arXiv:2602.05614v1 [math.NT] 5 Feb 2026

关于 $\zeta(1/2+it)$ 的一个新的改进的显式估计

Michael Revers

摘要

本文给出了沿临界线 $s=1/2+it$ 的黎曼ζ函数 $\zeta(s)$ 的一个改进的显式次凸性结果，该结果由 Hiary、Patel 和 Yang 于2024年给出。这一新的上界是通过将范德科普特方法的一个精细化显式版本与数值计算相结合而得到的。

2020年数学主题分类： 11L07,11M06
关键词： 黎曼ζ函数，指数和，范德科普特估计，林德勒夫猜想。

1 引言

解析数论中的一个著名问题，是确定黎曼ζ函数沿临界带内的竖直线 s 的增长率。尤其是，ζ函数沿临界线 $s=1/2+it$的显式上界，对于研究临界带内非平凡零点的分布 [3], [15], [22], 具有广泛影响。它们可用于推导无零点区域 [3], [15], [22], 、零点密度估计 [10]，以及临界线上ζ函数辐角的上界 [6], [19]。此外，这一问题还促成了估计指数和的深刻思想，尤其是指数对方法，参见 [5], （[18], 第 116 页）。

借助 Riemann–Siegel公式，最早的显式凸性上界结果归功于Lehman（[13], 引理 2），他证明了

$$|\zeta(1/2+it)| \leq \frac{4}{(2\pi)^{1/4}} t^{1/4}, \quad t \geq 32/\pi.$$

韦伊-哈代-李特尔伍德方法，参见（[18], 第 5.3 节），能够检测到主黎曼-西格尔和中的一定程度的抵消；与范德科普特方法结合后， [20], [21] 上界的大小可以

改进为 $t^{1/6}\log t$。这类显式估计，也就是以下形式的估计

$$|\zeta(1/2+it)| \le C_1 t^{1/6}\log t, \quad t \ge C_2$$

具有有效可计算值 C_1 和 C_2 的上界通常很难推导，而且要进一步改进则难上加难。从数值计算的角度来看，必须获得这类上界，因为它们提供了一个无条件的衡量标准，可用于比较某些数值算法所得到的 $|\zeta(1/2+it)|$ 的大值。据我们所知，第一个相关结果由程和格雷厄姆给出 [2]，他们于 2004 年证明了

$$|\zeta(1/2+it)| \le 3t^{1/6}\log t, \quad t \ge e.$$

这一结果后来由普拉特和特鲁吉安于 2015 年进一步改进 [17]，得到

$$|\zeta(1/2+it)| \le 0.732t^{1/6}\log t, \quad t \ge 2.$$

下一步进展归功于 Hiary [7]，他于 2016 年证明了

$$|\zeta(1/2+it)| \le 0.63t^{1/6}\log t, \quad t \ge 3.$$

八年后，也就是 2024 年，Hiary、Patel 和 Yang [8] 将这一结果进一步改进为

$$|\zeta(1/2+it)| \le 0.618t^{1/6}\log t, \quad t \ge 3.$$

数值计算表明，$\max_{t\ge 3}|\zeta(1/2+it)|/t^{1/6}\log t > 0.5075$。这一最大值至少在 $t = 45.62$、$t = 63.06$ 和 $t = 108.99$ 附近取得。因此，若不对 t 的大小作额外假设，上述四个估计中的首项常数就无法降至 0.5075 以下。上述估计中的指数 $1/6$ 也很难改进。迄今为止最精确的结果之一由赫胥黎于 2005 年给出 [9]，他证明了

$$\zeta(1/2+it) \ll t^{32/205}\log^{\gamma} t$$

对于某个常数 γ。注意 $32/205 = 0.15609\ldots$。目前最精确的上界归功于布尔甘 [1]，他在2016年证明，对于每个 $\varepsilon > 0$，我们都有

$$\zeta(1/2+it) \ll t^{13/84+\varepsilon}.$$

注意 $13/84 = 0.1547\ldots$。根据林德勒夫假设 [14],，其增长速度预计会慢于 t 的任何固定次幂，也就是说

$$\zeta(1/2+it) \ll t^{\varepsilon}$$

对每个 $\varepsilon > 0$ 都成立。因此，文献中所有已记录的次凸界似乎都与真实情况相去甚远，至少当t足够大时是如此。

现在，让我们再次转向 Hiary [7] 和 Platt-Trudgian [17]得到的显式次凸界结果。围绕这些结果的故事出现了戏剧性的转折。正如 K. Ford 最近指出、J. Arias de Reyna 也在一篇预印本中讨论的那样，另见 Patel（[16], 第 2 节）的详细讨论，这两项结果都受到一个错误计算常数的影响，而该常数源自所谓 Cheng-Graham 引理证明中的致命缺陷。在（[2], 引理 2）中，某个指数和被估计为数值 $1/(\pi\theta) + 1$，但这个上界中的常数 $1/\pi$ 应为 $2/\pi$。现在，按照 [7]中的计算，用常数$2/\pi$ 替代错误的 $1/\pi$ ，便可得到常数 0.77，这与 Hiary 在 2016年 的结果中的常数 0.63 相差甚远。由此可以清楚地看出，Hiary、Patel 和 Yang [8] 在 2024年 得到的新结果，其真正价值不仅在于更优的常数 0.618，更重要的是，它没有影响文献中所有直接或间接依赖于 [7] 或 [17]的工作。

本文有两个目标。首先，我们旨在进一步改进当前最佳的显式界。其次，我们旨在用我们认为论文 [8] 中缺失的重要细节来补充原始证明。此外，为了在中间区域内进行估计（其中 t 对于黎曼–西格尔界而言过大，但对于 van der Corput 界而言过小），需要进行大量计算。这些计算在小节 3.4 中完成。

一般来说，关于显式界的证明与其他数学结果相比仍然脆弱得多，因为其主要结果只是一个数。这最终也是我们给出详尽而细致的证明、甚至深入到超出严格必要程度的细节的原因，只为展示正确性的证据，并确保没有遗漏任何重要内容。

定理 1.1。
(a) 对于 $t \geq 3$，我们有

$$|\zeta(1/2 + it)| \leq 0.611 t^{1/6} \log t.$$

(b) 对于 $t \geq 8.97 \cdot 10^{17}$，我们有

$$|\zeta(1/2 + it)| \leq 0.566 t^{1/6} \log t.$$

1.1 记号

本文中，我们用 $e(x)$ 表示 $=\exp(2\pi ix)$。此外，$\lfloor . \rfloor$ 和$\lceil . \rceil$ 具有通常的含义，即 $\lfloor x \rfloor$ 表示下取整函数，其值为$\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$；$\lceil x \rceil$ 表示上取整函数，其值为 $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$。

2 预备知识

引理 2.1 (计算界)。 对于 $3 \leq t \leq 200$，我们有

$$|\zeta(1/2+it)| \leq 0.611t^{1/6}\log t.$$

证明。 证明依赖于一套使用区间算术实现的 Euler–Maclaurin公式，并在（[7], 引理 2.2）中给出。请注意，此处可以采用更好的常数 0。595，参见（[7], 第 528 页，公式 15）。 □

引理 2.2 (黎曼–西格尔界)。
(a) 对于 $t \geq 200$，我们有

$$|\zeta(1/2+it)| \leq \frac{4t^{1/4}}{(2\pi)^{1/4}} - 2.0895.$$

(b) 对于 $200 \leq t \leq 3.3\cdot 10^7$，我们有

$$\begin{aligned}|\zeta(1/2+it)| &\leq \frac{4t^{1/4}}{(2\pi)^{1/4}} - 2.0895 \\ &\leq 0.611t^{1/6}\log t.\end{aligned}$$

(c) 对于 $3.3\cdot 10^7 \leq t \leq 3.8\cdot 10^7$，我们有

$$\begin{aligned}|\zeta(1/2+it)| &\leq \frac{4t^{1/4}}{(2\pi)^{1/4}} - 2.8805 \\ &\leq 0.611t^{1/6}\log t.\end{aligned}$$

证明。 (a)我们从Riemann–Siegel公式出发，对主和及随后出现的Gabke余项 [4], 应用三角不等式

按照 [7]中的步骤。对于 $t \geq 200$ 和 $n_1 = \left\lfloor \sqrt{t/2\pi} \right\rfloor \geq 5$ ，我们有

$$
\begin{aligned}
&|\zeta(1/2+it)| \\
&\leq 2\left|\sum_{n=1}^{n_1} n^{-1/2+it}\right| + \cos\frac{\pi}{8}\cdot(2\pi)^{1/4}\,t^{-1/4} + 0.127t^{-3/4} \\
&\leq 2\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{\sqrt{n}} + 2\int_5^{n_1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx + \cos\frac{\pi}{8}\cdot(2\pi)^{1/4}\,t^{-1/4} + 0.127t^{-3/4} \\
&= 2\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{\sqrt{n}} + 4\sqrt{n_1} - 4\sqrt{5} + \cos\frac{\pi}{8}\cdot(2\pi)^{1/4}\,t^{-1/4} + 0.127t^{-3/4} \\
&\leq \frac{4t^{1/4}}{(2\pi)^{1/4}} + 2\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{\sqrt{n}} - 4\sqrt{5} + \cos\frac{\pi}{8}\cdot(2\pi)^{1/4}\cdot 200^{-1/4} + 0.127\cdot 200^{-3/4} \\
&= \frac{4t^{1/4}}{(2\pi)^{1/4}} - 2.08958\ldots \leq \frac{4t^{1/4}}{(2\pi)^{1/4}} - 2.0895.
\end{aligned}
$$

(b) 对于 $200 \leq t \leq 3.3\cdot 10^7$, ，结合 (a) 进行一些标准计算，可得

$$\frac{4t^{1/4}}{(2\pi)^{1/4}} - 2.0895 \leq 0.611t^{1/6}\log t.$$

(c) 现在令 $3.3\cdot 10^7 \leq t \leq 3.8\cdot 10^7$ 和 $t_0 = 3.3\cdot 10^7$。首先我们观察到

$$n_1 = \left\lfloor\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right\rfloor \geq \left\lfloor\sqrt{\frac{t_0}{2\pi}}\right\rfloor = \lfloor 2291.75\ldots\rfloor = 2291.$$

按照与 (a) 类似的步骤，我们得到

$$
\begin{aligned}
&|\zeta(1/2+it)| \\
&\leq 2\left|\sum_{n=1}^{n_1} n^{-1/2+it}\right| + \cos\frac{\pi}{8}\cdot(2\pi)^{1/4}\, t^{-1/4} + 0.127t^{-3/4} \\
&\leq 2\sum_{n=1}^{2291}\frac{1}{\sqrt{n}} + 2\int_{2292-1/2}^{n_1+1/2}\frac{dx}{\sqrt{x}} + \cos\frac{\pi}{8}\cdot(2\pi)^{1/4}\, t_0^{-1/4} + 0.127t_0^{-3/4} \\
&= 2\sum_{n=1}^{2291}\frac{1}{\sqrt{n}} + 2\int_{2292-1/2}^{n_1}\frac{dx}{\sqrt{x}} + 2\int_{n_1}^{n_1+1/2}\frac{dx}{\sqrt{x}} \\
&+ \cos\frac{\pi}{8}\cdot(2\pi)^{1/4}\, t_0^{-1/4} + 0.127t_0^{-3/4} \\
&\leq \frac{4t^{1/4}}{(2\pi)^{1/4}} + 2\sum_{n=1}^{2291}\frac{1}{\sqrt{n}} - 4\sqrt{2291.5} + \frac{1}{\sqrt{2291}} \\
&+ \cos\frac{\pi}{8}\cdot(2\pi)^{1/4}\, t_0^{-1/4} + 0.127t_0^{-3/4} \\
&\leq \frac{4t^{1/4}}{(2\pi)^{1/4}} - 2.88052\ldots \leq \frac{4t^{1/4}}{(2\pi)^{1/4}} - 2.8805.
\end{aligned}
$$

通过一些标准论证，我们最终对 t 的范围得到

$$\frac{4t^{1/4}}{(2\pi)^{1/4}} - 2.8805 \leq 0.611t^{1/6}\log t.$$

□

引理 2.3（精细库斯明-兰道界）。设 $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上具有单调且连续的导数，并满足

$$z+U\leq f'(x)\leq z+V.\quad x\in[a,b]$$

对某个整数 z 以及 $0<U\leq V<1.$，则

$$\left|\sum_{a\leq n\leq b} e(f(n))\right| \leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{U}+\frac{1}{1-V}\right).$$

证明。这是 [8] 中引理 2.3 的一个略作修改的版本，此处称为广义 Cheng-Graham 引理。 □

注 2.1. 从引理 2.3 的原始证明中 [8] 可以看出，我们可以直接将求和区间改为闭区间 $[a,b]$ 以及开区间 $(a,\ b)$，而不必使用 $[a,b)$，因为本引理中的上界与求和区间的长度无关。另见（[8], 第 213 页）。

注 2.2. 我们还提到，Cheng-Graham 的证明 [2] 沿用了 Kusmin [11]和 Landau [12]的原始证明。这个或多或少显而易见的推广可以从整数 z 的补充以及对非对称边界值 U 和 V的扩展中看出。因此，我们按照历史脉络重新命名了该引理。

引理 2.4（Weyl 微分）。对于 $f\colon [N+1, N+L] \to \mathbb{R}$ 以及正整数 L和 M，有

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+L} e\left(f\left(n\right)\right)\right|^2 \leq \frac{L+M-1}{M}\left(L+2\sum_{m=1}^{M}\left(1-\frac{m}{M}\right)\left|s'_m\left(L\right)\right|\right),$$

其中

$$s'_m\left(L\right)=\sum_{r=N+1}^{N+L-m} e\left(f\left(m+r\right)-f\left(r\right)\right).$$

若 $m \geq L$，则 $s'_m(L)$ 是值为 0 的空和。

证明。这是 [8] 中的引理 2.4。 □

引理 2.5。设 $m, r, L, K \geq 2$ 为正整数，t, K_0 为正数，且满足 $K \geq K_0 > 1$。此外，我们定义

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= \frac{t}{2\pi}\log\left(Kr+x\right), \\ g\left(x\right) &= f\left(m+x\right)-f\left(x\right), \\ W &= \frac{\pi\left(r+1\right)^3K^3}{t}, \\ \lambda &= \frac{\left(r+1\right)^3}{r^3}, \\ \mu &= \frac{1}{2}\lambda^{2/3}\left(1+\frac{1}{\left(1-K_0^{-1}\right)\lambda^{1/3}}\right). \end{aligned}$$

那么，对于 $m < L \leq K$，有

$$\begin{aligned} &g'\left(L-1-m\right)-g'\left(0\right) \\ &\leq g'\left(K-1-m\right)-g'\left(0\right) \\ &\leq \frac{mK}{W}\mu. \end{aligned}$$

证明。对于第一个不等式，我们利用 g' 是单调递增的。第二个不等式的证明遵循（[8], 公式 5.1 和 5.2）中的步骤，并可通过一些常规标准论证得出。

□

引理2.6（改进的二阶导数检验，第 1 部分）。设 $m, r, L, K \geq 2$为正整数，且 t, K_0 为正数，满足 $K \geq K_0 > 1$。进一步设 $0 < \Delta < 1/2$和 f, g, W, λ, μ如引理 2.5 中所定义。则有

(a) 对于 $m < K$，我们有

$$\frac{m}{W} \leq g''(x) \leq \frac{m}{W}\lambda, \quad 0 \leq x \leq K - m.$$

(b) 对于 $m < L \leq K$，我们有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{n=0}^{L-1-m} e(g(n))\right| \\ &\leq \left(\frac{mK}{W}\mu - 1\right)\left(1 + \frac{2W\Delta}{m} + \frac{2}{\pi\Delta}\right) + P(\varepsilon_1) + P(1-\varepsilon_2) - \frac{2}{\pi\Delta},\end{aligned}$$

with

$$P(\varepsilon) = \left(1 + \frac{2W\Delta}{m} + \frac{2}{\pi\Delta}\right)\varepsilon + p(\varepsilon),$$

$$p(\varepsilon) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\pi\Delta} + \frac{W}{m}(\Delta - \varepsilon) & \text{for } \varepsilon \in [0, \Delta), \\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\varepsilon}\right) & \text{for } \varepsilon \in [\Delta, 1-\Delta], \\ 0 & \text{for } \varepsilon \in (1-\Delta, 1], \end{cases}$$

and

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= g'(0) - \lfloor g'(0) \rfloor, \\ \varepsilon_2 &= g'(L-1-m) - \lfloor g'(L-1-m) \rfloor.\end{aligned}$$

引理 2.7（改进的二阶导数检验，第 2 部分）。设 $t \geq 5 \cdot 10^6$, $\phi \in [1/3, 0.35]$、$K = \left\lceil t^{\phi} \right\rceil$、$n_1 = \left\lfloor \sqrt{t/2\pi} \right\rfloor$、$R = \lfloor n_1/K \rfloor$ 和 $4 \leq r \leq R$。再设 m，L 为正整数，K_0 为满足 $K \geq K_0 >$1 的正数，并令 f，g，W，λ，μ 如引理 2.5 中所定义。最后，设 $0 < c < 3$ 和 $M = \left\lceil cW^{1/3} \right\rceil$。

对于 $L \leq K$ 和 $1 \leq m \leq$，$\min\{M,\ K-1\} = M$，我们有

$$\left|\sum_{n=0}^{L-1-m} e(g(n))\right| \leq \frac{4\mu K}{\sqrt{\pi W}} m^{1/2} + \frac{\mu K}{W} m + 4\sqrt{\frac{W}{\pi}} m^{-1/2} + 1 - \frac{6}{\pi}.$$

注 2.3. 利用黎曼–西格尔界和引理 2.2，我们稍后会将引理 2.7 应用于初始范围 $t \geq 3.8 \cdot 10^7$。因此，引理 2.7 中关于 t 的最小上界的假设绝非苛刻。另一方面，也可以得到该引理的一个更一般的版本。

证明. 我们将这些重要引理的证明移至第 4 节。 □

引理 2.8. 对于任意正整数 M，我们有以下不等式 :

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \sum_{m=1}^{M}\left(1-\frac{m}{M}\right)m^{-1/2} \le \frac{4}{3}M^{1/2},\\
&\text{(b)} \quad \sum_{m=1}^{M}\left(1-\frac{m}{M}\right) = \frac{1}{2}\left(M-1\right),\\
&\text{(c)} \quad \sum_{m=1}^{M}\left(1-\frac{m}{M}\right)m^{1/2} \le \frac{4}{15}M^{3/2},\\
&\text{(d)} \quad \sum_{m=1}^{M}\left(1-\frac{m}{M}\right)m \le \frac{1}{6}M^{2}.
\end{aligned}$$

证明. 方程 (b) 和不等式 (d) 很容易得出。其他不等式可见（[8], 第 215 页）。另请参见（[2], 引理 7）。 □

引理 2.9. 设 $t \ge 5\cdot 10_6$, $\phi \in [1/3, 0.35]$, $K = \left\lceil t^{\phi}\right\rceil$, $n_1 = \left\lfloor\sqrt{t/2\pi}\right\rfloor$,—— $R = \lfloor n_1/K\rfloor$ 和 $4 \le r \le R$。

进一步设 m, L 为正整数， K_0 为满足 $K \ge K_0 >$1 的正数，并令 f, g, W, λ, μ 按引理 2.5 中的定义取值。最后，设 $0 < c < 3$ 和 $M = \left\lceil cW^{1/3}\right\rceil$。

对于 $L \le K$，我们有

$$\left|\sum_{n=0}^{L-1} e\left(f\left(n\right)\right)\right|^{2} \le \left(\frac{K}{W^{1/3}}+c\right)\left(\alpha K+\beta W^{2/3}\right)$$

with

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{c}+\frac{32\mu}{15\sqrt{\pi}}\sqrt{c+W^{-1/3}}+\frac{\mu c}{3W^{1/3}}+\frac{\mu}{3W^{2/3}},\\
\beta &= \frac{32}{3\sqrt{\pi c}}+\frac{1}{c}\left(\frac{6}{\pi}-1\right)\frac{1}{W^{2/3}}+\left(1-\frac{6}{\pi}\right)\frac{1}{W^{1/3}}.
\end{aligned}$$

此外，我们断言 α 和 β 始终取正值。

证明。 根据引理 2.4 中 $S'_m(L)$ 的定义以及 $N = -1$,

引理 2.7 与引理 2.8，我们证明

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(1-\frac{m}{M}\right)\left|S'_m(L)\right| \\
&=\frac{2}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(1-\frac{m}{M}\right)\left|\sum_{n=0}^{L-1-m}e\left(f(m+n)-f(n)\right)\right| \\
&=\frac{2}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(1-\frac{m}{M}\right)\left|\sum_{n=0}^{L-1-m}e\left(g(n)\right)\right| \\
&\leq\frac{32\mu K}{15\sqrt{\pi W}}M^{\frac{1}{2}}+\frac{\mu K}{3W}M+\frac{32}{3}\sqrt{\frac{W}{\pi}}M^{-\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{1}{M}\right)\left(1-\frac{6}{\pi}\right).
\end{aligned}$$

现在，将引理 2.4 与 $M=\left\lceil cW^{1/3}\right\rceil$ 结合应用，我们得到

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=0}^{L-1}e\left(f(n)\right)\right|^2 \\
&\leq(K+M-1)\left(\frac{K}{M}+\frac{2}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(1-\frac{m}{M}\right)\left|S'_m(L)\right|\right) \\
&\leq(K+M-1)\left(\frac{K}{M}+\frac{32\mu K}{15\sqrt{\pi W}}M^{\frac{1}{2}}+\frac{\mu K}{3W}M\right. \\
&\qquad\left.+\frac{32}{3}\sqrt{\frac{W}{\pi}}M^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{M}\left(\frac{6}{\pi}-1\right)+1-\frac{6}{\pi}\right) \\
&\leq\left(K+cW^{\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{K}{W^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{1}{c}+\frac{32\mu}{15\sqrt{\pi}}\sqrt{c+W^{-\frac{1}{3}}}+\frac{\mu c}{3W^{\frac{1}{3}}}+\frac{\mu}{3W^{\frac{2}{3}}}\right)\right. \\
&\qquad\left.+W^{\frac{1}{3}}\left(\frac{32}{3\sqrt{\pi c}}+\frac{1}{cW^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{6}{\pi}-1\right)+\left(1-\frac{6}{\pi}\right)\frac{1}{W^{\frac{1}{3}}}\right)\right) \\
&=\left(K+cW^{\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{K}{W^{\frac{1}{3}}}\alpha+W^{\frac{1}{3}}\beta\right) \\
&=\left(\frac{K}{W^{\frac{1}{3}}}+c\right)\left(\alpha K+\beta W^{\frac{2}{3}}\right).
\end{aligned}$$

最后，我们检验 α 和 β的正性。对于 α，这是显然的。对于 β，我们先估计

$$W^{\frac{1}{3}}=\frac{\pi^{\frac{1}{3}}(r+1)K}{t^{\frac{1}{3}}}\geq5\pi^{\frac{1}{3}}t^{\phi-\frac{1}{3}}\geq5\pi^{\frac{1}{3}}.$$

现在，我们来考察

$$\begin{aligned}\beta W^{\frac{1}{3}} &= \left(\frac{32}{3\sqrt{\pi c}} + \frac{1}{c}\left(\frac{6}{\pi} - 1\right)\frac{1}{W^{\frac{2}{3}}} + \left(1 - \frac{6}{\pi}\right)\frac{1}{W^{\frac{1}{3}}}\right) W^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{32}{3\sqrt{\pi c}} W^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{c}\left(\frac{6}{\pi} - 1\right)\frac{1}{W^{\frac{1}{3}}} + 1 - \frac{6}{\pi} \\ &\geq \frac{32}{3\sqrt{\pi c}} 5\pi^{\frac{1}{3}} + 1 - \frac{6}{\pi} \geq \frac{160}{\pi^{\frac{1}{6}} 3\sqrt{3}} + 1 - \frac{6}{\pi} = 24.533\ldots > 0.\end{aligned}$$

由 $W^{1/3}$ 的正性，我们得到所需的不等式。 □

3 定理 1.1 的证明

断言 (a) 的证明：我们将证明按参数 t 的不同区域分别进行。正如稍后将看到的，van der Corput 界 (3.22) 和 (3.31) 要到 t 的很高取值范围才充分发挥作用。因此，我们必须仔细处理黎曼–西格尔界与 van der Corput 界之间的中间区域。这个瓶颈区域需要更详细的分析。

3.1 区域 $3 \leq t \leq 200$ 的证明

这里，我们直接应用引理 2.1，它给出了所需的上界

$$|\zeta(1/2 + it)| \leq 0.611 t^{1/6} \log t.$$

在范围 $3 \leq t \leq 200$ 内。

3.2 $200 \leq t \leq 3.8 \cdot 10^7$区域的证明

这里，对于范围$200 \leq t \leq 3.3 \cdot 10^7$，我们应用引理 2.2(b)中的黎曼–西格尔界；对于范围 $3.3 \cdot 10^7 \leq t \leq 3.8 \cdot 10^7$，我们应用引理 2.2(c)中的界。我们总结如下

$$|\zeta(1/2 + it)| \leq 0.611 t^{1/6} \log t.$$

对于范围 $200 \leq t \leq 3.8 \cdot 10^7$。

3.3 估计 $|\zeta(1/2+it)|$ 的和

我们从参数 3.8 $\cdot$ $10^7 \le t_0 \le t \le t_1$, $\phi \in [1/3, 0.35]$, $K = \left\lceil t^\phi \right\rceil$,$K_0 = t_0^\phi$, $n_1 = \left\lfloor \sqrt{t/2\pi} \right\rfloor$, $R = \lfloor n_1/K \rfloor$ 以及 $4 = r_0 \le r \le R$ 开始。我们还定义

$$R_0 = \left\lceil \frac{\sqrt{t_0/2\pi} - 1}{t_0^\phi + 1} - 1 \right\rceil, R_1 = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t_1^{1/2-\phi} \right\rfloor$$

and

$$\mu_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{r_0}\right)\left(2 + \frac{1}{r_0} + \frac{1}{t_0^\phi - 1}\right).$$

然后，利用引理 2.5 中 μ 的定义，我们有

$$R \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{1/2-\phi}, \tag{3.1}$$

$$4 \le R_0 \le R \le R_1, \tag{3.2}$$

$$\mu \le \mu_0. \tag{3.3}$$

断言（3.1）很容易证明。对于断言（3.2），第一组不等式$4 \le R_0 \le R$ 可由引理 2.7(a) 中的证明步骤得到。其余不等式 $R \le R_1$ 可借助（3.1）推得。断言（3.3）由以下内容得到

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{2}\lambda^{\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{1}{\left(1 - K_0^{-1}\right)\lambda^{\frac{1}{3}}}\right) = \frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{3}}\left(\lambda^{\frac{1}{3}} + \frac{K_0}{K_0 - 1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{r}\right)\left(2 + \frac{1}{r} + \frac{1}{K_0 - 1}\right) \\
&\le \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{r_0}\right)\left(2 + \frac{1}{r_0} + \frac{1}{t_0^\phi - 1}\right) \\
&= \mu_0.
\end{aligned}$$

接下来，我们推导引理 2.9 中主要不等式所涉及的四个相关项的一些重要不等式。

首先，我们有

$$\alpha \le M_1 := \frac{1}{c} + \mu_0\left(\frac{32}{15\pi^{\frac{1}{2}}}\sqrt{c + \frac{1}{5\pi^{\frac{1}{3}} t_0^{\phi-\frac{1}{3}}}} + \frac{c}{15\pi^{\frac{1}{3}} t_0^{\phi-\frac{1}{3}}} + \frac{1}{75\pi^{\frac{2}{3}} t_0^{2\left(\phi-\frac{1}{3}\right)}}\right). \tag{3.4}$$

利用

$$W^{\frac{1}{3}}=\frac{\pi^{\frac{1}{3}}\left(r+1\right)K}{t^{\frac{1}{3}}}\geq\frac{\pi^{\frac{1}{3}}\left(r_0+1\right)\left\lceil t^{\phi}\right\rceil}{t^{\frac{1}{3}}}\geq5\pi^{\frac{1}{3}}t^{\phi-\frac{1}{3}},\tag{3.5}$$

我们估计

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{1}{c}+\mu\left(\frac{32}{15\sqrt{\pi}}\sqrt{c+W^{-\frac{1}{3}}}+\frac{c}{3W^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{3W^{\frac{2}{3}}}\right)\\&\leq\frac{1}{c}+\mu\left(\frac{32}{15\sqrt{\pi}}\sqrt{c+\frac{1}{5\pi^{\frac{1}{3}}t^{\phi-\frac{1}{3}}}}+\frac{c}{15\pi^{\frac{1}{3}}t^{\phi-\frac{1}{3}}}+\frac{1}{75\pi^{\frac{2}{3}}t^{2\left(\phi-\frac{1}{3}\right)}}\right).\end{aligned}$$

该断言现在由条件 $t\geq t_0$ 和 (3.3) 得出。

其次，我们有

$$\begin{aligned}\alpha c\frac{W^{\frac{1}{3}}}{K}\leq M_2:=&\frac{1}{t_0^{\phi-\frac{1}{6}}}\frac{1}{\sqrt{2}\pi^{\frac{1}{6}}}\left(1+\frac{1}{R_0}\right)\\&+\mu_0c\left(\frac{16\sqrt{2}}{15\pi^{\frac{2}{3}}}\frac{1}{t_0^{\phi-\frac{1}{6}}}\left(1+\frac{1}{R_0}\right)\sqrt{c+\frac{1}{5\pi^{\frac{1}{3}}t_0^{\phi-\frac{1}{3}}}}+\frac{c}{3t_0^{\phi}}+\frac{1}{15\pi^{\frac{1}{3}}t_0^{2\phi-\frac{1}{3}}}\right).\end{aligned}\tag{3.6}$$

应用 (3.1) 得到以下结果：

$$\frac{W^{\frac{1}{3}}}{K}=\frac{\pi^{\frac{1}{3}}\left(r+1\right)K}{t^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{K}\leq\frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}}R\left(1+\frac{1}{R}\right)\leq\frac{1}{t^{\phi-\frac{1}{6}}}\frac{1}{\sqrt{2}\pi^{\frac{1}{6}}}\left(1+\frac{1}{R}\right).\tag{3.7}$$

现在，利用 (3.5) 和 (3.7)，我们估计

$$\begin{aligned}\alpha c\frac{W^{\frac{1}{3}}}{K}&=\frac{W^{\frac{1}{3}}}{K}+\mu c\left(\frac{32}{15\sqrt{\pi}}\sqrt{c+W^{-\frac{1}{3}}}\frac{W^{\frac{1}{3}}}{K}+\frac{c}{3K}+\frac{1}{3W^{\frac{1}{3}}K}\right)\\&\leq\frac{1}{t^{\phi-\frac{1}{6}}}\frac{1}{\sqrt{2}\pi^{\frac{1}{6}}}\left(1+\frac{1}{R}\right)\\&\quad+\mu c\left(\frac{32}{15\sqrt{\pi}}\sqrt{c+\frac{1}{5\pi^{\frac{1}{3}}t^{\phi-\frac{1}{3}}}}\frac{1}{t^{\phi-\frac{1}{6}}}\frac{1}{\sqrt{2}\pi^{\frac{1}{6}}}\left(1+\frac{1}{R}\right)+\frac{c}{3t^{\phi}}+\frac{1}{15\pi^{\frac{1}{3}}t^{2\phi-\frac{1}{3}}}\right).\end{aligned}$$

结合 $t\geq t_0$、(3.2) 和 (3.3)，我们得到该断言。

第三，我们有

$$\begin{aligned}\beta\frac{W^{\frac{2}{3}}}{K}\leq M_3:=&\frac{1}{t_0^{\phi}}\frac{1}{c}\left(\frac{6}{\pi}-1\right)+\frac{16}{3\pi^{\frac{5}{6}}\sqrt{c}}\frac{1}{t_0^{\phi-\frac{1}{3}}}\left(1+\frac{1}{R_0}\right)^2\left(1+\frac{1}{t_0^{\phi}}\right)\\&+\left(1-\frac{6}{\pi}\right)\frac{5\pi^{\frac{1}{3}}}{t_1^{\frac{1}{3}}}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

利用 (3.1)，我们估计

$$\begin{aligned}\frac{W^{\frac{2}{3}}}{K} &= \frac{\pi^{\frac{2}{3}}(r+1)^2K^2}{t^{\frac{2}{3}}}\frac{1}{K} \le \frac{\pi^{\frac{2}{3}}(R+1)^2K}{t^{\frac{2}{3}}} \\ &\le \frac{\pi^{\frac{2}{3}}\frac{1}{2\pi}t^{1-2\phi}}{t^{\frac{2}{3}}}\left(1+\frac{1}{R}\right)^2 t^{\phi}\left(1+\frac{1}{t^{\phi}}\right) \\ &= \frac{1}{t^{\phi-\frac{1}{3}}}\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{3}}}\left(1+\frac{1}{R}\right)^2\left(1+\frac{1}{t^{\phi}}\right).\end{aligned} \tag{3.9}$$

此外，我们有

$$\frac{W^{\frac{1}{3}}}{K} = \frac{\pi^{\frac{1}{3}}(r+1)K}{t^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{K} \ge \frac{\pi^{\frac{1}{3}}(r_0+1)}{t^{\frac{1}{3}}} = \frac{5\pi^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}}. \tag{3.10}$$

由引理 2.9 中 β 的定义，并利用 (3.9)、(3.10)，我们得到

$$\begin{aligned}\beta\frac{W^{\frac{2}{3}}}{K} &= \left(\frac{32}{3\sqrt{\pi c}}+\frac{1}{c}\left(\frac{6}{\pi}-1\right)\frac{1}{W^{\frac{2}{3}}}+\left(1-\frac{6}{\pi}\right)\frac{1}{W^{\frac{1}{3}}}\right)\frac{W^{\frac{2}{3}}}{K} \\ &= \frac{32}{3\sqrt{\pi c}}\frac{W^{\frac{2}{3}}}{K}+\frac{1}{c}\left(\frac{6}{\pi}-1\right)\frac{1}{K}+\left(1-\frac{6}{\pi}\right)\frac{W^{\frac{1}{3}}}{K} \\ &\le \frac{32}{3\sqrt{\pi c}}\frac{1}{t^{\phi-\frac{1}{3}}}\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{3}}}\left(1+\frac{1}{R}\right)^2\left(1+\frac{1}{t^{\phi}}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{6}{\pi}-1\right)\frac{1}{t^{\phi}}+\left(1-\frac{6}{\pi}\right)\frac{5\pi^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{1}{t^{\phi}}\frac{1}{c}\left(\frac{6}{\pi}-1\right)+\frac{16}{3\sqrt{c}\pi^{\frac{5}{6}}}\frac{1}{t^{\phi-\frac{1}{3}}}\left(1+\frac{1}{R}\right)^2\left(1+\frac{1}{t^{\phi}}\right)+\left(1-\frac{6}{\pi}\right)\frac{5\pi^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

结合 $t_0 \le t \le t_1$ 与 (3.2)，我们得到所需的不等式。

我们的最后一个断言如下

$$\begin{aligned}c\beta\frac{W}{K^2} \le M_4 := &\frac{1}{t_0^{2\phi-\frac{1}{6}}}\frac{1}{\sqrt{2}\pi^{\frac{1}{6}}}\left(\frac{6}{\pi}-1\right)\left(1+\frac{1}{R_0}\right) \\ &+\frac{1}{t_0^{2\phi-\frac{1}{2}}}\frac{8\sqrt{2c}}{3\pi}\left(1+\frac{1}{R_0}\right)^3\left(1+\frac{1}{t_0^{\phi}}\right) \\ &+\left(1-\frac{6}{\pi}\right)\frac{1}{t_1^{\phi+\frac{1}{6}}}\frac{5\pi^{\frac{1}{6}}c}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{R_1}\right).\end{aligned} \tag{3.12}$$

利用 (3.7)、(3.11) 并展开

$$c\beta\frac{W}{K^2} = \left(\beta\frac{W^{\frac{2}{3}}}{K}\right)\left(c\frac{W^{\frac{1}{3}}}{K}\right)$$

即可得到该结论以及 $t_0 \le t \le t_1$ 和 (3.2)。

现在，我们开始估计主和。按照引理 2.2 中的证明，我们首先得到

$$\begin{aligned} |\zeta(1/2+it)| &\le 2\left|\sum_{n=1}^{n_1} n^{-\frac{1}{2}+it}\right| + \cos\frac{\pi}{8}(2\pi)^{\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{4}} + 0.127t^{-\frac{3}{4}} \\ &\le 2\left|\sum_{n=1}^{n_1} n^{-\frac{1}{2}+it}\right| + 1.463t^{-\frac{1}{4}} + 0.127t^{-\frac{3}{4}}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

现在我们将主和拆分为三部分:

$$\begin{aligned} 2\left|\sum_{n=1}^{n_1} n^{-\frac{1}{2}+it}\right| &\le 2\left|\sum_{n=1}^{Kr_0-1} n^{-\frac{1}{2}+it}\right| + 2\left|\sum_{n=Kr_0}^{n_1} n^{-\frac{1}{2}+it}\right| \\ &\le 2\sum_{n=1}^{Kr_0-1} n^{-\frac{1}{2}} + 2\sum_{r=r_0}^{R-1}\left|\sum_{n=Kr}^{K(r+1)-1} n^{-\frac{1}{2}+it}\right| + 2\left|\sum_{n=KR}^{n_1} n^{-\frac{1}{2}+it}\right| \\ &= T_1 + T_2 + T_3. \end{aligned} \tag{3.14}$$

我们从 T_2 开始。结合分部求和、阿贝尔不等式和引理 2.9，可得

$$\begin{aligned} \left|\sum_{Kr\le n<K(r+1)} n^{-\frac{1}{2}+it}\right| &= \left|\sum_{n=0}^{K-1} \frac{e^{it\log(Kr+n)}}{\sqrt{Kr+n}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{Kr}} \max_{1\le L\le K}\left|\sum_{n=0}^{L-1} e^{it\log(Kr+n)}\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{Kr}} \max_{1\le L\le K}\left|\sum_{n=0}^{L-1} e\left(f(n)\right)\right| \\ &\le \frac{1}{\sqrt{Kr}}\sqrt{\left(\frac{K}{W^{\frac{1}{3}}}+c\right)\left(\alpha K+\beta W^{\frac{2}{3}}\right)}. \end{aligned}$$

我们总结如下

$$T_2 \le 2\sum_{r=r_0}^{R-1} \frac{1}{\sqrt{Kr}}\sqrt{\left(\frac{K}{W^{\frac{1}{3}}}+c\right)\left(\alpha K+\beta W^{\frac{2}{3}}\right)}. \tag{3.15}$$

类似地，对于 T_3，我们得到

$$T_3 \le \frac{2}{\sqrt{KR}} \max_{1\le L\le n_1-KR+1}\left|\sum_{n=0}^{L-1} e^{it\log(KR+n)}\right|.$$

观察到 $R=\lfloor n_1/K\rfloor > n_1/K-1$，我们首先估计 $n_1 \leq (R+1)\ K-1$。综合起来，我们得到

$$\begin{aligned} T_3 &\leq \frac{2}{\sqrt{KR}} \max_{1\leq L\leq (R+1)K-1-KR+1} \left|\sum_{n=0}^{L-1} e^{it\log(KR+n)}\right| \\ &= \frac{2}{\sqrt{KR}} \max_{1\leq L\leq K} \left|\sum_{n=0}^{L-1} e\left(f\left(n\right)\right)\right| \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{KR}} \sqrt{\left(\frac{K}{W^{\frac{1}{3}}}+c\right)\left(\alpha K+\beta W^{\frac{2}{3}}\right)}. \end{aligned}$$

结合（3.15）并应用一些标准变形，我们最终得到

$$\begin{aligned} T_2+T_3 &\leq 2\sum_{r=r_0}^{R} \frac{1}{\sqrt{Kr}} \sqrt{\left(\frac{K}{W^{\frac{1}{3}}}+c\right)\left(\alpha K+\beta W^{\frac{2}{3}}\right)} \\ &= t^{\frac{1}{6}} \sum_{r=r_0}^{R} \frac{1}{\sqrt{r\left(r+1\right)}} \sqrt{\frac{4}{\pi^{\frac{1}{3}}}\left(\alpha+\frac{\alpha c W^{\frac{1}{3}}}{K}+\frac{\beta W^{\frac{2}{3}}}{K}+\frac{c\beta W}{K^2}\right)}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

由 $Kr_0-1=\left\lceil t^{\phi}\right\rceil r_0-1 \geq t^{\phi}r_0-1 \geq t_0^{\phi}r_0-1$ 且由于 Kr_0-1 是一个整数，可知 $Kr_0-1 \geq \left\lceil t_0^{\phi}r_0-1\right\rceil = \left\lceil t_0^{\phi}r_0\right\rceil -1$. 因此，我们可以将 T_1 和拆分为两部分，并进一步估计得到

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\sum_{n=1}^{Kr_0-1} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sum_{n=1}^{\left\lceil t_0^{\phi}r_0\right\rceil -1} \frac{1}{\sqrt{n}} + 2\sum_{n=\left\lceil t_0^{\phi}r_0\right\rceil}^{Kr_0-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\leq 2\sum_{n=1}^{\left\lceil t_0^{\phi}r_0\right\rceil -1} \frac{1}{\sqrt{n}} + 2\int_{\left\lceil t_0^{\phi}r_0\right\rceil -1}^{Kr_0-1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ &= 2\sum_{n=1}^{\left\lceil t_0^{\phi}r_0\right\rceil -1} \frac{1}{\sqrt{n}} + 4\sqrt{Kr_0-1} - 4\sqrt{\left\lceil t_0^{\phi}r_0\right\rceil -1}. \end{aligned}$$

现在，对内项进行标准论证可得

$$T_1 \leq t^{\frac{\phi}{2}} 4\sqrt{r_0\left(1+\frac{1}{t_0^{\phi}}\right)} + 2\sum_{n=1}^{\left\lceil t_0^{\phi}r_0\right\rceil -1} \frac{1}{\sqrt{n}} - 4\sqrt{\left\lceil t_0^{\phi}r_0\right\rceil -1}. \tag{3.17}$$

综合 (3.13)、(3.14)、(3.16) 和 (3.17)，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| \leq t^{\frac{1}{6}} \sum_{r=r_0}^{R} \frac{1}{\sqrt{r\left(r+1\right)}} \sqrt{\frac{4}{\pi^{\frac{1}{3}}}\left(\alpha+\frac{\alpha c W^{\frac{1}{3}}}{K}+\frac{\beta W^{\frac{2}{3}}}{K}+\frac{c\beta W}{K^2}\right)} \\ + t^{\frac{\phi}{2}} 4 \sqrt{r_0\left(1+\frac{1}{t_0^{\phi}}\right)}+2 \sum_{n=1}^{\left\lceil t_0^{\phi} r_0\right\rceil-1} \frac{1}{\sqrt{n}}-4 \sqrt{\left\lceil t_0^{\phi} r_0\right\rceil-1} \\ + 1.463 t^{-\frac{1}{4}}+0.127 t^{-\frac{3}{4}}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

接下来，我们应用詹森不等式，并注意到

$$\begin{aligned}\sum_{r=r_0}^{R} \frac{1}{\sqrt{r\left(r+1\right)}} &\leq \frac{1}{\sqrt{r_0\left(r_0+1\right)}}+\sum_{r=r_0+1}^{R} \int_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x\left(x+1\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{r_0\left(r_0+1\right)}}+\int_{r_0+\frac{1}{2}}^{R+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x\left(x+1\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{r_0\left(r_0+1\right)}}+2 \sinh^{-1} \sqrt{x}\ |_{r_0+\frac{1}{2}}^{R+\frac{1}{2}}\ .\end{aligned}$$

结合 $\sinh^{-1} \sqrt{x}=\log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$、(3.1) 和 (3.2)，经过一些简单的变形，我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{r=r_0}^{R} \frac{1}{\sqrt{r\left(r+1\right)}} \\ &\leq\left(\frac{1}{2}-\phi\right) \log t+\log\left(1+\frac{1}{2R_0}\right)+2 \log\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{R_0+\frac{1}{2}}}\right) \\ &+\frac{1}{\sqrt{r_0\left(r_0+1\right)}}-\log \sqrt{2\pi}-2 \sinh^{-1} \sqrt{r_0+\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

现在，我们回顾一下式 (3.4)、(3.6) 和 (3.8) 中的常数 M_1、M_2、M_3 和 M_4，

以及式 (3.12)，并继续定义以下新的常数

$$\begin{aligned}
M_5 &:= \log\left(1+\frac{1}{2R_0}\right)+2\log\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{R_0+\frac{1}{2}}}\right)+\frac{1}{\sqrt{r_0\left(r_0+1\right)}}\\
&\quad -\log\sqrt{2\pi}-2\sinh^{-1}\sqrt{r_0+\frac{1}{2}},\\
M_6 &:= 4\sqrt{r_0\left(1+\frac{1}{t_0^{\phi}}\right)},\\
M_7 &:= 2\sum_{n=1}^{\left\lceil t_0^{\phi}r_0\right\rceil-1}\frac{1}{\sqrt{n}}-4\sqrt{\left\lceil t_0^{\phi}r_0\right\rceil-1}.
\end{aligned}$$

接着，回顾（3.18）和（3.19），可得

$$\sum_{r=r_0}^{R}\frac{1}{\sqrt{r\left(r+1\right)}}\leq\left(\frac{1}{2}-\phi\right)\log t+M_5 \tag{3.20}$$

因此

$$\begin{aligned}
\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| &\leq t^{\frac{1}{6}}\left(\left(\frac{1}{2}-\phi\right)\log t+M_5\right)\sqrt{\frac{4}{\pi^{\frac{1}{3}}}\left(\alpha+\frac{\alpha cW^{\frac{1}{3}}}{K}+\frac{\beta W^{\frac{2}{3}}}{K}+\frac{c\beta W}{K^2}\right)}\\
&\quad +t^{\frac{\phi}{2}}M_6+M_7+1.463t^{-\frac{1}{4}}+0.127t^{-\frac{3}{4}}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

最后，回顾（3.4）、（3.6）、（3.8）和（3.12），我们注意到

$$\begin{aligned}
\alpha &\leq M_1, && t_0\leq t,\\
\alpha c\frac{W^{\frac{1}{3}}}{K} &\leq M_2, && t_0\leq t,\\
\beta\frac{W^{\frac{2}{3}}}{K} &\leq M_3, && t_0\leq t\leq t_1,\\
c\beta\frac{W}{K^2} &\leq M_4, && t_0\leq t\leq t_1.
\end{aligned}$$

结合 (3.21)，我们最终得到

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|\leq a_1t^{\frac{1}{6}}\log t+a_2t^{\frac{1}{6}}+a_3t^{\frac{\phi}{2}}+a_4 \tag{3.22}$$

其中常数为

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(\frac{1}{2}-\phi\right)\sqrt{\frac{4}{\pi^{\frac{1}{3}}}(M_1+M_2+M_3+M_4)}, \\ a_2 &= M_5\sqrt{\frac{4}{\pi^{\frac{1}{3}}}(M_1+M_2+M_3+M_4)}, \\ a_3 &= M_6, \\ a_4 &= M_7+1.463t_0^{-\frac{1}{4}}+0.127t_0^{-\frac{3}{4}}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

3.4 区域 $3.8\cdot\ 10^7 \le t \le 8.97\cdot\ 10^{17}$ 的证明

现在，我们将继续研究覆盖长距离范围的中间瓶颈区域

$$3.80\cdot 10^7 \le t \le 8.97\cdot 10^{17}.$$

这里，我们将该区域划分为 10 个子区域，从某个值 t_0 开始，到 t_1 结束。正如我们稍后将看到的，van der Corput 界 (3.22) 的系数 (3.23) 对这些参数极为敏感，尤其是在这一过程的起始点 $t_0 = 3.8\cdot\ 10^7$。

3.4.1 瓶颈区域 $3.80\cdot 10^7 \le t \le 3.85\cdot\ 10^7$

结合 (3.22)、(3.23)，并选取 $t_0 = 3.80\cdot 10^7$，$t_1 = 3.85\cdot\ 10^7$，$c = 1.82$ 和 $\phi = 0.33559$，我们得到

$$\begin{aligned} |\zeta(1/2+it)| &\le 0.622447t^{1/6}\log t - 8.21438t^{1/6} + 8.01143t^{\phi/2} - 2.87533 \\ &\le 0.611t^{1/6}\log t, \text{ for } t_0 \le t \le t_1. \end{aligned}$$

3.4.2 瓶颈区域 $3.85\cdot\ 10^7 \le t \le 3.96\cdot\ 10^7$

结合 (3.22)、(3.23)，并选取 $t_0 = 3.85\cdot 10^7$，$t_1 = 3.96\cdot\ 10^7$，$c = 1.82$ 和 $\phi = 0.33576$，我们得到

$$\begin{aligned} |\zeta(1/2+it)| &\le 0.621314t^{1/6}\log t - 8.20793t^{1/6} + 8.01135t^{\phi/2} - 2.8755 \\ &\le 0.611t^{1/6}\log t, \text{ for } t_0 \le t \le t_1. \end{aligned}$$

3.4.3 瓶颈区域 $3.96 \cdot 10^7 \leq t \leq 4.12 \cdot 10^7$

结合 (3.22)、(3.23)，并选取 $t_0 = 3.96 \cdot 10_7$, $t_1 = 4.12 \cdot 10^7$,$c = 1.82$ 和 $\phi = 0.33599$，我们得到

$$\begin{aligned}|\zeta(1/2+it)| &\leq 0.619747t^{1/6}\log t - 8.19871t^{1/6} + 8.01119t^{\phi/2} - 2.8758 \\ &\leq 0.611t^{1/6}\log t, \text{ for } t_0 \leq t \leq t_1.\end{aligned}$$

3.4.4 瓶颈区域 $4.12 \cdot 10^7 \leq t \leq 4.43 \cdot 10^7$

结合 (3.22)、(3.23)，并取 $t_0 = 4.12 \cdot 10_7$, $t_1 = 4.43 \cdot 10^7$,$c = 1.82$ 和 $\phi = 0.33643$，我们得到

$$\begin{aligned}|\zeta(1/2+it)| &\leq 0.61681t^{1/6}\log t - 8.1818t^{1/6} + 8.01096t^{\phi/2} - 2.87626 \\ &\leq 0.611t^{1/6}\log t, \text{ for } t_0 \leq t \leq t_1.\end{aligned}$$

3.4.5 瓶颈区域 $4.43 \cdot 10^7 \leq t \leq 4.96 \cdot 10^7$

结合 (3.22)、(3.23)，并取 $t_0 = 4.43 \cdot 10_7$, $t_1 = 4.96 \cdot 10^7$,$c = 1.82$ 和 $\phi = 0.33711$，我们得到

$$\begin{aligned}|\zeta(1/2+it)| &\leq 0.612254t^{1/6}\log t - 8.15526t^{1/6} + 8.01057t^{\phi/2} - 2.87706 \\ &\leq 0.611t^{1/6}\log t, \text{ for } t_0 \leq t \leq t_1.\end{aligned}$$

3.4.6 瓶颈区域 $4.96 \cdot 10^7 \leq t \leq 5.82 \cdot 10^7$

结合 (3.22)、(3.23) 并选取 $t_0 = 4.96 \cdot 10_7$, $t_1 = 5.82 \cdot 10^7$,$c = 1.81$ 以及 $\phi = 0.33816$，我们得到

$$\begin{aligned}|\zeta(1/2+it)| &\leq 0.605265t^{1/6}\log t - 8.11448t^{1/6} + 8.00999t^{\phi/2} - 2.87828 \\ &\leq 0.611t^{1/6}\log t, \text{ for } t_0 \leq t \leq t_1.\end{aligned}$$

3.4.7 瓶颈区域 $5.82 \cdot 10^7 \leq t \leq 7.06 \cdot 10^7$

结合 (3.22)、(3.23)，并选取 $t_0 = 5.82 \cdot 10_7$, $t_1 = 7.06 \cdot 10^7$,$c = 1.81$ 和 $\phi = 0.33962$，我们得到

$$\begin{aligned}|\zeta(1/2+it)| &\leq 0.595642t^{1/6}\log t - 8.05816t^{1/6} + 8.00922t^{\phi/2} - 2.87995 \\ &\leq 0.611t^{1/6}\log t, \text{ for } t_0 \leq t \leq t_1.\end{aligned}$$

3.4.8 瓶颈区域 $7.06 \cdot 10^7 \leq t \leq 8.24 \cdot 10^7$

结合 (3.22)、(3.23)，并选取 $t_0 = 7.06 \cdot 10_7$, $t_1 = 8.24 \cdot 10^7$,$c = 1.80$ 和 $\phi = 0.34098$，我们得到

$$\begin{aligned}|\zeta(1/2+it)| &\leq 0.58663 t^{1/6}\log t - 8.00412 t^{1/6} + 8.00842 t^{\phi/2} - 2.8818 \\ &\leq 0.611 t^{1/6}\log t, \text{ for } t_0 \leq t \leq t_1.\end{aligned}$$

3.4.9 瓶颈区域 $8.24 \cdot 10^7 \leq t \leq 3.92 \cdot 10^8$

结合 (3.22)、(3.23)，并取 $t_0 = 8.24 \cdot 10_7$, $t_1 = 3.92 \cdot 10^8$,$c = 1.83$ 和 $\phi = 0.33536$，可得

$$\begin{aligned}|\zeta(1/2+it)| &\leq 0.617933 t^{1/6}\log t - 8.20176 t^{1/6} + 8.00885 t^{\phi/2} - 2.88182 \\ &\leq 0.611 t^{1/6}\log t, \text{ for } t_0 \leq t \leq t_1.\end{aligned}$$

3.4.10 瓶颈区域 $3.92 \cdot 10^8 \leq t \leq 8.97 \cdot 10^{17}$

结合 (3.22)、(3.23)，并取 $t_0 = 3.92 \cdot 10_8$, $t_1 = 8.97 \cdot 10^{17}$,$c = 1.83$ 和 $\phi = 0.33711$，可得

$$\begin{aligned}|\zeta(1/2+it)| &\leq 0.597618 t^{1/6}\log t - 8.09885 t^{1/6} + 8.00507 t^{\phi/2} - 2.89251 \\ &\leq 0.611 t^{1/6}\log t, \text{ for } t_0 \leq t \leq t_1.\end{aligned}$$

3.5 区域 $8.97 \cdot 10^{17} \leq t$ 的证明

这里，我们采用与第 3.3 小节类似的方法。首先使用参数 $8.97 \cdot 10^{17} = t_0 \leq t$, $\phi = 1/3$，并结合之前的参数 $K = \lceil t^\phi \rceil$,$K_0 = t_0^\phi$，$n_1 = \left\lfloor \sqrt{t/2\pi} \right\rfloor$, $R = \lfloor n_1/K \rfloor$, $4 = r_0 \leq r \leq R$。我们还回顾了第 3.3 小节中的 R_0。

开始之前，我们应注意到，根据第 3.3 小节，断言 (3.1)、$4 \leq R_0 \leq R$ 来自 (3.2) 的断言，以及 (3.4)、(3.6)、(3.13)、(3.14)、(3.16)、(3.18) 和 (3.20) 在不受先前限制 $t \leq t_1$ 的情况下仍然成立。接下来，我们估计

$$\begin{aligned}\frac{1}{r(r+1)}\frac{W^{\frac{2}{3}}}{K} &= \frac{\pi^{\frac{2}{3}}(r+1)^2 K^2}{r(r+1)t^{\frac{2}{3}}K} = \frac{\pi^{\frac{2}{3}}(r+1)K}{rt^{\frac{2}{3}}} \\ &\leq \frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{2}{3}}}\left(1+\frac{1}{r}\right)t^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}\right) \\ &\leq \frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}}\left(1+\frac{1}{r_0}\right)\left(1+\frac{1}{t_0^{\frac{1}{3}}}\right).\end{aligned} \tag{3.24}$$

类似地，我们估计

$$\begin{aligned}\frac{1}{r\left(r+1\right)}\frac{W}{K^2}&=\frac{\pi\left(r+1\right)^3K^3}{r\left(r+1\right)tK^2}=\pi r\left(1+\frac{1}{r}\right)^2\frac{K}{t}\\&\leq\pi R\left(1+\frac{1}{r}\right)^2\frac{K}{t}\leq\pi n_1\left(1+\frac{1}{r}\right)^2\frac{1}{t}\\&\leq\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{3}}\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{r_0}\right)^2\frac{1}{t_0^{\frac{1}{6}}}.\end{aligned}\tag{3.25}$$

通过标准论证可得

$$W^{\frac{2}{3}}\geq\left(1+r_0\right)^2\pi^{\frac{2}{3}}\tag{3.26}$$

and

$$\beta\leq\frac{32}{3\sqrt{\pi c}}+\frac{1}{c}\left(\frac{6}{\pi}-1\right)\frac{1}{W^{\frac{2}{3}}}.\tag{3.27}$$

现在，回顾 (3.14) 中的 T_2 和 T_3 和，并结合 (3.16)，我们估计

$$\begin{aligned}T_2+T_3&\leq t^{\frac{1}{6}}\sum_{r=r_0}^{R}\frac{1}{\sqrt{r\left(r+1\right)}}\sqrt{\frac{4}{\pi^{\frac{1}{3}}}\left(\alpha+\frac{\alpha cW^{\frac{1}{3}}}{K}+\frac{\beta W^{\frac{2}{3}}}{K}+\frac{c\beta W}{K^2}\right)}\\&\leq t^{\frac{1}{6}}\sum_{r=r_0}^{R}\frac{1}{\sqrt{r\left(r+1\right)}}\sqrt{\frac{4}{\pi^{\frac{1}{3}}}\left(\alpha+\frac{\alpha cW^{\frac{1}{3}}}{K}\right)}\\&+t^{\frac{1}{6}}\sum_{r=r_0}^{R}\sqrt{\frac{4}{\pi^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{1}{r\left(r+1\right)}\frac{\beta W^{\frac{2}{3}}}{K}+\frac{1}{r\left(r+1\right)}\frac{c\beta W}{K^2}\right)}\\&=T_4+T_5.\end{aligned}\tag{3.28}$$

我们从 T_4 和开始。回顾 (3.4)、(3.6) 和 (3.20)，我们估计

$$\begin{aligned}T_4&\leq t^{\frac{1}{6}}\sqrt{\frac{4}{\pi^{\frac{1}{3}}}\left(M_1+M_2\right)}\sum_{r=r_0}^{R}\frac{1}{\sqrt{r\left(r+1\right)}}\\&\leq t^{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{6}\log t+M_5\right)\sqrt{\frac{4}{\pi^{\frac{1}{3}}}\left(M_1+M_2\right)}\\&=t^{\frac{1}{6}}\log t\frac{1}{3\pi^{\frac{1}{6}}}\sqrt{M_1+M_2}+t^{\frac{1}{6}}\frac{2}{\pi^{\frac{1}{6}}}M_5\sqrt{M_1+M_2}.\end{aligned}\tag{3.29}$$

对于剩余的和 T_5 ，我们按如下方式处理。回顾 (3.1)、(3.24)、(3.25)、(3.26) 和 (3.27)，我们得到

$$\begin{aligned} T_5 &= t^{\frac{1}{6}} \sum_{r=r_0}^{R} \sqrt{\frac{4}{\pi^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{1}{r\,(r+1)} \frac{\beta W^{\frac{2}{3}}}{K} + \frac{1}{r\,(r+1)} \frac{c\beta W}{K^2} \right)} \\ &\leq \sqrt{\frac{4\beta}{\pi^{\frac{1}{3}}} \left(\pi^{\frac{2}{3}} \left(1+\frac{1}{r_0}\right) \left(1+\frac{1}{t_0^{\frac{1}{3}}}\right) + \frac{c\pi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \left(1+\frac{1}{r_0}\right)^2 \frac{1}{t_0^{\frac{1}{6}}} \right)} \sum_{r=r_0}^{R} 1 \\ &= (R-3) \sqrt{5\beta\pi^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{t_0^{\frac{1}{3}}} + \frac{5c}{4\sqrt{2}\pi^{\frac{1}{6}}} \frac{1}{t_0^{\frac{1}{6}}} \right)} \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{\frac{1}{6}} - 3 \right) M_8, \end{aligned} \tag{3.30}$$

其中

$$M_8 := \sqrt{5}\pi^{\frac{1}{6}} \sqrt{\left(\frac{32}{3\sqrt{\pi c}} + \frac{1}{c}\left(\frac{6}{\pi} - 1\right) \frac{1}{25\pi^{\frac{2}{3}}} \right) \left(1 + \frac{1}{t_0^{\frac{1}{3}}} + \frac{5c}{4\sqrt{2}\pi^{\frac{1}{6}} t_0^{\frac{1}{6}}} \right)}.$$

至于 T_1 和，我们可以完全按照 (3.17) 中的做法处理。最后，由 (3.13)、(3.14)、(3.17)、(3.28)、(3.29) 和 (3.30)，得到

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| \leq b_1 t^{\frac{1}{6}} \log t + b_2 t^{\frac{1}{6}} + b_3 \tag{3.31}$$

其中常数为

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{3\pi^{\frac{1}{6}}} \sqrt{M_1 + M_2}, \\ b_2 &= M_6 + \frac{2M_5}{\pi^{\frac{1}{6}}} \sqrt{M_1 + M_2} + \frac{M_8}{\sqrt{2\pi}}, \\ b_3 &= M_7 - 3M_8 + 1.463 t_0^{-\frac{1}{4}} + 0.127 t_0^{-\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

现在，回想起 $\phi = 1/3$ 并令 $c = 1.34$，再结合 $t_0 = 8.97 \cdot 10^{17}$，我们最终可以通过以下方式完成定理 1.1(a) 的证明

$$\begin{aligned} |\zeta(1/2 + it)| &\leq 0.469028 t^{1/6} \log t + 3.99399 t^{1/6} - 21.4623 \\ &\leq 0.611 t^{1/6} \log t, \text{ for } t_0 \leq t. \end{aligned} \tag{3.32}$$

注 3.1。 我们想指出，我们的方法从起始点 $t_0 = 7.00 \cdot 10^{11}$ 出发同样有效。此时，计算界 (3.31)

为

$$\begin{aligned}|\zeta(1/2+it)| &\le 0.470795t^{1/6}\log t + 4.04972t^{1/6} - 21.5437\\ &\le 0.611t^{1/6}\log t, \text{ for } t_0 \le t.\end{aligned}$$

因此，在第3.4.10小节最后一个瓶颈区域内，范围为 $7.00\cdot\ 10^{11} \le t \le 8.97\cdot\ 10^{17}$, 时存在重叠，在此范围内，公式 (3.22) 和 (3.31) 均可同时使用。

注3.2. 我们还应指出，利用与 (3.19) 中所述方法类似的方法，可以更准确地估计 (3.30) 中的 T_5 和。不过，总体改进幅度不大。

定理 1.1 中断言 (b) 的证明：对于最后一个区域，其起点为 $t_0 = 8.97\cdot\ 10^{17},$，我们可以进一步改进 (3.32) 中最后一个估计，得到

$$\begin{aligned}|\zeta(1/2+it)| &\le 0.469028t^{1/6}\log t + 3.99399t^{1/6} - 21.4623\\ &\le 0.566t^{1/6}\log t, \text{ for } t_0 \le t,\end{aligned}$$

由此得到定理 1.1(b) 中所述的上界。

4 引理2.6 和引理 2.7 的证明

开始之前，我们应当指出，我们对引理2.6的证明与 [8], 中的引理 2.5 的证明类似，不过包含了一些修改和重要扩展。引理 2.7 的证明遵循 [8] 中引理2.6证明所采用的总体结构，并结合了一些改进与完善。

4.1 引理2.6的证明

(a) 使用一些标准方法即可轻松证明该断言。(b) 我们定义

$$\begin{aligned}k &= \lfloor g'(L-1-m)\rfloor - \lfloor g'(0)\rfloor,\\ C_0 &= \lfloor g'(0)\rfloor,\\ C_j &= C_0 + j \text{ for } 1 \le j \le k+1.\end{aligned}$$

那么，根据 g' 的单调性，我们得出 k 是一个非负整数，且 $C_k = \lfloor g'($ $L-1-m)\rfloor$。此外，根据我们对 ε_1 和 ε_2 的定义以及引理 2.5，我们得到

$$\begin{aligned}k &= g'(L-1-m) - g'(0) + \varepsilon_1 - \varepsilon_2\\ &\le \frac{mK}{W}\mu + \varepsilon_1 - \varepsilon_2.\end{aligned} \tag{4.1}$$

现在，我们选取一个固定值 $0 < \Delta < 1/2$。首先假设 $k \geq 2$。情形 $k = 0$，1 将在后文分别处理。

4.1.1 $k \geq 2$ 情形的证明

我们对区间 $[0, L-1-m]$ 定义如下分段过程 :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max\left\{(g')^{-1}(C_1 - \Delta), 0\right\}, \\
x_j &= (g')^{-1}(C_j - \Delta) \text{ for } 2 \leq j \leq k+1, \\
y_j &= (g')^{-1}(C_j + \Delta) \text{ for } 0 \leq j \leq k-1, \\
y_k &= \min\left\{(g')^{-1}(C_k + \Delta), L-1-m\right\}.
\end{aligned}$$

首先验证这些点都有定义。然后，利用一些标准论证，并注意到 g' 和 $(g')^{-1}$ 递增，我们得到如下分段

$$\begin{gathered}
0 \leq x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_{k-1} < y_{k-1} < x_k < y_k \leq L-1-m \\
y_0 < x_1 \text{ and } y_k < x_{k+1}.
\end{gathered} \tag{4.2}$$

其思路是将求和区间分成约 $2k$ 个子区间，选择这些子区间，使得我们可以在约一半的子区间上应用精细库斯明-兰道界（引理 2.3），而在其余子区间上对指数项使用平凡界。因此，我们将 $[0, L-1-m]$ 的子区间选为 $[0, x_1)$、$[x_1, y_1]$、(y_1, x_2).....(y_{k-1}, x_{k-1})、$[x_k, y_k]$ 和 $(y_k, L-1-m]$：对 $1 \leq j \leq k$ 使用 $[x_j, y_j]$ 的平凡界，对 $1 \leq j \leq k-1$ 使用 (y_j, x_{j+1}) 上的 Kusmin-Landau 界，而子区间 $[0, x_1)$ 和 $(y_k, L-1-m]$ 则单独处理。接下来，再次利用 $(g')^{-1}$ 的单调性，我们得到

$$\begin{aligned}
y_1 - x_1 &= (g')^{-1}(C_1 + \Delta) - \max\left\{(g')^{-1}(C_1 - \Delta), 0\right\} \\
&= (g')^{-1}(C_1 + \Delta) - (g')^{-1}(\max\{C_1 - \Delta, g'(0)\}) \\
&\leq \left((g')^{-1}\right)'(\nu_1)(C_1 + \Delta - C_1 + \Delta)
\end{aligned}$$

对于某个最大值$\{C_1 - \Delta, g'(0)\} < \upsilon_1 < C_1 + \Delta$。令 $\delta_1 = (g')^{-1}(\upsilon_1)$ 后，这意味着 $x_1 =$最大值 $\left\{(g')^{-1}(C_1 - \Delta) \quad 0\right\} < \delta_1 < (g')^{-1}(C_1 + \Delta) = y_1$，结合 (4.2) 和引理 2.6(a)，我们得到

$$\left((g')^{-1}\right)'(\nu_1)\, 2\Delta = \frac{2\Delta}{(g')'\left((g')^{-1}(\upsilon_1)\right)} = \frac{2\Delta}{g''(\delta_1)} \leq \frac{2W}{m}\Delta.$$

由此可得 $y_1 - x_1 \leq 2W\Delta/m$。情形 $y_j - x_j$ for $2 \leq j \leq k-1$和 $y_k - x_k$ 的处理类似，从而得到 $1 \leq j \leq k$

$$y_j - x_j \leq \frac{2W}{m}\Delta.$$

现在利用三角不等式，对指数项的和进行估计，得到

$$\left|\sum_{x_j \leq n \leq y_j} e\left(g\left(n\right)\right)\right| \leq \sum_{x_j \leq n \leq y_j} \left|e\left(g\left(n\right)\right)\right| \leq y_j - x_j + 1 \leq 1 + \frac{2W}{m}\Delta. \tag{4.3}$$

对于剩余的子区间（y_j，x_{j+1}），当 $1 \leq j \leq k-1$ 时，根据构造我们有 $C_j + \Delta \leq g'(x) \leq C_{j+1} - \Delta = C_j + 1 - \Delta$，并在引理 2.3 中取 $z = C_j$、$U = \Delta$ 和 $V = 1 - \Delta$。在此过程中，我们对开区间（y_j，x_{j+1}）中的整数 n 求和。注意到引理 2.3 中的上界与求和区间的长度无关，因此可以直接将引理 2.3 应用于我们的情形，从而得到

$$\left|\sum_{y_j < n < x_{j+1}} e\left(g\left(n\right)\right)\right| \leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{1-(1-\Delta)}\right) = \frac{2}{\pi\Delta}. \tag{4.4}$$

还需考虑边界区间 $[0, x_1)$ 和 $(y_k,\ L-1-m]$。我们先从 $[0, x_1)$ 开始，对其和导出一个估计

$$\left|\sum_{0 \leq n < x_1} e\left(g\left(n\right)\right)\right|.$$

我们考虑以下三种情形:
情况 1：$\varepsilon_1 \in [0, \Delta)$。

$$\begin{aligned} y_0 &= \left(g'\right)^{-1}\left(C_0 + \Delta\right) = \left(g'\right)^{-1}\left(\lfloor g'\left(0\right)\rfloor + \Delta\right) \\ &= \left(g'\right)^{-1}\left(g'\left(0\right) - \varepsilon_1 + \Delta\right) > \left(g'\right)^{-1}\left(g'\left(0\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

结合 (4.2)，我们得到 $0 < y_0 < x_1$ 以及

$$\begin{aligned} y_0 - 0 &= \left(g'\right)^{-1}\left(C_0 + \Delta\right) - 0 \\ &= \left(g'\right)^{-1}\left(C_0 + \Delta\right) - \left(g'\right)^{-1}\left(g'\left(0\right)\right) \\ &= \left(\left(g'\right)^{-1}\right)'\left(\nu_0\right)\left(C_0 + \Delta - g'\left(0\right)\right) \end{aligned}$$

对于某个 $g'(0) < v_0 < C_0 + \Delta$。令 $\delta_0 = (g')^{-1}(v_0)$ 后，可得$0 < \delta_0 < (g')(C_0 + \Delta) = y_0$，结合 (4.2) 和引理 2.6(a)，我们得到

$$\begin{aligned} y_0 - 0 &= \frac{1}{(g')'\left((g')^{-1}(v_0)\right)}\left(C_0 + \Delta - g'(0)\right) \\ &= \frac{1}{g''(\delta_0)}\left(\lfloor g'(0)\rfloor + \Delta - g'(0)\right) \\ &= \frac{1}{g''(\delta_0)}\left(\Delta - \varepsilon_1\right) \\ &\leq \frac{W}{m}\left(\Delta - \varepsilon_1\right). \end{aligned}$$

因此，我们类似于 (4.4) 来估计我们的和，即

$$\begin{aligned} \left|\sum_{0\leq n<x_1} e(g(n))\right| &\leq \left|\sum_{0\leq n<y_0} e(g(n))\right| + \left|\sum_{y_0\leq n<x_1} e(g(n))\right| \\ &\leq y_0 - 0 + 1 + \frac{2}{\pi\Delta} \\ &\leq 1 + \frac{2}{\pi\Delta} + \frac{W}{m}\left(\Delta - \varepsilon_1\right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

情形 2：$\varepsilon_1 \in [\Delta, 1-\Delta]$. 这里可以简单地看出 $y_0 \leq 0$，因此我们不像之前那样拆分该和。接下来，对于 $0 \leq n < x_1$ 我们有

$$C_0 + \varepsilon_1 = \lfloor g'(0)\rfloor + \varepsilon_1 = g'(0) \leq g'(n) < g'(x_1) = C_1 - \Delta = C_0 + 1 - \Delta$$

并且我们在引理 2.3 中取值为 $z = C_0$、$U = \varepsilon_1$ 和 $V = 1 - \Delta$。我们得到

$$\left|\sum_{0\leq n<x_1} e(g(n))\right| \leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\Delta}\right). \tag{4.6}$$

情形 3：$\varepsilon_1 \in (1-\Delta, 1]$.

$$\begin{aligned} (g')^{-1}(C_1 - \Delta) &= (g')^{-1}(C_0 + 1 - \Delta) \\ &= (g')^{-1}(g'(0) + 1 - \Delta - \varepsilon_1) \\ &< (g')^{-1}(g'(0)) = 0 \end{aligned}$$

根据定义，对于 x_1 我们得到 $x_1 = \max\left\{(g')^{-1}(C_1 - \Delta) \quad 0\right\} = 0$。因此我们得到一个空和

$$\left|\sum_{0\leq n<x_1} e(g(n))\right| = 0. \tag{4.7}$$

右边界和

$$\left|\sum_{y_k<n\leq L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right)\right|$$

以类似的方式进行估计。我们省略证明，但指出此处的情形 $\varepsilon_2 \in [0,\Delta$ 对应于前一种情形 $\varepsilon_1 \in (1-\Delta,\ 1]$，也就是说

$$\left|\sum_{y_k<n\leq L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right)\right| = 0. \tag{4.8}$$

情形 $\varepsilon_2 \in [\Delta, 1-\Delta]$ 对应于前一种情形 $\varepsilon_1 \in [\Delta, 1-\Delta]$，由此得到

$$\left|\sum_{y_k<n\leq L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right)\right| \leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{1-\varepsilon_2}\right). \tag{4.9}$$

最后，剩下的情形 $\varepsilon_2 \in (1-\Delta,\ 1]$ 对应于前一种情形 $\varepsilon_1 \in [0,\Delta)$，此处我们得到上界

$$\left|\sum_{y_k<n\leq L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right)\right| \leq 1+\frac{2}{\pi\Delta}+\frac{W}{m}\left(\Delta-(1-\varepsilon_2)\right). \tag{4.10}$$

将结果 (4.5)、(4.6)、(4.7)、(4.8)、(4.9) 和 (4.10) 与引理 2.6(b) 中 $p(\varepsilon)$ 的定义结合起来，最终对于 $0 \leq \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \leq 1$ 得到

$$\left|\sum_{0\leq n<x_1} e\left(g\left(n\right)\right)\right| \leq p\left(\varepsilon_1\right), \tag{4.11}$$

$$\left|\sum_{y_k<n\leq L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right)\right| \leq p\left(1-\varepsilon_2\right). \tag{4.12}$$

现在，我们可以估计主和。令 $m < L \leq K$。然后，利用 (4.1)、(4.2)、(4.3)、(4.4)、(4.11) 和 (4.12)，得到

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=0}^{L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right)\right| \\
&\leq \left|\sum_{0\leq n<x_1} e\left(g\left(n\right)\right)\right| + \sum_{j=1}^{k}\left|\sum_{x_j\leq n\leq y_j} e\left(g\left(n\right)\right)\right| \\
&+ \sum_{j=1}^{k-1}\left|\sum_{y_j<n<x_{j+1}} e\left(g\left(n\right)\right)\right| + \left|\sum_{y_k<n\leq L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right)\right| \\
&\leq p\left(\varepsilon_1\right) + k\left(1+\frac{2W}{m}\Delta\right) + (k-1)\frac{2}{\pi\Delta} + p\left(1-\varepsilon_2\right).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

接下来，代入 (4.1)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=0}^{L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right)\right| \\
&\leq k\left(1+\frac{2W}{m}\Delta+\frac{2}{\pi\Delta}\right)+p\left(\varepsilon_1\right)+p\left(1-\varepsilon_2\right)-\frac{2}{\pi\Delta} \\
&\leq \left(\frac{mK}{W}\mu+\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)\left(1+\frac{2W\Delta}{m}+\frac{2}{\pi\Delta}\right)+p\left(\varepsilon_1\right)+p\left(1-\varepsilon_2\right)-\frac{2}{\pi\Delta}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

最后，对最后几个表达式进行一些简单运算，并代入引理 2.6(b) 中 $P(\varepsilon)$ 的定义，得到

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=0}^{L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right)\right| \\
&\leq \left(\frac{mK}{W}\mu-1\right)\left(1+\frac{2W\Delta}{m}+\frac{2}{\pi\Delta}\right)+P\left(\varepsilon_1\right)+P\left(1-\varepsilon_2\right)-\frac{2}{\pi\Delta}.
\end{aligned}$$

4.1.2 $k=1$情形的证明

这里，我们对区间 $[0, L-1-m]$ 作如下分段:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \max\left\{\left(g'\right)^{-1}\left(C_1-\Delta\right), 0\right\}, \\
x_2 &= \left(g'\right)^{-1}\left(C_2-\Delta\right), \\
y_0 &= \left(g'\right)^{-1}\left(C_0+\Delta\right), \\
y_1 &= \min\left\{\left(g'\right)^{-1}\left(C_1+\Delta\right), L-1-m\right\}.
\end{aligned}$$

与前一小节相比，设定仅在 y_1 的定义上有所不同。随后，应用与之前类似的标准论证，我们得到如下分段

$$\begin{aligned}
&0 \leq x_1 < y_1 \leq L-1-m \\
&y_0 < x_1 \text{ and } y_1 < x_2.
\end{aligned}$$

因此，我们将 $[0, L-1-m]$ 的子区间选为 $[0, x_1)$ 、 $[x_1, y_1]$ 和 $(y_1, L-1-m]$，对 $[x_1, y_1]$ 使用平凡界，而子区间 $[0, x_1)$ 和 $(y_1, L-1-m]$ 则再次单独处理。所有子区间均按照前一小节中的方式类似处理，此处省略证明细节。由此，我们通过以下方式得到与前一小节中相应的估计:

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=0}^{L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right)\right| \\
&\leq \left|\sum_{0\leq n<x_1} e\left(g\left(n\right)\right)\right| + \left|\sum_{x_1\leq n\leq y_1} e\left(g\left(n\right)\right)\right| + \left|\sum_{y_1<n\leq L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right)\right| \\
&\leq p\left(\varepsilon_1\right) + \left(1+\frac{2W}{m}\Delta\right) + p\left(1-\varepsilon_2\right) \\
&\leq p\left(\varepsilon_1\right) + k\left(1+\frac{2W}{m}\Delta\right) + \left(k-1\right)\frac{2}{\pi\Delta} + p\left(1-\varepsilon_2\right) \\
&= k\left(1+\frac{2W}{m}\Delta+\frac{2}{\pi\Delta}\right) + p\left(\varepsilon_1\right) + p\left(1-\varepsilon_2\right) - \frac{2}{\pi\Delta} \\
&\leq \left(\frac{mK}{W}\mu-1\right)\left(1+\frac{2W\Delta}{m}+\frac{2}{\pi\Delta}\right) + P\left(\varepsilon_1\right) + P\left(1-\varepsilon_2\right) - \frac{2}{\pi\Delta}.
\end{aligned}
$$

4.1.3 情形 $k=0$ 的证明

结果表明，这一情形出乎意料地比预期复杂。这里的一个问题是如何恰当地定义分段点，因为前述情形 $k=1$ 和 $k\geq 2$ 中采用的设定并不适用。此外，为了得到普遍成立的不等式，我们必须在此处进行更精确的估计。首先我们汇总

$$
\begin{aligned}
0 = k &= \left\lfloor g'\left(L-1-m\right)\right\rfloor - \left\lfloor g'\left(0\right)\right\rfloor, \\
C_0 &= \left\lfloor g'\left(0\right)\right\rfloor = \left\lfloor g'\left(L-1-m\right)\right\rfloor, \\
C_1 &= C_0+1, \\
\varepsilon_2 &= g'\left(L-1-m\right) - \left\lfloor g'\left(L-1-m\right)\right\rfloor \\
&= g'\left(L-1-m\right) - \left\lfloor g'\left(0\right)\right\rfloor \\
&\geq g'\left(0\right) - \left\lfloor g'\left(0\right)\right\rfloor \\
&= \varepsilon_1.
\end{aligned}
$$

因此，我们必须处理情形 $0\leq\varepsilon_1\leq\varepsilon_2\leq 1$。我们考虑以下六种情况。

情况 1： $\varepsilon_1\in[0,\Delta)$ 和 $\varepsilon_2\in[0,\Delta)$。
我们选取 $x_1=0$， $y_1=L-1-m$. 因此，对 $[0,L-1-m]$ 的分段本身就得到 $[x_1,y_1]$. 然后

$$
\begin{aligned}
y_1-x_1 &= L-1-m-0 \\
&= \left(g'\right)^{-1}\left(g'\left(L-1-m\right)\right) - \left(g'\right)^{-1}\left(g'\left(0\right)\right) \\
&= \left(\left(g'\right)^{-1}\right)'\left(\upsilon_1\right)\left(g'\left(L-1-m\right)-g'\left(0\right)\right)
\end{aligned}
$$

对于某个 $g'(0) < v_1 < g'(L-1-m)$。令 $\delta_1 = (g')^{-1}(v_1)$ 后，便可推出 $0 < \delta_1 < L-1-m$，再结合引理 2.6(a)，我们得到

$$\begin{aligned} y_1 - x_1 &= \left((g')^{-1}\right)'(v_1)\left(\lfloor g'(L-1-m)\rfloor + \varepsilon_2 - \lfloor g'(0)\rfloor - \varepsilon_1\right) \\ &= \left((g')^{-1}\right)'(v_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \\ &\le \left((g')^{-1}\right)'(v_1)(\Delta - \varepsilon_1) \\ &= \frac{\Delta - \varepsilon_1}{g''(\delta_1)} \\ &\le \frac{W}{m}(\Delta - \varepsilon_1). \end{aligned}$$

现在估算最后的和，得到

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=0}^{L-1-m} e(g(n))\right| &\le \sum_{x_1 \le n \le y_1} |e(g(n))| = 1 + y_1 - x_1 \\ &\le 1 + \frac{W}{m}(\Delta - \varepsilon_1). \end{aligned}$$

回顾引理2.6 中 $p(\varepsilon)$ 的定义，并结合 $1 - \varepsilon_2 \in (1-\Delta,\ 1]$，我们得到

$$\begin{aligned} p(\varepsilon_1) &= 1 + \frac{2}{\pi\Delta} + \frac{W}{m}(\Delta - \varepsilon_1), \\ p(1-\varepsilon_2) &= 0. \end{aligned}$$

由此最终得到

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=0}^{L-1-m} e(g(n))\right| &\le 1 + \frac{W}{m}(\Delta - \varepsilon_1) \\ &= p(\varepsilon_1) + p(1-\varepsilon_2) - \frac{2}{\pi\Delta}. \end{aligned}$$

情形 2：$\varepsilon_1 \in [0, \Delta)$ 和 $\varepsilon_2 \in [\Delta, 1-\Delta]$。
我们选取 $y_0 = \left(g'\right)^{-1}(C_0 + \Delta)$、$x_1 = L - 1 - m$。容易验证
$0 < y_0 \le x_1 = L - 1 - m$。因此，对 $[0, L-1-m]$ 进行分段后可得 $[0, y_0]$，$(y_0,\ x_1]$，其中对 $[0, y_0]$ 使用平凡界，对 $(y_0,\ x_1]$使用 Kusmin-Landau 上界。按照与前面类似的证明步骤，并结合引理 2.3 以及数值 $z = C_0$、$U = \Delta$ 和 $V = \varepsilon_2$，我们得到估计

你的最终和为

$$\left|\sum_{n=0}^{L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right)\right| \leq \left|\sum_{0\leq n\leq y_0} e\left(g\left(n\right)\right)\right| + \left|\sum_{y_0<n\leq x_1} e\left(g\left(n\right)\right)\right| \\ \leq 1+\frac{W}{m}\left(\Delta-\varepsilon_1\right)+\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{1-\varepsilon_2}\right).$$

结合 $1-\varepsilon_2 \in [\Delta, 1-\Delta]$ 我们得到

$$p\left(\varepsilon_1\right) = 1+\frac{2}{\pi\Delta}+\frac{W}{m}\left(\Delta-\varepsilon_1\right), \\ p\left(1-\varepsilon_2\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{1-\varepsilon_2}\right).$$

由此我们最终得到

$$\left|\sum_{n=0}^{L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right)\right| \leq 1+\frac{W}{m}\left(\Delta-\varepsilon_1\right)+\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{1-\varepsilon_2}\right) \\ = p\left(\varepsilon_1\right)+p\left(1-\varepsilon_2\right)-\frac{2}{\pi\Delta}.$$

情形 3： $\varepsilon_1 \in [0,\Delta)$ 以及 $\varepsilon_2 \in (1-\Delta,\ 1]$。
我们选取 $y_0 = \left(g'\right)^{-1}($

$$C_0+\Delta \qquad\qquad C_1-\Delta \qquad y_1 = L-1-$$

)、 $x_1 = \left(g'\right)^{-1}($)

m

和。同样容易验证 $0 < y_0 < x_1 < y_1 = L-1-m$。因此，对 $[0, L-1-m]$ 进行分段后得到 $[0, y_0]$，$(y_0,\ x_1)$ 以及 $[x_1, y_1]$，其中对 $[0, y_0]$、$[x_1, y_1]$ 使用平凡界，对 $(y_0,\ x_1)$ 使用 Kusmin-Landau 界。最终估计随后按照前文的方法得到，我们得到

$$\left|\sum_{n=0}^{L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right)\right| \leq \left|\sum_{0\leq n\leq y_0} e\left(g\left(n\right)\right)\right| + \left|\sum_{y_0<n<x_1} e\left(g\left(n\right)\right)\right| + \left|\sum_{x_1\leq n\leq y_1} e\left(g\left(n\right)\right)\right| \\ \leq 1+\frac{W}{m}\left(\Delta-\varepsilon_1\right)+\frac{2}{\pi\Delta}+1+\frac{W}{m}\left(\Delta-\left(1-\varepsilon_2\right)\right).$$

结合 $1-\varepsilon_2 \in [0,\Delta)$，我们得到

$$p\left(\varepsilon_1\right) = 1+\frac{2}{\pi\Delta}+\frac{W}{m}\left(\Delta-\varepsilon_1\right), \\ p\left(1-\varepsilon_2\right) = 1+\frac{2}{\pi\Delta}+\frac{W}{m}\left(\Delta-\left(1-\varepsilon_2\right)\right).$$

由此我们最终得到

$$\left|\sum_{n=0}^{L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right)\right| \leq 1+\frac{W}{m}\left(\Delta-\varepsilon_1\right)+\frac{2}{\pi\Delta}+1+\frac{W}{m}\left(\Delta-\left(1-\varepsilon_2\right)\right) \\ = p\left(\varepsilon_1\right)+p\left(1-\varepsilon_2\right)-\frac{2}{\pi\Delta}.$$

情形 4： $\varepsilon_1 \in [\Delta, 1-\Delta]$ 和 $\varepsilon_2 \in [\Delta, 1-\Delta]$。
我们选取 $y_0 = 0$, $x_1 = L-1-m$。对 $[0, L-1-m]$ 进行分段后，得到 $[y_0, x_1]$。
这里我们结合引理 2.3 与数值 $z = C_0$, $U = \varepsilon_1$和 $V = \varepsilon_2$。因此得到

$$\left| \sum_{n=0}^{L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right) \right| \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{1-\varepsilon_2} \right).$$

结合 $1-\varepsilon_2 \in [\Delta, 1-\Delta]$，我们得到

$$\begin{aligned} p\left(\varepsilon_1\right) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \\ p\left(1-\varepsilon_2\right) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{1-\varepsilon_2} \right). \end{aligned}$$

由此最终得到

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right) \right| &\leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{1-\varepsilon_2} \right) \\ &= p\left(\varepsilon_1\right) + p\left(1-\varepsilon_2\right) - \frac{2}{\pi\Delta}. \end{aligned}$$

情形 5： $\varepsilon_1 \in [\Delta, 1-\Delta]$ 和 $\varepsilon_2 \in (1-\Delta, 1]$。
我们选取 $y_0 = 0$, $x_1 = \left(g^{'}\right)^{-1} (C_1 - \Delta)$ 和 $y_1 = L-1-m$。容易验证 $0 = y_0 \leq x_1 \leq y_1 = L-1-m$。因此，对 $[0, L-1-m]$进行分段后，得到 $[y_0, x_1)$ 和 $[x_1, y_1]$。同样，我们对 $[y_0, x_1)$ 使用 Kusmin-Landau 界，对剩余区间 $[x_1, y_1]$使用平凡界。随后，按照之前类似的计算可得

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right) \right| &\leq \left| \sum_{y_0 \leq n < x_1} e\left(g\left(n\right)\right) \right| + \left| \sum_{x_1 \leq n \leq y_1} e\left(g\left(n\right)\right) \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) + 1 + \frac{W}{m} \left(\Delta - \left(1-\varepsilon_2\right) \right). \end{aligned}$$

结合 $1-\varepsilon_2 \in [0, \Delta)$，我们得到

$$\begin{aligned} p\left(\varepsilon_1\right) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \\ p\left(1-\varepsilon_2\right) &= 1 + \frac{2}{\pi\Delta} + \frac{W}{m} \left(\Delta - \left(1-\varepsilon_2\right) \right). \end{aligned}$$

由此最终得到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right)\right| &\leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)+1+\frac{W}{m}\left(\varepsilon_2-\left(1-\Delta\right)\right)\\ &= p\left(\varepsilon_1\right)+p\left(1-\varepsilon_2\right)-\frac{2}{\pi\Delta}.\end{aligned}$$

情况 6： $\varepsilon_1 \in (1-\Delta,\ 1]$ 和 $\varepsilon_2 \in (1-\Delta,\ 1]$。
这种情形与第一种情况类似。我们选取 $x_1 = 0, y_1 = L-1-m$。随后，最终步骤得到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right)\right| &\leq \sum_{x_1\leq n\leq y_1}\left|e\left(g\left(n\right)\right)\right| = 1+y_1-x_1\\ &\leq 1+\frac{W}{m}\left(\Delta-\left(1-\varepsilon_2\right)\right).\end{aligned}$$

结合 $1-\varepsilon_2 \in [0,\Delta)$，我们得到

$$\begin{aligned}p\left(\varepsilon_1\right) &= 0\\ p\left(1-\varepsilon_2\right) &= 1+\frac{2}{\pi\Delta}+\frac{W}{m}\left(\Delta-\left(1-\varepsilon_2\right)\right).\end{aligned}$$

由此最终得到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right)\right| &\leq 1+\frac{W}{m}\left(\Delta-\left(1-\varepsilon_2\right)\right)\\ &= p\left(\varepsilon_1\right)+p\left(1-\varepsilon_2\right)-\frac{2}{\pi\Delta}.\end{aligned}$$

现在汇总所有中间结果，我们最终在全部六种情形中，通过以下方式得到与前面各小节相同的相应估计

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{n=0}^{L-1-m} e\left(g\left(n\right)\right)\right|\\ &\leq p\left(\varepsilon_1\right)+p\left(1-\varepsilon_2\right)-\frac{2}{\pi\Delta}\\ &= k\left(1+\frac{2W}{m}\Delta+\frac{2}{\pi\Delta}\right)+p\left(\varepsilon_1\right)+p\left(1-\varepsilon_2\right)-\frac{2}{\pi\Delta}\\ &\leq \left(\frac{mK}{W}\mu-1\right)\left(1+\frac{2W\Delta}{m}+\frac{2}{\pi\Delta}\right)+P\left(\varepsilon_1\right)+P\left(1-\varepsilon_2\right)-\frac{2}{\pi\Delta},\end{aligned}$$

这相应地给出了引理 2.6(b) 中的最终结果。最后，我们总结所有情形 $k = 0,\ 1$ 中的相同上界 $k \geq 2$，并证明了引理 2.6(b) 中的主要结果。

4.2 引理2.7的证明

我们将证明分为五个不同部分。
(a) 首先，我们证明 $R \geq 4$。对于我们的取值 $t \geq t_0 = 5 \cdot 10^6$，结合 $\phi \in [1/3, 0.35]$，通过一些标准计算，我们利用单调性论证得到

$$\begin{aligned} R = \left\lfloor \frac{n_1}{K} \right\rfloor &> \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{t} - 1}{t^{\phi} + 1} - 1 \\ &\geq \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{t_0} - 1}{t_0^{\phi} + 1} - 1 = \frac{\sqrt{\frac{t_0}{\sqrt{2\pi}}} - 1}{t_0^{\phi} + 1} - 1. \end{aligned}$$

根据定义， R 是一个正整数，因此

$$R \geq \left\lceil \frac{\sqrt{\frac{t_0}{\sqrt{2\pi}}} - 1}{t_0^{\phi} + 1} - 1 \right\rceil =: R_0.$$

现在，直接计算可得

$$R_0 \geq \left\lceil \frac{\sqrt{\frac{t_0}{\sqrt{2\pi}}} - 1}{t_0^{0.35} + 1} - 1 \right\rceil = \lceil 3.0115 \ldots \rceil = 4.$$

(b) 接下来，我们证明 $\min\{M, K-1\} = M$。
经过一些标准计算，我们很容易得到

$$3\pi^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{\frac{1}{6}} + 1 \right) + 2 \leq t^{\frac{1}{3}}$$

该不等式在我们的 t 范围内成立。事实上，该不等式对所有 $t \geq 2012$ 都成立。
接下来，利用 $\phi \geq 1/3$，我们得到估计

$$R = \left\lfloor \frac{n_1}{K} \right\rfloor \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{\frac{1}{2} - \phi} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{\frac{1}{6}}.$$

利用 $0 < c < 3$ 和 $r \leq R$，我们将它们结合起来，得到

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}} \left(3\pi^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{\frac{1}{6}} + 1 \right) + 2 \right) \\ &\geq \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}} \left(c\pi^{\frac{1}{3}} (R+1) + 2 \right) \\ &\geq c \frac{\pi^{\frac{1}{3}} (r+1)}{t^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{\lceil t^{\phi} \rceil} \\ &= \frac{1}{K} \left(cW^{\frac{1}{3}} + 2 \right). \end{aligned}$$

由此我们得到 $K \geq cW^{1/3}+2 > \left\lceil cW^{1/3} \right\rceil + 1 = M+1$，这表明 $K-1 \geq M$。(c) 接下来，我们选取 $\Delta = \sqrt{m/\pi W}$，并证明 $0 < \Delta < 1/6$。结合 $4 \leq r$ 和 $\phi \geq 1/3$，我们得到

$$\frac{1}{W} = \frac{t}{\pi (r+1)^3 K^3} \leq \frac{t}{125\pi} \frac{1}{\lceil t^{\phi} \rceil^3} \leq \frac{1}{125\pi} \frac{1}{t^{3\phi-1}} \leq \frac{1}{125\pi}.$$

现在，利用 $m \leq M, 1/W \leq 1/125\pi$ 和 $0 < c < 3$，我们对值 Δ 进行估计，得到

$$\begin{aligned} \Delta = \sqrt{\frac{m}{\pi W}} &\leq \sqrt{\frac{\left\lceil cW^{\frac{1}{3}} \right\rceil}{\pi W}} < \sqrt{\frac{cW^{\frac{1}{3}}+1}{\pi W}} \\ &\leq \pi^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{5} \sqrt{c+1} < \frac{2}{5\pi^{\frac{5}{6}}} = 0.154088 < \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(d) 现在，通过考虑三种情形，我们将证明

$$P(\varepsilon) \leq 1 + \frac{5}{\pi\Delta} - \frac{3}{\pi}, \varepsilon \in [0,1].$$

情况 1：$\varepsilon \in [0, \Delta)$。回顾 $P(\varepsilon)$ 的定义以及我们对 Δ 的取值所对应的 $\Delta W/m = 1/\pi\Delta$，可得

$$\begin{aligned} P(\varepsilon) &= \left(1 + \frac{4}{\pi\Delta}\right)\varepsilon + 1 + \frac{2}{\pi\Delta} + \frac{1}{\pi\Delta} - \frac{\varepsilon}{\pi\Delta^2} \\ &= 1 + \frac{3}{\pi\Delta} + \frac{\varepsilon}{\pi}\left(-\frac{1}{\Delta^2} + \frac{4}{\Delta} + \pi\right). \end{aligned}$$

于是，函数 $f(x) = -1/x^2 + 4/x + \pi$ 在 $(0, 1/6)$ 上递增，因此我们得到

$$\begin{aligned} P(\varepsilon) &\leq 1 + \frac{3}{\pi\Delta} + \frac{\varepsilon}{\pi} f\left(\frac{1}{6}\right) \\ &= 1 + \frac{3}{\pi\Delta} + \frac{\varepsilon}{\pi}(\pi - 12) \\ &\leq 1 + \frac{3}{\pi\Delta}. \end{aligned}$$

我们汇总得到

$$P(\varepsilon) \leq 1 + \frac{3}{\pi\Delta}, \varepsilon \in [0, \Delta). \tag{4.15}$$

情形 2：$\varepsilon \in [\Delta, 1-\Delta]$. 这里我们有

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{\pi\Delta} + \left(1 + \frac{4}{\pi\Delta}\right)\varepsilon + \frac{1}{\pi\varepsilon}.$$

考虑函数 $f(x) = (1 + 4/\pi\Delta)\, x + 1/\pi x$，容易验证$f$ 是凸的，因此

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{\pi\Delta} + f(\varepsilon) \leq \frac{1}{\pi\Delta} + \max\{f(\Delta), f(1-\Delta)\}.$$

经过一些标准运算，现在得到 $f(1-\Delta) > f(\Delta)$，并且我们估计 e

$$P(\varepsilon) \leq 1 + \frac{5}{\pi\Delta} - \Delta - \frac{4}{\pi} + \frac{1}{\pi(1-\Delta)}.$$

与之前类似，我们考虑函数 $f(x) = 1/\pi(1-x) - x$，并再次发现 f 在 (0, $1/6$) 上是凸的，因此

$$f(x) \leq \max\left\{f(0), f\left(\frac{1}{6}\right)\right\} = \max\left\{\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi\left(1-\frac{1}{6}\right)} - \frac{1}{6}\right\}$$
$$= \max\left\{\frac{1}{\pi}, \frac{6}{5\pi} - \frac{1}{6}\right\} = \frac{1}{\pi}.$$

因此我们得到 $P(\varepsilon) \leq 1 + 5/\pi\Delta - 4/\pi + f(\Delta) \leq 1 + 5/\pi\Delta - 4/\pi + 1/\pi$。我们汇总

$$P(\varepsilon) \leq 1 + \frac{5}{\pi\Delta} - \frac{3}{\pi}, \varepsilon \in [\Delta, 1-\Delta]. \tag{4.16}$$

情形 3: $\varepsilon \in (1-\Delta,\ 1]$. 在这种情况下，我们直接得到估计

$$P(\varepsilon) \leq 1 + \frac{4}{\pi\Delta}, \varepsilon \in (1-\Delta, 1]. \tag{4.17}$$

将 (4.15)、(4.16) 和 (4.17) 合并，我们得到最终估计

$$P(\varepsilon) \leq 1 + \frac{5}{\pi\Delta} - \frac{3}{\pi}, \varepsilon \in [0, 1]. \tag{4.18}$$

(e) 最后，令 $L \leq K$，$1 \leq m \leq \min(M,\ K-1) = M$，并结合我们的$\Delta = \sqrt{m/\pi W}$。

情况 1: $1 \leq m < L$。此处，我们可以结合 (4.18) 应用引理 2.6(b)。回忆一下，对于我们所选的 Δ，有 $\Delta W/m = 1/\pi\Delta$。因此我们得到以下估计

$$\left|\sum_{n=0}^{L-1-m} e(g(n))\right| \leq \left(\frac{mK}{W}\mu - 1\right)\left(1 + \frac{4}{\pi\Delta}\right) + 2\left(1 + \frac{5}{\pi\Delta} - \frac{3}{\pi}\right) - \frac{2}{\pi\Delta}$$
$$= \frac{mK}{W}\mu\left(1 + \frac{4}{\pi\Delta}\right) + 2 + \frac{10}{\pi\Delta} - \frac{6}{\pi} - 1 - \frac{4}{\pi\Delta} - \frac{2}{\pi\Delta}$$
$$= \frac{mK}{W}\mu\frac{4\Delta W}{m} + \frac{mK}{W}\mu + \frac{4\Delta W}{m} + 1 - \frac{6}{\pi}$$
$$= \frac{4\mu K}{\sqrt{\pi W}}m^{\frac{1}{2}} + \frac{\mu K}{W}m + 4\sqrt{\frac{W}{\pi}}m^{-\frac{1}{2}} + 1 - \frac{6}{\pi}.$$

情形 2： $m \geq L$。在这种情形下，左侧的和是一个值为 0 的空和。结合 $0 < \Delta < 1/6$，这个和可以由右侧正确地估计，因为我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{4\mu K}{\sqrt{\pi W}} m^{\frac{1}{2}} + \frac{\mu K}{W} m + 4\sqrt{\frac{W}{\pi}} m^{-\frac{1}{2}} + 1 - \frac{6}{\pi} \\
&\geq 0 + 0 + 4\sqrt{\frac{W}{\pi}} m^{-\frac{1}{2}} + 1 - \frac{6}{\pi} \\
&= \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{W\pi}{m}} + 1 - \frac{6}{\pi} \\
&= \frac{4}{\pi}\frac{1}{\Delta} + 1 - \frac{6}{\pi} > \frac{24}{\pi} + 1 - \frac{6}{\pi} > 0.
\end{aligned}$$

5 结语

我们认为，定理 1.1 证明步骤中的分析已经基本优化。进一步改进常数 0.611 会使我们触及黎曼–西格尔界的限制，以及向中间瓶颈区域过渡时所遇到的限制。我们认为已经接近极限，几乎没有进一步改进的空间。这是因为我们观察到，当 t_0 值收紧时，针对各个中间瓶颈区域所取得的进展会显著变小。因此，必须对数百个瓶颈区域进行数值处理。这将涉及大量额外的计算工作。

我们将讨论三种理论方法，这些方法或许能带来微小或适度的改进，也可能无法带来任何改进。

首先，上界 $0 < \Delta < 1/6$ 可以略微改进。这可由引理 2.7 的证明中第 (c) 部分推出。在这里，我们可以改进为 $\Delta < 2/(5\pi^{5/6})$ =0.154088 . . .。遗憾的是，这并不能改进估计 (4.18)，因此也无法改进引理 2.7 中的常数项。

其次，我们在第 3.3 小节中对 T_3 和的估计可能效率不高。最后这部分包含 $n_1 - KR + 1$ 项，但我们却按包含 K 项的情况对其进行了上界估计。当 K 远大于 $n_1 - KR + 1$时，这种做法似乎有些浪费。不过，尚不清楚如何才能更好地处理这一问题。

第三，通过分部求和结合阿贝尔不等式，对 (3.14)、(3.15) 和 (3.16) 中的 T_2 和 T_3 和进行求和的过程可能

在一定程度上效率不高。这里，各个区段的分母总是按该区段的最小值进行估计。尽管这一过程直接导出了一个显式且易于处理的指数和，但尚不清楚标准方法能否改进这一过程。

总体的根本问题在于，指数和的估计效率不高，也就是说，许多抵消被忽略了。然而，我们尚未发现一种机制，能够让我们更有效地利用这些抵消项。

参考文献

[1] J. Bourgain，解耦、指数和与黎曼ζ函-数，《美国数学会杂志》30 (1) (2016年) 205-224。[2] Y.F. Cheng，S.W. Graham，黎曼ζ函数的显式估计，《落基山数学杂志》34 (4) (2004) 1261-1280。[3] K. Ford，黎曼ζ函数的无零点区域，载于：《千年数论》第二卷，伊利诺伊州厄巴纳，2000年，A K Peters，马萨诸塞州纳蒂克，2002年，第25-56页[4] W. Gabke，《黎曼-西格尔公式的新推导与显式余项估计》（博士论文），哥廷根，1979年。[5] S.W. Graham，G. Kolesnik，范德科普特指数和方法，载于：伦敦数学会讲义系列，第126卷，剑桥大学出版社，剑桥，1991年。[6] E. Hasanalizade，Q. Shen，P.J. Wong，黎曼ζ函数的零点计数，《数论杂志》235 (2021) 219-241。[7] G.A. Hiary，$\xi(1/2+it)$的一个显式范德科普特估计，《数学探究》27 (2) (2016) 524-533。[8]G.A. Hiary，D. Patel，A. Yang，$\xi(1/2+it)$的一个改进显式估计，《数论杂志》256 (2024年) 195-217。[9] M.N. Huxley，指数和与黎曼ζ函数，V，《伦敦数学会会刊》(3) 90 (1) (2005) 1-41。[10] H. Kadiri，A. Lumley，N. Ng，黎曼ζ函数的显式零点密度，《数学分析与应用杂志》465 (1) (2018) 22-46。

[11] R. Kusmin，《关于若干三角不等式》，《列宁格勒物理数学学会会刊》1 (1927) 233-239。[12] E. Landau，《关于一个三角和》，《哥廷根科学学会通讯》(1928) 21-24。[13] R.S. Lehman，《黎曼ζ函数零点的分布》，《伦敦数学会会刊》S3-20 (2) (1970) 303-320。[14] E. Lindelöf，《关于函数增长的若干评注》，《数学科学通报》32 (1908) 341–356。[15] M.J. Mossinghoff，T.S. Trudgian，A. Yang，《黎曼ζ函数的显式无零点区域》，《数论研究》10 (1) (2024年) xxxx[16] D. Patel，$|\xi(1+it)|$的一个显式上界，《数学探究》33 (5) (2022) 1012-1032。[17] D.J. Platt，T.S. Trudgian，$|\xi(1/2+it)|$的一个改进显式界，《数论杂志》147 (2015) 842-851。[18] 由E.C. Titchmarch编辑并撰写序言，载于：D.R. Heath-Brown（编），黎曼ζ函数理论，第二版，Clarendon Press，牛津大学出版社，纽约，1986年。[19] T.S. Trudgian，关于临界线上黎曼ζ函数辐角的一个改进上界 II，《数论杂志》134 (2014) 280-292。[20] J.G. van der Corput，《新的数论估计》，《数学杂志》29 (1929) 397-426。[21] J.G. van der Corput，J.F. Koksma，《关于黎曼函数$\xi(s)$在临界带中的数量级》，《图卢兹年刊》(3) 22，1930，1-39。[22] A. Yang，临界带内 $\xi(s)$的显式界及一个无零点区域，《数学分析与应用杂志》534 (2) (2024年) 128124。Michael Revers 萨尔茨堡大学数学系 Hellbrunnerstrasse 34 5020 萨尔茨堡，奥地利 电子邮件：michael.revers@plus.ac.at 16位ORCID标识符：0000-0002-9668-5133