使其不受原假设定义的影响。

定义 3.2。在定理 3.1所确立的条件下，我们可以定义 BF 统计量的修正版本如下：

$$BF_n^c = n\Big\{\frac{\partial Q_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_*)}{\partial \boldsymbol{\theta}_*}\Big\}^\top \boldsymbol{G}_*^+\boldsymbol{S}_*\boldsymbol{\Omega}_*^{-1}\boldsymbol{g}_*(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_*), \tag{3.3}$$

其中 $\boldsymbol{G}_* = \boldsymbol{G}_*(\boldsymbol{\theta}_*)$、$\boldsymbol{S}_* = \boldsymbol{G}_*(-\boldsymbol{A}_*)^{-1}\boldsymbol{G}_*^\top$，$\boldsymbol{\Omega}_* = \boldsymbol{G}_*\boldsymbol{A}_*^{-1}\ \boldsymbol{B}_*\boldsymbol{A}_*^{-1}\boldsymbol{G}_*^\top$。

4. Monte Carlo simulations

基于Lafontaine和White（1986）的模拟研究，Goh和King（1996）考察了Phillips和Park（1988）提出的Wald统计量修正的小样本表现。这些基于Edgeworth展开的修正旨在加快检验统计量在两个代数等价零假设下向其渐近分布收敛的速度，即：

$$H_0 : g(\gamma, \beta) = \beta - 1 = 0, \tag{4.1}$$

$$H_0^* : g_*(\gamma_*, \beta_*) = \beta_*^k - 1 = 0, \tag{4.2}$$

TABLE 3.1. 5%检验的经验尺寸。 W， BF和 W^*， BF^* 分别指使用公式（4.1）和（4.2）中的原假设计算的 Wald 和 BF 统计量。

k	n	W	W^*	BF	BF^*	BF^c	LM	D
5	25	0.058	0.246	0.058	0.184	0.058	0.058	0.058
	50	0.049	0.216	0.049	0.154	0.049	0.049	0.049
	100	0.049	0.155	0.049	0.108	0.049	0.049	0.049
	500	0.051	0.084	0.051	0.065	0.051	0.051	0.051
2	25	0.058	0.127	0.058	0.203	0.216	0.058	0.058
	50	0.049	0.104	0.049	0.073	0.049	0.049	0.049
	100	0.049	0.074	0.049	0.065	0.049	0.049	0.049
	500	0.051	0.058	0.051	0.055	0.051	0.051	0.051
-2	25	0.058	0.155	0.058	0.137	0.080	0.058	0.058
	50	0.049	0.135	0.049	0.085	0.036	0.049	0.049
	100	0.049	0.103	0.049	0.066	0.042	0.049	0.049
	500	0.051	0.058	0.051	0.050	0.051	0.051	0.051
-5	25	0.058	0.234	0.058	0.163	0.058	0.058	0.058
	50	0.049	0.216	0.049	0.143	0.049	0.049	0.049
	100	0.049	0.171	0.049	0.108	0.049	0.049	0.049
	500	0.051	0.096	0.051	0.060	0.051	0.051	0.051

其中 k 为非零整数， γ、 β 为如下模型中的回归系数：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1\gamma + \boldsymbol{x}_2\beta + \boldsymbol{\epsilon}, \tag{4.3}$$

其中 $\boldsymbol{x}_1$、 $\boldsymbol{x}_2$ 分别表示协变量向量和随机扰动向量。

接下来，我们通过将所提出的 BF 检验统计量修正方法与 Wald（W）、拉格朗日乘数（LM）、双线性型（BF）和度量距离（D）统计量进行比较，考察该方法的性能；比较时采用（4.1）和（4.2）中给出的等价假设。关于极值估计背景下这些统计量的定义，分别参见Dufour 等人（2017）、Crudu and Osorio（2020年）和Newey 和 West （1987年）。

4.1. 模拟设置。参照Goh和King（1996）报告的模拟研究，我们考虑了(4.3)中的模型，其中 $\boldsymbol{\theta} = (\gamma, \beta)^\top = (1, 1)^\top$， 以及针对 $k \in \{-5, -2, 2, 5\}$ 在(4.1)和(4.2)中定义的假设。从模型(4.3)生成了10 000个样本，样本量 $n = 25$、50、100和500，其中 $\boldsymbol{x}_j = (x_{1j}, \ldots, x_{nj})^\top$， $x_{ij} \sim$ U(0,1)适用于 $i = 1, \ldots, n$； $j = 1$、2， 以及 $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathrm{N}_n(0, \sigma^2\boldsymbol{I})$， 其中 $\sigma^2 = 1$。

对于假设 H_0 和 H_0^* 分别在(4.1)和(4.2)中定义，我们得到重新参数化 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\phi}(\gamma, \beta)$，其中

$$\boldsymbol{\phi}^{-1}(\gamma_*, \beta_*) = (\gamma_*, \beta_*^k)^\top,$$

满足条件$B6$。根据假设(4.2)，我们得到

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\theta}_*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k\beta_*^{k-1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{G}_*^+(\boldsymbol{\theta}_*) = \begin{pmatrix} 0 \\ k^{-1}\beta_*^{1-k} \end{pmatrix},$$

并且条件$B1$与$B2$的验证是直接的。在本例中，我们有 $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}$，从而得到BF统计量的简化形式。因此，只需条件$B1$、$B3$与$B6$，即可得到方程(3.3)中给出的修正检验统计量。

4.2. **模拟结果**。 在蒙特卡洛实验中，进行了一个水平为 5% 的检验。[1] 表 3.1 展示了对 H_0 和 H_0^* 在 k的四个取值下进行检验的结果。正如预期，所有统计量在(4.1)中的线性假设下均一致；而 Wald统计量和未校正的 BF统计量则显示出明显的不变性问题，其经验尺寸随着样本量增加而趋近名义水平。结果表明，所提出的校正（在表 BF^c 3.1中报告）使 BF统计量的经验尺寸始终更接近名义值；除样本量较小时的某些情况外，例如 $k = 2$ 和 $n = 25$。值得注意的是，该检验与度量距离统计量和拉格朗日乘数统计量一致， D 和 LM 这些统计量已知具有不变性。

5. Concluding remarks

在本文中，我们研究必须对BF统计量施加的条件，以避免其对由重新参数化所产生的相关假设重新表述不具不变性这一不良性质。尽管模拟研究的结果看似令人鼓舞，但应注意，所需条件并非总是得到满足。例如，对于由Gregory和Veall（1985）提出的、含有两个等价零假设的问题，

$$H_0 : \theta_1 - 1/\theta_2 = 0, \qquad \text{and} \qquad H_0^* : \theta_{*1}\theta_{*2} - 1 = 0,$$

我们可以注意到，重新参数化 $\phi(\theta_1, \theta_2)$，其中

$$\phi^{-1}(\theta_{*1}, \theta_{*2}) = ((\theta_{*1} + 1)\theta_{*2} - 1, 1/\theta_{*2})^\top,$$

满足（3.1）中的条件，但不满足假设$B2$。因此，与Wald检验一样，在使用BF统计量时需要谨慎。第4 节中的蒙特卡洛实验颇具启发性，因为它表明，随着非线性增强，未经校正的BF统计量的表现会恶化。鉴于上述结果，需要进一步研究，以更好地理解BF统计量的性质及其有限样本表现。一个有前景的研究方向是应用基于Phillips和Park（1988）中所发展的渐近展开的校正。

Acknowledgements

本文写于第二作者任职于圣塔马丽亚费德里科·圣玛丽亚技术大学期间。作者感谢应用空间分析实验室 UTFSM - ALSA (MT7018) 提供计算基础设施支持。 Angelo G ´arate 获得了智利国家奖学金计划 ANID-Chile 的资助。Federico Crudu 的研究得益于锡耶纳大学通过 F-CUR资助项目 2274-2022-CF-PSR2021-FCUR 001 提供的经费支持。

[1]与本文相关的复现文件可在线获取，网址为 https://github.com/faosorios/BF_invariance

References

Crudu, F., Osorio, F. (2020). 极值估计的双线性型检验统计量。 *Eco-nomics Letters* **187**, 108885. Dagenais, M.G., Dufour, J.-M. (1991). 不变性、非线性模型与渐近检验。 *Econometrica* **59**, 1601-1615. Dufour, J.-M., Trognon, A., Tuvaandorj, P. (2017). 基于 *M*-估计量、估计函数和广义矩估计法的不变检验。 *Econometric Reviews* **36**, 182-204. Goh, K.L., King, M.L. (1996). 非线性约束的修正Wald检验：一个警示故事。 *Economics Letters* **53**, 133-138. Gourieroux, C., Monfort, A. (1995). *Statistics and Econometrics Models: Testing, Confi-dence Regions, Model Selection and Asymptotic Theory. Vol. 2*. 剑桥大学出版社。Gregory, A.W., Veall, M.R. (1985). 非线性约束Wald检验的构建。*Econometrica* **53**, 1465-1468. Greville, T.N.E. (1966). 关于矩阵乘积广义逆的注记。 *SIAM Review***8**, 518-521. Hansen, L. (1982). 广义矩估计量的大样本性质。*Econometrica* **50**, 1029-1054. Hayashi, F. (2000). *Econometrics*. 普林斯顿大学出版社。Huber, P.J. (1981). *Robust Statistics*. Wiley，纽约。Kemp, G. (2001). 不变性与Wald检验。 *Journal of Econometrics* **104**, 209-217. Lafontaine, F., White, K.J. (1986). 获得任意所需的Wald统计量。 *EconomicsLetters* **21**, 35-40. Lemonte, A.J. (2013). 关于模型设定错误下的梯度统计量。 *Statisticsand Probability Letters* **83**, 390-398. Muggeo, V.M.R, Loviso n, G., 2014. “三加一”基于似然的检验统计量：统一的几何与图形解读。《美国统计学家》 68, 302-306. Newey, W.K., West, K.D. (1987). 使用有效矩估计量进行假设检验。 *International Economic Review* **28**, 777-787. Phillips, P.C.B., Park, J.Y. (1988). 关于非线性约束Wald检验的构建。 *Econometrica* **56**, 1065-1083. Rao, C. (2005). 得分检验：历史回顾与近期发展。载于 N. Balakrishnan, N. Kannan, H.N. Nagaraja (编), *Advances in Ranking and Selection, MultipleComparisons, and Reliability*, Birkh¨ auser，波士顿。第3-20页。Terrell, G.R. (2002). 梯度统计量。 *Computing Science and Statistics* **34**, 206-215. White, H. (1982). 设定错误模型的最大似然估计。 *Econometrica***50**, 1-25。

Departamento de Estadística, Pontificia Universidad Católica de Chile
Current address: 智利圣地亚哥 Vicu˜na Mackena 大道 4860 号*Email address*: afgarate@uc.cl

Email address: faosorios.stat@gmail.com

Department of Economics and Statistics, University of Siena, Italy
Current address: 意大利锡耶纳圣方济各广场 7/8 号，邮编 53100。
Email address: federico.crudu@unisi.it