arXiv:2602.05593v1 [math.DS] 5 Feb 2026

具有缓慢傅里叶衰减的自相似测度与自共形测度

SIMON BAKER 和 AMLAN BANAJI

Abstract. 给定任意满足 $\lim_{\xi\to\infty}\phi(\xi)=0$ 的函数 $\phi\colon[0,\infty)\to(0,1]$，我们证明存在 i) 自相似测度，以及 ii) 非线性 C^∞ 自共形测度，它们均为 Rajchman 测度，且其傅里叶变换 $\widehat{\mu}$满足

$$\limsup_{\xi\to\infty}\frac{|\widehat{\mu}(\xi)|}{\phi(\xi)}>0.$$

此外，我们推导出自共形测度为 Rajchman 测度的新充分条件，并构造了一个显式的自相似测度 μ，使得 μ 几乎每个 x 都是十进制下的正规数，但序列 $(10^n x \bmod 1)_{n=1}^{\infty}$ 的等分布速度极其缓慢。

1. Introduction

1.1. 概述。给定实数集 $\mathbb{R}$上的一个紧支撑博雷尔概率测度 μ，其傅里叶变换 $\widehat{\mu}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 定义为 $\widehat{\mu}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}e^{2\pi i\xi x}d\mu$({v8)。若测度 μ 满足 $\lim_{|\xi|\to\infty}\widehat{\mu}(\xi)=0$，则称其为 Rajchman 测度。若 μ 是 Rajchman 测度，一个自然的问题是：$\widehat{\mu}$ 是否以给定速率收敛至零。这是一个重要问题，在数学的许多不同领域都有应用。在组合学中，已知如果一个闭集的豪斯多夫维数足够大，且支撑某个傅里叶变换衰减足够快至零的测度，那么该集合中就存在某些模式（例如三项等差数列）[23, 29]。在数论中，已知测度傅里叶变换的适当上界 μ 可用于确立 μ典型点与丢番图逼近和正规性相关的性质 [35]。特别是，Davenport、Erd˝os 和 LeVeque [16] 的一个著名结果表明，若对某个 $\varepsilon>0$有 $\widehat{\mu}(\xi)=O((\log\log|\xi|)^{-1-\varepsilon})$，则 μ 几乎每个 x在所有进制下都是正规数。在量子混沌中，关于测度傅里叶变换的信息可用于建立针对该测度支撑集的分形不确定性原理 [17]。这很重要，因为分形不确定性原理可用于处理各种问题，例如给出拉普拉斯算子特征函数的 L^2 质量上界，以及证明偏微分方程的可观测性定理 [18, 19]。

在本文中，我们感兴趣的是寻找（定义见下文）属于 Rajchman、但具有非常慢傅里叶衰减的自相似测度与自共形测度。这一问题

2020 数学学科分类。 42A38（主要），28A80，11J71（次要）。关键词和短语。 傅里叶衰减，Rajchman测度，自相似测度，自共形测度。

此前已在一般绝对连续测度的背景下得到研究。黎曼–勒贝格引理指出，每一个绝对连续测度都是 Rajchman 的。然而，已知绝对连续测度可以沿某一频率序列具有任意慢的傅里叶衰减，例如参见 [12, 定理 3]。

对我们而言，迭代函数系统（IFS）是一个由有限个一致压缩映射$\{S_a$组成的集合：$[0,1] \to [0,1]\}_{a\in\mathcal{A}}$。给定一个 IFS 和一个概率向量$(p_a)_{a\in\mathcal{A}}$，存在唯一的博雷尔概率测度 μ 满足 $\mu = \sum_{a\in\mathcal{A}} p_a S_a\mu$，其中 $S_a\mu$ 是 μ 在 S_a 下的推前测度（$S_a\mu(A) = \mu(S_a^{-1}(A))$，对 $A \subseteq \mathbb{R}$ 任意博雷尔集成立）[24]。如果所有 S_a 都是导数不为零的 C^1 压缩映射，那么我们称 μ 为自共形测度；如果所有 S_a 都是相似变换，则称 μ 为自相似测度。如果所有收缩比都相等，则称自相似测度为齐次自相似测度。我们强调，本文始终假设概率向量中的所有分量均严格为正，且所有自相似测度和自共形测度都是非原子的。后一性质等价于 IFS 中的压缩映射没有公共不动点。近年来，自相似测度和非线性自共形测度的傅里叶变换受到了广泛研究 [3, 5–10, 13, 14, 25, 30, 31, 39, 40, 43]。本文的主要结果，即定理1.2和1.13，表明在这两种情形下，测度可以是 Rajchman 测度，同时具有任意慢的傅里叶衰减。在给出正式陈述之前，我们先综述一些相关结果。

1.2. 自相似测度。首先指出，存在并非 Rajchman 的自相似测度。例如，所有支撑集位于三分康托集上的自相似测度都不是 Rajchman 测度。[14], Br´emont 对自相似测度何时为 Rajchman 测度进行了分类。Shmerkin 和 Solomyak [41], 以及 Solomyak [42] 的结果表明，对于许多自然的参数化自相似测度族，其典型元素具有多项式傅里叶衰减，即存在 $C, \eta > 0$，使得对所有 $\xi \neq 0$，$|\widehat{\mu}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\eta}$。尽管有这些结果，具有多项式傅里叶衰减的自相似测度的显式例子仍相对较少 [15, 43]。若放宽衰减速率，则已有更多相关结果。Li 和 Sahlsten [31]证明，在对迭代函数系中出现的压缩比施加一个温和的丢番图假设时，自相似测度的傅里叶变换至少以对数速率衰减，即存在 $C, \eta > 0$，使得对所有$\xi \neq 0$，$|\widehat{\mu}(\xi)| \leq C(\log|\xi|)^{-\eta}$。Varj´u 和 Yu [44, Corollary 1.6] 给出了自相似测度具有至少对数傅里叶衰减的进一步条件。

关于傅里叶变换缓慢衰减至零的 Rajchman 自相似测度，人们知之甚少。据作者所知，这方面的首个结果归功于 Kahane [26]。他证明，以 Salem 数的倒数为参数的伯努利卷积不具有多项式傅里叶衰减。有关这一结果的证明，请参阅 Peres、Schlag 和 Solomyak [38] 的综述。我们强调，这意味着存在不具有多项式傅里叶衰减的 Rajchman 自相似测度，

。在近期的一篇论文中， [32, 附录 B], Marshall-Maldonado 和 Solomyak 为以 Salem 数的倒数为参数的伯努利卷积的傅里叶变换建立了一个上界；该上界趋于零的速度极其缓慢，尤其慢于任何 k重对数复合函数。他们还改进了 Kahane 的结果，并证明，若伯努利卷积以某个 Salem 数的倒数 α 为参数，且存在γ， $\beta > 0$ 使得傅里叶变换满足

$$\widehat{\mu}(\xi) = O\left((\log_\alpha |\xi|)^{-\gamma(\log_\alpha \log_\alpha \xi)^\beta}\right)$$

然后是 $\beta \leq 1$。他们还研究了偏置伯努利卷积，并证明如果这类测度具有对数傅里叶衰减，那么其指数的上界可由一个常数给出，该常数取决于 Salem 数及其对应的概率向量。在一项正在进行的研究中，Paukkonen、Sahlsten 和 Streck [36]证明，Li 和 Sahlsten 的结果在如下意义上是尖锐的：存在满足 [31], 中的丢番图假设、因而具有对数傅里叶衰减的自相似测度，其傅里叶变换沿某个频率子序列恰好以对数速率衰减。鉴于上述结果，一个自然的问题是：要保证对数傅里叶衰减，是否真的需要 [31] 中的丢番图假设?

问题 *1.1. </style}*对于实数集 $\mathbb{R}$上的每个 *Rajchman* 自相似测度 μ ，是否都存在 η、$C > 0$ ，使得

$$|\widehat{\mu}(\xi)| \leq C(\log |\xi|)^{-\eta} \quad for\ all\ |\xi| > 1?$$

我们的第一个结果表明，问题 1.1 的答案在强意义上是否定的。

定理 1.2。对于每个函数 ϕ: $[0, \infty) \to (0, 1]$ ，只要满足 $\phi(\xi) \to 0$ 当 $\xi \to \infty$ 时，就存在一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的 *Rajchman* 齐次自相似测度 μ ，使得

$$\limsup_{\xi \to \infty} \frac{|\widehat{\mu}(\xi)|}{\phi(\xi)} > 0. \tag{1.1}$$

定理 1.2 证明中出现的自相似测度由迭代函数系生成

$$\left\{ S_0(x) = \frac{x}{10},\ S_1(x) = \frac{x+1}{10},\ S_2(x) = \frac{x+t}{10} \right\}$$

其中 $t \in [0, 1]$ ，概率向量为 $(1/3, 1/3, 1/3)$（将此自相似测度称为 μ_t）。对于这一族测度，我们实际上将证明一个比定理 1.2 更强的结论。给定任意满足 $\phi(\xi) \to 0$（当 $\xi \to \infty$ 时）的函数 ϕ: $[0, \infty) \to (0, 1]$ ，我们将证明，对于拓扑意义下泛型的 t，测度 μ_t 是 Rajchman 测度并满足 (1.1)（命题 2.2）。这与 Shmerkin 和 Solomyak 的一个结果形成对照： [41, 命题 3.1] 表明，对于除豪斯多夫维数为零的集合之外的所有 $t \in [0, 1]$ ，测度 μ_t 都具有多项式傅里叶衰减。

在定理 1.2的证明中，我们将证明，满足 t 且使得 μ_t 满足（1.1）的那些值是无理数，但能被有理数 t' 极好地逼近，其中 $\mu_{t'}$ 是

Rajchman。 的傅里叶变换 μ_t 因此会在某些频率处取较大值，这些频率上 $\widehat{\mu_{t'}}$ 也取较大值，但 Br´emont [14] 的一个结果以及 t 的无理性将意味着 μ_t 是 Rajchman。我们的证明方法还给出了 t 的显式取值，使得μ_t 具有极慢的傅里叶衰减，正如下文定理1.3所示。回顾一下用于表示大整数的 Knuth 上箭头记号： $10 \uparrow\uparrow n$ 可递归地定义为

$$10 \uparrow\uparrow 1 = 10 \quad \text{and} \quad 10 \uparrow\uparrow n = 10^{10\uparrow\uparrow(n-1)} \quad \text{for integers } n > 1. \tag{1.2}$$

定理 1.3。 令 t 为显式的刘维尔数

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10 \uparrow\uparrow (3n)}, \tag{1.3}$$

测度 μ_t 是 *Rajchman* 测度，但是

$$\liminf_{n\to\infty}((\log\log(10 \uparrow\uparrow (3n+2)))|\widehat{\mu_t}(10 \uparrow\uparrow (3n+2))|) > 0.$$

注 1.4。 定理 1.3 只给出了一个特定的例子。若不采用式（1.3），而改为设定

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10 \uparrow\uparrow (kn)}$$

对某个整数 $k > 3$，那么通过调整定理 1.3的证明，可以证明 Rajchman 测度的傅里叶变换 μ_t 至少会以如下速度缓慢衰减

$$(\underbrace{\log \circ \cdots \circ \log}_{k-1 \text{ times}}(\xi))^{-1}$$

沿着一列趋于 ∞ 的整数频率 ξ 。若将 $\uparrow\uparrow$ 替换为$\uparrow \cdots \uparrow$，其中 $m > 2$ 为某个整数，则会导致更慢的衰减。m 倍

我们构造的具有慢傅里叶衰减的自相似测度还满足其他一些有趣的性质。其中一项性质与测度支撑集中的点在某些动力系统作用下等分布速度较慢有关。我们此前已提到 Davenport、Erd˝os 和 LeVeque [16] 的结果，该结果表明，若测度 μ 的傅里叶衰减足够快，则 μ 几乎处处的 x都关于所有进制正规，也就是说，对所有整数 $b > 1$，对 μ 几乎处处的 x 以及所有区间 $I \subset [0, 1]$ ，都有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\{1 \le n \le N : \{b^n x\} \in I\} = \text{length}(I), \tag{1.4}$$

其中 $\{b^n x\}$ 表示 $b^n x$的小数部分。Algom、Rodriguez Hertz 和 Wang [4]证明，若 μ 是拉伊赫曼自相似测度，则 μ 几乎处处的 x对所有整数 $b > 1$都是正规数。该结果的重要意义在于，它不要求傅里叶衰减满足任何衰减速率。Algom [1]给出了这一结果的一个自成一体的证明。

自然会想要获得更具定量性的等分布结果。人们或许希望，在某些条件下，即使区间的长度 I 依赖于 n 并以不可求和的方式趋于 0，也能对 (1.4) 的左侧得到非平凡的界。

事实上，下面的定理1.5 针对傅里叶衰减足够快的任意测度（即不一定是自相似测度），是 Pollington、Velani、Zafeiropoulos 和 Zorin 的一项结果的特例 [35]。为陈述该定理，我们需要以下记号。给定一个正数序列 $\psi(1)\ \psi(2)\ldots$ 我们令 $\Psi(N):=\sum_{n=1}^{N}\psi(n)$，对每个正整数 N。另给定 $\gamma\in[0,1)$，对每个$x\in\mathbb{R}$ 和 $N\in\mathbb{N}$ 令

$$R(x,N;\gamma,\psi,b):=\#\{1\le n\le N:\operatorname{dist}(b^{n-1}x-\gamma,\mathbb{Z})\le\psi(n)\}. \tag{1.5}$$

定理 1.5 ([35], 定理 3)。 设 μ 是一个非原子博雷尔概率测度，其支撑集包含于 $[0,1]$ 内。假设存在 $\eta>2$，使得 $\mu(\xi)=O((\log|\xi|)^{-\eta})$当 $|\xi|\to\infty$ 时成立。令 $\gamma\in[0,1)$ 且 $\psi:\ \mathbb{N}\to(0,1]$。那么，对所有 $\varepsilon>0$ 以及几乎处处的 x，

$$R(x,N;\gamma,\psi,b)=2\Psi(N)+O((\Psi(N))^{1/2}(\log(\Psi(N)+2))^{2+\varepsilon}) \tag{1.6}$$

当 $N\to\infty$ 时。

Algom 等人与 Pollington 等人的结果共同引出了以下自然问题。

问题 1.6. 不假设傅里叶衰减速率，若 μ 是一个 *Rajchman* 自相似测度，且支撑集包含于 $[0,1],$，那么 (1.6) 是否必然对 μ 几乎处处的 x成立？

下面的结果表明，答案在很强的意义下是否定的。

定理 1.7. 存在一个单调递减的正数序列$\psi(1)\ \psi(2)\ldots$，以及 $\gamma\in(0,\ 1)$，使得以下结论成立：

*(1)*上极限$_{N\to\infty}$ 对数 ~~$\Psi(N)$~~ 对数 $N\ =1$，因此特别有 极限$_{N\to\infty}\Psi(N)=\infty$。 *(2)* 令 X_t 为定理 *1.3*中的自相似测度 μ_t 的支撑集。对于所有 $x\in X_t$和 $N\in\mathbb{N}$，有 $R(x,N;\ \gamma,\ \psi10)=0$。

证明的思路是用有理数 t 来逼近 $t_k:=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{10\uparrow\uparrow(3n)}$，并利用这样一个事实：在 X_{t_k} 和 X_t 中，绝大多数具有相同编码的点，在一个较长的初始片段内具有相同的十进制展开；该片段的长度取决于 k。关键在于，对于 X_{t_k}中的点，以 10 为底的正规性不成立。见证这种正规性失败的区间长度会以依赖于 k的方式趋于 0，但这并不妨碍性质（1）成立。

1.3. **非线性自共形测度**。 超越自相似情形之外，人们已经开展了大量工作，旨在证明支撑于 $\mathbb{R}$ [3, 5, 7, 9, 11, 13, 25, 27, 30, 37, 39] 上的非线性自共形测度的（定性和定量）傅里叶衰减界。这些结果表明，许多非线性自共形测度族都具有多项式傅里叶衰减。自然的问题是，任意非线性是否都意味着多项式傅里叶衰减。Sahlsten 提出的以下指导性问题对此作出了更正式的表述 [40]。

问题 1.8 （来自 [40] 的问题3.8）。 设 $\{S_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ 是一个 $C^{1+\alpha}$ 迭代函数系，其中有一个映射 S_a 不是相似变换。与 $\{S_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ 相关的每个自共形测度的傅里叶变换是否都具有多项式衰减？

我们将看到，一般而言，这个问题的答案是否定的。尽管如此，近年来，围绕这一问题已经取得了很大进展。如今已知，当每个压缩映射都是实解析的时，问题 1.8 的答案是肯定的。这可由 [3,5,7,9] 中的结果推出。在 C^2 迭代函数系的背景下，如果一个自共形测度不具有多项式傅里叶衰减，那么它必定与一个 C^2 线性迭代函数系统 C^2 共轭。具体来说，存在某个 C^2 微分同胚 $h\colon [0,1]\to[0,1]$ 和 C^2 迭代函数系 $\mathcal{T}=\{T_a\}_{a\in\mathcal{A}}$，使得对所有 $a\in\mathcal{A}$ 和 $x\in[0,1]$，都有 $T_a(h(x))=h(S_a(x))$；并且对 $\mathcal{T}$ 的吸引子中的所有 y，都有 $T_a''(y)=0$。这是 [5, 定理 1.1] 的直接推论（另见相关结果 [9, 定理 1.4]）。这一结果促使我们研究那些可以实现为源自线性迭代函数系的自共形测度的推前测度的自共形测度。本文将关注一种特殊情形：那些可以实现为自相似测度的推前测度的自共形测度。我们强调，在对推前映射作出非常温和的假设时，自相似测度的推前测度确实可以实现为自共形测度（见引理 3.3）。

下面的例子表明，即使在 1.8 问题的 C^∞ 迭代函数系族中，答案也是否定的，原因很简单，而且还需要进一步细化。

例 1.9。 令 ν 为定义在 $[0,1]$ 上的康托–勒贝格测度（因此 $T_1(x)=x/3$且 $T_2(x)=(x+2)/3$，其概率向量为 $(1/2,\ 1/2)$）。令 $\mu=f\nu$，其中 $f\colon [0,1]\to[0,1]$ 是一个递增的 C^∞ 微分同胚，在 $[2/9,1/3]$ 上为仿射映射，并且满足

$$f''(x)\neq 0 \qquad \text{for all } x\in[0,2/9)\cup(3/9,1]. \tag{1.7}$$

我们声称，可以选择 f，使其满足以下性质：

(1) μ 是 C^∞ 迭代函数系对应的自共形测度

$$\{S_a := f\circ T_a\circ f^{-1}\colon [0,1]\to[0,1]\}_{a=1}^2$$

以及概率向量 $(1/2,\ 1/2)$。

(2) 对于 $a\in\{1,2\}$，除至多有限个 $x\in[0,1]$ 外，我们有 $S_a''(x)\neq 0$。我们将在建立一些有用的初步工具之后，于第 3.5 节解释如何选择 f 以满足这些性质。利用 [3,7] 的结果可以证明，(1.7) 意味着，将 μ 限制在 $f([0,1/9])$ 上所得的 $\cup f([2/3,1])$ 具有多项式傅里叶衰减。然而，将 μ 限制在 $f([2/9,1/3])$ 上所得的测度不是 Rajchman 测度。这是因为 f 限制在 $[2/9,1/3]$ 上时是一个仿射映射，而 $\nu|_{[2/9,1/3]}$ 不是 Rajchman 测度；后者由 ν 不是 Rajchman 测度以及自相似性可知。因此，μ 不是 Rajchman 测度。更一般地，这个例子说明，一个“非线性”自共形测度的一部分可能由某个自相似测度的仿射像给出。事实上，它

可以利用这一观察以及定理 1.2证明，对于 C^∞ 迭代函数系，存在一些“非线性”自共形测度，它们是 Rajchman 测度，但具有任意慢的傅里叶衰减。

这个例子的问题在于，我们衡量非线性的方式，即对所有 $a \in \{1,2\}$，都有 $S_a''(x) \neq 0$ 除了至多有限多个 $x \in [0,1]$(或者实际上，问题1.8 中“不为相似变换”这一更弱假设)，会产生误导，并掩盖其中显而易见的线性。需要认识到的重要一点是，μ 也是迭代函数系

$$\{S_{(a_1,a_2)} := f \circ T_{a_1} \circ T_{a_2} \circ f^{-1} \colon [0,1] \to [0,1]\}_{1 \le a_1, a_2 \le 2}$$

以及概率向量（$1/4$，$1/4$，$1/4$，$1/4$）。然而，可以证明，对于这个迭代函数系，$S''_{(1,2)}(x) = 0$ 对所有 $x \in [f(2/9)\ f(1/3)]$ 均成立。

鉴于例1.9，下面对问题1.8 的进一步细化是自然的。

问题 1.10。假设 $\{S_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ 是 $[0,1]$ 上的一个 $C^{1+\alpha}$ 迭代函数系，使得对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathcal{A}^k$，都有 $(S_{a_1} \circ \cdots \circ S_{a_k})''(x) \neq 0$，除至多有限个 $x \in [0,1]$外。这是否意味着，与 $\{S_a\}$ 相关联的每个自共形测度的傅里叶变换都呈多项式衰减?

尽管我们将会看到，问题 1.10 的答案仍是否定的，但以下定理及其推论为该问题的成立提供了依据。

定理 1.11。设 μ 是 $[0,1]$ 上的一个自相似测度，对应于一个迭代函数系 $\{T_a\}_{a\in\mathcal{A}}$。设$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个 C^2 映射，并设

$$Z := \{x \in [0,1] : f''(x) = 0\}.$$

那么，以下陈述成立：

(1) 假设 $\mu(Z) = 0$（特别地，当 Z 为有限集时，这一条件成立）。那么，像测度 $f\mu$ 是 *Rajchman* 测度。*(2)* 假设 $\mu(Z) > 0$，对于所有 $x \in [0,1]$，都有 $f'(x) \neq 0$，且 $f\mu$ 是迭代函数系 $\{S_a := f \circ T_a \circ f^{-1}\}_{a\in\mathcal{A}}$ 的自共形测度。[1] 那么存在一个字 $a_1, \ldots, a_k) \in \cup_{n=1}^\infty \mathcal{A}^n$，使得

$$f\mu\left(\{x : (S_{a_1} \circ \cdots \circ S_{a_k})''(x) = 0\}\right) > 0.$$

推论 1.12. 假设 $\{S_a\colon [0,1] \to [0,1]\}_{a\in\mathcal{A}}$ 是一个 C^2 迭代函数系，使得对于每个$(a_1, \ldots, a_k) \in \cup_{n=1}^\infty \mathcal{A}^n$，我们都有 $(S_{a_1} \circ \cdots \circ S_{a_k})''(x) \neq 0$，除至多有限多个 $x \in [0,1]$ 外皆如此。那么，与 $\{S_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ 相关联的每个自共形测度都是 *Rajchman* 测度，只要满足以下任一性质：

(1) $\{S_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ 不能通过任何 C^2 微分同胚共轭为 C^2 线性迭代函数系统。*(2)* $\{S_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ 可以通过 C^2 微分同胚共轭为自相似迭代函数系。

[1]由于假设 $f'(x) \neq 0$ 对所有 $x \in [0,1]$ 以及引理 3.3，我们总能对迭代函数系进行迭代，使其满足第三个条件。

证明。 如果 $\{S_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ 不能共轭为 C^2 线性迭代函数系统，那么根据 [5, 9] 上述结果，每个自共形测度都具有多项式傅里叶衰减，因此是 Rajchman 测度。[2]

现在假设我们处于后一种情形，并且存在一个自相似迭代函数系$\{T_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ 以及一个 C^2 微分同胚 f，使得 $S_a = f \circ T_a \circ f^{-1}$ 对所有 $a \in \mathcal{A}$都成立。由于f 是一个微分同胚，根据反函数定理，它的导数必定处处非零。令 ν 为 $\{S_a\}_{a\in\mathcal{A}}$的一个自共形测度，那么直接由不变关系 $\nu = \sum_{a\in\mathcal{A}} p_a S_a \nu$ 可知，对于某个 $\{T_a\}_{a\in\mathcal{A}}$的自相似测度 μ，有 $\nu = f\mu$。由我们的二阶导数假设以及 ν 是非原子测度这一事实可得

$$\nu(\{x : (S_{a_1} \circ \cdots \circ S_{a_k})''(x) = 0\}) = 0 \qquad \text{for all } (a_1, \ldots, a_k) \in \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}^n.$$

因此，根据定理 1.11 (2)，再结合这一事实 $\nu = f\mu$，必有 $\mu(\{x : f''(x) = 0\}) = 0$。现在应用定理 1.11 (1)，可知 ν 是 Rajchman。由于 ν是 $\{S_a\}_{a\in\mathcal{A}}$的任意一个自共形测度，故证明完毕。□

如果推论1.12中出现的第二种情形能够推广到一般线性迭代函数系，而不只是自相似迭代函数系，那么该推论中的非线性条件就能为来自 C^2 迭代函数系的自共形测度具有 Rajchman 性质提供一个很好的充分条件。我们强调，存在一些线性 C^2 迭代函数系，对任何 C^2微分同胚而言，它们都不与自相似迭代函数系共轭（见 [2]），而定理1.11 (1）的证明 [3,7] 用到了推前测度的一个结果，该结果仅针对自相似测度的推前测度作了阐述。推论1.12 还表明，如果一个迭代函数系与自相似系统共轭，且对问题1.10给出了否定回答，那么它必然表现出某种微妙的行为。也就是说，迭代函数系中确保 Rajchman 性质的机制，不可能强到足以确保多项式傅里叶衰减。

我们的下一个结果表明，尽管有推论 1.12 及其所提供的、暗示对问题 1.10 作出肯定回答的证据，上文提到的微妙行为实际上是可能的，并且对问题 1.10的回答即使对于 C^∞ 迭代函数系而言，在很强的意义上也是否定的。

定理 1.13. 对每一个函数 ϕ: $[0,\infty) \to (0,1]$，使得 $\phi(\xi) \to 0$（当 $\xi \to \infty$ 时），存在一个 *Rajchman*自共形测度 μ，其支撑集包含于 $[0,1]$，并由一个 C^∞ 迭代函数系 $\{S_a$: $[0,1] \to [0,1]\}_{a\in\mathcal{A}}$ 生成，使得对每一个 $(a_1, \ldots\ldots, a_k) \in \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}^n$，除至多有限多个 $x \in [0,1]$ 外，我们有 $(S_{a_1} \circ \cdots \circ S_{a_k})''(x) \neq 0$，并且

$$\limsup_{\xi\to\infty} \frac{|\widehat{\mu}(\xi)|}{\phi(\xi)} > 0.$$

定理1.13 还表明，由 [3,5,7,9] 得出的“含有非仿射映射的解析迭代函数系统的自共形测度具有多项式傅里叶衰减”这一结果，如果将“解析”替换为“C^∞”，便会彻底失效。

[2]在这种情况下，我们实际上并不需要关于（$S_{a_1} \circ \cdots \circ S_{a_k}$）″的假设。

定理 1.13 的证明是本文最具挑战性的部分之一；其策略可概述如下。正如我们所讨论的，在温和条件下，自相似测度的推前测度是自共形测度。定理 1.13 中的测度 μ将构造为一个支撑集包含 0 的非Rajchman自相似测度在 $[0,1]$ 上的推前测度，所用映射具有 $x+h(x)$ 的形式；技术性陈述见命题 3.7。这里， h将是 C^∞ ，并且它及其所有导数在 0 处都为零，但对所有 $x>0$ ， $h(x)>0$ （因此 h 在 0 处不是解析的）。此外， h 将以极快的速度趋于 0，而这种速度取决于 ϕ；并且满足这样一种性质：如果 $0<x<y$ ，那么即使 x 与 y之间的间隔相对较小，也意味着 $h''(x)$远小于 $h''(y)$。随后，对于某个精心选取的 $0<x_1<x_2$，我们分别考察三个区域$0\le x\le x_1$、 $x_1<x<x_2$ 和 $x_2\le x$ 。由于 h 在 $[0,x_1]$ 上非常小，而 μ 是非Rajchman缺位测度，因此存在某个较大的频率 ξ （取决于 x_1 ，并且随着 $x_1\to 0^+$而迅速趋于 ∞ ，其方式取决于 ϕ） ，使得 $\mu|_{[-x_1,x_1]}(\xi)\approx\mu([-x_1,x_1])$。我们确保 x_1和 x_2足够接近，使得第二项的贡献很小。我们结合先前工作 [7], 中关于自相似测度非线性推前测度的定量傅里叶衰减结果，以及 h''的快速衰减，证明第三项的贡献很小。最后，我们必须证明可以选择h ，使得生成 μ 的共形映射满足所需的非线性条件；为此，我们对 h 的构造进行随机化，并证明典型的选择都有效。

与定理 1.3中的自相似情形一样，我们可以给出一个自共形测度的显式例子，其傅里叶变换的衰减至少与 $(\log\log\xi)^{-1}$一样缓慢。

定理 *1.14.* 设 $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ 由 $f(x)=x+\exp(-\exp(x^{-2}))$ 给出，其中 $x\neq 0$(且 $f(0)=0$)，并设 μ 是迭代函数系 $\{T_1(x)=x/3, T_2(x)=(x+2)/3\}$ 及 $(1/2,1/2)$ 概率向量对应的康托–勒贝格测度。那么， $f\mu$ 是某个由 C^∞ 个压缩映射 $\{S_a\colon [0,f(1)]\to[0,f(1)]\}_{a\in\{1,2\}}$组成的迭代函数系的 *Rajchman*自共形测度，使得对所有 $(a_1,\dots,a_k)\in\cup_{n=1}^\infty\{1,2\}^n$ ，都有 $(S_{a_1}\circ\cdots\circ S_{a_k})''(y)\neq 0$ ，除至多有限多个 $y\in[0,f(1)]$ 外。此外，

$$\limsup_{\xi\to\infty}((\log\log\xi)|\widehat{f\mu}(\xi)|)>0.$$

我们还有以下结果，其证明与定理 1.13 的证明有些相似，不过技术性没有那么强。该定理表明，自相似测度的非线性推前测度可以是 Rajchman 测度，但沿着 每一个 子序列都具有慢傅里叶衰减。不过，至关重要的是，在该定理中，这些推前测度已无法再实现为自共形测度，并且它们是零维的。

定理 1.15。 对于每个满足 $\phi\colon[0,\infty)\to(0,1]$ 且当 $|\xi|\to\infty$ 时 $\phi(\xi)\to 0$ 的函数，都存在一个严格递增的 C^∞ 函数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ，使得以下

成立：如果 μ 是实数集上的任意一个支撑集包含0的自相似测度，那么 $f\mu$ 是 *Rajchman*，但

$$\liminf_{|\xi|\to\infty} \frac{|\widehat{f\mu}(\xi)|}{\phi(|\xi|)} > 0. \tag{1.8}$$

注意，在定理1.15中，f 取决于 ϕ，但不取决于测度 μ。在此背景下，我们还可以构造一个推前测度的显式例子，其傅里叶变换的衰减速度至少与 $(\log\log\xi)^{-1}$一样慢，所用的函数与定理 1.14中的函数非常相似。

定理 1.16。设 $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ 由 $f(x)=\exp(-\exp(x^{-2}))$ 给出，其中 $x\neq 0$（且 $f(0)=0$），并设 μ 是一个支撑集包含0的自相似测度。那么$f\mu$ 是 *Rajchman* 测度，但是

$$\liminf_{|\xi|\to\infty}((\log\log|\xi|)|\widehat{f\mu}(\xi)|) > 0.$$

备注 1.17。由于自相似测度和自共形测度具有正的 Frostman 指数（见 [21, 命题 2。2] 并注意证明可推广到自共形测度），我们可以通过多种方式看出，定理 1.13中的 lim sup 不可能替换为 lim inf。例如，Frostman 指数（或 L^∞ 维数）是下相关维数（或 L^2 维数）的下界，而后者可由 $\int_{-R}^{R}|\widehat{\mu}(\xi)|^2d\xi$ 在 $R\to\infty$时的增长率来刻画，见 [22, 引理 2。5]。不过，定理 1.15 和 1.16的结论在 lim inf 下仍然成立；这是可能的，因为这些陈述中出现的推前测度具有为零的相关维数。

备注 1.18。定理 1.14 和 1.16 仅使用了推前函数的一个特定例子 f；在保持属于该 C^∞ 类的同时，可以对它们进行修改，从而实现远慢于（$\log\log|\xi|$）$^{-1}$的衰减。

高维情形。自然会问，在高维情形下，自相似测度和自共形测度的傅里叶衰减性质如何。

备注 1.19。• 定理 1.2 在高维情形下仍然成立，见下文定理 2.3 。此外，根据定理 2.3的证明，通过取定理 1.3中的测度（或备注 1.4中的任一测度）的 $\mathbb{R}^d$ 重笛卡尔积，可以得到定义在 d上的、具有极慢傅里叶衰减的 Rajchman 齐次自相似测度。

- 对于 $d\geq 2$，由于 $\mathbb{R}^d$ 上的共形映射是解析的，因此似乎可以合理地认为，$\mathbb{R}^d$ 中每一个非自相似、且对 $\mathbb{R}^d$ 的每个真子流形赋予零质量的自共形测度都应具有多项式傅里叶衰减。相关证据见 [6, 8, 11]。因此，几乎没有希望得到定理1.13 在高维自共形测度情形下的类似结果。

论文结构。第2 节讨论自相似测度。在第2.1 节中，我们证明定理1.2 ，它是更强结果定理2.1的推论；该结果在高维中成立，并且对 t的一个拓扑泛型集成立。第 2.2 节讨论显式自相似测度，我们证明定理1.3。在第2.3 节中，我们证明定理1.7。

第 3节与非线性分形测度有关。我们先在第 3.1 节介绍预备知识，然后在第 3.2 节证明定理 1.11。第 3.3节包含定理 1.15的证明，而第 3.4 节包含定理 1.13 的较为技术性的证明，以及一个关于缺位数字测度的推前测度的辅助结果（命题 3.7）。最后，我们在第 3.5 节证明定理 1.14 ，该定理给出了一个具有慢傅里叶衰减的自共形测度的明确例子；我们还论证了例 1.9中的其余结论。

记号。我们用 $A \lesssim B$ 表示 $A \leq CB$ 对某个一致常数 C成立。我们还采用标准的 $f = O(g)$ 记号，表示 $f \leq Cg$ 对某个一致常数C成立；而 $f = o(g)$ 表示 $f/g \to 0$。定义在 $\mathbb{R}$ （或其某个子区间， $\mathbb{R}$视上下文而定）上的二次连续可微函数类记作 C^2，而无穷次可微函数类记作 C^∞。我们有时使用 Knuth 上箭头记号 $\uparrow\uparrow$，见（1.2）。

2. Proofs of self-similar theorems

考虑如下参数化的迭代函数系族

$$\left\{S_0(x) = \frac{x}{10},\ S_1(x) = \frac{x+1}{10},\ S_2(x) = \frac{x+t}{10}\right\},$$

其中 $t \in [0,1]$。在本节中，我们始终令 μ_t 为与该迭代函数系及均匀概率向量 $(1/3,\ 1/3,\ 1/3)$ 相对应的自相似测度。

2.1. 主要证明。回顾一下， G_δ 集是可数个开集的交。本节的大部分工作都致力于证明以下结果。

命题 2.1。设 $\phi\colon [0,\infty) \to (0,1]$ 满足 $\lim_{\xi\to\infty} \phi(\xi) = 0$。那么存在一个稠密的 G_δ 集 $A \subset [0,1]$，使得对所有 $t \in A$，我们都有

$$\limsup_{\xi\to\infty} \frac{|\widehat{\mu_t}(\xi)|}{\phi(\xi)} > 0.$$

结合命题 2.1 与 Br´emont [14]的一个结果，可得以下更强的陈述，而该陈述又蕴含定理 1.2。

命题 2.2. 设 $\phi\colon [0,\infty) \to (0,1]$ 满足 $\lim_{\xi\to\infty} \phi(\xi) = 0$。则存在一个稠密 G_δ 集 $A \subset [0,1]$，使得对所有 $t \in A$，测度 μ_t 是 *Rajchman* 的，并且满足

$$\limsup_{\xi\to\infty} \frac{|\widehat{\mu_t}(\xi)|}{\phi(\xi)} > 0.$$

命题 2.2的证明，假定命题 2.1。设 ϕ 已给定，并设 A 是相应的稠密 G_δ 集，由命题 2.1给出。设 $A' := A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$。由于无理数集是稠密 G_δ 集，且两个稠密 G_δ 集的交是稠密 G_δ 集，为证明所需结论成立，只需证明若 $t \in A'$ 则 μ_t 是 Rajchman 的。

Br´emont 的 [14, 定理 2。5] 告诉我们，如果 μ_t 不是 Rajchman，那么就存在一个仿射映射 $g(x) = ax + b$(其中 $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$， $b \in \mathbb{R}$)，使得 $\{g^{-1} \circ S_i \circ g\}_{i=0}^2$属于 Pisot 形式。对于这样的仿射映射 g，简单计算可得

$$\begin{aligned}(g^{-1} \circ S_0 \circ g)(x) &= \frac{x}{10} + \frac{b}{10a} - \frac{b}{a},\\ (g^{-1} \circ S_1 \circ g)(x) &= \frac{x}{10} + \frac{b}{10a} - \frac{b}{a} + \frac{1}{10a},\\ (g^{-1} \circ S_2 \circ g)(x) &= \frac{x}{10} + \frac{b}{10a} - \frac{b}{a} + \frac{t}{10a}.\end{aligned}$$

我们省略 Pisot 迭代函数系的定义（定义见 [14,定义 2。3] ），这里只指出，由于共同的收缩比 $1/10$是一个整数的倒数，如果 $\{g^{-1} \circ S_i \circ g\}_{i=0}^2$ 是 Pisot 迭代函数系，那么上文列出的每个映射的平移参数都属于 $\mathbb{Q}$。考察前两个方程可知，如果 $\{g^{-1} \circ S_i \circ g\}_{i=0}^2$ 属于 Pisot 形式，那么 a， $b \in \mathbb{Q}$。结合这一点考察第三个方程，我们看到这进而意味着$t \in \mathbb{Q}$。但这与我们的假设矛盾，因此 $t \in A'$ 是无理数。由此， $\{g^{-1} \circ S_i \circ g\}_{i=0}^2$ 永远不属于 Pisot 形式。因此，根据 Br´emont 的结果， μ_t 确实是 Rajchman。□

我们也可以利用命题 2.2 证明一个更强的陈述，该陈述在高维中同样成立。博雷尔概率测度 μ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的傅里叶变换定义为

$$\widehat{\mu}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}, \qquad \widehat{\mu}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle} d\mu(\mathbf{x}), \tag{2.1}$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是欧几里得内积。我们称 $\mathbb{R}^d$ 上的博雷尔概率测度为Rajchman测度，如果$\lim_{\|\boldsymbol{\xi}\| \to \infty} \widehat{\mu}(\boldsymbol{\xi}) = 0$。

定理 2.3。 设 $d \geq 1$ 为整数，且 $\phi\colon [0, \infty) \to (0, 1]$ 满足 $\lim_{\xi \to \infty} \phi(\xi) = 0$。那么存在一个稠密的 G_δ 集 $A \subset [0, 1]$ ，使得对所有 $t \in A$，测度$_{d \text{ terms}}\mu_t^d := \mu_t \times \cdots \times \mu_t$（它是~~$d$重乘积迭~~代函数系对应的齐次自相似测度）都是 *Rajchman* 测度，并满足

$$\limsup_{\xi \to \infty} \frac{|\widehat{\mu_t^d}((\xi, 0, \ldots, 0))|}{\phi(\xi)} > 0.$$

定理 2.3的证明，假设命题 2.2成立。 设 A 如命题 2.2 所述，并固定 $t \in A$。那么对所有 $\xi_1, \dots, \xi_d \in \mathbb{R}$, (2.1) 以及 μ_t^d的乘积结构可得

$$\widehat{\mu_t^d}((\xi_1, \dots, \xi_d)) = \prod_{i=1}^{d} \widehat{\mu_t}(\xi_i). \tag{2.2}$$

此外， $\widehat{\mu_t}(0) = 1$，因此根据命题 2.2，对所有 $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\limsup_{\xi \to \infty} \frac{|\widehat{\mu_t^d}((\xi, 0, \dots, 0))|}{\phi(\xi)} = \limsup_{\xi \to \infty} \frac{|\widehat{\mu_t}(\xi)|}{\phi(\xi)} > 0.$$

此外，由于（2.2）、 $|\widehat{\mu_t}$（ξ）对所有 $| \leq 1$ 成立，且 μ_t 具有 Rajchman 性质，因此可得

$$|\widehat{\mu_t^d}((\xi_1, \dots, \xi_d))| \leq \min_{1 \leq i \leq d} |\widehat{\mu_t}(\xi_i)| \leq \sup_{|\xi| \geq \max_{1 \leq i \leq d} |\xi_i|} |\widehat{\mu_t}(\xi)| \xrightarrow[|(\xi_1, \dots, \xi_d)| \to \infty]{} 0.$$

因此 μ_t^d 具有 Rajchman 性质。 □

剩下的工作是证明命题 2.1。我们将经常使用以下事实：$\mu_t = \pi_t \mathbb{P}$ 对每个 $t \in [0, 1]$, 其中 $\mathbb{P}$ 是定义在 $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$上的均匀伯努利测度，而 π_t: $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ 由下式给出

$$\pi_t((a_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j \geq 1 : a_j \in \{0,1\}} \frac{a_j}{10^j} + \sum_{j \geq 1 : a_j = 2} \frac{t}{10^j}. \tag{2.3}$$

定义齐次自相似测度 μ_t 的另一种等价方式是使用无限卷积公式

$$\mu_t = *_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3}(\delta_0 + \delta_{1/10^j} + \delta_{t/10^j}).$$

由此得到以下公式，我们也将经常使用它：

$$\widehat{\mu_t}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(1 + e^{2\pi i \xi / 10^j} + e^{2\pi i t / 10^j}\right).$$

现在我们整理一些有用的引理。

引理 2.4. 设 $N \in \mathbb{N}$ 和 $\kappa > 0$。若 $|t - t'| < \frac{\kappa}{2\pi N}$，则 $|\widehat{\mu_t}(\xi) - \widehat{\mu_{t'}}(\xi)| < \kappa$ 对所有 $\xi \in [-N, N]$均成立。

证明。 设 N, κ, t 和 t' 如引理陈述所述。对于 $\xi \in [-N, N]$，我们注意到

$$\begin{aligned}
&|\widehat{\mu_t}(\xi) - \widehat{\mu_{t'}}(\xi)| \\
&= \left| \int e^{2\pi i \xi x} d\mu_t(x) - \int e^{2\pi i \xi x} d\mu_{t'}(x) \right| \\
&= \left| \int e^{2\pi i \xi \left(\sum_{j:a_j \in \{0,1\}} \frac{a_j}{10^j} + \sum_{j:a_j=2} \frac{t}{10^j} \right)} - e^{2\pi i \xi \left(\sum_{j:a_j \in \{0,1\}} \frac{a_j}{10^j} + \sum_{j:a_j=2} \frac{t'}{10^j} \right)} d\mathbb{P}((a_j)_j) \right| \\
&\leq \int \left| e^{2\pi i \xi \left(\sum_{j:a_j \in \{0,1\}} \frac{a_j}{10^j} + \sum_{j:a_j=2} \frac{t}{10^j} \right)} - e^{2\pi i \xi \left(\sum_{j:a_j \in \{0,1\}} \frac{a_j}{10^j} + \sum_{j:a_j=2} \frac{t'}{10^j} \right)} \right| d\mathbb{P}((a_j)_j) \\
&\leq \int 2\pi|\xi| \left| \left(\sum_{j:a_j \in \{0,1\}} \frac{a_j}{10^j} + \sum_{j:a_j=2} \frac{t}{10^j} \right) - \left(\sum_{j:a_j \in \{0,1\}} \frac{a_j}{10^j} + \sum_{j:a_j=2} \frac{t'}{10^j} \right) \right| d\mathbb{P}((a_j)_j) \\
&\leq 2\pi|\xi||t - t'| \\
&\leq \kappa.
\end{aligned}$$

在倒数第三行中，我们用到了 $x \mapsto e^{2\pi i \xi x}$ 是利普希茨函数，且利普希茨常数为 $2\pi|\xi|$。在最后一行中，我们用到了 $\xi \in [-N, N]$，以及 $|t - t'| \leq \frac{\kappa}{2\pi N^\circ}$ □

引理 2.5. 存在 $c > 0$，使得以下结论成立。设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $t = p/10^n$，其中 $p \in \mathbb{N}$ 满足 $0 \leq p \leq 10^n$。那么对于所有整数 $L > n$，我们有

$$|\widehat{\mu_t}(10^L)| \geq c \left(\frac{1}{3} \right)^n.$$

证明。 对于 $t = p/10^n$，我们有

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu_t}(10^L) &= \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(1 + e^{2\pi i 10^{L-j}} + e^{2\pi i p 10^{L-j-n}} \right) \\
&= \prod_{j=1}^{L-n} \frac{1}{3} \left(1 + e^{2\pi i 10^{L-j}} + e^{2\pi i p 10^{L-j-n}} \right) \\
&\quad \times \prod_{j=L-n+1}^{L} \frac{1}{3} \left(1 + e^{2\pi i 10^{L-j}} + e^{2\pi i p 10^{L-j-n}} \right) \\
&\quad \times \prod_{j=L+1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(1 + e^{2\pi i 10^{L-j}} + e^{2\pi i p 10^{L-j-n}} \right).
\end{aligned}$$

我们将分别处理上述三个项。对于第一项，有

$$\prod_{j=1}^{L-n} \frac{1}{3} \left(1 + e^{2\pi i 10^{L-j}} + e^{2\pi i p 10^{L-j-n}} \right) = 1 \tag{2.4}$$

since $10^{L-j}, 10^{L-j-n} \in \mathbb{N}$ 只要满足 $1 \le j \le L-n$。对于第二项，有

$$\left| \prod_{j=L-n+1}^{L} \frac{1}{3}\left(1 + e^{2\pi i 10^{L-j}} + e^{2\pi i p 10^{L-j-n}}\right) \right| \ge \left(\frac{1}{3}\right)^n \tag{2.5}$$

因为

$$\left|1 + e^{2\pi i 10^{L-j}} + e^{2\pi i p 10^{L-j-n}}\right| = |2 + e^{2\pi i p 10^{L-j-n}}| \ge 1$$

对于 $j \le L$。对于第三项，我们首先指出，对于 $j \ge L+1$，有

$$|1 - e^{2\pi i 10^{L-j}}| \le 2\pi 10^{L-j}$$

and

$$|1 - e^{2\pi i p 10^{L-j-n}}| \le 2\pi p 10^{L-j-n} \le 2\pi 10^{L-j}.$$

这里我们用到了 $x \mapsto e^{2\pi i x}$ 是利普希茨函数，其利普希茨常数为 2π；在最后一个不等式中，我们用到了 $0 \le p \le 10^n$。因此，对于第三项，我们有

$$\begin{aligned}\left| \prod_{j=L+1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(1 + e^{2\pi i 10^{L-j}} + e^{2\pi i p 10^{L-j-n}}\right) \right| &= \prod_{j=L+1}^{\infty} \frac{1}{3}\left|1 + e^{2\pi i 10^{L-j}} + e^{2\pi i p 10^{L-j-n}}\right| \\ &\ge \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4\pi}{3\cdot 10^j}\right).\end{aligned}$$

我们强调，上述最后一项严格为正，且与 L 和 n 无关；记其为 c。综上，我们证明了

$$\left| \prod_{j=L+1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(1 + e^{2\pi i 10^{L-j}} + e^{2\pi i p 10^{L-j-n}}\right) \right| \ge c. \tag{2.6}$$

结合（2.4）、（2.5）和（2.6）可得

$$|\widehat{\mu_t}(10^L)| \ge c\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

至此，我们完成了证明。 □

利用上述引理，我们现在可以证明命题 2.1。

命题 2.1 的证明。设 $\phi\colon [0,\infty) \to (0,1]$ 满足 $\lim_{\xi\to\infty}\phi(\xi) = 0$，并设 c 如引理 2.5所述。由于 $\phi(\xi) \to 0$ 当 $\xi \to \infty$时，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在某个 L_n 充分大的，使得

$$c\left(\frac{1}{3}\right)^n \ge 2\phi(10^{L_n}). \tag{2.7}$$

由引理 2.5，该不等式意味着，若 $t = p/10^n$，则

$$|\widehat{\mu_{p/10^n}}(10^{L_n})| \ge 2\phi(10^{L_n}). \tag{2.8}$$

现在，我们为每个 $n \in \mathbb{N}$ 关联集合

$$X_n = \bigcup_{0\le p\le 10^n}\left(\frac{p}{10^n} - \frac{\phi(10^{L_n})}{2\pi 10^{L_n}}, \frac{p}{10^n} + \frac{\phi(10^{L_n})}{2\pi 10^{L_n}}\right). \tag{2.9}$$

应用引理 2.4，取 $N = 10^{L_n}$ 和 $\kappa = \phi(10^{L_n})$，若 $t \in X_n$ 则

$$|\widehat{\mu_t}(10^{L_n}) - \widehat{\mu_{p/10^n}}(10^{L_n})| \leq \phi(10^{L_n})$$

对于 some $0 \leq p \leq 10^n$。由这个不等式和 (2.8) 可知，若 $t \in X_n$ 则

$$|\widehat{\mu_t}(10^{L_n})| \geq \phi(10^{L_n}). \tag{2.10}$$

现在定义

$$A := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} X_n.$$

集合 A 是一个稠密的 G_δ 集合，这是贝尔纲定理的结论。此外，每个 $t \in A$ 都满足

$$|\widehat{\mu_t}(10^{L_n})| \geq \phi(10^{L_n})$$

对无穷多个 n 都成立。我们的结果由此得出。 □

2.2. **具有慢傅里叶衰减的显式自相似测度。** 给定一个特定的函数 ϕ，不难找到一个 t的例子，使命题2.2 的结论成立。事实上，可以根据命题2.1证明中的2.7式定义 L_1, L_2, ... L_2。此外，设 $k_1 < k_2 < \cdots$ 是一个（快速增长的）正整数序列，递归定义该序列，使得对所有 $n \geq 1$ 都有 $k_{n+1} > 2k_n$，并且

$$\frac{1}{10^{k_{n+1}}} < \frac{\phi(10^{L_{k_n}})}{4\pi 10^{L_{k_n}}}. \tag{2.11}$$

Let

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k_n}}.$$

那么，对所有 $n \geq 1$，都可以将 $\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{10^{k_m}}$ 写成 $p/10^{k_n}$ 的形式，其中 $0 \leq p \leq 10^{k_n}$是某个整数。此外，

$$t - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{10^{k_m}} = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k_m}} < \sum_{m=k_{n+1}}^{\infty} \frac{1}{10^m} < \frac{2}{10^{k_{n+1}}} < \frac{\phi(10^{L_{k_n}})}{2\pi 10^{L_{k_n}}},$$

其中最后一个不等式用到了（2.11）。我们已证明，对所有整数$n \geq 1$，都有 $t \in X_{k_n}$，因此 $|\widehat{\mu_t}(10^{L_{k_n}})| \geq \phi(10^{L_{k_n}})$，如（2.10）所示。此外，由于$k_{n+1} > 2k_n$ 对所有 n都成立， t 的十进制展开中包含无穷多个 1，这些 1 之间隔着长度无界递增的零串。因此，该展开并非最终周期性，这意味着 $t \notin \mathbb{Q}$。事实 μ_t 是 Rajchman，可由 [14, 定理 25]以及与命题2.2证明中类似的论证得出。

接下来，我们在 $\phi(\xi) = (\log\log \xi)^{-1}$ 的情形下实施这一策略，以证明定理1.3。这里 t 还具有一个额外优点：它有简单的闭式表达。

定理1.3的证明。首先注意到，基于上文所述的原因，由（1.3）定义的量是无理数，因此 μ_t 是 Rajchman。

现在令 $\phi(\xi) = (\log\log\xi)^{-1}$，其中 $\xi \geq 10$。回顾 (1.2) 中的 Knuth 记号，对所有 $n \in \mathbb{N}$，令 $L_{10\uparrow\uparrow n} = 10 \uparrow\uparrow (n+2)$。对于这一选择的 ϕ 和 $L_{10\uparrow\uparrow n}$，按照 (2.9) 定义集合 $X_{10\uparrow\uparrow 1}$、$X_{10\uparrow\uparrow 2}$、.....。注意，只有当 m 具有某个正整数 n 所对应的 $m = 10 \uparrow\uparrow n$ 形式时，我们才关注整数 L_m 和集合 X_m。对于所有充分大的 n，取引理 2.5 中的 c，

$$\phi(10^{L_{10\uparrow\uparrow n}}) = \phi(10 \uparrow\uparrow (n+3)) \leq \frac{1}{10 \uparrow\uparrow (n+1)} < \frac{c}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{10\uparrow\uparrow n}.$$

因此，(2.7) 对所有充分大的、形如 $10 \uparrow\uparrow n$ 的整数均成立。

对于所有充分大的整数 n，我们还有以下下界：

$$\phi(10^{L_{10\uparrow\uparrow n}}) = \frac{1}{(\log\log 10) + (\log 10)\cdot(10 \uparrow\uparrow (n+1))} \geq \frac{1}{2\log 10}\cdot\frac{1}{10 \uparrow\uparrow (n+1)}.$$

利用这一点以及以下事实：

$$10^{L_{10\uparrow\uparrow(3n-1)}} = 10 \uparrow\uparrow (3n+2) \tag{2.12}$$

可得，对于所有充分大的 n，

$$\begin{aligned}
\frac{\phi(10^{L_{10\uparrow\uparrow(3n-1)}})}{2\pi 10^{L_{10\uparrow\uparrow(3n-1)}}} &\geq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{10 \uparrow\uparrow (3n+2)}\cdot\frac{1}{2\log 10}\cdot\frac{1}{10 \uparrow\uparrow (3n)} \\
&> \frac{1}{(10 \uparrow\uparrow (3n+2))^2} \\
&= \frac{1}{10^{2\cdot(10\uparrow\uparrow(3n+1))}} \\
&> \frac{2}{10 \uparrow\uparrow (3n+3)} \\
&> \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{10 \uparrow\uparrow (3m)} \\
&= t - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{10 \uparrow\uparrow (3m)}.
\end{aligned}$$

这意味着 $t \in X_{10\uparrow\uparrow(3n-1)}$ 对于所有充分大的 n。命题 2.1（利用引理 2.4 和 2.5）的证明给出 $|\widehat{\mu_t}(10^{L_{10\uparrow\uparrow(3n-1)}})| \geq \phi(10^{L_{10\uparrow\uparrow(3n-1)}})$，对足够大的$n$如（2.10）所示。代入（2.12）可得

$$|\widehat{\mu_t}(10 \uparrow\uparrow (3n+2))| \geq \phi(10 \uparrow\uparrow (3n+2))$$

对于所有充分大的 n，正如所需。 □

关于注记 1.4，请注意，如果 $t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10\uparrow\uparrow (kn)}$，那么几乎相同的证明也适用于 $\phi(\xi) = (\log\underbrace{\circ\cdots\circ\log}_{k-1\text{ times}}(\xi))^{-1}$和 $L_n = 10 \uparrow\uparrow (n+k-1)$。

2.3. **定理 1.7的证明。**

定理 1.7 的证明。 定义 $\psi(1)$ $\psi(2)$.....如下:

$$\psi(n) = \begin{cases} \frac{1}{10\uparrow\uparrow 3} & \text{for } 1 \leq n \leq (10 \uparrow\uparrow 5) - (10 \uparrow\uparrow 2), \\ \frac{1}{10\uparrow\uparrow(3j)} & \text{for } j \geq 2, (10 \uparrow\uparrow (3j-1)) - (10 \uparrow\uparrow (3j-4)) < n \leq \\ & (10 \uparrow\uparrow (3j+2)) - (10 \uparrow\uparrow (3j-1)). \end{cases}$$

显然，对于所有整数 $N > 1$，我们有 $\Psi(N) < N$，因此 $\limsup_{N\to\infty} \frac{\log \Psi(N)}{\log N} \leq 1$。对于所有 $j \geq 2$,

$$\begin{aligned} \Psi(10 \uparrow\uparrow (3j-1)) &> \frac{1}{10 \uparrow\uparrow (3j-3)} \cdot ((10 \uparrow\uparrow (3j-1)) - (10 \uparrow\uparrow (3j-4))) \\ &> \frac{10 \uparrow\uparrow (3j-1)}{10 \uparrow\uparrow (3j-2)}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{\log \Psi(10 \uparrow\uparrow (3j-1))}{\log(10 \uparrow\uparrow (3j-1))} \geq 1 - \liminf_{j\to\infty} \frac{\log(10 \uparrow\uparrow (3j-2))}{\log(10 \uparrow\uparrow (3j-1))} = 1.$$

因此 $\limsup_{N\to\infty} \frac{\log \Psi(N)}{\log N} = 1$ 且 (1) 成立。

为了完成证明，只需构造一个 $\gamma \in (0,1)$，使得

$$\operatorname{dist}(10^{n-1}x - \gamma, \mathbb{Z}) > \psi(n)$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$和 $x \in X_t$。我们将$\gamma_n)_{n=1}^{\infty} \in \{0,\ldots,9\}^{\mathbb{N}}$归纳定义，并且 γ的十进制展开为 $\gamma = 0.\gamma_1\gamma_2\ldots$。我们可以做出许多不同的选择，但为明确起见，令 $\gamma_1 = \cdots = \gamma_{10\uparrow\uparrow 2} = 5$。令 $x \in X_t$为任意数，并将其十进制展开写作 $0.x_1x_2\ldots$。由（1.3）和（2.3），可知存在（a_k） $\in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$使得

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k:a_k=1} \frac{1}{10^k} + \sum_{k:a_k=2} \frac{t}{10^k} \\ &= \sum_{k:a_k=1} \frac{1}{10^k} + \frac{1}{10 \uparrow\uparrow 3} \sum_{k:a_k=2} \frac{1}{10^k} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{10 \uparrow\uparrow (3l)} \sum_{k:a_k=2} \frac{1}{10^k}. \end{aligned}$$

因此

$$0 < x - \sum_{1\leq k<10\uparrow\uparrow 5 : a_k=1} \frac{1}{10^k} - \frac{1}{10 \uparrow\uparrow 3} \sum_{1\leq k<10\uparrow\uparrow 5 - 10\uparrow\uparrow 2 : a_k=2} \frac{1}{10^k} < \frac{1}{10^{(10\uparrow\uparrow 5)-1}}.$$

因此，对于 $x_n \in \{0,1,2\}$，有 $1 \leq n < 10 \uparrow\uparrow 5$。

U利用 $x_n \in \{0,1,2\}$ 对所有 $1 \leq n < 10 \uparrow\uparrow 5$ 和 $x \in X_t$ 均成立这一事实，我们可知 t

$$\operatorname{dist}(10^{n-1}x - \gamma, \mathbb{Z}) > \psi(n)$$

对所有 $1 \leq n \leq (10 \uparrow\uparrow 5)$ –$(10 \uparrow\uparrow 2)$，以及在 γ 满足 $\gamma_1 =$时的 $x \in X_t$ $\cdots = \gamma_{10\uparrow\uparrow 2} = 5$。现在假设，对于某个正整数 j，我们已经定义了

γ_1，……，$\gamma_{10\uparrow\uparrow(3j-1)}$ 并证明，对于每个十进制展开以γ_1，……，$\gamma_{10\uparrow\uparrow(3j-1)}$ 开头的 γ，都有

$$\operatorname{dist}(10^{n-1}x-\gamma,\mathbb{Z})>\psi(n)$$

对所有 $1\le n\le(10\uparrow\uparrow(3j+2))-(10\uparrow\uparrow(3j-1))$ 以及 $x\in X_t$。令 n 满足 $(10\uparrow\uparrow(3j+2))-(10\uparrow\uparrow(3j-1))<n\le(10\uparrow\uparrow(3j+5))-(10\uparrow\uparrow(3j+2))$。记 (2.13)
$t=t^{(1)}+t^{(2)}$，其中

$$t^{(1)}=\sum_{k=1}^{j+1}\frac{1}{10\uparrow\uparrow(3k)};\qquad t^{(2)}=\sum_{k=j+2}^{\infty}\frac{1}{10\uparrow\uparrow(3k)}.$$

令 $x\in X_t$，并令 $(a_k)\in\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ 满足 $\pi_t((a_k))=x$。由 (1.3) 和 (2.3)，可写成 $x=x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}$，其中

$$\begin{aligned}
x^{(1)}&:=\sum_{1\le k<n:a_k=1}\frac{1}{10^k}+\sum_{1\le k<n-(10\uparrow\uparrow(3j+2)):a_k=2}\frac{t^{(1)}}{10^k},\\
x^{(2)}&:=\sum_{n\le k<n+(10\uparrow\uparrow(3j+2)):a_k=1}\frac{1}{10^k}+\sum_{n-(10\uparrow\uparrow(3j+2))\le k<n+(10\uparrow\uparrow(3j+2)):a_k=2}\frac{t^{(1)}}{10^k},\\
x^{(3)}&:=\sum_{k\ge n+(10\uparrow\uparrow(3j+2)):a_k=1}\frac{1}{10^k}+\sum_{k\ge n+(10\uparrow\uparrow(3j+2)):a_k=2}\frac{t^{(1)}}{10^k}+\sum_{k\ge1:a_k=2}\frac{t^{(2)}}{10^k}.
\end{aligned}$$

现在，对于 $i\in\{1,2,3\}$，令 $x^{(i)}$ 的十进制展开为 $0.x_1^{(i)}x_2^{(i)}\ldots$。我们已定义 $x^{(1)}$，使得对于某个~~$p\in$~~ $\mathbb{N}$，有 $x^{(1)}=\frac{p}{10^{n-1}}$。这意味着 $10^{n-1}x$ 模 1 不依赖于 $x^{(1)}$。下面对 $x^{(2)}$ 可能的十进制展开进行计数的论证是证明的关键。令

$$\begin{aligned}
B_j:=\Bigg\{&\sum_{0\le k<(10\uparrow\uparrow(3j+2)):b_k=1}\frac{1}{10^{k+1}}+\sum_{-(10\uparrow\uparrow(3j+2))\le k<(10\uparrow\uparrow(3j+2)):b_k=2}\frac{t^{(1)}}{10^{k+1}}\\
&:(b_k)_{k=-(10\uparrow\uparrow(3j+2))}^{(10\uparrow\uparrow(3j+2))-1}\in\{0,1,2\}^{2(10\uparrow\uparrow(3j+2))}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

关键的观察是，对于任意满足（2.13）的 n，以及 $x\in X_t$，我们有 $10^{n-1}x^{(2)}\in B_j$。但至关重要的是，集合 B_j 不依赖于 x 或 n，且最多包含 $9^{10\uparrow\uparrow(3j+2)}$ 个元素。这意味着字符串（$x_n^{(2)}$，$x_{n+1}^{(2)}$，……，$x_{n+(10\uparrow\uparrow(3j+2))-1}^{(2)}$）至多有 $9^{10\uparrow\uparrow(3j+2)}$ 种可能取值。但

$$\#\{0,\ldots,9\}^{(10\uparrow\uparrow(3j+2))-(10\uparrow\uparrow(3j-1))}=\frac{10\uparrow\uparrow(3j+3)}{10\uparrow\uparrow(3j)}>1000\cdot9^{10\uparrow\uparrow(3j+2)}.$$

因此存在

$$(\gamma'_1,\ldots,\gamma'_{(10\uparrow\uparrow(3j+2))-(10\uparrow\uparrow(3j-1))})\in\{0,\ldots,9\}^{(10\uparrow\uparrow(3j+2))-(10\uparrow\uparrow(3j-1))}$$

使得对于所有 $x \in X_t$ 和 n 满足（2.13）的情况，我们有

$$\left| \sum_{k=1}^{10\uparrow\uparrow(3j+2)} \frac{x^{(2)}_{n+k-1}}{10^k} - \sum_{k=1}^{10\uparrow\uparrow(3j-1)} \frac{\gamma_k}{10^k} - \sum_{k=1}^{10\uparrow\uparrow(3j+2)-10\uparrow\uparrow(3j-1)} \frac{\gamma'_k}{10^{k+10\uparrow\uparrow(3j-1)}} \right| \geq \frac{100}{10 \uparrow\uparrow (3j+3)}.$$

这进而意味着，若 γ 是一个十进制展开以$\gamma_1, \ldots, \gamma_{10\uparrow\uparrow(3j-1)}, \gamma'_1, \ldots,$ $\gamma'_{(10\uparrow\uparrow(3j+2))-(10\uparrow\uparrow(3j-1))}$ 开头的数，则

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{(2)}_{n+k-1}}{10^k} - \gamma \right| \geq \frac{50}{10 \uparrow\uparrow (3j+3)} \tag{2.14}$$

对于所有 $x \in X_t$ 和 n 满足（2.13）的情形。

现在转向 $x^{(3)}$，考察 $t^{(1)}$、$t^{(2)}$ 的定义，并利用 n满足（2.13）这一事实，可知 $x^{(3)}$ 定义中的三个项各自都不超过 $10^{n-1} \cdot {}^{1}_{(10\uparrow\uparrow(3j+3))}$。这意味着

$$x^{(3)} \leq \frac{3}{10^{n-1} \cdot (10 \uparrow\uparrow (3j+3))},$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{(3)}_{n+k-1}}{10^k} \leq \frac{3}{10 \uparrow\uparrow (3j+3)}. \tag{2.15}$$

由（2.14）、（2.15）以及事实 $x^{(1)} = {}^{p}_{10^{n-1}}$ 对某个 $p \in \mathbb{N}$成立，可知对于任意满足（ $x \in X_t$ 和 n 2.13）的情形，若 γ 是一个十进制展开以 $\gamma_1, \ldots,$ $\gamma_{10\uparrow\uparrow(3j-1)}, \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{(10\uparrow\uparrow(3j+2))-(10\uparrow\uparrow(3j-1))}$ 开头的数，则

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(10^{n-1}x - \gamma, \mathbb{Z}) &= \operatorname{dist}(10^{n-1}(x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}) - \gamma, \mathbb{Z}) \\
&= \operatorname{dist}(10^{n-1}(x^{(2)} + x^{(3)}) - \gamma, \mathbb{Z}) \\
&= \operatorname{dist}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{(2)}_{n+k-1}}{10^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{(3)}_{n+k-1}}{10^k} - \gamma, \mathbb{Z} \right) \\
&\geq \min\left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{(2)}_{n+k-1}}{10^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{(3)}_{n+k-1}}{10^k} - \gamma \right|, 0.2 \right\} \\
&\geq \min\left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{(2)}_{n+k-1}}{10^k} - \gamma \right| - \frac{3}{10 \uparrow\uparrow (3j+3)}, 0.2 \right\} \\
&> \frac{1}{10 \uparrow\uparrow (3j+3)} \\
&= \psi(n).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

在上面的第一个不等式中，我们用到了 $\gamma_1 = 5$ 以及（2.15），它们共同推出

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{(2)}_{n+k-1}}{10^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{(3)}_{n+k-1}}{10^k} - \gamma - p \right| \geq 0.2 \qquad \text{for all } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

在最后一个等式中，我们用到了 ψ 的定义以及 n 满足（2.13）这一事实。现在我们定义

$$\gamma_1,\dots,\gamma_{10\uparrow\uparrow(3j+2)}=\gamma_1,\dots,\gamma_{10\uparrow\uparrow(3j-1)},\gamma'_1,\dots,\gamma'_{(10\uparrow\uparrow(3j+2))-(10\uparrow\uparrow(3j-1))}.$$

由（2.16）以及我们对 γ_1，.....，$\gamma_{10\uparrow\uparrow(3j-1)}$的归纳假设可知，若 γ的十进制展开以 γ_1，.....，$\gamma_{10\uparrow\uparrow(3j+2)}$开头，则对所有 $1\le n\le$（$10\uparrow\uparrow$（$3j+5$））$-$（$10\uparrow\uparrow$（$3j+2$））以及 $x\in X_t$，我们有

$$\operatorname{dist}(10^{n-1}x-\gamma,\mathbb{Z})>\psi(n).$$

显然，上述论证可以无限次重复，从而得到一个序列 $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$。取 γ 为其十进制展开等于 $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$的点，由上文可知

$$\operatorname{dist}(10^{n-1}x-\gamma,\mathbb{Z})>\psi(n)$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$均成立。至此，证明完成。 □

注 2.6。通过将 $10\uparrow\uparrow$（$3n$）替换为（1.3）中增长得更快的一列 10 的幂，当然可以使（ψ（n））$_{n=1}^{\infty}$ 比定理 1.7的证明中衰减得更慢，同时仍确保 R（x，N；γ，ψ，10）$=0$对所有 $N\in\mathbb{N}$ 以及支撑于自相似测度支撑集内的所有 x 均成立。

3. Proof of results for nonlinear measures

3.1. **预备知识**。在命题 3.7 和定理 1.15 的证明中，我们将用到一些关于非线性推前测度的结果，这些结果确立了自相似测度的多项式傅里叶衰减。我们在此前的一篇论文中证明了以下结论（另一个相关但不同的陈述见 [3, 定理 1。1]）。

定理 3.1 ([7], 推论 1.5)。设 μ 是 $[0,1]$上的一个自相似测度。那么存在 $\eta,\kappa,C>0$，使得以下结论成立。对于所有满足 $f''(x)\neq 0$ 对所有 $x\in[0,1]$均成立的 C^2 函数 f: $[0,1]\to\mathbb{R}$，我们有

$$|\widehat{f\mu}(\xi)|\le C\left(1+\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|+(\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|)^{-\kappa}+\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|\right)\times\left(1+(\min_{x\in[0,1]}|f''(x)|)^{-\kappa}\right)|\xi|^{-\eta}$$

对于所有 $\xi\neq 0$。

事实上，从定理 3.1的证明中可以得到以下陈述。

定理 3.2。设 μ 是 $[0,1]$ 上的一个自相似测度。设 $\mathcal{F}$ 是一族 C^2函数 $[0,1]\to\mathbb{R}$，并假设存在 C_1、$C_2>0$ 使得

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\le C_1\quad\text{and}\quad\sup_{f\in\mathcal{F}}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|\le C_2. \tag{3.1}$$

进一步假设，对于所有 $f \in \mathcal{F}$ 和 $x \in [0,1]$，$f''(x) \neq 0$。则存在 η、$C > 0$，使得对于所有 $f \in \mathcal{F}$ 和 $\xi \neq 0$，我们有

$$|\widehat{f\mu}(\xi)| \leq C(\min_{x\in[0,1]} |f''(x)|)^{-1}|\xi|^{-\eta}. \tag{3.2}$$

我们强调，η 和 C 可以依赖于 μ 和 $\mathcal{F}$，但与 f无关。

证明。考察 3.1 [7]，中给出的定理证明，我们看到 κ 可以取为任意充分小的正数（不过为此我们可能需要减小 η）。关键的是，如果定理 3.1 中的不等式对某个 $\kappa < 1/2$成立，那么通过增大常数 C 的值，实际上可以取$\kappa = 1/2$。结合（3.1）中的不等式以及 $\kappa = 1/2$的选取，我们看到定理3.1 意味着，对所有 $f \in \mathcal{F}$，存在$C_{\mathcal{F},\mu} > 0$，它们依赖于 $\mathcal{F}$和 μ，使得

$$|\widehat{f\mu}(\xi)| \leq C_{\mathcal{F},\mu}\left(1 + (\max_{x\in[0,1]} |f'(x)|)^{-1/2}\right)\left(1 + (\min_{x\in[0,1]} |f''(x)|)^{-1/2}\right)|\xi|^{-\eta} \tag{3.3}$$

对所有 $\xi \neq 0$均成立。根据中值定理的论证，我们知道，对所有 f，

$$\max_{x\in[0,1]} |f'(x)| \geq \frac{1}{2}\min_{x\in[0,1]} |f''(x)|.$$

将其代入（3.3），可得对所有 $f \in \mathcal{F}$ 和 $\xi \neq 0$，我们有

$$|\widehat{f\mu}(\xi)| \leq 2C_{\mathcal{F},\mu}\left(1 + (\min_{x\in[0,1]} |f''(x)|)^{-1/2}\right)^2|\xi|^{-\eta}.$$

根据二阶导数的统一上界，我们知道存在 $C_3 >0$，使得对所有 $f \in \mathcal{F}$，都有 $(\min_{x\in[0,1]} |f''(x)|)^{-1/2} \geq C_3$。因此，方括号中的常数项 1 可以并入二阶导数项中，代价是可能需要增大乘法常数 $C_{\mathcal{F},\mu}$。吸收了这个常数项后，将方括号中剩余的部分平方，即可立即得到我们的结论。□

由1.13和命题3.7推出定理时，我们将使用以下标准事实：自相似测度经过光滑微分同胚映射后得到的是自共形测度。

引理 3.3。设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个自相似测度。设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 C^ρ（此处 $\rho \in \{1, 2, \dots\}$ 或 $\rho = \infty$ 或 $\rho = \omega$），且对所有 $x \in [\text{最小 } \mathit{supp}(\mu), \text{最大 } \mathit{supp}(\mu)]$，均有 $f'(x) \neq 0$。那么，对于某个形如以下形式的 C^ρ 共形迭代函数系，$f\mu$ 是一个自共形测度。

$$\left\{f \circ R_{a_1} \circ \cdots \circ R_{a_k} \circ f^{-1}\right\}_{(a_1,\dots,a_k)\in\mathcal{A}^k}$$

对于某个 $k \in \mathbb{N}$。

证明。设 $\{R_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ 和 $(p_a)_{a\in\mathcal{A}}$ 分别为与μ对应的迭代函数系和概率向量。根据反函数定理，f 在某个开邻域上有一个 C^ρ 反函数

[min supp(μ)，maxsupp(μ)]。如有必要，通过迭代迭代函数系，我们可以不失一般性地假设，对于每个 $a \in \mathcal{A}$， R_a 的收缩比至多为

$$0.9 \times \frac{\min_{x\in[\min \operatorname{supp}(\mu),\max \operatorname{supp}(\mu)]} |f'(x)|}{\max_{x\in[\min \operatorname{supp}(\mu),\max \operatorname{supp}(\mu)]} |f'(x)|}. \tag{3.4}$$

对每个 $a \in \mathcal{A}$ 令 $S_a := f \circ R_a \circ f^{-1}$。由链式法则和（3.4），可得

$$\max_{a\in\mathcal{A}} \max_{x\in f([\min \operatorname{supp}(\mu),\max \operatorname{supp}(\mu)])} |S_a'(x)| \le 0.9.$$

由链式法则还可知，每个 S_a 的导数都不为零。因此，$\{S_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ 是定义在 f（[min supp(μ), max supp(μ)]）上的由 C^ρ 个共形压缩映射组成的迭代函数系。对于所有博雷尔 $A \subset \mathbb{R}$，都有

$$\begin{aligned} f\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)) = \sum_{a\in\mathcal{A}} p_a \mu(R_a^{-1} \circ f^{-1}(A)) &= \sum_{a\in\mathcal{A}} p_a \mu(f^{-1} \circ S_a^{-1}(A)) \\ &= \sum_{a\in\mathcal{A}} p_a S_a(f\mu)(A), \end{aligned}$$

第二个等号用到了 μ 的自相似性，第三个等号则用到了 S_a 的定义。由于给定迭代函数系和概率向量时，自共形测度是唯一的，故 $f\mu$ 是对应于迭代函数系 $\{S_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ 和概率向量$(p_a)_{a\in\mathcal{A}}$的自共形测度。□

我们需要用到以下关于自相似测度的事实。

命题3.4。 设 μ 是 $\mathbb{R}$上的自相似测度。那么存在 $0 < s_F \le s_M < \infty$，使得对于所有满足 $supp(\mu)$的 $x \in$、 $y \in \mathbb{R}$ 和 $0 < r \le 1$，都有

$$r^{s_M} \lesssim \mu(x-r, x+r) \qquad and \qquad \mu(y-r, y+r) \lesssim r^{s_F},$$

其中隐含常数仅依赖于 μ.[3]

证明。 令 r_i 为第 i个压缩比，且 p_i 为相应的概率权重。不难看出，可以取 $s_M =$ 最大值$_i$ 对数p_i 对数r_i。 s_F的存在性可由 [21, 命题 22]推出。□

对于缺位数字测度这一特殊情形，可以证明，命题 s_F 和 s_M中出现的3.4 两者相同。

我们还将用到自相似测度的 r-停止的概念。给定一个自相似迭代函数系 $\{S_a: [0,1] \to [0,1]\}_{a\in\mathcal{A}}$和 $r > 0$，一个 r-停止是字母表 $\mathcal{A}$ 上有限词构成的有限集合 $\mathcal{I}$，其中 $\mu = \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{I}} p_{\mathbf{a}} S_{\mathbf{a}} \mu$，并且每个 $\mathbf{a}$ 都满足

$$r \cdot \min_{a\in\mathcal{A}} \|S_a'\|_\infty \le \operatorname{diam}(S_{\mathbf{a}}([0,1])) \le r.$$

这里，对于词$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$，我们采用记号 $S_{\mathbf{a}} := S_{a_1} \circ S_{a_2} \circ \cdots \circ S_{a_n}$和 $p_{\mathbf{a}} := p_{a_1} p_{a_2} \cdots p_{a_n}$。仔细迭代该迭代函数系，可以验证，对所有充分小的 r， r-停止均存在。

最后，我们将使用以下简单引理。

[3] F 鉴于 Frostman 引理表示 Frostman； M 鉴于 [20]表示 Minkowski .

引理 *3.5.* 若 $\phi\colon [0,\infty) \to (0,1]$ 满足 $\lim_{\xi\to\infty}\phi(\xi) = 0$，则存在一个连续且严格递减的函数 $\psi\colon [0,\infty) \to (0,1]$，使得 $\lim_{\xi\to\infty}\psi(\xi) = 0$，$\phi = o(\psi)$，并且对所有 $\xi \geq 0$ 有 $\psi(\xi) \geq (1+\xi)^{-1}$。

证明。由于 $\phi(\xi) \to 0$，存在一个序列 $0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots$，使得 $\max_{\xi\geq\xi_n}\{\phi(\xi),(1+\xi)^{-1}\} \leq 3^{-(n+2)}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。定义分段仿射函数 ψ，使得 $\psi(0) = 1$ 且 $\psi(\xi_n) = 2^{-n}$，并且 ψ 在 $[0,\xi_1]$ 和 $[\xi_n,\xi_{n+1}]$ 上对每个 $n \in \mathbb{N}$ 均为仿射函数，即完成证明。□

3.2. **定理 1.11 的证明。** 首先，我们证明定理 1.11。对于第（3.2）节的第（1）部分，我们使用庞加莱′复现定理 [45, 定理 1。4] 对于第（2）部分。

定理 1.11 的证明。设 μ, f 和 Z 如本定理的陈述所述。我们先证明陈述（1）。取一个足够小的 $0 < r < 1$，并令 N_r 表示 r-邻域 Z。令 $\mathcal{I}$ 为一个 r-停止区间，针对 μ。令

$$\mathcal{T} := \{\mathbf{a} \in \mathcal{I} : T_{\mathbf{a}}([0,1]) \cap N_r = \varnothing\}.$$

Then

$$\begin{aligned} |\widehat{f\mu}(\xi)| \leq \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{I}} p_{\mathbf{a}}|\widehat{(f\circ T_{\mathbf{a}})\mu}(\xi)| &= \sum_{\mathbf{a}\notin\mathcal{T}} p_{\mathbf{a}}|\widehat{(f\circ T_{\mathbf{a}})\mu}(\xi)| + \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{T}} p_{\mathbf{a}}|\widehat{(f\circ T_{\mathbf{a}})\mu}(\xi)| \\ &\leq \mu(N_{2r}) + \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{T}} p_{\mathbf{a}}|\widehat{(f\circ T_{\mathbf{a}})\mu}(\xi)|. \end{aligned} \tag{3.5}$$

应用链式法则，根据 $\mathcal{T}$ 的定义可知，对于所有 $\mathbf{a} \in \mathcal{T}$ 和 $x \in [0,1]$，我们有

$$(f\circ T_{\mathbf{a}})''(x) = f''(T_{\mathbf{a}}(x))r_{\mathbf{a}}^2 \neq 0.$$

因此，我们可以应用定理 3.2，从而推出 $(f\circ T_{\mathbf{a}})\mu$ 对每个 $\mathbf{a} \in \mathcal{T}$ 都是 Rajchman，并由 (3.5) 得出

$$\limsup_{|\xi|\to\infty} |\widehat{f\mu}(\xi)| \leq \mu(N_{2r}). \tag{3.6}$$

但是 Z 是闭集，因此根据 μ 从上方的连续性以及我们的假设 $\mu(Z) = 0$，

$$\lim_{r\to 0^+} \mu(N_{2r}) = \mu(Z) = 0. \tag{3.7}$$

因此，由于 r 是任意的，(3.6) 和 (3.7) 给出

$$\limsup_{|\xi|\to\infty} |\widehat{f\mu}(\xi)| = 0,$$

换言之，$f\mu$ 是 Rajchman，从而证明了 (1)。

现在我们关注该定理的陈述（2）。假设 $\mu(Z) > 0$ 且 $f'(x) \neq 0$ 对所有 $x \in [0,1]$ 均成立。我们先给出 $S_{\mathbf{a}}$ 对任意有限字 $\mathbf{a}$ 的二阶导数公式。对任意 $\mathbf{a} \in \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}^n$ 和 $x \in [0,1]$，由

应用链式法则以及公式 $S_a = f \circ T_a \circ f^{-1}$（该公式对每个 $a \in \mathcal{A}$ 均成立）：

(3.8)
$$S''_{\mathbf{a}}(f(x)) = (f \circ T_{\mathbf{a}} \circ f^{-1})''(f(x)) = \frac{r_{\mathbf{a}}}{(f'(x))^2}\left(r_{\mathbf{a}} f''(T_{\mathbf{a}}(x)) - \frac{f'(T_{\mathbf{a}}(x))}{f'(x)} \cdot f''(x)\right).$$

这里我们用到了假设：对于所有 $x \in [0,1]$，$f'(x) \neq 0$。由 (3.8) 可知，若 $f''(T_{\mathbf{a}}(x)) = 0$ 且 $f''(x) = 0$，则 $S''_{\mathbf{a}}(f(x)) = 0$。因此，要证明我们的结果，只需证明存在一个有限字 a，使得对于一组具有正 μ 测度的 $x \in (0,1)$，有 $f''(T_{\mathbf{a}}(x)) = 0$ 且 $f''(x) = 0$。下面我们就来证明这一点。

令 $(p_a)_{a\in\mathcal{A}}$ 为概率向量，使得 μ 是与 $\{T_a\}$ 和 (p_a) 相对应的自相似测度。定义

$$\pi\colon \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}, \qquad \pi((a_i)) \coloneqq \lim_{N\to\infty} (T_{a_1} \circ \cdots \circ T_{a_N})(0)$$

并令 m 为 $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 上与 $(p_a)_{a\in\mathcal{A}}$ 相对应的伯努利测度。众所周知，$\mu = \pi m$。因此，我们的假设 $\mu(Z) > 0$ 等价于 $m(A) > 0$，其中

$$\tilde{A} \coloneqq \{(a_i) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : f''(\pi((a_i))) = 0\}.$$

定义通常的左移映射为

$$\sigma\colon \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \qquad \sigma((a_1, a_2, \dots)) = (a_2, a_3, \dots).$$

众所周知，σ 相对于 $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, m)$ 是一个保测变换，其中 $\mathcal{B}$ 是由柱集生成的通常 σ-代数。因此根据 Poincaré 递归定理 [45, 定理 1。4]，由于 $m(A) > 0$，必然存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $m(A \cap \sigma^{-n}(A)) > 0$。这特别意味着存在一个 $(c_1, \dots, c_n)$，使得

$$m\left(\left\{(a_i) \in \tilde{A} : \exists (b_i) \in \tilde{A} \text{ such that } (a_i) = (c_1, \dots, c_n, b_1, \dots)\right\}\right) > 0.$$

这进一步意味着，如果令

$$\tilde{B} \coloneqq \{(b_i) \in \tilde{A} : (c_1, \dots, c_n, b_1, b_2, \dots) \in \tilde{A}\}$$

那么 $m(B) > 0$，从而 $\mu(\pi(B)) > 0$。令 $x \in \pi(B)$ 以及 $(b_i) \in B$ 满足使得 $\pi((b_i)) = x$。则 $f''(x) = f''(\pi((b_i))) = 0$，因为 $(b_i) \in A$。此外，

$$f''(T_{\mathbf{a}}(x)) = f''(T_{\mathbf{a}}(\pi((b_i))) = f''(\pi(c_1, \dots, c_n, b_1, \dots)) = 0$$

因为 $(c_1, \dots, c_n, b_1, \dots) \in A$。这里我们用到了

$$T_{\mathbf{a}}(\pi((b_i))) = \pi((c_1, \dots, c_n, b_1, \dots)) \qquad \text{for all } (b_i) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$$

根据映射 π 的定义。总之，对于每个 $x \in \pi(B)$，我们有 $f''(x) = 0$ 且 $f''(T_{\mathbf{a}}(x)) = 0$，因此 $S''_{\mathbf{a}}(f(x)) = 0$。由于 $\mu(\pi(B)) > 0$，这就完成了陈述 (2) 的证明。□

3.3. **定理 1.15 的证明。** 接下来，我们详细证明定理1.15。我们先证明该定理，再证明定理1.13，因为定理 1.13 的证明包含许多相同的思路，但还需证明对于我们的压缩映射的任意复合，二阶导数的零点集都是有限的。在本小节余下部分，我们固定一个满足定理 ϕ 1.15的假设的函数，并令 ψ为引理 3.5中与 ϕ相对应的函数。

我们首先介绍一个构造推前函数的一般框架，这些函数将在定理 1.13 和 1.15 的证明中使用。对于每个频率 $\xi > 0$，我们关联一个数

$$r = r(\xi) = (\psi(\xi))^{(\log\log(1/\psi(\xi)))^{-1}}. \tag{3.9}$$

注意 $r(\xi) \to 0$ 当 $\xi \to \infty$ 时成立，并且由 ψ的严格单调性，存在 $\xi^* > 0$使得 $r\colon [\xi^*, \infty) \to (0,\ r(\xi^*)]$ 是一个双射。定义 $\xi^* < \xi_1 < \xi_2 < \cdots$(与引理 3.5证明中的取法不同)，使得 $\xi_n \to \infty$ 当 $n \to \infty$时成立，并且增长得足够缓慢，从而

$$\frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{\psi(\xi_{n+1})} \to 0 \qquad \text{as} \qquad n \to \infty, \tag{3.10}$$

并且使相应的值 $r_1 > r_2 > \cdots$ 满足

$$r_{n+1} \geq r_n - e^{-1/r_n} \qquad \text{for all } n. \tag{3.11}$$

在本小节及下一小节中，(ξ_n) 和 (r_n) 都固定不变。

现在，定义 $W\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为

$$W(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{for } x > 0, \\ 0 & \text{for } x \leq 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

这是一个标准事实：W 是 C^∞，但不是实解析的，并且W 的所有导数在 0 处都为零。给定一个满足 $c_n \in (0, 2^{-n}]$ 对所有 n都成立的序列 $(c_n)_{n=1}^{\infty}$，对于 $x \geq 0$，定义

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n W(x - r_{n+1}). \tag{3.13}$$

函数 g 显然取决于 (c_n) 和 (r_n)，但我们在记号中省略这种依赖关系。最终，我们要求 (c_n) 满足比对所有 n都有$c_n \in (0, 2^{-n}]$更多的条件。对于 $k = 0$，1，2，.....（约定 $W^{(0)} = W$），利用对所有 n都有 $c_n \in (0, 2^{-n}]$ 这一事实，可知对所有 $R > 0$ 都有

$$\sup_{x\in[0,R]} \sum_{n=N}^{\infty} c_n W^{(k)}(x - r_{n+1}) \leq \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n} \max_{x\in[0,R]} W^{(k)}(x) \leq 2^{-(N-1)} \max_{x\in[0,R]} W^{(k)}(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

我们已经证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n W^{(k)}(x - r_{n+1})$ 在 $x \in [0, R]$ 上一致收敛。将 g 延拓到 $\mathbb{R}$，并令对所有 $x < 0$，$g(x) = -g(-x)$，可知 g 成为定义良好的 C^∞ 函数，定义在 $\mathbb{R}$ 上。事实上，我们可以任意多次交换求导与求和的顺序，因此 g 及其所有阶导数

在 0 处均为零。下面我们将定义一个 C^∞ 函数 f，其二阶导数为 g。这一构造的关键性质是，序列 $(g(r_n))_{n=1}^\infty$ 可以按我们所需的任意快的速度趋于零。特别地，它可以以一种取决于 ψ 的方式趋于零，也可以满足 $g(r_{n+1})$ 对所有 $n \geq 1$ (r_n) 都显著小于 g（见引理 3.6）。这一性质将由 (3.13) 以及我们选择 (c_n) 时所拥有的灵活性所保证。

现在根据以下规则定义 $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \int_0^y g(r)drdy & \text{for } x \geq 0, \\ \int_x^0 \int_y^0 g(r)drdy & \text{for } x < 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

由于对于所有 $x \in \mathbb{R}$，$g(x) = -g(-x)$，因此对于所有 $x \in \mathbb{R}$，$f(x) = -f(-x)$。此外，根据微积分基本定理，f 是一个 C^∞ 函数，并且对于所有 $x \in \mathbb{R}$，$f''(x) = g(x)$。注意，f 及其所有导数在 0 处均为零。由于当 $x > 0$ 时，$g(x) > 0$，显然根据定义，f 限制在 $[0, \infty)$ 上时是严格递增的。利用对于所有 $x \in \mathbb{R}$，$f(x) = -f(-x)$ 这一事实，显然 f 在 $\mathbb{R}$ 上也是严格递增的。我们在此记录 f 的一个对任意 (c_n) 均成立的性质：由于 g 是递增的，对于所有 $x \in (0,1)$，我们有

$$f(x) = \int_0^x \int_0^y g(r)drdy \leq g(x) \cdot \frac{x^2}{2} < g(x). \tag{3.15}$$

下面的引理最终将用于确定我们的序列 (c_n)，而该序列又将确定我们在证明定理 1.15时所用的函数 f。

引理3.6。设 (c_n) 和 (y_n) 是两组选取的正实数序列，按如下方式归纳定义。令 $y_1 = 0.01 \times \min\{1, \xi_2^{-1}\}$。现在假设我们已经定义了 $y_1, \ldots, y_n$ 和 $c_1, \ldots, c_{n-1}$，其中 $n \geq 1$。接着令 $c_n \in (0, 2^{-n}]$ 足够小，使得

$$c_n W(r_j - r_{n+1}) \leq 2^{-(n+1-j)} y_j \qquad \text{for all } j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3.16}$$

接着令

$$0 < y_{n+1} \leq 0.01 \times \min\{\xi_{n+2}^{-1}, (c_n W(r_n - r_{n+1}))^{1/r_n}\} \tag{3.17}$$

足够小，使得

$$\int_0^{r_{n+1}} \int_0^y y_{n+1} drdy \leq 0.01 \int_{r_{n+1}}^{r_n} \int_{r_{n+1}}^y c_n W(r - r_{n+1}) drdy. \tag{3.18}$$

那么以下性质成立：

(1) 对所有 $n \geq 1$，我们有 $g(r_n) \leq y_n$. *(2)* 对所有 $n \geq 1$，我们有 $g(r_{n+1}) \leq 0.01(g(r_n))^{1/r_n}$. *(3)* 对所有 $n \geq 1$，我们有 $f(r_{n+1}) \leq 0.01 f(r_n)$. *(4)* 对所有 $n \geq 1$，我们有 $\xi_{n+1} f(r_n) \leq 0.01$.

证明。陈述 (1) 是以下事实的推论：对所有 $n \geq 1$，由 (3.13) 和 (3.16) 可得

$$g(r_n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n+k-1} W(r_n - r_{n+k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} y_n = y_n.$$

利用陈述 (1)、(3.13) 和 (3.17)，对于所有 $n \geq 1$，我们有

$$g(r_{n+1}) \leq y_{n+1} \leq 0.01(c_n W(r_n - r_{n+1}))^{1/r_n} \leq 0.01(g(r_n))^{1/r_n},$$

因此陈述 (2) 成立。

利用 g 递增这一性质，结合 (3.13)、(3.18) 和陈述 (1)，可得对所有 $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} f(r_{n+1}) = \int_0^{r_{n+1}} \int_0^y g(r) dr dy &\leq \int_0^{r_{n+1}} \int_0^y y_{n+1} dr dy \\ &\leq 0.01 \int_{r_{n+1}}^{r_n} \int_{r_{n+1}}^y c_n W(r - r_{n+1}) dr dy \\ &\leq 0.01 \int_{r_{n+1}}^{r_n} \int_{r_{n+1}}^y g(r) dr dy \\ &\leq 0.01 f(r_n). \end{aligned}$$

因此陈述 (3) 成立。

陈述 (4) 是以下不等式的推论，而这些不等式可由 (3.15)、(3.17) 和陈述 (1) 得出:

$$\xi_{n+1} f(r_n) \leq \xi_{n+1} g(r_n) \leq \xi_{n+1} y_n \leq 0.01. \qquad \square$$

利用这个引理，我们现在可以使用定理1.15 、定理3.2和定理1.11 (1) 来证明。

定理1.15 的证明。令 (c_n) 和 (y_n) 如引理 3.6 中所定义，并令 g 和f 为与 (c_n) 对应、由 (3.13) 和 (3.14) 定义的函数。令 μ 为任意支撑集包含 0 的自相似测度，并令 s_M 为命题 3.4 中与 μ相关联的常数。那么对所有 $r \in (0,1)$,

$$f\mu((-f(r), f(r)) = \mu((-r, r)) \gtrsim r^{s_M}. \tag{3.19}$$

此外,

$$\mu((r, r + 2r^{4s_M/s_F})) + \mu((-r - 2r^{4s_M/s_F}, -r)) \lesssim r^{4s_M}. \tag{3.20}$$

对于 $r \in (0,\ 1)$，令 $\mathcal{I}_r$ 为 μ 的一个 r^{4s_M/s_F}-停止区间。令

$$\mathcal{S}_r := \{\mathbf{a} \in \mathcal{I}_r : S_{\mathbf{a}}([0,1]) \cap (-r - r^{4s_M/s_F}, r + r^{4s_M/s_F}) = \varnothing\}. \tag{3.21}$$

根据定理 3.2 以及等式 $(f \circ S_{\mathbf{a}})'' = r_{\mathbf{a}}^2 (g \circ S_{\mathbf{a}})$，由链式法则及事实 $f'' = g$ 可知，存在 $\eta > 0$，仅依赖于 μ 和 f，使得对所有

$r>0$, 一个 $\in \mathcal{S}_r, \xi \in \mathbb{R}$,

$$|\widehat{(f\circ S_{\mathbf{a}})\mu}(\xi)| \lesssim \left(\min_{|x|\geq r+r^{4s_M/s_F}} |g(x)|\right)^{-1} r^{-8s_M/s_F}|\xi|^{-\eta}. \tag{3.22}$$

现在令 $n\geq 1$，并令 k_n 表示满足以下条件的最大正整数

$$\xi_{k_n} f(r_n) \leq 0.01. \tag{3.23}$$

由引理 3.6 中的陈述（4）可知，对于所有 $k_{n-1}\geq n$ 充分大的 n，均有 n。如果 $\xi_{k_n+1}<\xi_{k_n}+1<2\xi_{k_n}$充分大，则 $k_{n+1}>k_n$，因此引理 3.6 中的陈述（3）推出 n 对于充分大的 $m\in\mathbb{N}$ 均成立。令 $k_{n-1}<m\leq k_n$满足 $x\mapsto e^{2\pi ix}$。那么根据（3.23）以及 2π 是利普希茨函数、其利普希茨常数为 $x\mapsto e^{2\pi ix}$ 的事实，

$$\begin{aligned}\left|\int_{-r_n}^{r_n} e^{2\pi i\xi_m f(x)}d\mu(x)-\mu((-r_n,r_n))\right| &= \left|\int_{-r_n}^{r_n}(e^{2\pi i\xi_m f(x)}-1)d\mu(x)\right| \\ &\leq \mu((-r_n,r_n)) \sup_{-r_n\leq x\leq r_n}|e^{2\pi i\xi_m f(x)}-1| \\ &\leq 0.01\times 2\pi\mu((-r_n,r_n)).\end{aligned}$$

整理得

$$\left|\int_{-r_n}^{r_n} e^{2\pi i\xi_m f(x)}d\mu(x)\right| \geq \frac{1}{2}\mu((-r_n,r_n)). \tag{3.24}$$

根据（3.11），我们知道

$$r_{n-2}-r_n \leq 2e^{-1/r_{n-2}} \leq \frac{r_{n-2}^{4s_M/s_F}}{2} \leq r_n^{4s_M/s_F} \tag{3.25}$$

对于所有 n 充分大的 $\lim_{n\to\infty}\frac{r_{n+1}}{r_n}=$，均成立。在（3.25）的最后一个不等式中，我们使用了 $\lim_{n\to\infty}\frac{r_{n+1}}{r_n}=1$；这由（3.11）可得。因此，对于所有 n 充分大的 $|x|\geq r_n+r_n^{4s_M/s_F}$，根据引理 3.6 中的陈述（2）、（3.15）、（3.25），并且由于 $m>k_{n-1}$，我们有

$$|g(x)|\geq g(r_{n-2})\geq (g(r_{n-1}))^{r_{n-2}}\geq (f(r_{n-1}))^{r_{n-2}}\gtrsim \xi_m^{-r_{n-2}}=\xi_m^{-o_n(1)}. \tag{3.26}$$

此外，利用 $m>k_{n-1}\geq n$、（3.9）以及 $\psi(\xi)\geq(1+\xi)^{-1}$ 可得

$$r_n^{-8s_M/s_F}=(\psi(\xi_n))^{-8s_M(\log\log(1/\psi(\xi_n)))^{-1}/s_F}\leq(\psi(\xi_m))^{-8s_M(\log\log(1/\psi(\xi_n)))^{-1}/s_F}\lesssim \xi^{o_n(1)m}. \tag{3.27}$$

将 (3.26) 和 (3.27) 代入 (3.22)，再利用 $\psi(\xi)\geq(1+\xi)^{-1}$ 以及 (3.9)，得到

$$\max_{\mathbf{a}\in\mathcal{S}_{r_n}}|\widehat{(f\circ S_{\mathbf{a}})\mu}(\xi_m)|\lesssim \xi_m^{-\eta/2}\lesssim(\psi(\xi_m))^{\eta/2}\lesssim r_m^{4s_M}\lesssim r_n^{4s_M}. \tag{3.28}$$

现在，利用傅里叶变换的定义，并综合 (3.19)、(3.20)、(3.28)，可得

$$\begin{aligned}
|\widehat{f\mu}(\xi_m)| &\gtrsim \left| \int_{-r_n}^{r_n} e^{2\pi i \xi_m f(x)} d\mu(x) \right| \\
&\quad - \mu((r_n, r_n + 2r_n^{4s_M/s_F}) \cup (-r_n - 2r_n^{4s_M/s_F}, -r_n)) \\
&\quad - \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{S}_{r_n}} p_{\mathbf{a}} |\widehat{(f \circ S_{\mathbf{a}})} \mu(\xi_m)| \\
&\gtrsim \mu((-r_n, r_n))/2 - r_n^{4s_M} - \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{S}_{r_n}} |\widehat{(f \circ S_{\mathbf{a}})} \mu(\xi_m)| && \text{by (3.24), (3.20)} \\
&\gtrsim r_n^{s_M} - r_n^{4s_M} - r_n^{4s_M} && \text{by (3.19), (3.28)} \\
&\gtrsim r_n^{s_M} \gtrsim \psi(\xi_n) \gtrsim \psi(\xi_m),
\end{aligned}$$

其中最后一行对 n 充分大的值成立，利用（3.9）。

总之，我们已证明，对所有 m 充分大的值，$|\widehat{f\mu}(\xi_m)| \gtrsim \psi(\xi_m)$。由于 $f\mu$ 是紧支撑的博雷尔概率测度，其傅里叶变换是利普希茨连续的，因此由（3.10）可知，不等式 $|\widehat{f\mu}(\xi_m)| \gtrsim \psi(\xi_m)$ 对所有 m 充分大的值成立，实际上意味着 $|\widehat{f\mu}(\xi)| \gtrsim \psi(\xi)$ 对所有 ξ 充分大的值成立。由于 $\phi = o(\psi)$，对所有 ξ 充分大的值，我们有 $|\widehat{f\mu}(\xi)| \geq \phi(\xi)$。若 ξ 为负且绝对值充分大，则类似的证明可得 $|\widehat{f\mu}(\xi)| \geq \phi(-\xi)$，因此我们证明了（1.8）。由定理 1.11 (1)，$f\mu$ 是 Rajchman 测度。证明至此完成。□

3.4. 定理 1.13 的证明。定理 1.13 的证明与定理 1.15 的证明有许多相似之处，但也存在一些差异。为避免证明之间重复，我们有时不会像定理 1.15 的证明那样提供那么多细节。在本小节中，我们再次固定一个满足定理 1.13 假设的函数 ϕ，并令 ψ 为引理 3.5 中与 ϕ 对应的函数。现在以及在下文命题 3.7 的证明中，我们令序列 (ξ_n) 和 (r_n) 与前一小节中的定义相同，使用涉及 ψ 的关系 (3.9)，使得 (3.10) 和 (3.11) 成立。函数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 将按照 (3.13) 中的方式对 $x \geq 0$ 定义，其中 $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ 是某个满足 $c_n \in (0, 2^{-n}]$ 对所有 n 都成立的序列。对于 $x < 0$，我们令$g(x) = -g(-x)$。然而，$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的定义略有不同：现在我们令

$$f(x) = \begin{cases} x + \int_0^x \int_0^y g(r) dr dy & \text{for } x \geq 0, \\ x + \int_x^0 \int_y^0 g(r) dr dy & \text{for } x < 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

在此背景下，我们有如下与（3.15）类似的结论，它可通过相同的论证得到：对于 $x \in [0, 1]$，我们有

$$f(x) - x \leq g(x). \tag{3.30}$$

下面的命题给出了充分条件，确保序列 (c_n) 具有 Rajchman 性质，并实现我们所需的缓慢傅里叶衰减。

不过，关键在于我们选择这个序列的方式有一定的灵活性；在证明定理 1.13 时，我们将利用这种灵活性。

命题 3.7。 设(c_n) 和(y_n) 是两组选取的正实数序列，按如下方式归纳定义。令 $y_1 = 0.01 \times \min\{1, \xi_2^{-1}\}$。假设对于某个 $n \geq 1$，我们已定义了 $y_1, \ldots, y_n$ 和 $c_1, \ldots, c_{n-1}$。然后令 $c_n \in (0, 2^{-n}]$ 足够小，使得

$$c_n W(r_j - r_{n+1}) \leq 2^{-(n+1-j)} y_j \qquad \text{for all } j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3.31}$$

然后令 y_{n+1} 足够小，使得

$$0 < y_{n+1} \leq 0.01 \times \min\{\xi_{n+1}^{-1}, (c_n W(r_n - r_{n+1}))^{1/r_n}, r_{n+1}^{1/r_{n+1}}\}. \tag{3.32}$$

对于(c_n)和(y_n) 的这类选取，以下性质成立：

(1) f 是 C^∞ 且严格递增，并且对所有 $x \in [0,1]$，有 $f(0) = f''(0) = 0$，$f'(0) = 1$，$f'(x) \in [1,2]$，且对所有 $x \in (0,1]$，有 $f''(x) > 0$。*(2)* 对每个 $b \geq 3$ 以及每个包含0 和至少一个其他数字的真子集 $D \subset \{0, 1, \ldots, b-1\}$，若 μ 是与迭代函数系 $\{x \mapsto \frac{x+d}{b}\}_{d \in D}$ 和均匀概率向量相对应的底数为 b 的缺位数字测度，则 $f\mu$ 是 ***Rajchman*** 测度，但存在某个严格递增的正整数序列$(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 以及某个 $j \in \mathbb{Z}$，使得

$$|\widehat{f\mu}(jb^{k_n})| \geq \phi(jb^{k_n}) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

证明。 利用 g单调递增、对所有 $x \in [0,1]$都有 $0 \leq W(x) \leq 1$，且对所有 n都有 $c_n \in (0, 2^{-n}]$，可知对所有 $x \in [0,1]$，我们有

$$1 \leq f'(x) = 1 + \int_0^x g(r)dr \leq 1 + g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n W(x - r_{n+1}) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \leq 2.$$

我们还有 $f''(x) = g(x)$ 对所有 x 都成立，这是由定义可知的。现在我们看到，我们的 f 满足（1）的要求。我们指出，利用（3.31）、（3.32），并重复引理 3.6证明中所用的论证，可以直接证明以下性质成立：

(A) 对所有 $n \geq 1$，都有 $g(r_n) \leq y_n$。 (B) 对所有 $n \geq 1$，都有 $g(r_{n+1}) \leq 0.01(g(r_n))^{1/r_n}$。

现在，设 μ 是如（2）中所述的一个底数为 b 的缺位数字测度，并令 $s_\mu := \log \#\mathcal{D} \log b$。测度 μ 还具有以下性质：$s_\mu = s_F = s_M$，其中 s_F 和 s_M 如命题3.4 所述。由于 $D \neq \{0, 1, \ldots, b-1\}$，$\mu$ 不是限制在 $[0,1]$ 上的勒贝格测度，因此必然存在 $j \in \mathbb{Z}$，使得 $\widehat{\mu}(j) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。利用 $\mu = T_b\mu$，其中 $T_b(x) = bx$ 模 1，我们得到

$$\widehat{\mu}(j) = \widehat{\mu}(jb) = \widehat{\mu}(jb^2) = \cdots.$$

我们将这个公共值记为 c_μ。对于每个正整数 n，令 k_n 表示满足以下条件的最大正整数：

$$j \cdot b^{k_n}(f(b^{-n}) - b^{-n}) \leq 0.01|c_\mu|. \tag{3.33}$$

根据陈述 (A) 和 (3.32)，我们有 $g(r_n) \leq y_n \leq r_n^{1/r_n}$。利用 $\lim_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = 1$ 以及 $g(r_n) \leq r_n^{1/r_n}$这一事实，可以证明，对于所有 $m \geq 1$ 以及所有 $x > 0$足够小的情形，都有 $g(x) \leq x^{m+1}$。因此，根据 (3.30)，对于所有 $m \in \mathbb{N}$，我们有

$$0 < \frac{f(b^{-n}) - b^{-n}}{b^{-mn}} \leq \frac{g(b^{-n})}{b^{-nm}} \to 0.$$

这意味着，当 $n \to \infty$ 时，$n/k_n \to 0$。特别地，对于所有足够大的 n，我们有 $k_n > n$。利用这一不等式以及 $x \mapsto e^{2\pi i x}$ 是 $\mathbb{Z}$-周期的这一事实，我们看到，当 n 足够大时，随机变量 $x \mapsto \chi_{[0,b^{-n}]}(x)$ 和 $x \mapsto e^{-2\pi i x j b^{k_n}}$ 关于 μ 相互独立。因此

$$\int_0^{b^{-n}} e^{-2\pi i x j b^{k_n}} d\mu(x) = \int_0^1 \chi_{[0,b^{-n}]}(x) e^{-2\pi i x j b^{k_n}} d\mu(x) = b^{-s_\mu n} c_\mu \tag{3.34}$$

对所有充分大的 n。上文中我们用到了 $\mu([0, b^{-n}]) = b^{-s_\mu n}$，这是因为 μ 是一个字母表包含数字 0 的缺位数字测度。因此

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{b^{-n}} e^{2\pi i f(x) j b^{k_n}} d\mu(x) - b^{-s_\mu n} c_\mu \right| &\leq \int_0^{b^{-n}} |e^{2\pi i f(x) j b^{k_n}} - e^{2\pi i x j b^{k_n}}| d\mu(x) \qquad \text{by (3.34)} \\
&\leq b^{-s_\mu n} \sup_{x \in [0, b^{-n}]} |e^{2\pi i f(x) j b^{k_n}} - e^{2\pi i x j b^{k_n}}| \\
&\leq b^{-s_\mu n} 2\pi j b^{k_n} \max_{x \in [0, b^{-n}]} |f(x) - x| \\
&\leq 2\pi \times 0.01 |c_\mu| b^{-s_\mu n} \qquad \text{by (3.33)}.
\end{aligned}$$

在最后一行中，我们用到了函数 $f(x) - x$ 在 $[0, b^{-n}]$ 上的最大值于 b^{-n}处取得，这由式（3.29）可知。由此可得

$$\left| \int_0^{b^{-n}} e^{2\pi i f(x) j b^{k_n}} d\mu(x) \right| \geq 0.9 b^{-s_\mu n} |c_\mu| \tag{3.35}$$

对所有充分大的 n。

对于 $n \geq 1$，令

$$\mathcal{S}_{b^{-n}} := \{\mathbf{a} \in \mathcal{D}^{4n} : S_{\mathbf{a}}([0,1]) \cap (-b^{-n} - b^{-4n}, b^{-n} + b^{-4n}) = \varnothing\}. \tag{3.36}$$

由式（3.11）可知，对于足够大的 n，存在 $l_n \in \mathbb{N}$ 使得

$$b^{-n} \leq r_{l_n+1} < r_{l_n} \leq b^{-n} + b^{-4n}.$$

将这些不等式与 g 递增这一事实、陈述 (B)、(3.30) 以及 k_n的定义结合起来，我们看到，对于所有 n充分

large:

(3.37)
$$\min_{|x|\geq b^{-n}+b^{-4n}} |g(x)| \geq g(r_{l_n}) \geq (g(r_{l_n+1}))^{r_{l_n}} \geq (g(b^{-n}))^{r_{l_n}} \geq (f(b^{-n})-b^{-n})^{r_{l_n}} \gtrsim b^{-k_n\cdot o_n(1)}.$$

类似于 (3.22) 和 (3.28) 中对定理 3.2 的应用，这次还使用了 (3.37)，可得对于某个 $\eta > 0$仅取决于 μ和 f，以下结论对所有 n 充分大的情形成立：

(3.38)
$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{S}_{b^{-n}}} p_{\mathbf{a}}|\widehat{(f\circ S_{\mathbf{a}})\mu}(jb^{k_n})| &\leq \max_{\mathbf{a}\in\mathcal{S}_{b^{-n}}} |\widehat{(f\circ S_{\mathbf{a}})\mu}(jb^{k_n})| \\ &\lesssim \left(\min_{|x|\geq b^{-n}+b^{-4n}} |g(x)|\right)^{-1} b^{8n}b^{-\eta k_n} \\ &\lesssim b^{-\eta k_n/2} \\ &\leq b^{-4s_\mu n}\end{aligned}$$

（最后两个不等式成立，因为 $n = o(k_n)$。）

接下来，我们要用 n 给出 $\psi(jb^{k_n})$ 的一个上界。令 j_n 为满足 $\xi_{j_n} \leq jb^{k_n}$ 的最大整数（注意，当 n 足够大时，$\xi_{j_n} > jb^{k_n-1}$），于是

$$\xi_{j_n}(f(b^{-n}) - b^{-n}) > b^{-2}jb^{k_n+1}(f(b^{-n}) - b^{-n}) > 0.01b^{-2}|c_\mu|$$

对所有 n 充分大的情形，其中最后一个不等式用到了（3.33）。由（3.30）可知，这意味着 $\xi_{j_n}g(b^{-n}) > 0.01b^{-2}|c_\mu|$ 当 n 充分大时成立。由（3.11）可知，当 n 充分大时，存在 $l_n^* \in \mathbb{N}$ 使得

$$b^{-n} \leq r_{l_n^*+1} \leq r_{l_n^*} \leq b^{-(n-1)}.$$

结合这些不等式、性质（B）以及 g 递增这一事实，我们得到

(3.39)
$$\begin{aligned}\xi_{j_n}g(b^{-(n-1)}) \geq \xi_{j_n}g(r_{l_n^*}) \geq \xi_{j_n}(g(r_{l_n^*+1}))^{r_{l_n^*}} &\geq \xi_{j_n}(g(b^{-n}))^{r_{l_n^*}} \\ &\geq (g(b^{-n}))^{r_{l_n^*}-1}0.01b^{-2}|c_\mu| \\ &> 1\end{aligned}$$

当 n 充分大时。在最后一个不等式中，我们用到了 $\lim_{n\to\infty}(g(b^{-n}))^{r_{l_n^*}-1} = \infty$。由性质（A）和（3.32）可得 $\xi_{j_n}g(r_{j_n}) \leq \xi_{j_n}y_{j_n} < 1$ 对所有 n均成立。因此，由（3.39），且由于 g 递增，我们得到 $r_{j_n} < b^{-(n-1)}$ 当 n 充分大时成立。结合此不等式、（3.9）、$\xi_{j_n} \leq jb^{k_n}$ 以及 ψ 的单调性，我们得到

$$b^{-(n-1)} > r_{j_n} = (\psi(\xi_{j_n}))^{(\log\log(1/\psi(\xi_{j_n})))^{-1}} \geq (\psi(jb^{k_n}))^{1/(2s_\mu)}$$

对于所有 n 足够大的情形。重新整理后可得，当 n 足够大时，$\psi(jb^{k_n}) < b^{-2s_\mu(n-1)}$。由此进一步可知，当 n 足够大时，我们有

(3.40)
$$\psi(jb^{k_n}) < b^{-s_\mu n}.$$

现在，利用 (3.35) 和 (3.38)，仿照定理 1.15 证明中的主要计算，可得当 n 足够大时：

$$\begin{aligned}|\widehat{f\mu}(jb^{k_n})| &\gtrsim \left|\int_0^{b^{-n}} e^{2\pi i f(x) jb^{k_n}}\, d\mu(x)\right| - \mu((b^{-n}, b^{-n}+2b^{-4n})) \\ &\quad - \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{S}_{b^{-n}}} p_{\mathbf{a}} |\widehat{(f\circ S_{\mathbf{a}})\mu}(jb^{k_n})| \\ &\gtrsim b^{-s_\mu n} - b^{-4s_\mu n} - b^{-4s_\mu n} \\ &\gtrsim b^{-s_\mu n} \\ &> \psi(jb^{k_n}),\end{aligned}$$

其中最后一行是（3.40）。我们已经证明，对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 充分大的，$|\widehat{f\mu}(jb^{k_n})| \gtrsim \psi(jb^{k_n})$，因此对于所有 n 足够大的，$|\widehat{f\mu}(jb^{k_n})| \geq \phi(jb^{k_n})$。当然，根据定理1.11 （1），$f\mu$ 是 Rajchman，从而完成证明。□

接下来，我们利用命题3.7 和引理3.3 证明定理1.13。

定理1.13的证明。令 $\phi\colon [0,\infty) \to (0,1]$ 为一个满足 $\lim_{\xi\to\infty}\phi(\xi) = 0$ 的函数。令 $\tilde{\phi}\colon [0,\infty) \to (0,1]$ 为另一个函数，它也满足 $\lim_{\xi\to\infty}\tilde{\phi}(\xi) = 0$，并且还具有如下性质：对于所有 $c > 0$，存在 $\xi_c > 0$，使得对于所有 $\xi \geq \xi_c$，我们有 $\tilde{\phi}(\xi) \geq \phi(c\xi)$。例如，我们可以取 $\tilde{\phi}(\xi) = \psi(\sqrt{\xi})$，其中 ψ 是引理 3.5 中与 ϕ 对应的函数。在定理1.13的整个证明过程中，我们用关系 $r = r(\xi) = (\psi(\xi))^{(\log\log(1/\tilde{\phi}(\xi)))^{-1}}$ 代替 (3.9)，并相应地固定序列 (ξ_n) 和 (r_n)，因此 $\lim_{n\to\infty}\frac{\xi_{n+1}-\xi_n}{\tilde{\phi}(\xi_{n+1})} = 0$ 成立，以替代 (3.10)，且 (3.11) 成立。

我们固定一个与迭代函数系 μ 对应的缺位数字测度

$$\{\lambda_{b,t}(x) := b^{-1}(x+t)\}_{t\in\mathcal{D}}$$

以及均匀概率向量。这里 $\mathcal{D}$ 是 $\{0,\dots,b-1\}$ 的真子集，包含 0 和至少一个其他数字。令 $\nu = f\mu$ 为命题中的某个推前测度，该测度3.7 对应于 ϕ，其中 f 对应于满足该命题假设的某组 (c_n) 和 (y_n)。由命题 3.7 和引理3.3 可知，ν 是某个 C^∞迭代函数系的 Rajchman自共形测度，并且

$$\limsup_{\xi\to\infty}\frac{|\widehat{\nu}(\xi)|}{\tilde{\phi}(\xi)} > 0. \tag{3.41}$$

此外，考察引理 3.3 的证明，并利用 $1 \leq f'(x) \leq 2$对所有 $x \in [0,1]$均成立这一事实，可以清楚地看出，我们可以将该迭代函数系取为

$$\{S_t := f\circ\lambda_{b,t}\circ f^{-1}\colon [0,f(1)] \to [0,f(1)]\}_{t\in\mathcal{D}} \tag{3.42}$$

并令概率向量为均匀向量。由（3.42）可知，该迭代函数系的每次迭代都具有如下形式

$$\{S_t := f\circ\lambda_{b^l,t}\circ f^{-1}\colon [0,f(1)] \to [0,f(1)]\}_{t\in\mathcal{D}_l} \tag{3.43}$$

对于某个 $l \in \mathbb{N}$ 和 $\mathcal{D}_l \subset \{0, 1, \dots, b^l - 1\}$（此处 $\lambda_{b^l,\, t}(x) := b^{-l}(x + t)$。[4] 由 $0 \in \mathcal{D}$ 可知 $0 \in \mathcal{D}_l$ 对所有 $l \in \mathbb{N}$。

现在我们聚焦于以下断言：

断言 1： 存在 (c_n) 和 (y_n)，满足命题 3.7的假设，使得相应的 f 具有如下性质：对每个 $l \in \mathbb{N}$ 和 $t \in \mathcal{D}_l$，函数 S_t''在 $[0, f(1)]$ 中至多在有限多个点处为零。

尽管这一陈述或许看起来显而易见，但该断言的证明颇为技术性。为验证此断言，我们固定一个 (y_n) 的选取，并引入一个参数化族 (c_n)，该族中的每个成员以及 (y_n) 都满足命题 3.7 的假设，其中序列 (ξ_n) 和 (r_n) 按照上文所述，根据 $\tilde{}$ 来定义 ϕ。暂且固定序列 (c_n) 和 (y_n)，其中 (c_n) 定义为在每一步令

$$c_n := \frac{1}{2} \min\left\{2^{-n}, \min_{1 \le j \le n} \frac{2^{-(n+1-j)} y_j}{W(r_j - r_{n+1})}\right\},$$

并任意选取 (y_n)，使其满足命题 3.7 的假设。令 g_0 由 (3.13) 定义，其中采用上述特定的 (c_n) 选取。对每个 $n \in \mathbb{N}$，考虑区间

$$\Omega_n := \left[0, \frac{1}{2} \min\left\{2^{-n}, \min_{1 \le j \le n} \frac{2^{-(n+1-j)} y_j}{W(r_j - r_{n+1})}\right\}\right]$$

配备博雷尔 σ-代数，并令 ν_n 为此区间上的归一化勒贝格测度。因此，ν_n 是一个概率测度。现在考虑集合 $\Omega := \prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n$，其配备相应的乘积 σ-代数和乘积测度 $\nu := \prod_{n=1}^{\infty} \nu_n$。于是，$\nu$ 也是一个概率测度。对于每个 $\omega = (\delta_n)_{n=1}^{\infty} \in \Omega$，我们按照以下规则将其与序列 $(c_n(\omega))_{n=1}^{\infty}$ 关联起来

$$c_n(\omega) = \frac{1}{2} \min\left\{2^{-n}, \min_{1 \le j \le n} \frac{2^{-(n+1-j)} y_j}{W(r_j - r_{n+1})}\right\} + \delta_n$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$。注意，对于每个 ω，序列 $(c_n(\omega))$ 满足 $c_n(\omega) \in (0, 2^{-n}]$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 且 (3.31)。由于 $c_n \le c_n(\omega)$ 对所有 n 以及 ω，我们仍有

$$y_{n+1} \le (c_n(\omega) W(r_n - r_{n+1}))^{1/r_n} \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N},$$

因此 (3.32) 仍然成立。这意味着，对于每个 $\omega \in \Omega$，序列 $(c_n(\omega))$ 和 (y_n) 满足命题 3.7的假设。对于每个 ω，我们令 $g_\omega \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 按第 3.3 小节中的定义给出，即对于 $x \ge 0$，我们有

$$g_\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\omega) W(x - r_n) \tag{3.44}$$

和 $g(x) = -g(-x)$ 对于 $x < 0$。类似地，我们令 f_ω 和$S_{\omega,\, t}$ 分别表示由 g_ω 按照（3.29）、（3.42）得到的相应函数。推前测度 $\nu_\omega := f_\omega \mu$

[4]注意，映射 S_t 对于 $t \in \mathcal{D}_l$ 隐式依赖于 l；为简化记号，我们省略这种依赖关系。

sa根据命题3.41满足3.7。注意，对于所有 $\omega \in \Omega$以及 $x \geq 0$，我们都有

$$g_0(x) \leq g_\omega(x) \leq 2g_0(x). \tag{3.45}$$

断言 1 由以下断言立即得出。

断言 1a： 对于 ν 几乎处处的 $\omega \in \Omega$，任取 $l \in \mathbb{N}$和 $t \in \mathcal{D}_l$，函数 $S''_{\omega,\, t}$在 $[0, f_\omega(1)]$ 中至多在有限多个点处取零。

此外，由于可数个 ν-测度为零的集合之并仍是 ν-测度为零的集合，因此只需证明以下断言。

断言 1b： 对于每个 $l \in \mathbb{N}$，对 ν 几乎处处的 $\omega \in \Omega$，任取 $t \in \mathcal{D}_l$，函数 $S''_{\omega,\, t}$在 $[0, f_\omega(1)]$ 中至多在有限多个点处取零。

现在我们给出断言 1b 的证明。

断言 1b 的证明： 我们先固定 $l \in \mathbb{N}$。直接计算可得，对所有 $\omega \in \Omega$、 $x \geq 0$ 以及 $t \in \mathcal{D}_l$ 如（3.8）中所示的情形，以下结论成立：

$$\begin{aligned} S'_{\omega,t}(f_\omega(x)) &= b^{-l}\frac{f'_\omega(\lambda_{b^l,t}(x))}{f'_\omega(x)}; \\ S''_{\omega,t}(f_\omega(x)) &= \frac{b^{-l}}{(f'_\omega(x))^2}\left(b^{-l}g_\omega(\lambda_{b^l,t}(x)) - \frac{f'_\omega(\lambda_{b^l,t}(x))}{f'_\omega(x)}\cdot g_\omega(x)\right). \end{aligned} \tag{3.46}$$

因此，对所有 $\omega \in \Omega$、 $t \in \mathcal{D}_l$ 以及 $x > 0$，$S''_{\omega,\, t}(f_\omega(x))$ 的符号与以下表达式的符号相同

$$b^{-l}\frac{g_\omega(\lambda_{b^l,t}(x))}{g_\omega(x)} - \frac{f'_\omega(\lambda_{b^l,t}(x))}{f'_\omega(x)}. \tag{3.47}$$

但是，对所有 $\omega \in \Omega$ 和 $x \in [0,1]$，都有 $f'_\omega(x) \in [1,2]$，因此

$$\frac{1}{2} \leq \frac{f'_\omega(\lambda_{b^l,t}(x))}{f'_\omega(x)} \leq 2 \tag{3.48}$$

当 $x \in [0,1]$ 时。此外，对所有 $\omega \in \Omega$ 和 $t \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$,

$$\frac{g_\omega(\lambda_{b^l,t}(x))}{g_\omega(x)} \to \infty \quad \text{and} \quad \frac{g_\omega(\lambda_{b^l,0}(x))}{g_\omega(x)} \to 0 \quad \text{as } x \to 0^+.$$

因此，考虑我们的未扰动函数 g_0（它对应于这样的情形：$\omega = (\delta_n)$ 对所有 n 都满足 $\delta_n = 0$），我们看到存在某个足够小的 $x_0 > 0$，使得对所有 $x \in (0,\ x_0]$，都有

$$\frac{g_0(\lambda_{b^l,0}(x))}{g_0(x)} \leq \frac{1}{10} \quad \text{and} \quad \frac{g_0(\lambda_{b^l,t}(x))}{g_0(x)} \geq 10b^l \quad \forall\, t \in \mathcal{D}_l \setminus \{0\}. \tag{3.49}$$

由（3.45）和（3.49）可知，对于所有 $x \in$ （0，x_0] 以及所有 $\omega \in \Omega$:

$$\frac{g_\omega(\lambda_{b^l,0}(x))}{g_\omega(x)} \leq \frac{1}{5} \quad \text{and} \quad \frac{g_\omega(\lambda_{b^l,t}(x))}{g_\omega(x)} \geq 5b^l \quad \forall\, t \in \mathcal{D} \setminus \{0\}.$$

由（3.47）和（3.48）可知，对于每个 $\omega \in \Omega$，有

$$
\begin{aligned}
&S''_{\omega,0}(f(x)) < 0 \quad \text{for all } x \in (0, x_0] \qquad (\text{while } S''_0(0) = 0), \text{ and} \\
&S''_{\omega,t}(f(x)) > 0 \quad \text{for all } x \in [0, x_0],\ t \in \mathcal{D} \setminus \{0\}.
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

对于每个 $\omega \in \Omega$，f_ω 在形如（r_{n+1}，r_n）的每个区间上都是解析的，因此每个 $S_{\omega,\ t}$ 在（0，f_ω（1））上都是分段解析的。事实上，$S_{\omega,}$ 0 在（0，f_ω（1））上除去形如 f_ω（r_n）或 f_ω（$\lambda^{-1}_{b^l\,0}$，（r_n））的点（其中某个 n）后是解析的。此外，如果 $t \in \mathcal{D}_l \setminus \{0\}$，那么$S_{\omega,\ t}$ 在（0，f_ω（1））上除去形如 f_ω（r_n）（其中某个 n）或 f_ω（$\lambda^{-1}_{b^l\,t}$，（r_n））的点后是解析的，后者中的 $r_n \in \lambda_{b^l,\ t}([0,1])$ 取遍有限多个值（回忆 $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$以及对于 $t \in \mathcal{D}_l \setminus \{0\}$，$0 \notin \lambda_{b^l,\ t}([0,1])$）。解析性失效的这些点构成一个在 0 处聚积的离散集，因此下面的集合是有限的：

$$
(x_0, 1] \cap \left(\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{\lambda^{-1}_{b^l,0}(r_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{\lambda^{-1}_{b^l,t}(r_n) : t \in \mathcal{D}_l \setminus \{0\}, r_n \in \lambda_{b^l,t}([0,1])\} \cup \{1\} \right). \tag{3.51}
$$

我们令 $\{a_i\}_{i=1}^K$ 表示这个集合按递增顺序排列的一个枚举，并令$a_0 = x_0$。我们强调，$a_K = 1$，且除去相邻区间相接处的有限多个点，$\cup_{i=0}^K (a_i, a_{i+1})$ 等于 $(x_0, 1)$。此外，根据构造，对于所有 $\omega \in \Omega$、$0 \le i \le K-1$ 和 $t \in \mathcal{D}_l$，函数 $S''_{\omega,t}$ 在 $(f_\omega(a_i)\ f_\omega(a_{i+1}))$ 上是解析的。由 (3.50) 可知，对于所有 $\omega \in \Omega$ 和 $t \in \mathcal{D}_l$，都有 $S''_\omega(y) \neq 0$，对任意$y \in (0, f(x_0)]$均成立。因此，为了证明断言 1b，只需证明对于 ν 几乎处处的 $\omega \in \Omega$，对每个 $t \in \mathcal{D}_l$，函数 $S''_{\omega,t}$ 在 $(f_\omega(x_0)\ f_\omega(1))$ 中只有有限多个零点。要实现这一目标，以下事实将非常有用：对每个 $0 \le i \le K-1$，每个 $S''_{\omega,t}$ 在 $(f_\omega(a_i)\ f_\omega(a_{i+1}))$ 上都是解析的，并且 $(f_\omega(x_0)\ f_\omega(1))$ 与 $\cup_{i=0}^{K-1} (f_\omega(a_i)\ f_\omega(a_{i+1}))$ 除去有限多个点后相等。不过，首先我们必须检验，几乎必然地，对于每个 $S''_{\omega,t}$，它在任意区间 $(f_\omega(a_i)\ f_\omega(a_{i+1}))$ 上都不是恒等于零的常函数。以下断言阐述的正是这一点。

命题 2： 对于 ν 几乎处处的 $\omega \in \Omega$，对于所有 $t \in \mathcal{D}_l$ 和 $0 \le i \le K-1$，存在$y \in (f_\omega(a_i)\ f_\omega(a_{i+1}))$，使得 $S''_{\omega,t}(y) \neq 0$。

我们先作一个观察。假设 $\omega \in \Omega$、$t \in \mathcal{D}_l$ 和 $0 \le i \le K-1$ 满足：对所有 $y \in (f_\omega(a_i)\ f_\omega(a_{i+1}))$，$S''_{\omega,t}(y) = 0$。那么 $S'_{w,t}$ 将是 $(f_\omega(a_i)\ f_\omega(a_{i+1}))$ 上的常函数。结合这一观察与 (3.46) 可知，若 $\omega \in \Omega$、$t \in \mathcal{D}_l$ 和 $0 \le i \le K-1$ 满足：对所有 $y \in (f_\omega(a_i)\ f_\omega(a_{i+1}))$，$S''_{\omega,t}(y) = 0$，则存在 $C_\omega > 0$ 使得

$$
g_\omega(\lambda_{b^l,t}(x)) = C_\omega g_\omega(x) \qquad \text{for all } x \in (a_i, a_{i+1}).
$$

现在我们直接来证明命题 2。假设该命题不成立。那么存在$t \in \mathcal{D}_l$ 和 $0 \le i \le K-1$，使得对于某个 $B \subset \Omega$，满足 $\nu(B) > 0$，对于所有 $\omega \in B$，我们都有 $S''_{\omega,\ t}(y) = 0$ 对于所有 $y \in (f_\omega(a_i)\ f_\omega(a_{i+1}))$。由上文可知，这又意味着存在 $t \in \mathcal{D}_l$ 和 $0 \le i \le K-1$，使得对于所有 $\omega \in B$，都存在 $C_\omega > 0$，满足

$$
g_\omega(\lambda_{b^l,t}(x)) = C_\omega g_\omega(x) \qquad \text{for all } x \in (a_i, a_{i+1}). \tag{3.52}
$$

回顾 g_ω 在（3.44）中的定义、 $\{a_0,\dots,a_K\}$ 在（3.51）中的定义，以及 $x_0 = a_0 \le a_i$这一事实，我们看到（a_i， a_{i+1}）中的点均不与任何 r_n 值重合，因此存在一个正整数 n_1 ，使得

$$g_\omega(x) = \sum_{n=n_1}^{\infty} c_n(\omega) e^{-(x-r_{n+1})^{-2}} \qquad \text{for all } x \in (a_i, a_{i+1}). \tag{3.53}$$

同样，对于所有 $x \in (a_i, a_{i+1})$，$\lambda_{b^l,\,t}(x)$ 都不等于任何一个 r_n 值，因此存在一个正整数 n_2 ，使得

$$g_\omega(\lambda_{b^l,t}(x)) = \sum_{n=n_2}^{\infty} c_n(\omega) e^{-(\lambda_{b^l,t}(x)-r_{n+1})^{-2}} \qquad \text{for all } x \in (a_i, a_{i+1}). \tag{3.54}$$

因此，由 (3.52)，对所有 $x \in (a_i, a_{i+1})$ 有

$$\sum_{n=n_2}^{\infty} c_n(\omega) e^{-1/(\lambda_{b^l,t}(x)-r_{n+1})^2} = C_\omega \sum_{n=n_1}^{\infty} c_n(\omega) e^{-1/(x-r_{n+1})^2}. \tag{3.55}$$

现在固定 $M \ge \max\{n_1, n_2\}$。由于 ν 是乘积测度，且 $\nu(B) > 0$，根据富比尼定理对 B 上的示性函数的应用可知，存在某个序列 $(\delta_n^*)_{n=1,\ n\neq M}^{\infty}$ ，使得集合

$$B_M := \left\{\delta : (\delta_1^*, \dots, \delta_{M-1}^*, \delta, \delta_{M+1}^*, \dots) \in B\right\}$$

sa满足 $\nu_M(B_M) > 0$。对于 $\delta \in B_M$ ，令 $(c_n(\delta))_{n=1}^{\infty}$ 为由下式定义的序列

$$c_n(\delta) := \begin{cases} \frac{1}{2}\min\left\{2^{-n}, \min_{1\le j\le n} \frac{2^{-(n+1-j)} y_j}{W(r_j - r_{n+1})}\right\} + \delta_n^* & \text{f或 } n \neq M, \\ \frac{1}{2}\min\left\{2^{-M}, \min_{1\le j\le M} \frac{2^{-(M+1-j)} y_j}{S(r_j - r_{M+1})}\right\} + \delta & \text{f或 } n = M. \end{cases}$$

我们强调，对于所有 $n \neq M$，项 $c_n(\delta)$ 不依赖于 δ。由 (3.55) 可知，对于每个 $\delta \in B_M$ ，存在 $C_\delta > 0$ ，使得对所有 $x \in (a_i, a_{i+1})$ 都有

$$\sum_{n=n_2}^{\infty} c_n(\delta) e^{-1/(\lambda_{b^l,t}(x)-r_{n+1})^2} = C_\delta \sum_{n=n_1}^{\infty} c_n(\delta) e^{-1/(x-r_{n+1})^2}. \tag{3.56}$$

现在固定 $\delta^* \in B_M$。若 $\delta \in B_M$ ，则由 (3.56) 以及 $(c_n(\delta))$ 和 $(c_n(\delta^*))$ 的定义可知，对所有 $x \in (a_i, a_{i+1})$ 都有

$$\sum_{n=n_2}^{\infty} c_n(\delta) e^{-1/(\lambda_{b^l,t}(x)-r_{n+1})^2} = C_\delta \left(\sum_{n=n_1}^{\infty} c_n(\delta^*) e^{-1/(x-r_{n+1})^2} + (\delta - \delta^*) e^{-1/(x-r_{M+1})^2} \right). \tag{3.57}$$

再次利用（3.56），我们看到，（3.57）左端的以下性质对所有 $\delta \in B_M$ 以及所有 $x \in$ （a_i， a_{i+1}）也成立：

$$\sum_{n=n_2}^{\infty} c_n(\delta) e^{-1/(\lambda_{b^l,t}(x)-r_{n+1})^2} = C_{\delta^*} \sum_{n=n_1}^{\infty} c_n(\delta^*) e^{-1/(x-r_{n+1})^2} + (\delta - \delta^*) e^{-1/(\lambda_{b^l,t}(x)-r_{M+1})^2}. \tag{3.58}$$

结合（3.57）和（3.58），可得对所有 $\delta \in B_M$ 以及所有 $x \in (a_i, a_{i+1})$，我们有（3.59）

$$(C_{\delta^*} - C_\delta) \sum_{n=n_1}^{\infty} c_n(\delta^*) e^{-1/(x-r_{n+1})^2} = C_\delta(\delta - \delta^*) e^{-1/(x-r_{M+1})^2} - (\delta - \delta^*) e^{-1/(\lambda_{b^l,t}(x)-r_{M+1})^2}.$$

现在我们通过分类讨论证明 (3.59) 总会导出矛盾。在分析中，我们将反复使用以下事实。

陈述 2： 对于所有 i 和 $t \in \mathcal{D}_l$，函数

$$x \mapsto \frac{e^{-1/(\lambda_{b^l,t}(x)-r_{M+1})^2}}{e^{-1/(x-r_{M+1})^2}}$$

在区间 (a_i, a_{i+1}) 上不是常数。

陈述 2 是以下事实的直接推论：对于所有 $t \in \mathcal{D}_l$，函数

$$x \mapsto (\lambda_{b^l,t}(x) - r_{M+1})^{-2} - (x - r_{M+1})^{-2}$$

在任意 (a_i, a_{i+1}) 上都不是常函数。现在我们进行分类讨论 .

情况 A： $C_\delta = C_{\delta^*}$ **对于某个** $\delta \in B_M \setminus \{\delta^*\}$。在这种情况下，3.59) 意味着

$$0 = C_\delta(\delta - \delta^*) e^{-1/(x-r_{M+1})^2} - (\delta - \delta^*) e^{-1/(\lambda_{b^l,t}(x)-r_{M+1})^2} \qquad \text{for all } x \in (a_i, a_{i+1}).$$

根据陈述 2，这不可能。

情况 B： $C_\delta \neq C_{\delta^*}$ **对于所有** $\delta \in B_M \setminus \{\delta^*\}$。在这种情况下，我们可以改写（3.59），使得对于所有 $\delta \in B_M \setminus \{\delta^*\}$ 以及所有 $x \in (a_i, a_{i+1})$ 都有

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} c_n(\delta^*) e^{-1/(x-r_{n+1})^2} = \frac{C_\delta(\delta - \delta^*)}{(C_{\delta^*} - C_\delta)} e^{-1/(x-r_{M+1})^2} - \frac{(\delta - \delta^*)}{(C_{\delta^*} - C_\delta)} e^{-1/(\lambda_{b^l,t}(x)-r_{M+1})^2}.$$

由于上式左侧不依赖于 δ，因此对于任意$\delta, \delta' \in B_M \setminus \{\delta^*\}$ 以及 $x \in (a_i, a_{i+1})$，都有

$$\begin{aligned} 0 = &\left(\frac{C_\delta(\delta - \delta^*)}{(C_{\delta^*} - C_\delta)} - \frac{C_{\delta'}(\delta' - \delta^*)}{(C_{\delta^*} - C_{\delta'})} \right) e^{-1/(x-r_{M+1})^2} \\ &- \left(\frac{(\delta - \delta^*)}{(C_{\delta^*} - C_\delta)} - \frac{(\delta' - \delta^*)}{(C_{\delta^*} - C_{\delta'})} \right) e^{-1/(\lambda_{b^l,t}(x)-r_{M+1})^2}. \end{aligned} \tag{3.60}$$

由陈述 2 可知，（3.60）中的两个括号项对所有 δ，$\delta' \in B_M \setminus \{\delta^*\}$ 都等于零。总之，我们已证明映射 $\delta \mapsto \frac{C_\delta}{(\delta-\delta^*)}\ \frac{}{(C_{\delta^*}-C_\delta)}$ 与$\delta \mapsto \frac{}{(\delta-\delta^*)}\ \frac{}{(C_{\delta^*}-C_\delta)}$ 在 $\cancel{B_M \setminus \{\delta^*\}}$ 上是常值函数。这进而意味着映射 $\delta \mapsto C_\delta$ 在 $B_M \setminus \{\delta^*\}$ 上是常值函数。我们将该函数所取的常值记为 C。将此信息代入（3.59），可得对每一个$\delta \in B_M \setminus \{\delta^*\}$ 以及 $x \in (a_i, a_{i+1})$，我们有（

3.61)

$$(C_{\delta^*} - C) \sum_{n=n_1}^{\infty} c_n(\delta^*) e^{-1/(x-r_{n+1})^2} = (\delta - \delta^*)(C e^{-1/(x-r_{M+1})^2} - e^{-1/(\lambda_{b^l,t}(x)-r_{M+1})^2}).$$

（3.61）的左端不依赖于 δ。（3.61）的右端具有（$\delta - \delta^*$）乘以一个不依赖于 δ 的项的形式。由于 δ 是 $B_M \setminus \{\delta^*\}$ 的任意元素，且 B_M 是正测度集（因而为无穷[5]），要使（3.61）对所有 $x \in$（a_i，a_{i+1}）以及 $\delta \in B_M \setminus \{\delta^*\}$ 成立，唯一的方式是

$$Ce^{-1/(x-r_{M+1})^2} - e^{-1/(\lambda_{b^l,t}(x)-r_{M+1})^2} = 0 \qquad \text{for all } x \in (a_i, a_{i+1}).$$

然而，根据陈述 2，这是不可能的。

我们已经证明，无论处于情形 (A) 还是情形 (B)，都会与陈述 2 矛盾。因此，命题 2 必定成立。

我们回到断言 1b 的证明。根据命题 2，满足以下条件的 $\omega \in \Omega$ 构成一个满 ν-测度集：对于所有$t \in \mathcal{D}_l$和 $0 \le i \le K-1$，都存在 $y \in (f_\omega(a_i)\ f_\omega(a_{i+1}))$，使得 $S''_{\omega,t}(y) \neq 0$。因此，只需证明，对于任意这样的 ω，对所有 $t \in \mathcal{D}_l$，函数 $S''_{\omega,t}$ 在 $[0, f_\omega(1)]$ 中至多只有有限个零点。在证明余下部分中，我们固定这样一个 ω，并为简便起见记 $(c_n) = (c_n(\omega))$、$g = g_\omega$, $f = f_\omega$ 和 $S_t = S_{\omega,t}$。我们的策略是证明：对于每个 $t \in \mathcal{D}_l$，在所有充分接近某个 $f(a_i)$（其中 $0 \le i \le K$）的点 $y \in (0, f(1))$ 上，只要这些点不与上述任一点重合，就有 $S''_t(y) \neq 0$。结合 (3.50) 以及对每个 $0 \le i \le K-1$，S''_t 在 $(f(a_i)\ f(a_{i+1}))$ 上为解析函数这一事实，即可推出S''_t只有有限个零点。

考虑区间 $[f(a_i)\ f(a_{i+1})]$，其中 $i \in \{0, \dots, K-1\}$。若 $t \in \mathcal{D}_l$ 满足 $S''_t(f(a_{i+1})) \neq 0$，那么由连续性可知，存在 $\varepsilon_1 > 0$ 使得对于所有 $y \in (f(a_{i+1}) - \varepsilon_1, f(a_{i+1}) + \varepsilon_1)$，都有 $S''_t(y) \neq 0$。现在假设 $t \in \mathcal{D}_l$ 满足$S''_t(f(a_{i+1})) = 0$。如同 (3.53) 和 (3.54)，存在 $n_1 \in \mathbb{N}$ 和 $n_2 \in \mathbb{N}$，使得

$$g(x) = \sum_{n=n_1}^{\infty} c_n e^{-(x-r_{n+1})^{-2}} \quad \text{and} \quad g(\lambda_{b^l,t}(x)) = \sum_{n=n_2}^{\infty} c_n e^{-(\lambda_{b^l,t}(x)-r_{n+1})^{-2}} \tag{3.62}$$

对于所有 $x \in (a_i,\ a_{i+1}]$。注意到 $r_{n_1+1} \le a_i$，并定义严格递增函数~f：$[r_{n_1+1}, \infty) \to \mathbb{R}$，使得

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} x + \int_0^x \int_0^y \sum_{n=n_1}^{\infty} c_n e^{-(r-r_{n+1})^{-2}} dr dy, & \text{for } x \in (r_{n_1+1}, \infty), \\ r_{n_1+1} + \int_0^{r_{n_1+1}} \int_0^y \sum_{n=n_1+1}^{\infty} c_n e^{-(r-r_{n+1})^{-2}} dr dy, & \text{for } x = r_{n_1+1}. \end{cases}$$

~注意到，f 在（r_{n_1+1}，∞）上是解析的。我们强调，对于所有 $x \in [a_i, a_{i+1}]$，都有 ~f（x）$= f$（x）、f'（x）$= f'$（x）以及 f''（x）$= g$（x）。定义函数 h：[f（r_{n_1+1}）∞）$\to$

[5]事实上，$\#B_M \ge 3$ 足以支撑这一论证。

$\mathbb{R}$ by

(3.63)

$$h(y) := \frac{b^{-l}}{(\tilde{f}'(\tilde{f}^{-1}(y)))^2} \cdot b^{-l} \sum_{n=n_2}^{\infty} c_n e^{-(\lambda_{b^l,t}(\tilde{f}^{-1}(y))-r_{n+1})^{-2}}$$
$$- \frac{b^{-l}}{(\tilde{f}'(\tilde{f}^{-1}(y)))^2} \cdot \frac{1 + \int_0^{\lambda_{b^l,t}(\tilde{f}^{-1}(y))} \sum_{n=n_2}^{\infty} c_n e^{-(x'-r_{n+1})^{-2}} dx'}{\tilde{f}'(\tilde{f}^{-1}(y))} \cdot \sum_{n=n_1}^{\infty} c_n e^{-(\tilde{f}^{-1}(y)-r_{n+1})^{-2}}$$

~ ~对于 $y \in (f(r_{n_1+1}) \ \infty)$，通过连续性延拓至 $f(r_{n_1+1})$。注意到 h是解析的~，定义在 $(f(r_{n_1+1}) \ \infty)$ 上。由 (3.46)、(3.62)，$h|_{(f(a_i) \ \infty)}$ 是在 $(f(a_i) \ \infty)$ 上满足以下条件的唯一解析函数

$$h(f(x)) = S_t''(f(x)) \qquad \text{for all } x \in (a_i, a_{i+1}].$$

现在，由于根据假设，$S_t'' \circ f$ 在 (a_i, a_{i+1}) 上不恒为零，且在此区间上与 $h \circ f$ 一致，我们可知 $h \circ f$ 在 (a_i, ∞) 上不恒为零。因此，~由于 $h \circ f$ 在 (a_i, ∞) 上解析，存在某个最小正整数 k，使得 $(h \circ \tilde{f})^{(k)}(a_{i+1}) \neq 0$。但由于 $f = \tilde{f}$在 $[a_i, a_{i+1}]$上，我们有

$$(h \circ f)^{(k)}(a_{i+1}) = (h \circ \tilde{f})^{(k)}(a_{i+1}) \neq 0.$$

因此，根据泰勒定理，存在一些较小的常数 $C, \varepsilon_2 > 0$，使得

(3.64) $$|h(f(x))| \geq C(x - a_{i+1})^k \qquad \text{for all } x \in (a_{i+1} - \varepsilon_2, a_{i+1} + \varepsilon_2).$$

特别地，

$$h(f(x)) \neq 0 \qquad \text{for all } x \in (a_{i+1} - \varepsilon_2, a_{i+1} + \varepsilon_2) \setminus \{a_{i+1}\},$$

so

$$S_t''(f(x)) = h(f(x)) \neq 0 \qquad \text{for all } x \in (a_{i+1} - \varepsilon_2, a_{i+1}).$$

理解 S_t'' 在 a_{i+1} 右侧的行为要稍微复杂一些。~定义 C^∞ 函数 s_0 如下：$f = f + s_0$。利用g、f的定义，以及 (3.46) 中给出的 S_t'' 公式和 (h 3.63) 中给出的 $\varepsilon_3 > 0$ 公式，我们可以找到 C^∞ 及类似定义的函数 s_1、s_2、s_3、s_4 (其中一些可能恒为零)，使得对所有 $x \in [a_{i+1}, a_{i+1} + \varepsilon_3)$，

(3.65)

$$h(f(x) + s_0(x))$$
$$= \frac{b^{-l}(g(\lambda_{b^l,t}(x)) + s_1(x))(f'(x) + s_2(x)) - (f'(\lambda_{b^l,t}(x)) + s_3(x))(g(x) + s_4(x))}{b^l(f'(x) + s_2(x))^3}.$$

此外，我们可以保证，对于所有 $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$、s_i，其所有导数都在 a_{i+1}处消失，因此（必要时减小 ε_3 ）

(3.66) $$s_i(x) < (x - a_{i+1})^{k+1} \qquad \text{for all } i \text{ and } x \in (a_{i+1} - \varepsilon_3, a_{i+1} + \varepsilon_3).$$

˜回想一下，我们已选择 s_0 使得 $f = f + s_0$，根据中值定理，存在 $C > 0$ 使得

$$|h(\tilde{f}(x)) - h(f(x))| \leq C s_0(x) \qquad \text{for all } x \in [0,1]. \tag{3.67}$$

令 $\varepsilon_4 > 0$ 足够小，使得 $g(x)$ $g(\lambda_{b,t}(x))$ $f'(x)$ $f'(\lambda_{b,t}(x))$ 都一致地与 0 保持正距离，并且 ∞ 对于 $x \in [a_{i+1} - \varepsilon_4, a_{i+1} + \varepsilon_4]$，由（3.46）、（3.65）以及直接的代数运算可知，存在某个足够大的常数 $C' > 0$，使得对于所有这类 x 都有

$$|h(\tilde{f}(x)) - S_t''(f(x))| < C' \max_{1 \leq i \leq 4} s_i(x).$$

但根据（3.67），这意味着存在 $C'' \geq C'$ 和 $\varepsilon_5 \in (0, \varepsilon_4)$，使得对于所有 $x \in [a_{i+1} - \varepsilon_5, a_{i+1} + \varepsilon_5]$ 都有

$$|h(f(x)) - S_t''(f(x))| < C'' \max_{0 \leq i \leq 4} s_i(x).$$

此外，存在某个足够小的 $0 < \varepsilon_6 <$ 最小值$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}$，使得对于所有 $x \in [-\varepsilon_6, \varepsilon_6]$ 都有 $Cx^k/2 > C''x^{k+1}$。这意味着对于所有 $x \in (a_{i+1}, a_{i+1} + \varepsilon_6]$，根据上述结果和（3.66），都有

$$|h(f(x)) - S_t''(f(x))| < \frac{C(x - a_{i+1})^k}{2},$$

因此由（3.64），

$$|S_t''(f(x))| > \frac{C(x - a_{i+1})^k}{2} > 0.$$

由于上述论证中的 $0 \leq i \leq K - 1$ 是任意的，我们可知存在

$$0 < \varepsilon_7 < \min\left\{\varepsilon_6, \min_{0 \leq i \leq K-1} \frac{a_{i+1} - a_i}{2}\right\}$$

使得

$$|S_t''(f(x))| > 0 \qquad \text{for all} \qquad x \in \left(\bigcup_{i=0}^{K} [a_i - \varepsilon_7, a_i + \varepsilon_7] \setminus \{a_i\}\right) \cap (0,1)$$

（$i = 0$ 情形可由 S_t''（f（a_0））$= S_t''$（f（x_0））$\neq 0$，根据（3.50）得出。）接着，由于 S_t'' 在 [f（$a_i + \varepsilon_7$） f（a_{i+1}）] 上与 h 重合，且此紧集包含于 h 为解析函数的集合（f（a_i） ∞）中，因此 S_t'' 在 [f（a_i） f（a_{i+1}）] 中至多有有限个零点。由于 [f（a_i） f（a_{i+1}）] 是任意选取的区间，由这一事实及（3.50）可知，S_t'' 在 [0, f（1）] 中至多有有限个零点。由于 t 是任意的，这就完成了断言 1b 的证明；如前所述，这也意味着断言 1a 和断言 1。

为完成定理 1.13的证明，令 f 如断言 1 的陈述所述，令 ν 为由此得到的自共形测度，并令 $\tilde{\nu}$ 为 ν 在$\lambda(x)$ 下的推前测度: $= x/f(1)$。那么 $\tilde{\nu}$ 是以下迭代函数系的自共形测度

$$\{\mathcal{S}_t = \tilde{\lambda} \circ f \circ \lambda_{b,t} \circ f^{-1} \circ \tilde{\lambda}^{-1} \colon [0,1] \to [0,1]\}_{t \in \mathcal{D}}.$$

对于这些 $\mathcal{S}_t$ 压缩映射的任意复合，由这些映射的定义和链式法则可知，该复合的二阶导数零点集恰好是 $(f \circ \lambda_{b_l,t} \circ f^{-1})''$ 的零点集在 $\tilde{\lambda}$ 下的像，其中某个 $l \in \mathbb{N}$ 和 $t \in \mathcal{D}_l$ 满足条件，因此该零点集是有限的。现在，根据傅里叶变换的缩放性质，

$\widehat{\ }$ $\tilde{\ }$ 对于所有 $\xi \in \mathbb{R}$，我们有 $\tilde{\nu}(\xi) = \widehat{\nu}(\xi/f(1))$。因此，由于按照 ϕ 的定义，对于所有充分大的 ξ，都有 $\phi(\xi/f(1)) \geq \phi(\xi)$，再结合 (3.41)，可得

$$\limsup_{\xi\to\infty} \frac{|\widehat{\widetilde{\nu}}(\xi)|}{\phi(\xi)} \geq \limsup_{\xi\to\infty} \frac{|\widehat{\nu}(\xi/f(1))|}{\tilde{\phi}(\xi/f(1))} > 0.$$

这就完成了定理1.13的证明。 □

3.5. **显式例子。** 本节将给出证明其余定理的论证，并验证例子 1.9 中的断言。定理 1.14 和 1.16 可采用与命题 3.7 和定理 1.13 的证明中类似的策略来证明（对于定理 1.14），而定理1.15 （对于定理1.16）。对于定理1.14，我们需要以下引理。

引理 3.8. 设 $h(x) = \exp(-\exp(x^{-2}))$ 且 $f(x) = x + h(x)$，其中 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，且 $f(0) = h(0) = 0$。设 $0 < c < 1$ 且 $d \geq 0$，并设 $\lambda_{c,d}(x) := cx + d$，其中 $x \in \mathbb{R}$。则下列集合为有限集：

$$\{y \in [0, f(1)] : (f \circ \lambda_{c,d} \circ f^{-1})''(y) = 0\}. \tag{3.68}$$

证明。对于 $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x^{-3}\exp(x^{-2})h(x) \qquad \text{and} \qquad f'(x) = 1 + h'(x); \\ f''(x) = h''(x) &= \Big((2x^{-3}\exp(x^{-2}))^2 - 6x^{-4}\exp(x^{-2}) - 4x^{-6}\exp(x^{-2})\Big)h(x), \end{aligned} \tag{3.69}$$

而 $h'(0) = h''(0) = f''(0) = 0$。从(3.69)可知

$$1 = f'(0) = \min_{0\leq x<\infty} f'(x) < \sup_{0\leq x<\infty} f'(x) < \infty. \tag{3.70}$$

此外，再求一次导数可知，当 $x > 0$ 非常小时，$f'''(x) = h'''(x)$的表达式中的主导项为$(2x^{-3}\exp(x^{-2}))^3 h(x)$。由此可知，存在 $\varepsilon > 0$，使得对所有 $x \in (0, \varepsilon]$，都有 $h'''(x) > 0$，因此 h'' 在 $[0, \varepsilon]$上是（严格）递增的。

此外，根据（3.69），存在函数 $P_1(x)$ $P_2(x)$，满足

$$\max\{|P_1(x)|, |P_2(x)|\} < x^{-3}$$

对于所有充分小的 $x > 0$ s，使得

$$\begin{aligned}\frac{\log h''(x)}{\log h''(cx)} &= \frac{P_1(x) + \log h(x)}{P_2(x) + \log h(cx)} \\ &= \frac{\frac{P_1(x)}{\log h(cx)} + \frac{\log h(x)}{\log h(cx)}}{\frac{P_2(x)}{\log h(cx)} + 1} \\ &= \frac{\frac{P_1(x)}{\log h(cx)} + \exp(x^2(1-c^{-2}))}{\frac{P_2(x)}{\log h(cx)} + 1} \\ &\xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{0+0}{0+1} = 0.\end{aligned} \tag{3.71}$$

Thus

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{h''(cx)}{h''(x)} = 0.^{6} \tag{3.72}$$

现在，根据与（3.8）中相同的计算，对所有 $x \in \mathbb{R}$ 我们有

$$(f \circ \lambda_{c,d} \circ f^{-1})''(f(x)) = \frac{c}{(f'(x))^2}\left(cf''(cx+d) - \frac{f'(cx+d)}{f'(x)} \cdot f''(x)\right). \tag{3.73}$$

我们按照推导（3.50）的方式，分别考虑两种情况 $d = 0$ 和 $d > 0$。首先考虑 $d = 0$。结合（3.73）与（3.70）、（3.72），并注意到 $f''(x) = h''(x) > 0$对于 $x > 0$，可知存在 $y_0 \in (0, f(1))$（依赖于 c），使得对所有 $y \in (0, y_0]$，都有 $(f \circ \lambda_{c,0} \circ f^{-1})''(y) < 0$（而 $(f \circ \lambda_{c,0} \circ f^{-1})''(0) = 0$）。另一方面，若 $d > 0$，则由（3.70）及 $f''(0) = 0$ 这一事实可得

$$\lim_{x\to 0}(f \circ \lambda_{c,d} \circ f^{-1})''(f(x)) = c^2 f''(d) > 0.$$

因此，若 $d > 0$，则存在 $y_0' \in (0, f(1))$（取决于 c和 d），使得对于所有 $y \in [0, y_0']$，均有 $(f \circ \lambda_{c,\ d} \circ f^{-1})''(y) > 0$。

我们已经证明，无论 $d = 0$ 是否成立，都存在 $y_0'' \in (0, f(1))$，其取决于 c，d，使得

$$(f \circ \lambda_{c,d} \circ f^{-1})''(y) \neq 0 \qquad \forall\, y \in (0, y_0'']. \tag{3.74}$$

此外，$(f \circ \lambda_{c,\ d} \circ f^{-1})''$ 在 $(0, \infty)$ 上是解析的，并且由 (3.74) 可知它不恒等于零。因此，它在紧区间 $[y_0, f(1)]$内至多有有限个零点。这一点结合 (3.74) 蕴含 (3.68) 中集合的有限性。□

我们概述定理 1.14的证明，但省略其中与命题 3.7的证明非常相似的部分。

定理的证明思路 1.14。令 $h(x) = \exp(-\exp(x^{-2}))$，并令 $f(x) = x + h(x)$，其中$x \neq 0$，且 $f(0) = h(0) = 0$，并令 μ 为支撑集位于 $[0, 1]$内的康托–勒贝格测度。如定理 1.13的证明中一样， $f\mu$ 是该迭代函数系的自共形测度

[6]我们证明引理3.72时只需要3.8中的陈述（3.71），但下文证明定理1.14 时会用到更强的陈述。

C^∞迭代函数系 $\{f\circ T_1\circ f^{-1}, f\circ T_2\circ f^{-1}\}$，其中 $T_1(x)=x/3$和 $T_2(x)=(x+2)/3$。根据引理 3.8，迭代函数系的所有迭代函数，其二阶导数至多在实数集 $[0,f(1)]$ 中有限多个点处为零。

现在，回想引理3.8 中的观察：存在 $\varepsilon>0$ 使得h''（因此 f''也）在 $[0,\varepsilon]$上递增。不失一般性，我们可以假设 $\varepsilon=3^{-M}$，其中 $M\in\mathbb{N}$足够大。那么对所有 $\xi\in\mathbb{R}$，都有

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\xi f(x)}d\mu(x)=\int_0^{3^{-M}} e^{2\pi i\xi f(x)}d\mu(x)+\int_{3^{-M}}^{\infty} e^{2\pi i\xi f(x)}d\mu(x). \tag{3.75}$$

对于后一个表达式，我们有

$$\int_{3^{-M}}^{\infty} e^{2\pi i\xi f(x)}d\mu(x)=\sum_{\mathbf{a}\in\{1,2\}^M:\mathbf{a}\neq 0^M} p_{\mathbf{a}}\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\xi f(T_{\mathbf{a}}(x))}d\mu(x).$$

回想一下，[3, 7] 中已证明，自相似测度的解析非仿射像具有多项式傅里叶衰减。因此，上述求和中出现的每个积分都以多项式速度趋于零 ξ。所以，接下来只需证明 $[0,3^{-M}]$ 上的剩余积分具有所需的慢衰减。

给定整数 $n>M$，令 k_n 为满足 $3^{k_n}h(3^{-n})\le 0.01$的最大整数。由于 $\mathrm{supp}(\mu)\cap(3^{-n},\ 2\cdot(3^{-n}))=\varnothing$，我们还可以将积分进一步拆分：

$$\int_0^{3^{-M}} e^{2\pi i3^{k_n}f(x)}d\mu(x)=\int_0^{3^{-n}} e^{2\pi i3^{k_n}f(x)}d\mu(x)+\int_{2\cdot(3^{-n})}^{3^{-M}} e^{2\pi i3^{k_n}f(x)}d\mu(x). \tag{3.76}$$

对所有充分大的 $n>M$，我们可以通过求得一个上界来处理 $2\cdot(3^{-n})\le x\le 3^{-M}$ 区域

$$\sum_{\mathbf{a}\in\{1,2\}^{n-M}:\mathbf{a}\neq 0^{n-M}} p_{0^M\mathbf{a}}\left|\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i3^{k_n}f(T_{0^M\mathbf{a}}(x))}d\mu(x)\right|$$

使用与命题3.7相同的证明策略。事实上，为此我们使用$c=1/2$ 的情形（3.71），以及 h'' 在 $[0,3^{-M}]$ 上递增这一事实，以得到$\max_{2\cdot(3^{-n})\le x\le 3^{-M}} h''(x)$的一个下界，并应用定理3.2。（3.35）关于在 $[0,3^{-n}]$ 上的积分的一个类似结果，可利用 k_n的定义、康托–勒贝格测度的性质，以及 $\widehat{\mu}(3^n)=\widehat{\mu}(1)\neq 0$对所有 $n\in\mathbb{N}$都成立这一事实来建立。这些关于（3.76）中积分两部分的界合起来表明，对所有充分大的 $n>M$，

$$\int_0^{3^{-M}} e^{2\pi i3^{k_n}f(x)}d\mu(x)\gtrsim\mu([0,3^{-n}])=2^{-n}.$$

但对于所有充分大的 n，$3^{k_n}\approx\exp(\exp(9^n))$，因此 $\log(3^{k_n})\approx k_n\approx\exp(9^n)$，进而 $\log\log(3^{k_n})\approx 9^n$。所以对于所有充分大的 $n>M$，

$$\int_0^{3^{-M}} e^{2\pi i3^{k_n}f(x)}d\mu(x)\gtrsim 2^{-n}>9^{-n}\approx\frac{1}{\log\log(3^{k_n})}.$$

利用（3.75）以及前述 $\int_{3-M}^{\infty} e^{2\pi i\xi f(x)}$ 在 ξ中的多项式衰减，可得对于所有充分大的 n,

$$|\widehat{f\mu}(3^{k_n})| \gtrsim \frac{1}{\log\log(3^{k_n})}.$$

尽管如此， $f\mu$ 根据定理 1.11 (1)，它是 Rajchman 的。 □

定理 1.16 证明中使用的论证1.14 和1.15的证明中基本都已包含了这一论证。因此，我们将省略该论证。

下面的讨论为例1.9中的断言提供了依据。回想一下，该例引出了问题1.10 中的条件；该条件以我们迭代函数系中所有压缩映射复合的二阶导数来表述。

例 1.9 （续）。回想一下， ν 是 $[0,1]$上的康托–勒贝格测度（因此 $T_1(x) = x/3$ 且 $T_2(x) = (x+2)/3$，其概率向量为（$1/2$， $1/2$）。在例 1.9 中，我们取 f: $[0,1] \to [0,1]$ 一个递增的 C^∞ 微分同胚，它在 $[2/9, 1/3]$ 上是仿射的，并满足

$$f''(x) \neq 0 \qquad \text{for all } x \in [0,2/9) \cup (3/9,1]. \tag{3.77}$$

我们声称，可以选择 f，使得以下性质成立：

(1) μ是 C^∞ 迭代函数系的自共形测度

$$\{S_a := f \circ T_a \circ f^{-1} \colon [0,1] \to [0,1]\}_{a=1}^{2}$$

且其概率向量为（$1/2$， $1/2$）。

(2) 对于 $a \in \{1,2\}$，除至多有限个 $x \in [0,1]$外，我们有 $S_a''(x) \neq 0$。接下来需要证明这一断言。我们先选择 f，使其在 $[0,2/9)\cup(1/3,1]$上实解析。若还选择 f，使得 $\max_{x\in[0,1]} |f'(x)| \in (0.9, 1.1)$，那么根据引理 3.3 的证明， μ 就是带有概率向量（$1/2$, $1/2$）的迭代函数系$\{f \circ S_1 \circ f^{-1}, f \circ S_2 \circ f^{-1}\}$的自共形测度，因此性质 (1) 成立。

为证明性质（2），回顾由（ S_a'' 给出的公式3.8）很有用：对于 $x \geq 0$ 和 $a \in \{1,2\}$，有

$$S_a''(f(x)) = \frac{1}{3(f'(x))^2}\left(\frac{f''(T_a(x))}{3} - \frac{f'(T_a(x))}{f'(x)} \cdot f''(x)\right). \tag{3.78}$$

若 $x \in [2/9, 1/3]$，则 $f''(x) = 0$，但对于每个 $a \in \{1,2\}$， $f''(T_a(x)) \neq 0$，因为当 $x \in [2/9,1/3]$时，$T_a(x) \notin [2/9,1/3]$。因此，根据（3.78），对所有 $x \in [2/9,1/3]$ 和 $a \in \{1,2\}$， $S_a''(f(x)) \neq 0$。类似地，若 $x \in [2/3,1]$，则 $f''(T_1(x)) = 0$，且 $f''(x) \neq 0$，所以对所有 $x \in [2/3,1]$， $S_1''(f(x)) \neq 0$。由连续性，存在 $\varepsilon > 0$，使得对所有 $x \in (2/9-\varepsilon, 1/3+\varepsilon)$ 和 $a \in \{1,2\}$， $S_a''(f(x)) \neq 0$；并且对所有 $x \in (2/3-\varepsilon, 1]$， $S_1''(f(x)) \neq 0$。接下来考虑以下情形：

(1) $x \in [0, 2/9-\varepsilon]$ 和 $a = 2$。

(2) $x \in [1/3+\varepsilon, 1]$ 和 $a = 2$。

(3) $x \in [0, 2/9-\varepsilon]$ 和 $a = 1$。

(4) $x \in [1/3+\varepsilon, 2/3-\varepsilon]$ and $a = 1$.

我们需要证明，可以通过适当选择 f，使得上述每种情况所贡献的满足 $S_a''(f(x)) = 0$ 的 x 值都至多只有有限多个。我们将重点讨论 $x \in [0, 2/9-\varepsilon]$ 和 $a = 2$ 的情形；其他情形也可以类似处理。关键观察是，函数

$$x \mapsto \left(\frac{f''(T_2(x))}{3} - \frac{f'(T_2(x))}{f'(x)} \cdot f''(x) \right) \tag{3.79}$$

在 $[0, 2/9-\varepsilon]$上是实解析的。因此，根据（3.78），为了证明在紧区间 $[0, 2/9-\varepsilon]$ 中满足 $S_2''(f(x)) = 0$的 x至多有有限多个，只需证明我们可以选取 f，使得由（3.79）所描述的函数不是恒等于零的函数。这可以通过调整定理 1.13证明中所使用的论证来实现。具体而言，我们可以引入一种在端点处无穷阶平坦的随机扰动 $2/9$ 和 $1/3$，并证明对于几乎所有的扰动选择，由（3.79）所描述的函数在 $[0, 2/9-\varepsilon]$上并非恒等于零的函数。将这一论证应用于上面列出的每一种情形，并利用有限个零测集的并仍是零测集这一事实，最终可得到一个满足性质（2）的 f。

Acknowledgements

我们感谢 Tuomas Orponen 与我们进行讨论，这对构造 C^∞ 函数 g （见第 3.3节）有所帮助；同时感谢 Boris Solomyak 对本文草稿提出的宝贵意见。两位作者均获得了 SB 在拉夫堡大学的 EPSRC 新研究者奖（EP/W003880/1）的经费支持。AB 还获得了欧盟 Marie Sk-łodowska-Curie Actions 博士后奖学金 FoDeNoF（编号 101210409）的资助，以及 Tuomas Orponen 在于韦斯屈莱大学获得的芬兰研究理事会资助（编号 355453）的支持¨。¨

References

[1] A. Algom, 《自相似测度逐点正规性的最新进展》, arXiv:2504.18192. 4[2] A. Algom、S. Ben Ovadia、F. Rodriguez Hertz 和 M. Shannon, 《非线性双曲迭代函数系能有多线性？》, arXiv:2410.22145. 8[3] A. Algom、Y. Chang、M.Wu 和 Y.-L. Wu, 《自相似测度几何级数的范德科普特方法与度量定理》, Math. Ann. 393 (2025), 183–214. 2, 5, 6, 8, 21, 45[4] A. Algom、F. Rodriguez Hertz 和 Z. Wang, 《自共形测度的逐点正规性与傅里叶衰减》, Adv. Math. 393 (2021), 108096. 4[5] A. Algom、F. Rodriguez Hertz 和 Z. Wang, 《自共形测度的多项式傅里叶衰减与 Dolgopyat 方法的余循环版本》, arXiv:2306.01275v1. 2, 5, 6, 8[6] A. Algom、F. Rodriguez Hertz 和 Z. Wang, 《平面上自共形测度的谱隙与傅里叶衰减》, Trans. Amer. Math. Soc.（即将出版）, arXiv:2407.11688. 2, 10[7] S. Baker 和 A. Banaji, 《分形测度及其推前测度的多项式傅里叶衰减》, Math. Ann. 392 (2025), 209–261. 2, 5, 6, 8, 9, 21, 22, 45[8] S. Baker、O. Khalil 和 T. Sahlsten, 《由 L^2 展平得到的傅里叶衰减》, arXiv:2407.16699. 2, 10

[9] S. Baker 和 T. Sahlsten, 《存在重叠的自共形集的谱隙与傅里叶维数》, arXiv:2306.01389v1. 2, 5, 6, 8[10] A. Banaji 和 H. Yu, 《自相似测度非线性像的傅里叶变换：定量方面》, arXiv:2503.07508. 2[11] A. Banaji 和 H. Yu, 《自相似测度非线性像的傅里叶变换：定性方面》, 准备中. 5, 10[12] H. Boche 和 E. Tampubolon, 《关于傅里叶变换的衰减与光滑性行为, 以及构造具有强发散香农采样级数的信号》, 2016 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 中国上海, 2016, 4870–4874. 2[13] J. Bourgain 和 S. Dyatlov, 《双曲曲面的傅里叶维数与谱隙》, Geom. Funct. Anal. 27 (2017), 744–771. 2, 5[14] J. Br´emont, 《自相似测度与 Rajchman 性质》, Ann. H. Lebesgue 4 (2021), 973–1004. 2, 4, 11, 12, 16[15] X.-R. Dai、D.-J. Feng 和 Y. Wang, 《具有非整数膨胀的可细化函数》, J. Funct. Anal. 250 (2007), 1–20. 2[16] H. Davenport、P. Erd˝os 和 W. J. LeVeque, 《关于均匀分布的韦伊判别法》, Michigan Math. J. 10 (1963), 311–314. 1, 4[17] S. Dyatlov, 《分形不确定性原理导论》, J. Math. Phys. 60 (2019), 081505. 1[18] S. Dyatlov 和 L. Jin, 《双曲曲面上的半经典测度具有全支撑集》, Acta Math. 220 (2018), 297–339. 1[19] S. Dyatlov、L. Jin 和 S. Nonnenmacher, 《变曲率曲面上特征函数的控制》, J. Amer. Math. Soc. 35 (2022), 361–465. 1[20] K. J. Falconer、J. M. Fraser 和 A. K¨aenm¨aki, 《测度的闵可夫斯基维数》, Proc. Amer. Math. Soc. 151 (2023), 779–794. 23[21] D.-J. Feng 和 K.-S. Lau, 《弱分离条件下自相似测度的多重分形形式主义》, J. Math. Pures Appl. 92 (2009), 407–428. 10, 23[22] D.-J. Feng、N. T. Nguyen 和 T. Wang, 《实线上等收缩自相似测度的卷积》, Illinois J. Math. 46 (2002), 1339–1351. 10[23] R. Fraser、S. Guo 和 M. Pramanik, 《分数维数集合上的多项式罗斯定理》, Int. Math. Res. Not. IMRN (2022), 7809–7838. 1[24] J. E. Hutchinson, 《分形与自相似性》, Indiana Univ. Math. J. 30 (1981), 713–747. 2[25] T. Jordan 和 T. Sahlsten, 《高斯映射的吉布斯测度的傅里叶变换》, Math. Ann. 364 (2016), 983–1023. 2, 5[26] J. P. Kahane, 《关于某些随机 ´级 ´数的分布》, Colloque Th. Nombres [1969,Bordeaux],Bull. Soc. Math. France, M´emoire 25 (1971), 119–122. 2[27] R. Kaufman, 《连分数与傅里叶变换》, Mathematika 27 (1980), 262–267. 5[28] R. Kaufman, 《关于伯努利卷积》, 现代分析与概率会议（康涅狄格州纽黑文，1982）, 217–222. Contemp. Math., 26 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1984.[29] I. ´Laba 和 M. Pramanik, 《分数维数集合中的等差数列》, Geom. Funct. Anal. 19 (2009), 429–456. 1[30]G. Leclerc、S. Paukkonen 和 T. Sahlsten, 《 $C^{1+\alpha}$ 正则性下的傅里叶维数》, arXiv:2505.15468. 2, 5[31] J. Li 和 T. Sahlsten, 《三角级数与自相似集》, J. Eur. Math. Soc. 24 (2022), 341–368. 2, 3[32] J. Marshall-Maldonado 和 B. Solomyak, 《典型 Salem 替代悬挂流的定量弱混合》

[33] C. Mosquera 和 A. Olivo, 《复平面上齐次自相似测度的傅里叶衰减行为》, 《分形几何杂志》10 (2023), 43–60。[34] C. Mosquera 和 P. Shmerkin, 《自相似测度：光滑像的维数与傅里叶衰减的渐近界》, 《芬兰科学学会数学年刊》43 (2018), 823–834。[35] A. Pollington、S. Velani、A. Zafeiropoulos 和 E. Zorin, 《具有受限分母的 M_0集上的非齐次丢番图逼近》, 《国际数学研究论文集》(2022), 8571–8643。 1, 5[36] S. Paukkonen、T. Sahlsten 和 L. Streck, 准备中。 3[37] M. Queff´elec 和 O. Ramar´e, 《受限商连分数的傅里叶分析》, 《数学教学》49 (2003), 335–356。 5[38] Y. Peres、W. Schlag 和 B. Solomyak, 《伯努利卷积六十年》, 《分形与随机性 II》（C. Bandt、S. Graf 和 M. Z¨ahle 编）, 《概率论进展》46, 39–65。Birkh¨auser, 2000。 2[39] T. Sahlsten 和 C. Stevens, 《康托尔集上的傅里叶变换与扩张映射》, 《美国数学杂志》146 (2024), 945–982。 2, 5[40] T. Sahlsten, 《傅里叶变换与迭代函数系统》, 即将发表于《分形及相关领域的最新进展》会议论文集, “分形及相关领域 IV”会议, 法国波克罗勒岛, 2022。 2, 5, 6[41] P. Shmerkin 和 B. Solomyak, 《自相似测度、其投影与卷积的绝对连续性》, 《美国数学会汇刊》368 (2016), 5125–5151。 2, 3[42] B. Solomyak, 《自相似测度的傅里叶衰减》, Proc. Amer. Math. Soc. 149 (2021), 3277–3291。 2[43] L. Streck, 《代数收缩比自相似测度的绝对连续性与最大 Garsia 熵》, 《剑桥哲学学会数学会刊》180 (2026), 145–190。 2[44] P. P. Varj´u 和 H. Yu, 《自相似测度与唯一性自相似集的傅里叶衰减》, 《偏微分方程分析》15 (2022), 843–858。 2[45] P. Walters, 《遍历理论导论》, Springer-Verlag, 纽约, 1982。 24, 25

Simon Baker,
Department of Mathematical Sciences, Loughborough University,Loughborough, LE11 3TU, UK电子邮箱：simonbaker412@gmail.comAmlan Banaji,
Department of Mathematics and Statistics, University of Jyväskylä,

Jyväskylä, FI-40014, Finland电子邮箱地址：banajimath@gmail.com