arXiv:2602.05618v1 [math.OA] 5 Feb 2026

W^* 与 C^*-超刚性乘积群的例子

JAKUB CURDA, DANIEL DRIMBE

Abstract. 我们给出一大类新的 $\mathcal{C}_{AFP}$ 合并自由积群，使得 [CdSS15] 中的乘积刚性结论成立：若 $G_1,\ldots,G_n \in \mathcal{C}_{AFP}$ 且 H 是任意满足 $L(G_1 \times \cdots \times G_n) \cong L(H)$ 的群，那么存在乘积分解 $H = H_1 \times \cdots \times H_n$，使得对于任意 $1 \leq i \leq n$，$L(H_i)$与 $L(G_i)$稳定同构。该类 $\mathcal{C}_{AFP}$ 包含 [CD-AD20]中的 W^* 与C^*-超刚性群。因此，我们得到了一些乘积群的例子，它们同时具有 W^* 与 C^*-超刚性。

1. Introduction

对于一个可数群 G，我们用 $\ell^2(G)$表示所有定义在 G上的平方可和复值函数构成的希尔伯特空间，用 $\mathbb{B}(\ell^2(G))$表示 $\ell^2(G)$上的有界线性算子代数。复群代数 $\mathbb{C}[G]$可通过在 $\ell^2(G)$上的左卷积作用，自然地实现为 $\mathbb{B}(\ell^2(G))$的一个 $*$-子代数。 G 的约化群 C^*-代数 $C^*_r(G)$和群冯·诺伊曼代数 $L(G)$分别定义为 $\mathbb{C}[G]$ 在 $\mathbb{B}(\ell^2(G))$中关于算子范数拓扑和弱算子拓扑的闭包 [MvN43]。算子代数中的一个重要主题是群代数 $C^*_r(G)$和 $L(G)$的分类，进而理解群 G 的多少信息被编码在这些代数中。

可约群的冯·诺伊曼代数只能保留其来源群的有限信息。若 G是一个无限阿贝尔群，则 $L(G)$ 同构于阿贝尔代数$\curvearrowright L^\infty(G,\ m_{\widehat{G}})$，其中 $m_{\widehat{G}}$是 G上的哈尔测度，因此也同构于 $L^\infty([0,1],\ \lambda)$，其中 λ是勒贝格测度。因此， $L(G)$ 无法保留有关无挠性或有限生成的信息。Connes的突破性结果 [Co76]指出，对于 icc（即所有非平凡共轭类均为无限集）的可约群类 G ，同样存在这种强烈的缺乏刚性的现象。更准确地说，Connes 证明，icc 可约群的群冯·诺伊曼代数同构于超有限 II_1 因子。

与此形成鲜明对比的是，可约群的约化 C^*-代数能够完整地记住底层群。Scheinberg 的经典结果 [Sc74] 指出，所有无挠阿贝尔群 G 都是 C^*-超刚性的，即若 $C^*_r(G) \cong C^*_r(H)$，则 $G \cong H$。非阿贝尔的 C^*-超刚性群直到最近才陆续被发现： [CKRTW] 中的某些无挠几乎阿贝尔群，以及 [CLMW25], 中的二步幂零群、 [ER18], 中的自由幂零群，还有 [Om18] 中的自由幂零群。

非 amenable 情形在冯·诺伊曼代数和 C^*-代数中都要复杂得多。自 Popa 的变形/刚性理论问世以来， [Po07], 取得了重大进展，发现了许多情形，在这些情形中，可以从群冯·诺伊曼代数 $L(G)$ 中恢复群 G的代数性质和分析性质，参见综述 [Va10a,Io12b, Io17]。值得注意的是，Ioana、Popa 和 Vaes 在 [IPV10] 中找到了首批 countable groups G，它们是 W^*-超刚性的；也就是说，若 $L(G) \cong L(H)$，则 $G \cong H$。此后又发现了更多 W^*-超刚性群，见 [BV12,Be14,CI17,CD-AD20,CD-AD21,CIOS21,CFQOT24, DV24, DV25, AMCFQ26]。

首批非 amenable 的 C^*-超刚性群 G 是一些 amenable 根平凡的合并自由积，Chifan 和 Ioana 已证明这一点 [CI17]。既然已确立这些群的 W^*-超刚性，利用 $C_r^*(G)$ 上迹的唯一性 [BKKO14]，便可推出 C^*-超刚性。此后，又发现了更多由合并自由积、HNN 扩张群、余诱导群和半直积（包括具有非 amenable 核的花环积）构成的 C^*-超刚性群，见 [CD-AD20, CD- AD21]。

尽管已有这些进展，识别新的 C^*-超刚性群类仍是一个具有挑战性的问题。在本工作中，我们通过在定理 A 与推论 B 中给出一大类 W^* 与 C^*-超刚性乘积群来探讨这一问题。为陈述该结果，我们引入如下一类群。

定义 1.1. 群 G 属于 $\mathcal{C}_{AFP}$，如果 $G = G_1 *_\Sigma G_2$ 具有满足以下条件的合并自由积分解：

(i) Σ 是 G_1 与 G_2的公共均值化 icc 子群，(ii) 对任意 $i \in \{1,2\}$，$G_i = G_i^1 \times G_i^2$是两个无限共轭类、非 amenable、相对固 群的乘积。

相对固群的定义在第 2.5 节中引入，此类群的例子包括非 amenable 双曲群。此外，若以下两个条件成立，则我们称 G 属于 $\mathcal{C}_{AFP}^0$。

(iii) 对所有 $i,j \in \{1,2\}$, G_i^j 都是形式为 $\mathbb{Z}_2 \wr_{\Gamma/K} \Gamma$ 的广义花环积，其中 $K < \Gamma$ 是一个均值化自正规化子群，而 Γ 包含一个无限正规 property (T) 子群。(iv) 对任意 $i \in \{1,2\}$，$\mathrm{QN}_{G_i}^{(1)}(\Sigma) = \Sigma$，且存在 $g_1, \dots, g_m \in G$ 使得 $\cap_{k=1}^m g_k \Sigma g_k^{-1}$ 是有限的。

注意到，[CD-AD20] 表明每个群 $G \in \mathcal{C}_{AFP}^0$既是 W^*，也是 C^*-超刚性的。在下一个定理及其推论中，我们将这一结果推广到此类群的任意有限乘积。

定理 A。设 $G_1, \dots, G_n$ 是来自 $\mathcal{C}_{AFP}^0$的群，并记 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$。设 H 是任意群，且设 $\theta : L(G)^t \to L(H)$ 是某个 $t > 0$ 的 $*$-同构。

则 $t = 1$ 和 $G \cong H$。此外，存在群同构 $\delta : G \to H$、酉元 $w \in L(H)$ 以及特征 $\eta : G \to \mathbb{T}$，使得对于任意 $g \in G$，都有 $\theta(u_g) = \eta(g) w v_{\delta(g)} w^*$。这里，我们将$\{u_g\}_{g\in G}$ 记作……，将 $\{v_h\}_{h\in H}$ 记作……，它们分别是 $L(G)$ 和 $L(H)$ 的典范生成酉元。

将定理 A 与 $\mathcal{C}_{AFP}^0$中群的乘积所具有的唯一迹性质结合起来，我们得到相应的 C^*-超刚性结果。

推论 B。设 G_1、……、G_n 是来自 $\mathcal{C}_{AFP}^0$的群，并记 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$。设 H 为任意群，并设 $\theta : C_r^*(G) \to C_r^*(H)$ 是一个 $*$- 同构。

于是存在群同构 $\delta : G \to H$、酉元 $w \in L(H)$ 以及特征 $\eta : G \to \mathbb{T}$，使得 $\theta(u_g) = \eta(g) w v_{\delta(g)} w^*$，对任意 $g \in G$。

这些例子，以及由 Ariza Mej´ıa、Chifan 和 Fern´andez Quero 独立得到的例子，是首批 C^*-超刚性的非 amenable 乘积群 [AMCFQ26]。此外，由于[AMCFQ26] 确立了无穷直和的 C^*-超刚性，它们还提供了首批并非 W^*-超刚性的非 amenable C^*-超刚性群。

例 1.2. 为了在类 $\mathcal{C}_{AFP}^0$ 中提供具体示例，令 Γ 为一个双曲群，它包含一个具有性质 (T) 的无限正规子群和两个无限循环自共轭子群K，$L < \Gamma$ 使得 $K \cap gLg^{-1} = \{1\}$ 对所有 $g \in \Gamma$均成立。构造方法见 [CD-AD20, 第 6] 节

，该构造使用了几何群论中的技术 [BO06]。只要 $G_1 = G_2 = \mathbb{Z}_2 \wr_{\Gamma/K} \Gamma \times \mathbb{Z}_2 \wr_{\Gamma/K} \Gamma$ 且 $\Sigma = \{(g, g) \mid g \in \mathbb{Z}_2^{(\Gamma/K)} \rtimes L\}$，群 $G = G_1 *_\Sigma G_2$就属于 $\mathcal{C}^0_{AFP}$。事实上，注意到 Σ是一个 icc 可 amenable 群，而 G_1 和 G_2 是相对固的；参见命题 2.9。对所有 $g \in \Gamma$ 均满足条件 $K \cap gLg^{-1} = \{1\}$，可确保满足定义类$\mathcal{C}^0_{AFP}$ 的条件 (iv)。

证明定理 A 的主要步骤，是按照 [CdSS15] 的思路，确立 $\mathcal{C}_{AFP}$ 中群的冯·诺伊曼代数的如下乘积刚性结果。

定理 C. 设 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ 是属于 $\mathcal{C}_{AFP}$ 的 $n \geq 2$ 个可数群的乘积，并记为 $M = L(G)$。设 H 是任意一个可数群，满足 $M^t = L(H)$，其中某个 $t > 0$.

那么存在一个乘积分解 $H = H_1 \times \cdots \times H_n$、一个酉元 $u \in \mathcal{U}(M^t)$ 以及一些正数 t_1、……、t_n，满足 $t_1 \ldots t_n = t$，使得 $uL(H_i)u^* = L(G_i)^{t_i}$，对任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$.

针对双精确群的乘积、第一 ℓ^2-贝蒂数为正的群以及类 wreath 乘积群，已有其他乘积刚性结果 [CU18,CD-AD20,Dr20,CDD23, AMCOS25,DD25, AMCFQ26]。定理 C 进一步扩展了这一列表，纳入了合并自由积群乘积的新例子。

为证明定理 C，我们在冯·诺伊曼代数理论中发展了若干技巧。第 3 节中，我们为与 $\mathcal{C}_{AFP}$ 类中的群的乘积相关联的冯·诺伊曼代数建立了固性类结果。第 4 节中，我们证明，只要 $\tilde{G}$ 是来自 $\mathcal{C}_{AFP}$ 的群的乘积，且 $\tilde{G}^0$ 是 icc 相对固群的乘积，冯·诺伊曼代数 $L(\tilde{G} \times \tilde{G}^0)$ 就保留乘积结构。第 5 节中，我们给出一些结果，使我们能够在冯·诺伊曼代数层面上重构属于 $\mathcal{C}_{AFP}$ 类的群的乘积的外围结构。

致谢。JC 获得了英国工程与自然科学研究委员会资助项目 EP/X026647/1 的支持。DD 部分获得了英国工程与自然科学研究委员会资助项目 EP/X026647/1、美国国家科学基金会资助项目 DMS #2452525 以及西蒙斯基金会的支持。
为实现开放获取，作者已对本次投稿所产生的任何作者接收稿（AAM）版本采用知识共享署名许可协议公共版权许可。

2. Preliminaries

2.1. 术语。本文考虑迹冯·诺伊曼代数 (M, τ)，即配备忠实正规迹态 $\tau : M \to \mathbb{C}$. 的冯·诺伊曼代数 M。由此可在M上按公式 $\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{1/2}$,定义一个范数，其中 $x \in M$。我们始终假设 M 是可分的冯·诺伊曼代数，即 M 的 $\|\cdot\|_2$-完备化（记作 $L^2(M)$）作为希尔伯特空间是可分的。

我们用 $\mathcal{Z}(M)$ 表示 M 的中心，用 $\mathcal{U}(M)$ 表示其酉群。对于两个冯·诺伊曼子代数 $P_1, P_2 \subset M$，我们用 $P_1 \vee P_2 = W^*(P_1 \cup P_2)$ 表示由 P_1 和 P_2生成的冯·诺伊曼代数。

设 $P \subset M$ 是冯·诺伊曼代数的含幺包含。我们用 $E_P : M \to P$ 表示从 M 到 P 的唯一保持 τ 的条件期望，用 $e_P : L^2(M) \to L^2(P)$ 表示到 $L^2(P)$ 上的正交投影，并用 $\langle M, e_P \rangle$ 表示 $P \subset M$ 的 Jones 基本构造。对于所有 $y \in P\}$，我们还用 $P' \cap M = \{x \in M \mid xy = yx$, 表示 P 在 M 中的相对交换子，并用 $\mathcal{N}_M(P) = \{u \in \mathcal{U}(M) \mid uPu^* = P\}$ 表示 P 在 M 中的正规化子。如果由 $\mathcal{N}_M(P)$ 生成的冯·诺伊曼代数等于 M，我们就称 P 在 M 中是正则的。II_1因子 M, τ 的放大定义为 $M^t = p(\mathbb{B}(\ell^2(\mathbb{Z})) \bar{\otimes} M)p$，其中投影 $p \in \mathbb{B}(\ell^2(\mathbb{Z})) \bar{\otimes} M$ 满足 $(\mathrm{Tr} \otimes \tau)(p) = t$。这里，Tr 表示其上的通常迹

$\mathbb{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$。由于 M 是 II_1 因子， M^t 定义良好。注意，若对于某些 II_1 因子 P_1 和 P_2，有 $M = P_1 \bar{\otimes} P_2$，那么对每个 $t > 0$.，都存在一个自然的识别 $M = P_1^t \bar{\otimes} P_2^{1/t}$

最后，对于正整数 n，我们用 $\widehat{1,n}$ 表示集合 $\{1, \ldots, \overline{n}\}$。对于任意子集 $S \subset \widehat{1,n}$，我们用 $\overline{S} = \widehat{1,n} \setminus S$ 表示其补集。如果 $S = \{i\},$，我们将简写为 i，而不写作 $\{i\}$。此外，对于任意乘积群 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$，我们将其支撑在 S 上的子乘积记为 $G_S = \times_{i \in S} G_i$。

2.2. **双模交织**。 接下来我们回顾 [Po03 中定理 2.1 和推论 2.3]所述的 S. Popa 提出的强大双模交织 技术。

定理 2.1 ([Po03])。 设 (M, τ) 是一个迹冯·诺伊曼代数，且 $P \subset pMp, Q \subset qMq$ 是冯·诺伊曼子代数。设 $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}(P)$ 是一个子群，使得 $\mathcal{U}'' = P$。

那么，以下条件等价：

(1) 存在投影 $p_0 \in P, q_0 \in Q$、一个 $*$-同态 $\theta\colon p_0 P p_0 \to q_0 Q q_0$ 以及一个非零偏等距 $v \in q_0 M p_0$，使得 $\theta(x)v = vx$，对所有 $x \in p_0 P p_0$ 均成立。*(2)* 不存在满足 $\|E_Q(x u_n y)\|_2 \to 0$ 的序列 $(u_n)_n \subset \mathcal{U}$，对所有 $x, y \in M$ 均成立。

若定理 2.1 的等价条件之一成立，我们记作 $P \prec_M Q$，并称 的一个角 Q 在 M 内嵌入到 。

下一个引理的内容基本已包含在 [CD-AD20 的第 3] 节中。为完整起见，我们给出全部细节。

引理 2.2。 设 H 是一个可数无限共轭类群，设 $M = L(H)$，并设 $\Delta\colon M \to M \bar{\otimes} M$ 是由 $\Delta(v_h) = v_h \otimes v_h$ 给出的 $*$-同态，其中 $h \in H$。设 $P \subset pMp$ 是一个冯·诺伊曼子代数，且 $\Sigma < H$ 是一个子群，使得 $P \prec_M L(\Sigma)$。

如果 $Q \subset qMq$ 是一个冯·诺伊曼子代数，且 $L(\Sigma) \prec_M Q$，那么 $\Delta(P) \prec_{M \bar{\otimes} M} M \bar{\otimes} Q$.

证明。 依照 [CD-AD20 第 3], 节中的增广技术，我们考虑一个以阿贝尔基为底的伯努利作用 $H \curvearrowright D$。记 $\mathcal{M} = D \rtimes H$，并将 Δ 延拓为 $*$- 同态 $\Delta\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M} \bar{\otimes} M$，定义为 $\Delta(du_g) = du_g \otimes u_g$，对所有 $d \in D$ 和 $g \in H$ 均成立。

不失一般性，我们可以假设 Σ 是无限的。因此，对任意非零投影 $z \in (D \rtimes \Sigma)' \cap \mathcal{M} = \mathbb{C}1$，都有 $P \prec_{\mathcal{M}} (D \rtimes \Sigma) z$。利用 [DHI16 的注记 2.2] 和 [Dr19b 的引理 2.3]，我们进一步得到，对任意非零投影 $z \in (\mathcal{M} \bar{\otimes} L(\Sigma))' \cap \mathcal{M} \bar{\otimes} M$，都有 $\Delta(P) \prec_{\mathcal{M} \bar{\otimes} M} (\mathcal{M} \bar{\otimes} L(\Sigma)) z$。利用 $L(\Sigma) \prec_M Q$ 和 [Dr19b 的引理 2.4(2)],，可得 $\Delta(P) \prec_{\mathcal{M} \bar{\otimes} M} \mathcal{M} \bar{\otimes} Q$。由于 $\Delta(P) \subset M \bar{\otimes} M$，因此 $\Delta(P) \prec_{M \bar{\otimes} M} M \bar{\otimes} Q$。■

2.3. **相对可 amenable 性**。 迹冯·诺伊曼代数 (M, τ) 称为 $amenable$，如果存在正线性泛函 $\Phi\colon \mathbb{B}(L^2(M)) \to \mathbb{C}$ 使得 $\Phi_{|M} = \tau$，且 Φ 是 M-中心的，即对所有 $x \in M$ 与 $T \in \mathbb{B}(L^2(M))$，有 $\Phi(xT) = \Phi(Tx)$。

接下来，我们回顾 Ozawa 与 Popa 引入的相对可 amenable 性概念 [OP07]。设 (M, τ) 为迹冯·诺伊曼代数，设 $p \in M$ 为投影，并设 $P \subset pMp$ 与 $Q \subset M$ 为冯·诺伊曼子代数。按照 [OP07 定义 2.2], ，我们说 P 是 ***amenable*** 相对于 Q 在 M 内的，如果存在正线性泛函 $\Phi\colon p\langle M, e_Q\rangle p \to \mathbb{C}$ 使得 $\Phi_{|pMp} = \tau$ 且 Φ 是 P-中心的。我们说 P 是 强相对非 ***amenable*** 于 Q 的，如果对每个非零投影 $p' \in P' \cap pMp$， Pp' 相对于 Q 都是非 amenable（等价地，由 [DHI16 引理 2.6], 对每个非零投影 $p' \in \mathcal{N}_M(P)' \cap pMp$ 亦然）。

我们继续讨论以下引理，其精神与 [KV15，命题 2.2] 一致；该引理探讨交织与相对 amenability 之间的联系。

引理 2.3。 设 (M,τ) 是一个迹冯·诺伊曼代数。设 $P_0 \subset P \subset pMp$和 $Q_0 \subset Q \subset qMq$是冯·诺伊曼子代数，且存在投影 $p' \in P$，满足 $p' \in P_0$或 $p' \in P_0' \cap P$,$q_0 \in Q$，一个非零偏等距 $v \in q_0 M p'$以及一个 $*$-同态 θ: $p'Pp' \to q_0 Q q_0$，使得$\theta(x)v = vx$，其中 $x \in p'Pp'$。假设 $E_Q(vv^*)$ 的支撑等于 q_0。则有以下结论:

> *(1)* 若 $\theta(p'P_0p') \prec_Q Q_0$，则 $P_0 \prec_M Q_0$; *(2)* 若 $\theta(p'P_0p')$ 相对于 Q_0 在 Q 内不是强相对非 *amenable*，则 P_0 相对于 Q_0 在 M 内不是强相对非 *amenable*。

证明。 (1) 由于 $\theta(p'P_0p') \prec_Q Q_0$，存在投影 $p_0 \in p'P_0p', q_1 \in Q_0$、非零偏等距 $w \in q_1 Q \theta(p_0)$ 以及一个 $*$-同态 $\Psi: \theta(p_0Pp_0) \to q_1Q_0q_1$，使得对任意 $x \in p_0P_0p_0$， $\Psi(x)w = wx$。定义 Ψ: $p_0P_0p_0 \to q_0Q_0q_0$，使得对任意 $x \in p_0P_0p_0$ 和 $\tilde{w} = wv$， $\Psi(x) = \Psi(\theta(x))$。~注意，对任意 $x \in p_0P_0p_0$， $\Psi(x)\tilde{w} = \tilde{w}x$，并且 $\tilde{w} \neq 0$。否则我们会得到 $wE_Q(vv^*) = 0$，这意味着 $w = 0$，与此矛盾。将 $\tilde{w}$ 替换为其极分解中的偏等距后，可得 $P_0 \prec_M Q_0$。

(2) 根据 [DHI16，引理 2.6(2)]，存在一个非零投影 $q' \in \mathcal{N}_{q_0Mq_0}(\theta(p'P_0p'))' \cap q_0Mq_0$，使得 $\theta(p'P_0p')q'$ 在 qMq 内相对于 Q_0 是 amenable 的。由于 $vv^* \in \theta(p'P_0p')' \cap q_0Mq_0$ 是一个非零投影，因此 $q'vv^* \in \theta(p'P_0p')' \cap q_0Mq_0$ 也是一个非零投影。事实上，如果 $q'vv^* = 0$，那么 $q'E_Q(vv^*) = 0$，这意味着 $q'q_0 = 0$。这与 $q' \in q_0Qq_0$ 是一个非零投影的事实相矛盾。接下来，注意到 [DHI16，引理 2.6] 意味着 $\theta(p'P_0p')q'vv^*$ 在 qMq 内相对于 Q_0 是 amenable 的，因此， $q'vP_0v^*q'$ 在 qMq 内相对于 Q_0 是 amenable 的。设 $u \in \mathcal{U}(M)$ 是满足 $v = uv^*v$ 的一个酉元。于是我们有 $P_0v^*vu^*q'u$ 在 qMq 内相对于 Q_0 是 amenable 的。这说明 P_0 在 M 内并非相对于 Q_0 强相对非 amenable。■

2.4. **群与冯·诺伊曼代数的拟正规化子**。 给定群包含 $H < G$，单侧拟正规化子 $\mathrm{QN}_G^{(1)}(H)$ 是由所有满足以下条件的 $g \in G$ 构成的半群：存在有限集 $F \subset G$ 使得 $Hg \subset FH$ [FGS10, 第 5] 节；等价地， $g \in \mathrm{QN}_G^{(1)}(H)$ 当且仅当$[H: gHg^{-1} \cap H] < \infty$。拟正规化子 $\mathrm{QN}_G(H)$ 是由所有满足以下条件的 $g \in G$ 构成的群：存在有限集 $F \subset G$ 使得 $Hg \subset FH$ 且 $gH \subset HF$。

给定迹冯·诺伊曼代数的包含 $N \subseteq M$，我们将拟正规化子$\mathcal{QN}_{\mathcal{M}}(\mathcal{N})$ 定义为所有满足以下条件的元素 $x \in M$ 构成的集合：存在 $x_1, \ldots\ldots, x_n \in M$ 使得$Nx \subseteq \sum x_iN$ 且 $xN \subseteq \sum Nx_i$（见 [Po99，定义 4.8]）。此外，单侧拟正规化子$\mathcal{QN}_{(1)\mathcal{M}}(\mathcal{N})$ 定义为所有满足以下条件的元素 $x \in M$ 构成的集合：存在 $x_1, \ldots\ldots, x_n \in M$ 使得$Nx \subseteq \sum x_iN$ [FGS10]。

现在我们记录关于角的拟正规化子的若干公式。

引理 2.4 ([Po03,FGS10])**.** 设 $P \subset M$ 为迹冯·诺伊曼代数。对于任意投影$p \in P$，以下结论成立:

- $W^*(\mathcal{QN}^{(1)}_{\mathrm{pMp}}(pPp)) = pW^*(\mathcal{QN}^{(1)}_{\mathrm{M}}(P))p$,
- $W^*(\mathcal{QN}_{\mathrm{pMp}}(pPp)) = pW^*(\mathcal{QN}_{\mathrm{M}}(P))p$.

此外，对于任意投影 $p' \in P' \cap M$，以下结论成立:

- $W^*(\mathcal{QN}^{(1)}_{\mathrm{p'Mp'}}(Pp')) = p'W^*(\mathcal{QN}^{(1)}_{\mathrm{M}}(P))p'$,
- $W^*(\mathcal{QN}_{\mathrm{p'Mp'}}(Pp')) = p'W^*(\mathcal{QN}_{\mathrm{M}}(P))p'$.

以下结果揭示了群论中的拟正规化子与冯·诺伊曼代数中的拟正规化子之间的关系。

引理 2.5 ([FGS10，推论 5。2])。 设 $H < G$ 为可数群。则以下结论成立：

(1) $W^*(\mathcal{QN}_{L(G)}^{(1)}(L(H))) = L(K)$，其中 $K < G$ 是由 $\mathcal{QN}_G^{(1)}(H)$ 生成的子群。特别地，若 $\mathcal{QN}_G^{(1)}(H) = H$，则 $\mathcal{QN}_{L(G)}^{(1)}(L(H)) = L(H)$。*(2)* $W^*(\mathcal{QN}_{L(G)}(L(H))) = L(\mathcal{QN}_G(H))$。

以下引理实质上包含在 [IPP05 定理 5.1] 的证明中。为方便读者，我们补充一些细节。

引理 2.6 ([IPP05])。 设 $G = G_1 *_\Sigma G_2$ 是一个合并自由积群，且 $M = L(G)$。设 $P \subset pL(G)p$ 是一个冯·诺伊曼子代数，使得 $P \prec_{L(G)} L(G_1)$ 且 $P \not\prec_{L(G)} L(\Sigma)$。记$Q = \mathcal{QN}_{(1)L(G)}(P)''$。

于是 $Q \prec_{L(G)} L(G_1)$。此外，若 G_1 是无限共轭类，且对于某个非零投影$z \in \mathcal{Z}(Q)$有 $Qz \prec_{L(G)}^s L(G_1)$ ，则存在酉元 $u \in \mathcal{U}(L(G))$ 使得 $uQzu^* \subset L(G_1)$。

证明。由于 $P \prec_{L(G)} L(G_1)$，存在投影 $p_0 \in P, q_0 \in L(G_1)$、一个非零偏等距$v \in q_0L(G)p_0$ 以及一个 $*$-同构 $\theta : p_0Pp_0 \to \mathcal{C} \subset q_0L(G_1)q_0$ ，使得对于任意$x \in p_0Pp_0$都有 $\theta(x)v = vx$。因此，$\mathcal{C}vv^* = vp_0Pp_0v^*$。根据假设及引理 2.3，可得 $\mathcal{C} \not\prec_{L(G_1)} L(\Sigma)$，故由 [CI17，推论 2.10] （另见 [IPP05，定理 1.1]）可知 $vv^* \in L(G_1)$。令 $u \in L(G)$ 为延拓 v 的酉元，我们便得到 $up_0Pp_0v^*vu^* \subset L(G_1)$。根据假设$up_0Pp_0v^*vu^* \not\prec_{L(G_1)} L(\Sigma)$，因此由 [CI17，推论 2.10] 及引理 2.4 可知，

$$uv^*v\mathcal{QN}_{L(G)}^{(1)}(P)''v^*vu^* \subset L(G_1).$$

这意味着 $Q \prec_M L(G_1)$。

至于此外的部分，注意到 $L(G_1)$ 是一个 II_1 因子。因此，存在一个极大中心投影 $z_1 \in \mathcal{Z}(Q)$，满足 $z_1 \leq z$，且存在一个酉元 $u_1 \in \mathcal{U}(L(G))$，使得 $u_1Qz_1u_1^* \subset L(G_1)$。我们的目标是证明 $z_1 = z$。

反设 $z_0 = z - z_1$ 是一个非零投影。由于 $Qz_0 \prec_{L(G)} L(G_1)$，仿照证明第一部分的步骤，我们得到一个酉元 $u_2 \in \mathcal{U}(L(G_1))$，以及一个非零中心投影 $z_2 \in \mathcal{Z}(Q)$，满足 $z_2 \leq z_0$，使得 $u_2Qz_2u_2^* \subset L(G_1)$。定义 $\tilde{z} = z_1 + z_2$。由于 $L(G_1)$ 是一个 II_1 因子，我们调整 u_2，从而可以假设 $u_1z_1u_1^*$ 和 $u_2z_2u_2^*$ 正交。定义偏等距 $\tilde{u} = u_1z_1 + u_2z_2$，并注意到 $\tilde{u}^*\tilde{u} = z_1 + z_2$和 $\tilde{u}Q\tilde{z}\tilde{u}^* \subset L(G_1)$。将$\tilde{u}$ 扩张为酉元 u后，我们得到 $uQ\tilde{z}u^* \subset L(G_1)$。这与 z_1的极大性矛盾，证明至此完成。 ■

2.5. **相对固群**。 [Oz03] 的主要结果（另见 [CS11]）表明，非 amenable 双曲群的冯·诺伊曼代数 $L(\Gamma)$ 是固的，也就是说，如果 $A \subset L(\Gamma)$ 是一个弥散子代数，那么相对交换子 $A' \cap L(\Gamma)$ 是 amenable 的。 [PV12] 的工作（见 [KV15，引理 5.2]）进一步完善了这一结果，证明任何非 amenable 双曲群都是相对固的。

定义 2.7。 若一个可数群 Γ 满足：对于任意保迹作用$\Gamma \curvearrowright N$ 以及任意两个彼此交换的冯·诺伊曼子代数 $Q_1, Q_1 \subset q(N \rtimes \Gamma)q$，都有$Q_1 \prec_{N \rtimes \Gamma} N$ 或 Q_2 相对于 N 在 $N \rtimes \Gamma$ 内是 amenable 的，则称其为相对固群。

引理 2.8。 设 Γ 为相对固群， $\Gamma \curvearrowright N_0$ 为保迹作用。设 N 为满足 $N_0 \rtimes \Gamma \subset pNp$ 的迹冯·诺伊曼代数。

设 $Q_1, Q_2 \subset qNq$ 是彼此交换的冯·诺伊曼子代数，且 Q_1 或 Q_2 包含一个 II_1 子因子。若 $Q_1 \vee Q_2 \prec_N N_0 \rtimes \Gamma$ 和 Q_2 在 N 内相对于 N_0 强非 *amenable*，则 $Q_1 \prec_N N_0$。

证明。 假设 Q_1 包含一个 II_1 子因子（对 Q_2 也可类似处理）。根据假设，存在投影 $p \in Q_1 \vee Q_2$ 和 $r \in N_0 \rtimes \Gamma$、一个非零偏等距 $v \in rNp$，以及一个 $*$-同态 $\theta\colon q_0(Q_1 \vee Q_2)q_0 \to r(N_0 \rtimes \Gamma)r$ 使得 $\theta(x)v = vx$ 对任意 $x \in q_0(Q_1 \vee Q_2)q_0$均成立。由于 Q_1 包含一个 II_1 子因子，根据 [CdSS17, 引理 4.5]，我们可以假设 $q_0 \in Q_1$。由引理 2.3，$\theta(Q_2 q_0)$ 在 $N_0 \rtimes \Gamma$内相对于 N_0 是非 amenable 的。由于 Γ_0 具有相对坚实性，因此可知 $\theta(q_0 Q_1 q_0) \prec_{N_0 \rtimes \Gamma} N_0$，由引理 2.3可推出 $Q_1 \prec_N N_0$。■

下面的结果表明，通过考虑以 amenable 基群为底的花环积，相对坚实性这一概念在此操作下保持不变。证明是标准的；为方便读者，我们仍给出证明。

命题 2.9. 设 $G = A \rtimes_{\Gamma/K} \Gamma$ 为广义花环积群，其中 A 为可 *amenable* 群，$K < \Gamma$ 为均值化自正规化子群。若 Γ 相对固，则 G 相对固。

证明。 设 $G \curvearrowright N$为保迹作用，并记为 $M = N \rtimes G$。设 $Q_1, Q_2 \subset qMq$为彼此交换的冯·诺伊曼子代数，且 Q_2 在 M 内相对于 N 为非 amenable。由 [DHI16，引理 2.6],，取非零投影 $z \in (Q_1 \vee Q_2)' \cap qNq$，使得 Q_2在 M 内相对于 N 为强相对非 amenable。由 [IPV10，定理 4.2] 以及 [IPV10，推论 4.3], ，可得 (i)$Q_1 z \prec_M N$，或 (ii) $(Q_1 \vee Q_2)z \prec_M N \rtimes (A^{(\Gamma/K)} \rtimes K)$，或 (iii) $(Q_1 \vee Q_2)z \prec_M N \rtimes \Gamma$.

若 (i) 成立，则证毕。若 (ii) 成立，由于 K 和 A 是 amenable 群，[DHI16，引理 2.4] 和 [DHI16，引理 2.6] 推出 $Q_2 z$ 并非强相对非 amenable 于 N，矛盾。在 (iii) 的情形下，引理 2.8 推出 $Q_1 z \prec_M N$。■

2.6. **合并自由积群及类** $\mathcal{C}_{AFP}$。 以下定理是 [Io12a,Va13] 的直接推论，其证明与 [KV15，引理 5.2] 和 [CdSS17，定理 3.1] 的证明沿用相同思路。

定理 2.10。 设 $M = M_1 *_B M_2$ 是迹冯·诺伊曼代数的一个合并自由积。若 Q_1、$Q_2 \subset pMp$ 是彼此交换的冯·诺伊曼子代数，则以下情形之一成立：

- $Q_i \prec_M B$ 对于某个 $i \in \{1, 2\}$。
- $Q_1 \vee Q_2 \prec_M M_i$ 对于某个 $i \in \{1, 2\}$。
- $Q_1 \vee Q_2$ 相对于 B 在 M 内 *amenable*。

证明。 假设 $Q_1 \not\prec_M B$。根据 [BO08，推论 F，14], 存在一个弥散交换冯·诺依曼子代数 $Q_0 \subset Q_1$，满足 $Q_0 \not\prec_M B$。由于 Q_0 是 amenable 的，根据 [Va13，定理 A，],可得 (i) $Q_2 \prec_M M_i$ 对于某个 $i \in \{1, 2\}$，或 (ii) Q_2 相对于 B 在 M 内 amenable。若 (i) 成立，则引理 2.6 表明 $Q_2 \prec_M B$ 或 $Q_1 \vee Q_2 \prec_M M_i$。若 (ii) 成立，则 [Va13，定理 A] 表明 $Q_2 \prec_M B$ 或 $Q_1 \vee Q_2 \prec_M M_j$ 对于某个 $j \in \{1, 2\}$，或 $Q_1 \vee Q_2$ 相对于 B 在 M 内 amenable。在所有情况下，结论均成立。■

推论 2.11。 设 $M = M_1 *_B M_2$ 是迹冯·诺伊曼代数的合并自由积，且 N 是满足 $M \subset pNp$ 的迹冯·诺伊曼代数。
设 Q_1、$Q_2 \subset qNq$ 是彼此交换的冯·诺伊曼子代数，满足 Q_1 或 Q_2 包含一个 II_1 子因子。若 $Q_1 \vee Q_2 \prec_N M$ 和 Q_2 在 N 内相对于 B 强相对非 *amenable*，则对于某个 $i \in \{1, 2\}$，要么 $Q_1 \prec_N B$，要么 $Q_1 \vee Q_2 \prec_N M_i$。

证明。 假设 Q_1 含有一个 II_1 子因子（对于 Q_2，我们也可以类似处理）。根据假设，存在投影 $q_0 \in Q_1 \vee Q_2$ 和 $r \in M$、一个非零偏等距算子 $v \in rNp$ 以及一个 $*$-同态 $\theta\colon q_0(Q_1 \vee Q_2)q_0 \to rMr$，使得对于任意 $x \in q_0(Q_1 \vee Q_2)q_0$，都有 $\theta(x)v = vx$。由于

Q_1 含有一个 II_1 子因子，因此根据 [CdSS17，引理 4.5]，我们可以假设 $q_0 \in Q_1$。由定理 2.10 可知，以下情况之一成立：

(1) $\theta(q_0 Q_i q_0) \prec_M B$ 对某个 $i \in \{1,2\}$成立；(2) $\theta(q_0(Q_1 \vee Q_2) q_0) \prec_M M_i$ 对某个 $i \in \{1,2\}$成立；(3) $\theta(q_0(Q_1 \vee Q_2)q_0)$ 在 M 内相对于 B 是 amenable。

若 (1) 对 $i = 1$ 成立，则由引理 2.3 可得 $Q_1 \prec_N B$。若 (1) 对 $i = 2$ 成立，则由同一引理可得 $Q_2 \prec_N B$。利用 [DHI16、引理 2.4 和引理 2.6]，我们与 Q_2 在 N 内相对于 B 强非 amenable 这一结论相矛盾。若 (2) 成立，则由引理 2.3 可得 $Q_1 \vee Q_2 \prec_N M_i$。最后，若 (3) 成立，则 $\theta(Q_2 q_0)$ 在 M 内相对于 B 是 amenable，并且根据引理 2.3，我们得到 Q_2 在 M 内相对于 B 并非强非 amenable，矛盾。■

我们以此结束本节，并证明来自 $\mathcal{C}^0_{AFP}$ 的群的乘积具有平凡顺从根。

引理 2.12。设 G_1、.....、G_n 是类 $\mathcal{C}^0_{AFP}$ 中的群。那么 $G_1 \times \cdots \times G_n$ 具有平凡顺从根。

证明。记 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ 和 $M = L(G)$。对任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$，记作 $G_i = G_{i,\ 1} *_{\Sigma_i} G_{i,\ 2}$。注意，我们可以取 Σ_i，使得存在群元素 g_i^1、.....、$g_i^{m_i} \in G_i$，满足 $\cap_{k=1}^{m_i} g_i^k \Sigma_i (g_i^k)^{-1}$ 是有限的。设 A 是 G 的正规顺从子群。由于 $L(A) \subset M$ 是正则的，根据 Va13，定理 A] 可得 $L(A) \prec_M^s L(\Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n)$。由 [HPV11，命题8],，我们推出 $L(A) \prec_M^s L\left((\cap_{k=1}^{m_1} g_1^k \Sigma_1 (g_1^k)^{-1}) \times \cdots \times (\cap_{k=1}^{m_n} g_n^k \Sigma_n (g_n^k)^{-1})\right)$，这意味着 A 必须是有限群。由于 G 是无限共轭类且 A 是 G 的正规子群，因此 A 是平凡的。■

3. Solidity type results

本节旨在为群冯·诺伊曼代数$L(\tilde{G} \times \tilde{G}^0)$给出两个固性类结果，其中 $\tilde{G}$ 是由 $\mathcal{C}_{AFP}$中的群构成的乘积，而 $\tilde{G}^0$ 是由 icc 相对固群构成的乘积。

我 们首先确立以下记号，并在本节中始终采用该记号 .

˜**记号 3.1**。设 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$是由属于 $\mathcal{C}_{AFP}$的 $n \geq 1$ 个群构成的乘积。对于任意 $1 \leq j \leq n$，记作$G_j = G_{j,\ 1} *_{\Sigma_j} G_{j,\ 2}$ 其中：

- Σ_j 是一个 icc 可 amenable 群，
- $G_{j,\ k} = G^1_{j,\ k} \times G^2_{j,\ k}$ 是由无限共轭类、相对固群组成的直积，对于任意 $1 \leq k \leq 2$.

设 $\tilde{G}^0 = G_1^0 \times \cdots \times G_m^0$ 是无限共轭类、相对固群的直积。设 $G = \tilde{G} \times \tilde{G}^0$ 并记 $M = L(G)$。

设 $D \subset N$是迹冯·诺伊曼代数的一个包含，满足 $D \bar{\otimes} M^t \subset N$，其中某个 $t > 0$成立。设 H 是一个可数群，满足 $N = L(H)$。按照 [PV09],，我们令 $\Delta : N \to N \bar{\otimes} N$ 为 $*$-同态，由 $\Delta(v_h) = v_h \otimes v_h$给出，对于任意 $h \in H$。

引理 3.2。设 P_0、P_1 是 N的彼此交换的冯·诺伊曼子代数，满足 $P_0 \vee P_1 \prec_N D \bar{\otimes} M^t$。

如果 P_1 在 N 内相对于 D 是强相对非 *amenable* 的，且 P_1 包含一个 II_1 子因子，那么以下情况之一成立：

(1) $P_0 \prec_N D \bar{\otimes} L(\tilde{G}_{\widehat{1}} \times \Sigma_j)^t \bar{\otimes} L(\tilde{G}^0)$ 对于某个 $j \in \{1, \ldots, n\}$，或 *(2)* $P_0 \vee P_1 \prec_N D \bar{\otimes} L(\tilde{G}_{\widehat{j}} \times \tilde{G}_{j,k})^t \bar{\otimes} L(\tilde{G}^0)$ 对于某个 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 和 $k \in \{1,2\}$，或

(3) $P_0 \prec_N D \bar{\otimes} L(\tilde{G})^t \bar{\otimes} L(\tilde{G}^0_{\widehat{i}})$ 对于某个 $i \in \{1, \ldots, m\}$。

证明。为方便起见，记号上我们假设 $t = 1$。根据假设，存在投影$p \in P_0 \vee P_1$和 $r \in D\bar{\otimes}M$、一个非零偏等距 $v \in rNp$以及一个 $*$-同态 θ:$p(P_0 \vee P_1)p \to r(D\bar{\otimes}M)r$，使得对于任意 $x \in p(P_0 \vee P_1)p$，都有 $\theta(x)v = vx$。由于 P_1包含一个 II_1 子因子，根据 [CdSS17, 引理 4.5]，我们可以假设 $p \in P_1$。根据引理 2.3，$\theta(pP_1p)$ 在 $D\bar{\otimes}M$内相对于 D是非 amenable 的。根据 [DHI16, 引理 2.8]，以下情况之一成立:

(a) 对某个 $j \in \{1, \ldots, n\}$，$\theta(pP_1p)$ 在 $D\bar{\otimes}M$ 内相对于 $D\bar{\otimes}L(\tilde{G}_{\widehat{j}})\bar{\otimes}L(\tilde{G}^0)$ 是非 amenable 的;
或者 (b) 对某个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，$\theta(pP_1p)$ 在 $D\bar{\otimes}M$ 内相对于 $D\bar{\otimes}L(\tilde{G})\bar{\otimes}L(\tilde{G}^0_{\widehat{i}})$ 是非 amenable 的。

根据 [DHI16，引理 2.6]，存在一个非零投影 $e \in \theta(p(P_0 \vee P_1)p)' \cap r(D\bar{\otimes}M)r$，使得以下情况之一成立:

(a.0) $\theta(pP_1p)e$在 $D\bar{\otimes}M$ 内相对于 $D\bar{\otimes}L(\tilde{G}_{\widehat{j}})\,\bar{\otimes}L(\tilde{G}^0)$ 是强相对非 amenable 的，o r
(b.0) $\theta(pP_1p)e$在 $D\bar{\otimes}M$ 内相对于 $D\bar{\otimes}L(\tilde{G})\,\bar{\otimes}L(\tilde{G}^0_{\widehat{i}})$ 是强相对非 amenable 的。

由推论 2.11 和引理 2.8，我们得到以下情形之一成立:

(i) $\theta(P_0p) \prec_{D\bar{\otimes}M} D\bar{\otimes}L(\tilde{G}_{\widehat{j}} \times \Sigma_j)\bar{\otimes}L(\tilde{G}^0)$ for some $j \in \{1, \ldots, n\}$, or
(ii) $\theta(p(P_0 \vee P_1)p) \prec_{D\bar{\otimes}M} D\bar{\otimes}L(\tilde{G}_{\widehat{j}} \times \tilde{G}_{j,k})\bar{\otimes}L(\tilde{G}^0)$ for some $j \in \{1, \ldots, n\}$ and $k \in \{1, 2\}$, or
(iii) $\theta(P_0p) \prec_{D\bar{\otimes}M} D\bar{\otimes}L(\tilde{G})\bar{\otimes}L(\tilde{G}^0_{\widehat{i}})$ for some $i \in \{1, \ldots, m\}$.

现在由引理 2.3 即可得出该结论。 ■

˜以下结果特别表明，由于 G是来自 $\mathcal{C}_{AFP}$ 的 n个群的乘积，因此~$L(G)$ 不能包含多于 $2n$ 个交换的非 amenable 子因子。

引理 3.3. 设 $s \geq 1$ 为整数，且 P_0、P_1、.....、P_s 为 N 的彼此交换的冯·诺伊曼子代数，使得 $P_0 \vee P_1 \vee \cdots \vee P_s \prec_N D\bar{\otimes}M^t$。
如果 P_i 是在 N 内相对于任意 $1 \leq i \leq n$ 都强相对非 ***amenable*** 的因子，那么 $|s| \leq 2n + m$。

此外，如果等式成立，那么 $P_0 \prec_N D$。

证明。再次强调，不失一般性，我们可以假设 $t = 1$。证明对 s 作归纳法即可。根据假设，存在投影 $p \in P_0 \vee P_1 \vee \cdots \vee P_s$ 和 $r \in D\bar{\otimes}M$、非零偏等距 $v \in rNp$ 以及一个 $*$-同态 θ: $p(P_0 \vee P_1 \vee \cdots \vee P_s)p \to r(D\bar{\otimes}M)r$，使得对于任意 $x \in p(P_0 \vee P_1 \vee \cdots \vee P_s)p$，有 $\theta(x)v = vx$。由于 P_s 是一个 II_1 因子，根据 CdSS17 中的引理 4.5]，我们可以假设 $p \in P_s$。根据引理 3.2，以下情况之一成立:

(i) $P_0 \vee P_1 \vee \cdots \vee P_{s-1} \prec_N D\bar{\otimes}L(\tilde{G}_{\widehat{j}} \times \Sigma_j)\bar{\otimes}L(\tilde{G}^0)$ for some $j \in \{1, \ldots, n\}$, or
(ii) $P_0 \vee P_1 \vee \cdots \vee P_s \prec_N D\bar{\otimes}L(\tilde{G}_{\widehat{j}} \times G_{j,k})\bar{\otimes}L(\tilde{G}^0)$ for some $j \in \{1, \ldots, n\}$ and $k \in \{1, 2\}$, or
(iii) $P_0 \vee P_1 \vee \cdots \vee P_{s-1} \prec_N D\bar{\otimes}L(\tilde{G})\bar{\otimes}L(\tilde{G}^0_{\widehat{i}})$ for some $i \in \{1, \ldots, m\}$.

在情形 (i) 中，通过归纳法我们得到 $s - 1 \leq 2(n - 1) + m$，从而证明了该引理。在情形 (ii) 中，由于我们将归约到 $n = 0$ 的情形，而这一情形可以通过单独的归纳论证解决，因此通过有限次重复相同的论证即可得到结论。在情形 (iii) 中，通过归纳法我们得到 $s - 1 \leq 2n + (m - 1)$，从而证明了引理的第一部分。

为证明此外的部分，现在假设 $s = 2n + m$。结合证明的第一部分，并多次应用引理 2.8 和推论 2.11，我们必然得到 $P_0 \prec_N D$，因为上述情形 (a.1) 不可能发生。■

我们继续讨论以下引理，它对于运用 [Io11] 的超幂技巧，在神秘群 H 中得到非 amenable 的交换子群至关重要。

引理 3.4. 假设 $m = 0$ 和 $M = N$。对于所有 $i \in \{1, \dots, n\}$ 和 $j,\ k \in \{1, 2\}$，均存在 $a \in \{1, \dots, n\}$ 和 $b,\ c \in \{1, 2\}$，使得

$$\Delta(L(G_{i,j}^k \times G_{\widehat{i}})^t) \prec_{M^t \bar{\otimes} M^t} M^t \bar{\otimes} L(G_{a,b}^c \times G_{\widehat{a}})^t.$$

证明。为方便起见，我们采用记号 $t = 1$。不失一般性，我们可以假设$i = j = k = 1$。在整个证明过程中，我们使用 [IPV10, 命题 7.2]，该命题指出，若 $P \subset M$是一个非拟合子因子，则 $\Delta(P)$在 $M \bar{\otimes} M$内相对于 $M \otimes 1$是强相对非 amenable 的。

由于$G_{1,\ 1}^2$ 是一个非 amenable 的无限共轭类群，推论 2.11 与 [DHI16, 引理 2.8] 共同推出存在 $a \in \{1, \dots, n\}$和 $b \in \{1, 2\}$，使得

$$\Delta(L(G_{1,1}^1 \times G_{\widehat{1}})) \prec_{M \bar{\otimes} M} M \bar{\otimes} L(G_{a,b} \times G_{\widehat{a}}).$$

由引理 2.6 可知，以下情形之一成立：

(1) $\Delta(L(G_{1,1} \times G_{\widehat{1}})) \prec_{M \bar{\otimes} M} M \bar{\otimes} L(G_{a,b} \times G_{\widehat{a}})$, or
(2) $\Delta(L(G_{1,1}^1 \times G_{\widehat{1}})) \prec_{M \bar{\otimes} M} M \bar{\otimes} L(\Sigma_a \times G_{\widehat{a}})$.

根据引理 3.3，第二种情况不可能，因为这样会得到 $2(n-1) + 1 \leq 2(n-1)$。现在假设第一种情况成立。由引理 3.2 可知，以下情形之一成立：

(i) $\Delta(G_{1,1}^1 \times G_{\widehat{1}})) \prec_{M \bar{\otimes} M} M \bar{\otimes} L(G_{a,b}^\alpha \times G_{\widehat{a}})$, or
(ii) $\Delta(G_{1,1}^1 \times G_{\widehat{1}})) \prec_{M \bar{\otimes} M} M \bar{\otimes} L(G_{a,b} \times G_{\widehat{\{a,a'\}}} \times \Sigma_{a'})$, or
(iii) $\Delta(G_{1,1} \times G_{\widehat{1}})) \prec_{M \bar{\otimes} M} M \bar{\otimes} L(G_{a,b} \times G_{\widehat{\{a,a'\}}} \times G_{a',k})$.

注意，如果 $n = 1$，那么 (i) 必须成立。

在情形 (i) 下，结论成立。在情形 (ii) 下，由引理 3.3 可得 $1 + 2(n-1) \leq 2 + 2(n-2)$，矛盾。在情形 (iii) 下，注意到引理 2.6 和 [IPV10, 命题 7.2] 推出 $\Delta(G_{\widehat{1}})) \prec_{M \bar{\otimes} M} M \bar{\otimes} L($ $\Sigma_1 \times G_{\widehat{\{a,a'\}}} \times \Sigma_{a'})$。由引理 3.3 可得 $2(n-1) \leq 2(n-2)$，这同样导致矛盾。■

4. Product rigidity for groups in $\mathcal{C}_{AFP}$ and relatively solid groups

本节的目标是证明以下乘积刚性结果，其意义如 [CdSS15], 所示；该结果将在定理 C 的证明中使用。我们将证明，只要 $\tilde{G}$ 是来自 $\mathcal{C}_{AFP}$ 的群的乘积，而 $\tilde{G}^0$ 是由 icc 相对固群组成的乘积，冯·诺伊曼代数$L(\tilde{G} \times \tilde{G}^0)$ 就能保留其乘积结构。

定理 4.1. 设 $G = \tilde{G} \times \tilde{G}^0$，其中 $\tilde{G} = G_1 \times \cdots \times G_n$ 是由属于 $\mathcal{C}_{AFP}$ 的 $n \geq 1$ 可数群的乘积，而 $\tilde{G}^0 = G_1^0 \times \cdots \times G_m^0$ 是由 $m \geq 1$ 个 *icc* 相对固群组成的乘积。

记 $M = L(G)$，并设 H 是任意一个可数群，使得对于某个 $t > 0$，有 $M^t = L(H)$.

那么存在一个乘积分解 $H = \tilde{H} \times \tilde{H}^0$、一个酉元 $u \in \mathcal{U}(M)$ 以及正数t_1、t_2，使得 $t_1 t_2 = t$，并且 $uL(\tilde{H})u^* = L(\tilde{G})^{t_1}$，且 $uL(\tilde{H}^0)u^* = L(\tilde{G}^0)^{t_2}$。

证明。为简化记号，我们只考虑 $t = 1$ 的情形。令 $\Delta : M \to M \bar{\otimes} M$ the 由 $\Delta(v_h) = v_h \otimes v_h$ for $h \in H$ 给出的 $*$-同态。证明分为三个断言。

断言 1. 对于任意 $i \in \{1, \dots, m\}$，以下结论成立：

(a) $\Delta(L(\tilde{G} \times \tilde{G}_{\widehat{i}}^0)) \prec M \bar{\otimes} L(\tilde{G} \times \tilde{G}_{\widehat{i}}^0)$,
(b) There is a subgroup $\Theta_{\widehat{i}} < H$ satisfying $L(\tilde{G} \times \tilde{G}_{\widehat{i}}^0) \prec_M^s L(\Theta_{\widehat{i}})$ and $L(\Theta_{\widehat{i}}) \prec_M^s L(\tilde{G} \times \tilde{G}_{\widehat{i}}^0)$.

断言*1*的证明. 设 $i \in \{1,\dots,m\}$。由于 G_i^0 是无限共轭类且非 amenable，引理 3.2 表明以下情形之一成立：

(i) $\Delta(L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i}})) \prec M\bar{\otimes}L(\Sigma_j\times\tilde{G}_{\widehat{j}}\times\tilde{G}^0)$ for some $j\in\{1,\dots,n\}$, or
(ii) $\Delta(L(G)) \prec M\bar{\otimes}L(G_{j,k}\times\tilde{G}_{\widehat{j}}\times\tilde{G}^0)$ for some $j\in\{1,\dots,n\}$ and $k\in\{1,2\}$, or
(iii) $\Delta(L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i}})) \prec M\bar{\otimes}L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i'}})$ for some $i'\in\{1,\dots,m\}$.

若 (i) 成立，则由引理 3.3 可知 $2n+m-1\le 2(n-1)+m$，这是不可能的。若 (ii) 成立，由 [IPV10，引理 7.2] 可知 $[G_j : G_{j,\ k}]<\infty$，矛盾。因此，(iii) 成立。根据 [Dr20，定理 4.2]，存在一个子群 $\Theta_{\widehat{i}}<H$，其中心化子 $C_H(\Theta_{\widehat{i}})$ 是非 amenable 的，使得

$$L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i}}) \prec_M L(\Theta_{\widehat{i}}) \text{ and } L(\Theta_{\widehat{i}}) \prec_M L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i'}}). \tag{4.1}$$

我们接下来证明 $L(\Theta_{\widehat{i}}) \prec^s_M L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i'}})$。设 $z\in L(\Theta_{\widehat{i}}C_H(\Theta_{\widehat{i}}))'\cap M$ 是一个非零投影。由于 $C_H(\Theta_{\widehat{i}})$ 是非 amenable 的（另见 [CD-AD20，引理 2.13]），我们可以应用引理 3.2，得到以下情形之一：

(iii.1) $L(\Theta_{\widehat{i}})z \prec_M L(G_{j,k}\times\tilde{G}_{\widehat{j}}\times\tilde{G}^0)$ for some $j\in\{1,\dots,n\}$ and $k\in\{1,2\}$, or
(iii.2) $L(\Theta_{\widehat{i}})z \prec_M L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i''}})$ for some $i''\in\{1,\dots,m\}$.

首先，我们注意到 (iii.1) 不成立。否则，利用引理 2.2 可得 $\Delta(L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i}})) \prec_{M\bar{\otimes}M} M\bar{\otimes}L(G_{j,k}\times\tilde{G}_{\widehat{j}}\times\tilde{G}^0)$。由引理 2.6 和 [IPV10 引理 7.2],，可得 $\Delta(L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i}})) \prec_{M\bar{\otimes}M} M\bar{\otimes}L(\Sigma_j\times\tilde{G}_{\widehat{j}}\times\tilde{G}^0)$。由引理 3.3，我们推得 $2n+m-1\le 2(n-1)+m$，这与假设矛盾。

因此，(iii.2) 成立。注意到 $i'=i''$。否则，由引理 2.2 可得 tha t

$$\Delta(L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i}})) \prec M\bar{\otimes}L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i''}}). \tag{4.2}$$

注意到 $\mathcal{N}_{M\bar{\otimes}M}(\Delta(L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i}})))'\cap M\bar{\otimes}M=\mathbb{C}1$。结合 (iii) 和 (4.2) 中的交织，并利用 [DHI16，引理 2.4],，我们得到 $\Delta(L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i}})) \prec M\bar{\otimes}L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{\{i',i''\}}})$。应用引理 3.3，我们得到 $2n+m-1\le 2n+m-2$，矛盾。这说明 $i'=i''$，因此，根据 [DHI16，引理 2.4] $L(\Theta_{\widehat{i}}) \prec^s_M L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i'}})$。□

断言 2。 $\Delta(L(\tilde{G}^0)) \prec_{M\bar{\otimes}M} M\bar{\otimes}L(\tilde{G}^0)$。

断言 *2* 的证明。由于 $G^1_{j_0,\ 1}$ 是无限共轭类 非 amenable，引理 3.2 表明以下情况之一成立：

(i1) $\Delta(L(G^2_{j_0,1}\times\tilde{G}_{\widehat{j_0}}\times\tilde{G}^0)) \prec_{M\bar{\otimes}M} M\bar{\otimes}L(G_{j',\alpha'}\times\tilde{G}_{\widehat{j'}}\times\tilde{G}^0)$ for some $j'\in\{1,\dots,n\}$ and $\alpha'\in\{1,2\}$, or
(i2) $\Delta(L(G^2_{j_0,1}\times\tilde{G}_{\widehat{j_0}}\times\tilde{G}^0)) \prec_{M\bar{\otimes}M} M\bar{\otimes}L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i'}})$ for some $i\in\{1,\dots,m\}$.

如果 (i2) 成立，则有 $\Delta(L(\tilde{G}^0)) \prec_{M\bar{\otimes}M} M\bar{\otimes}L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i}})$。注意，$\mathcal{N}_{M\bar{\otimes}M}(\Delta(L(\tilde{G}^0)))'\cap M\bar{\otimes}M=\mathbb{C}1$。由断言 1 可知，$\Delta(L(\tilde{G})) \prec M\bar{\otimes}L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i}})$，因此我们可以使用 [Is19，引理 2.6]来推出 $\Delta(M) \prec_{M\bar{\otimes}M} M\bar{\otimes}L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i}})$。根据 [IPV10，引理 7.2],，我们得到 G_i^0 是有限群，矛盾。

因此，(i1) 成立。由引理 2.6 可得

(i1.1) $\Delta(L(G^2_{j_0,1}\times\tilde{G}_{\widehat{j_0}}\times\tilde{G}^0)) \prec_{M\bar{\otimes}M} M\bar{\otimes}L(\Sigma_{j'}\times\tilde{G}_{\widehat{j'}}\times\tilde{G}^0)$, or
(i1.2) $\Delta(L(G_{j_0,1}\times\tilde{G}_{\widehat{j_0}}\times\tilde{G}^0)) \prec_{M\bar{\otimes}M} M\bar{\otimes}L(G_{j',\alpha'}\times\tilde{G}_{\widehat{j'}}\times\tilde{G}^0)$.

引理 3.3 表明 (i1.1) 不可能成立，因此 (i1.2) 必须成立。由于$G^2_{j_0,\ 1}$是 ICC 非 amenable，引理 3.2 表明以下情况之一成立：

(i1.2.1) $\Delta(L(G^1_{j_0,1}\times\tilde{G}_{\widehat{j_0}}\times\tilde{G}^0))\prec_{M\bar{\otimes}M} M\bar{\otimes}L(G^{\beta'}_{j',\alpha'}\times\tilde{G}_{\widehat{j'}}\times\tilde{G}^0)$ for some $\beta'\in\{1,2\}$, or

(i1.2.2) $\Delta(L(G^1_{j_0,1}\times\tilde{G}_{\widehat{j_0}}\times\tilde{G}^0))\prec_{M\bar{\otimes}M} M\bar{\otimes}L(G_{j',\alpha'}\times G_{j'',\alpha''}\times\tilde{G}_{\widehat{\{j',j''\}}}\times\tilde{G}^0)$ for some $j''\in\{1,\dots,n\}$ with $j''\neq j'$ and $\alpha''\in\{1,2\}$, or

(i1.2.3) $\Delta(L(G^1_{j_0,1}\times\tilde{G}_{\widehat{j_0}}\times\tilde{G}^0))\prec_{M\bar{\otimes}M} M\bar{\otimes}L(G_{j',\alpha'}\times\tilde{G}_{\widehat{j'}}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i'}})$ for some $i'\in\{1,\dots,m\}$.

若 (i1.2.3) 成立，则可如上文 (i2) 所示得到矛盾。若 (i1.2.2) 成立，则 $\Delta(L(G_{\widehat{j_0}}\times\tilde{G}^0))\prec_{M\bar{\otimes}M} M\bar{\otimes}L(G_{j',\ \alpha'}\times G_{j'',\ \alpha''}\times\tilde{G}_{\widehat{\{j',j''\}}}\times\tilde{G}^0)$，并由引理 2.6 进一步推出$\Delta(L(\tilde{G}_{\widehat{j_0}}\times\tilde{G}^0))\prec_{M\bar{\otimes}M} M\bar{\otimes}L(\Sigma_{j'}\times\Sigma_{j''}\times\tilde{G}_{\widehat{\{j',j''\}}}\times\tilde{G}^0)$。引理 3.3 意味着 $2(n-1)+m\leq 2(n-2)+m$，矛盾。

因此，(i1.2.1) 成立。由于 $G^1_{j_0,\ 1}$ 是无限共轭类非 amenable，依据引理 3.2，以下情况之一成立：

(a) $\Delta(\tilde{G}_{\widehat{j_0}}\times\tilde{G}^0))\prec_{M\bar{\otimes}M} M\bar{\otimes}L(\tilde{G}_{\widehat{j'}}\times\tilde{G}^0)$, or

(b) $\Delta(\tilde{G}_{\widehat{j_0}}\times\tilde{G}^0))\prec_{M\bar{\otimes}M} L(G^{\beta'}_{j',\alpha'}\times G_{j'',\alpha''}\times\tilde{G}_{\widehat{\{j',j''\}}}\times\tilde{G}^0)$, for some $j''\in\{1,\dots,n\}$ with $j''\neq j'$ and $\alpha''\in\{1,2\}$, or

(c) $\Delta(\tilde{G}_{\widehat{j_0}}\times\tilde{G}^0))\prec_{M\bar{\otimes}M} M\bar{\otimes}L(G^{\beta'}_{j',\alpha'}\times\tilde{G}_{\widehat{j'}}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i}})$ for some $i\in\{1,\dots,m\}$.

若 (c) 成立，则如上面情形 (i2) 中那样得到矛盾。若 (b) 成立，则引理 2.6 蕴含 $\Delta(\tilde{G}_{\widehat{j_0}}\times\tilde{G}^0))\prec_{M\bar{\otimes}M} L(G^{\beta'}_{j',\ \alpha'}\times\Sigma_{j''}\times\tilde{G}_{\widehat{\{j',j''\}}}\times\tilde{G}^0)$，并且由引理 3.3 可知 $2(n-1)+m\leq 1+2(n-2)+m$，矛盾。因此，(a) 成立。

由此可知，存在一个函数 $f\colon\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$ 使得

$$\Delta(L(\tilde{G}_{\widehat{k}}\times\tilde{G}^0))\prec_{M\bar{\otimes}M} M\bar{\otimes}L(\tilde{G}_{\widehat{f(k)}}\times\tilde{G}^0),$$

对任意 $k\in\{1,\dots,n\}$。由 [Is19，引理 2.6] 和 [IPV10，引理 7.2], 可知 f 是单射，因此也是双射。由 [DHI16，引理 2.8], 可得 $\Delta(L(\tilde{G}^0))\prec_{M\bar{\otimes}M} M\bar{\otimes}L(\tilde{G}^0)$. □

断言 3. 存在子群 $\tilde{\Theta},\tilde{\Theta}^0<H$ 满足

(a) $L(G)\prec_M L(\Theta)$ 且 $L(\tilde{\Theta})\prec^s_M L(G)$, (b) $L(\tilde{G}^0)\prec_M L(\tilde{\Theta}^0)$ 且 $L(\tilde{\Theta}^0)\prec_M L(\tilde{G}^0)$。

断言 *3* 的证明。由断言 1.(b) 可知，对任意 $i\in\{1,\dots,n\}$，有 $L(G)\prec^s_M L(\Theta_{\widehat{i}})$。反复应用 Va10b，引理 2.7]，，可得存在 $h_1,\dots,h_n\in H$，使得 $L(G)\prec^s_M L(\Theta)$，其中 $\tilde{\Theta}=\cap_{i=1}^n h_i\Theta_{\widehat{i}}h_i^{-1}$。注意到断言 1.(b) 意味着，对任意 $i\in\{1,\dots,n\}$，$L(\tilde{\Theta})\prec^s_M L(\tilde{G}\times\tilde{G}^0_{\widehat{i}})$。由 [DHI16，引理 2.8] 可推得 $L(\Theta)\prec^s_M L(G)$，从而证明了 (a)。

(b) 的证明可直接由断言 2 和 [Dr20，定理 4.2]得出。 □

最后，断言 3 使我们能够应用 [Dr20，定理 2.3] （另见 [DHI16，定理 6.1]）得出结论。■

5. Identification of peripheral structure

设 $G=G_1\times\cdots\times G_n$为类 $\mathcal{C}_{AFP}$中的群的乘积。固定一个指标 $i\in\{1,\dots,n\}$和一个子群 $G_0<G_i$。本节的主要目标是在

[CI17,CD-AD20] 中所发展的方法的基础上，于冯·诺伊曼代数层面恢复子群 $G_0\times G_{\widehat{i}}$；见下文定理 5.2。

在整个本　　小节中，我们采用记号 3.1 中关于 $m=0$ 和 $M^t=N$ 的假设　　.

定理 5.1。设 $i\in\{1,\dots,n\}$。则存在一个子群 $\Theta<H$，满足 $\mathrm{QN}_H^{(1)}(\Theta)=\Theta$；一个酉元 $u\in\mathcal{U}(M)$；投影 r_1、$r_2\in\mathcal{Z}(L(\Theta))$，满足 $r_1+r_2=1$和 $r_1\neq 0$，使得

- $uL(\Theta)r_1u^*=ur_1u^*L(G_{i,1}\times G_{\widehat{i}})^tur_1u^*$,
- $uL(\Theta)r_2u^*\subset ur_2u^*L(G_{i,\ 2}\times G_{\widehat{i}})^tur_2u^*$。

证明。同样，为记号方便，我们假设 $t=1$。由引理 3.4，对某些 $a\in\{1,\dots,n\}$ 与 $b,c\in\{1,2\}$，我们有 $\Delta(L(G_{i,1}^1\times G_{\widehat{i}}))\prec_{M\bar{\otimes}M}M\bar{\otimes}L(G_{a,b}^c\times G_{\widehat{a}})$。由 [Io11，定理 3.1]（另见 [DHI16，定理 4.1] 与 [CdSS15，定理 3.3]），存在一个子群 $\Delta<H$，其具有非 amenable 中心化子 $C_H(\Delta)$，使得 $L(G_{i,1}^1\times G_{\widehat{i}})\prec_M L(\Delta)$。

将 Θ 定义为由 $\mathrm{QN}_H^{(1)}(\mathrm{QN}_H(\Delta))$ 生成的 H 的子群。设 $r_2\in L(\Theta)'\cap L(H)$ 为具有性质 $L(\Theta)r_2\prec_M^s L(G_{i,2}\times G_{\widehat{i}})$ 的极大投影。设 $r_1=1-r_2$。

接下来，由 $L(G_{i,1}^1\times G_{\widehat{i}})\prec_M L(\Delta)$，[DHI16，引理 2.4] 可知，存在一个非零投影 $r_0\in L(\Delta)'\cap M$，使得对于任意满足 $z\le r_0$ 的非零投影 $z\in L(\Delta)'\cap M$，都有 $L(G_{i,1}^1\times G_{\widehat{i}})\prec_M L(\Delta)z$。由此可得 $r_0\le r_1$。事实上，若情况并非如此，根据 [Va08，引理 3.7]，我们将得到 $L(G_i^1,1)\prec_{L(G_i)}L(G_i,2)$，这意味着 $L(G_i^1,1)\prec_{L(G_i)}L(\Sigma_i)$。由于 $L(G_i^1,1)$ 是非 amenable 的 II_1 因子，而 Σ_i 是 amenable，因此产生矛盾。于是，

$$L(G_{i,1}^1\times G_{\widehat{i}})\prec_M L(\Delta)r_1. \tag{5.1}$$

断言 1. $L(\Theta)r_1\prec_M^s L(G_{i,\ 1}\times G_{\widehat{i}})$.

断言*1*的证明。设 $z\in L(\Theta C_H(\Theta))'\cap M$ 是满足 $z\le r_1$ 的非零投影。根据 [DHI16, 引理 2.4]，只需证明 $L(\Theta)z\prec_M L(G_{i,\ 1}\times G_{\widehat{i}})$。由于 $C_H(\Theta)$ 是非 amenable 的（另见 [CD-AD20, 引理 2.13]），引理 3.2 表明，对于某个$i'\in\{1,\dots,n\}$和 $\alpha\in\{1,2\}$，有 $L(\Theta)z\prec_M L(G_{i',\ \alpha}\times G_{\widehat{i'}})$。

我们需要证明 $i=i'$ 和 $\alpha=1$。假设 $i\neq i'$。结合 $L(G_{i,1}^1\times G_{\widehat{i}})\prec_M L(\Delta)$，引理 2.2 表明 $\Delta(L(G_{i,\ 1}^1\times G_{\widehat{i}}))\prec_{M\bar{\otimes}M}M\bar{\otimes}L(G_{i',\alpha}\times G_{\widehat{i'}})$。由于 $\mathcal{N}_{M\bar{\otimes}M}(\Delta(G_{\widehat{i}}))''\supset\Delta(M)$ 且 $\Delta(M)'\cap M\bar{\otimes}M=\mathbb{C}1$，由引理 2.6, [IPV10, 引理 7.2], [DHI16, 引理 2.4] 以及 [Dr19a, 命题 2.5] 可得 $\Delta(L(G_{\widehat{i}}))\prec^s_{M\bar{\otimes}M}M\bar{\otimes}L(\Sigma_i\times\Sigma_{i'}\times G_{\widehat{\{i,i'\}}})$。这与引理 3.3 矛盾。因此 $i=i'$。若假设 $\alpha=2$，则可得 $L(\Theta)z\prec_M L(G_{i,2}\times G_{\widehat{i}})$。这与 r_2 的极大性矛盾，因此 $\alpha=1$。□

断言 2. 存在　一个酉元 $u\in\mathcal{U}(M)$，满足 $uL(\Theta)r_ku^*\subset L(G_{i,\ k}\times G_{\widehat{i}})$，对任意 $k\in\{1,2\}$.

断言 *2* 的证明。令 $k\in\{1,2\}$。注意到 $L(\Theta)r_k\not\prec_M L(\Sigma_i\times G_{\widehat{i}})$。事实上，否则应用引理 2.2 和引理 3.3 即可得到矛盾。将引理 2.6 应用于断言 1，可得酉元 $u_1,\ u_2\in\mathcal{U}(M)$，使得 $u_kL(\Theta)r_ku_k^*\subset L(G_{i,\ k}\times G_{\widehat{i}})$，对任意 $k\in\{1,2\}$。由于 $L(\Sigma_i)$ 是一个 II_1 因子，根据 CdSS17，引理 4.5]，我们可以假设 $u_2r_2u_2^*\in L(\Sigma_i)$。由于 $L(G_{i,\ 1}\times G_{\widehat{i}})$ 是一个 II_1因子，且 $\tau(u_1r_1u_1^*)=\tau(1-u_2r_2u_2^*)$，我们可以假设（将 u_1 替换为另一个酉元） $u_1r_1u_1^*=1-u_2r_2u_2^*$。定义 $u=u_1r_1+u_2r_2$，并注意到 $u\in\mathcal{U}(M)$ 满足该断言。□

由 (5.1)，我们有 $L(G_{i,1}^1\times G_{\widehat{i}})\prec_M uL(\Delta)r_1u^*$ 并注意到 $L(G_{i,1}^1\times G_{\widehat{i}})\not\prec_M L(\Sigma_i\times G_{\widehat{i}})$。由 [CI17，推论 2.10]（另见 [IPP05，定理 1.1]）以及断言 2，我们得出 $L(G_{i,1}^1\times G_{\widehat{i}})\prec_{L(G_{i,1}\times G_{\widehat{i}})}uL(\Delta)r_1u^*$。利用 [CKP14，命题 2.4], 及其证明，我们可以找到投影 $p\in L(G_{i,1}^1\times G_{\widehat{i}})$ 与 $e\in L(\Delta)$，以及一个非零偏等距 $v\in uer_1u^*L(G_{i,1}\times G_{\widehat{i}})p$,

一个 $*$-同构 $\theta:\ pL(G_{i,1}^1 \times G_{\widehat{i}})p \to C \subset ueL(\Delta)r_1eu^*$，使得下列性质成立：

(a) 包含 $C\vee(C'\cap ueL(\Delta)r_1eu^*) \subset ueL(\Delta)r_1eu^*$ 在 Pimsner-Popa 意义下具有有限指数 [PP 86],(b) $\theta(x)v = vx$ 对所有 $x \in pL(G_{i,\ 1}^1 \times G_{\widehat{i}})p$。

注意，C、$C' \cap ueL(\Delta)r_1eu^*$ 与 $uL(C_H(\Delta))r_1eu^*$ 是 $L(G_{i,\ 1} \times G_{\widehat{i}})$ 中彼此交换的子代数。由于 $L(C_H(\Delta))$ 是非 amenable 的，引理 3.2 表明下列情形之一成立：

(1) $C \vee (C' \cap ueL(\Delta)r_1eu^*) \prec^s_{L(G_{i,1}\times G_{\widehat{i}})} L(G_{i,1}^1 \times G_{\widehat{i}})$, or
(2) $C \vee (C' \cap ueL(\Delta)r_1eu^*) \prec_{L(G_{i,1}\times G_{\widehat{i}})} L(G_{i,1}^2 \times G_{\widehat{i}})$, or
(3) $C \vee (C' \cap ueL(\Delta)r_1eu^*) \prec_{L(G_{i,1}\times G_{\widehat{i}})} L(G_{i,1} \times G_{j,\alpha} \times G_{\widehat{i,j}})$ for some $j \neq i$ and $\alpha \in \{1,2\}$.

我们证明 (1) 成立。一方面，若 (2) 为真，则由引理 2.3 可得 $L(G_{i,\ 1}^1 \times G_{\widehat{i}}) \prec_M L(G_{i,\ 1}^2 \times G_{\widehat{i}})$，矛盾。另一方面，若假设 (3) 为真，则引理 2.3 将推出 $L(G_{i,\ 1}^1 \times G_{\widehat{i}}) \prec_M L(G_{i,\ 1} \times G_{j,\ \alpha} \times G_{\widehat{\{i,j\}}})$，从而推出 $L(G_j) \prec_{L(G_j)} L(G_{j,\ \alpha})$，矛盾。因此，(1) 成立。

根据引理 3.3，我们得到 $C' \cap ueL(\Delta)r_1eu^* \prec_M \mathbb{C}1$。因此，可以找到一个非零投影 $e_0 \in C' \cap ueL(\Delta)r_1eu^*$，使得 $e_0(C' \cap ueL(\Delta)r_1eu^*)e_0 = \mathbb{C}e_0$。于是，根据 [PP86，引理 2.3]，将 (a) 的包含压缩为 e_0后，不妨设包含 $C \subset ueL(\Delta)r_1eu^*$ 是 II_1 因子的有限指数包含。根据 [PP86，命题 1.3],，存在 $x_1, \ldots\ldots, x_m \in ueL(\Delta)r_1eu^*$，使得 $ueL(\Delta)r_1eu^* = \sum_{i=1}^m x_iC$。令 $r = ur_1eu^*$，注意到 $ueL(\Delta)r_1eu^* \subset rMr$，因此，

$$\mathcal{QN}_{rMr}(C)'' = \mathcal{QN}_{rMr}(ueL(\Delta)r_1eu^*)''. \tag{5.2}$$

断言 3. $\mathrm{QN}_H^{(1)}(\Theta) = \Theta$ 和 $vv^*L(G_{i,1} \times G_{\widehat{i}})vv^* = vv^*ur_1L(\Theta)r_1u^*vv^*$.

断言 3 的证明。 令 $l \in \mathcal{U}(L(G_{i,1} \times G_{\widehat{i}}))$ 使得 $lv^*v = v$。由于 $v \in uer_1u^*L(G_{i,1} \times G_{\widehat{i}})p$，注意到 $vv^* \leq uer_1u^*$，这意味着 $vv^*ur_1 = vv^*uer_1$。由于 $v \in L(G_{i,1} \times G_{\widehat{i}})$，可得$vv^*L(G_{i,1} \times G_{\widehat{i}})vv^* = vL(G_{i,\ 1} \times G_{\widehat{i}})v^*$，因此根据引理 2.4 和 2.5，我们得到

$$\begin{aligned}
vv^*L(G_{i,1} \times G_{\widehat{i}})vv^* &= lv^*v\mathcal{QN}_M(L(G_{i,1}^1 \times G_{\widehat{i}})''v^*vl^* \\
&= \mathcal{QN}_{lv^*vMv^*vl^*}(lv^*vL(G_{i,1}^1 \times G_{\widehat{i}})v^*vl^*)'' \\
&= \mathcal{QN}_{vv^*Mvv^*}(Cvv^*)'' = vv^*\mathcal{QN}_{rMr}(C)''vv^* \\
&= vv^*\mathcal{QN}_{rMr}(ueL(\Delta)er_1u^*)''vv^* \\
&= vv^*ur_1e\mathcal{QN}_M(L(\Delta))''er_1u^*vv^* \\
&= vv^*ur_1eL(\mathrm{QN}_H(\Delta))er_1u^*vv^* \\
&= vv^*uL(\mathrm{QN}_H(\Delta))r_1u^*vv^*.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

将引理 2.4 和 2.5 应用于 (5.3) 可得

$$vv^*L(G_{i,1} \times G_{\widehat{i}})vv^* = vv^*uL(\Theta)r_1u^*vv^* = vv^*uL(\mathrm{QN}_H(\Delta))r_1u^*vv^*.$$

根据 [CI17, 引理 2.2] 我们推得 $[\Theta : \mathrm{QN}_H(\Delta)] < \infty$。因此可得，$\mathrm{QN}_H^{(1)}(\Theta)$=$\mathrm{QN}_H^{(1)}(\mathrm{QN}_H(\Delta)) = \Theta$. □

为完成证明，请注意，断言 3、引理 2.4 和引理 2.5 表明 $\mathcal{QN}_M^{(1)}(L(\Theta)r_1) = L(\Theta)r_1$。注意，$uL(\Theta)r_1u^* \subset L(G_{i,1}\times G_{\widehat{i}})$、$vv^*uL(\Theta)r_1u^*vv^* = vv^*L(G_{i,1}\times G_{\widehat{i}})vv^*$ 以及 $L(G_{i,1}\times G_{\widehat{i}})$ 是一个 II_1 因子。根据 [CI17, 引理 2.6], 我们得到 $uL(\Theta)r_1u^* = ur_1u^*L(G_{i,1}\times G_{\widehat{i}})ur_1u^*$。■

以下定理的论证与 [CI17 定理 3.2]（另见 [CD- AD20 定理 9.2]）及 [CI17 命题 4.1] 中所用的论证基本一致。为方便读者，我们提供一些细节。

定理 5.2. 设 $i \in \{1,\dots,n\}$。则存在子群 $\Theta_1,\Theta_2 < H$、酉元 $u_1,u_2 \in \mathcal{U}(M^t)$ 使得 $u_kL(\Theta_k)u_k^* = L(G_{i,k}\times G_{\widehat{i}})^t$，对任意 $k\in\{1,2\}$ 均成立。

证明。由定理 5.1，对任意 $k\in\{1,2\}$，存在一个子群 $\Theta_k < H$，使得 $\mathrm{QN}_H^{(1)}(\Theta_k) = \Theta_k$；存在一个酉元 $u_k \in \mathcal{U}(M)$、投影 $r_k^1, r_k^2 \in \mathcal{Z}(L(\Theta_k))$，满足 $r_k^1 + r_k^2 = 1$ 且 $r_k^1 \neq 0$，使得

(1) $u_kL(\Theta_k)r_k^1u_k^* = u_kr_k^1u_k^*L(G_{i,k}\times G_{\widehat{i}})^tu_kr_k^1u_k^*$,
(2) $u_kL(\Theta_k)r_k^2u_k^* \subset u_kr_k^2u_k^*L(G_{i,3-k}\times G_{\widehat{i}})^tu_kr_k^2u_k^*$.

如果 $r_k^1 = 1$ 对任意 $k\in\{1,2\}$均成立，那么结论就得证了。不妨设 $r_1^1 \neq 1$，并导出一个矛盾。由于 $r_1^2 \neq 0$，条件 (2) 蕴含 $L(\Theta_1) \prec_{M^t} L(G_{i,\ 2}\times G_{\widehat{i}})^t$。条件 (1) 与 [DHI16，引理 2.4] 一起表明，$L(G_{i,\ 2}\times G_{\widehat{i}})^t \prec^s_{M^t} L(\Theta_2)$。根据 [Va08，引理 3.7]，可知 $L(\Theta_1)\prec_M L(\Theta_2)$；根据 [CI17，引理 2.2]，存在 $h\in H$，使得 $[\Theta_1 :\ \Theta_1\cap h\Theta_2h^{-1}] < \infty$。将 Θ_2 替换为 $h\Theta_2h^{-1}$ 后，不妨设 $[\Theta_1 : \Theta] < \infty$，其中 $\Theta = \Theta_1\cap\Theta_2$。

我们接下来证明 $r_1^1r_2^1 = r_1^2r_2^2 = 0$。事实上，若此结论不成立，则由 [Va10b、引理 2.7]，存在 $g\in G_i$ 使得 $L(\Theta) \prec_{M^t} L((G_{1,\ 1}\cap gG_{1,\ 2}g^{-1})\times G_{\widehat{i}})^t$，因此，$L(\Theta)\prec_{M^t}L(\Sigma_i\times G_{\widehat{i}})^t$。结合条件 (1)、$[\Theta_1$ 这一事实：$\Theta] < \infty$ 以及引理 2.2，可得 $\Delta(L(G_{i,\ 1}\times G_{\widehat{i}})^t) \prec_{M^t\bar{\otimes}M^t} M^t\bar{\otimes}L(\Sigma_i\times G_{\widehat{i}})^t$。这与引理 3.3 矛盾。

由于 $r_1^1r_2^1 = (1-r_1^1)(1-r_2^1) = 0$，可得 $r_1^1 + r_2^1 = 1$，因此 $r_2^2 = r_1^1$。对$k=1$ 使用 (1)，对 $k=2$使用 (2)，可得

$$u_1L(\Theta)r_1^1u_1^* \subset u_1L(\Theta_1)r_1^1u_1^* = u_1r_1^1u_1^*L(G_{i,1}\times G_{\widehat{i}})^tu_1r_1^1u_1^* \tag{5.4}$$

and

$$u_2L(\Theta)r_1^1u_2^* \subset u_2L(\Theta_2)r_1^1u_2^* \subset u_2r_1^1u_2^*L(G_{i,1}\times G_{\widehat{i}})^tu_2r_1^1u_2^*. \tag{5.5}$$

由于 $L(\Theta) \not\prec_{M^t} L(\Sigma_i\times G_{\widehat{i}})^t$ 且 $u_1r_1^1u_2^*(u_2L(\Theta)r_1^1u_2^*) = (u_1L(\Theta)r_1^1u_1^*)u_1r_1^1u_2^*$，由 (5.4)、(5.5) 以及 [CI17，推论 2.10], 我们得到 $u_1r_1^1u_2^*\in L(G_{i,1}\times G_{\widehat{i}})^t$。由 (5.4) 和 (5.5)，我们进一步得到$L(\Theta_2)r_1^1 \subset L(\Theta_1)r_1^1$。这意味着 $\Theta_2\subset\Theta_1$。因此，$\Theta = \Theta_2$，从而 $[\Theta_1 :\ \Theta_2] < \infty$。由于 $\mathrm{QN}_H^{(1)}(\Theta_k) = \Theta_k$，对任意 $k\in\{1,2\}$，由此可得 $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$。

最后，按照 CI17 命题 4 的证明进行推导，条件 (1) 与群 Σ_i 的无限共轭类条件矛盾。■

注 5.3. 我们注意到，上述结果还表明，若 $G_1 = G_{1,1}*_{\Sigma_1}G_{1,2} \in \mathcal{C}^0_{AFP}$ and$L(G_1)^t \cong L(H_1)$ 对某个 $t>0$ 和可数群 H_1 成立，则 $t=1$。事实上，假设 $M = L(G_1)$ 和 $M^t = L(H_1)$，定理 5.2 表明存在一个酉元 $u\in\mathcal{U}(L(M^t))$ 和一个子群 $\Theta_1 < H_1$，满足 $uL(\Theta_1)u^* \cong L(G_{1,1})^t$。根据 [CD-AD20, 推论 B], ，可得$t=1$。

6. Proofs of the main results

6.1. 定理 C 的证明。 根据定理 5.2，存在 $u \in \mathcal{U}(M)$ 和一个子群 $\Theta_n < H$，使得 $uL(\Theta_n)u^* = L(G_{\widehat{n}} \times G_{n,1})^t$。根据定理 4.1，存在一个子群 $\Lambda_n < H$、一个酉元$w \in \mathcal{U}(M)$ 和 $t' > 0$，使得 $wL(\Lambda_n)w^* = L(G_{\widehat{n}})^{t'}$。根据 [CdSS17, 定理 4.6] 和 [CdSS17, 定理 4.7],，可得存在一个乘积分解 $H = H_{\widehat{n}} \times H_n$、一个正数$t_n > 0$和一个酉元 $\omega \in \mathcal{U}(M)$，使得 $\omega L(H_{\widehat{n}})\omega^* = L(G_{\widehat{n}})^{t_n}$且 $\omega L(H_n)\omega^* = L(G_n)^{1/t_n}$。有限次重复相同的论证即可得出定理。■

6.2. 定理 A 的证明。 结合定理 C、注 5.3 和 [CD- AD20,Theorem C]即可得到该结果。 ■

6.3. 推论 B 的证明。 由引理 2.12 可知， G 的可 amenable 根是平凡的，因此根据 [BKKO14, Theorem 1.3], $C^*_r(G)$具有唯一迹。由此可知，同构 θ 可扩展为群冯·诺伊曼代数之间的同构。该结果现在由定理 A 得出。 ■

References

[AMCFQ26] *Non-amenable C^*-superrigid groups that are not W^*-superrigid* Juan Felipe Ariza Mejıa、Ionut Chifan 和 Adriana Fernandez Quero：[AMCOS25] Juan Felipe Ariza Mej´ıa、Ionut. Chifan、D. Osin、B. Sun：*McDuff W^*-rigidity for group II_1 factors*，预印本，2025，arXiv:2511.23123。[Be14] M. Berbec：*W^*-superrigidity for wreath products with groups having positive first ℓ^2-Betti number*，《国际数学杂志》26（2015），第 1 期，1550003，27 页。[BKKO14] E. Breuillard、M. Kalantar、M. Kennedy、N. Ozawa：*C^*-simplicity and the unique trace property for discrete groups* **126** 2017 35 71，《高等科学研究所数学出版物》´Etudes Sci.（），–[06] *Rips construction and Kazhdan property (T)* BO I. Belegradek、D. Osin：，Groups Geom. Dyn. 2（2008），1–12。[BO08] N. Brown 和 N. Ozawa：*C^*-algebras and finite-dimensional approximations*，数学研究生教材，第 88 卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008。[BV12] M. Berbec、S. Vaes：*W^*-superrigidity for group von Neumann algebras of left-right wreath products*，《伦敦数学会会刊》（第 3 辑）108（2014），第 5 期，1116-1152。[CD-AD20] I. Chifan、A. Diaz-Arias、D. Drimbe：*New examples of W^* and C^*-superrigid groups*，《数学进展》412（2023），论文编号 108797，57 页。[CD-AD21] I. Chifan、A. Diaz-Arias、D. Drimbe：*W^* and C^*-superrigidity results for coinduced groups*，《泛函分析杂志》284（2023），第 1 期，论文编号 109730，48 页。[CDD23] I. Chifan、M. Davis、D. Drimbe：*Rigidity for von Neumann algebras of graph product groups II. Superrigidity results* **24** 2025 1, 117 156，《朱西厄数学研究所杂志》（），第 - 期。[CdSS15] I. Chifan、R. de Santiago、T. Sinclair：*W^*-rigidity for the von Neumann algebras of products of hyperbolic groups* **26** 2016 1, 136 159，《几何与泛函分析》（），第 - 期。[CdSS17] I. Chifan、R. de Santiago、W. Sucpikarnon：*Tensor product decompositions of II_1 factors arising from extensions of amalgamated free product groups*，《数学物理通讯》364（2018），1163-1194。[CFQOT24] Ionut *W^*-superrigidity for property (T) groups with infinite center* 2503 12742 Chifan、Adriana Fernandez Quero、D. Osin、H. Tan：，预印本。arXiv: 。[CI17] I. Chifan、A. Ioana：*Amalgamated Free Product Rigidity for Group von Neumann Algebras*，《数学进展》329（2018），[CIOS21] I. Chifan、A. Ioana、D. Osin、B. Sun：*W^*-superrigidity for wreath-like products of groups and their von Neumann algebras I.* **198** 2023 3, 1261 1303，《数学年刊》（）（），第 – 期。[CKP14] I. Chifan、Y. Kida、S. Pant：*Primeness results for von Neumann algebras associated with surface braid groups* **2016**, 16, 4807 4848，《国际数学研究通知》IMRN 第 – 期。[CKRTW] J. Curda、S. Knuby、S. Raum、H. Thiel、S. White：*On C^*-superrigidity of virtually abelian groups*，准备中。[CLMW25] F. Chan、S. J. Lippert、I. Moutzouris、E. Weld：*Nuclear dimension and rigidity for virtually abelian groups* 2504 20850，预印本 arXiv: 。[Co76] A. Connes：*Classification of injective factors*，《数学年刊》104（1976），73-115。

[CS11] I. Chifan、T. Sinclair： *On the structural theory of II_1 factors of negatively curved groups*，《高等师范学校科学年刊》（第 4 辑）46（2013），第 1 期，1-33（2013）。[CU18] I. Chifan、B. Udrea：
Some rigidity results for II_1 factors arising from wreath products of property (T) groups，《泛函分析杂志》278（2020），108419。[DD25] C. Ding、D. Drimbe： *Relative solidity for biexact groups in measure equivalence*，预印本 arXiv:2503.24167（2025）。[DHI16] D. Drimbe、D. Hoff、A. Ioana： *Prime II_1 factors arising from irreducible lattices in product of rank one simple Lie groups* **757** 2019 197 246 ，《纯粹与应用数学杂志》（），–。[Dr19a] D. Drimbe：
Prime II_1 factors arising from actions of product groups **278** 2020 5, ，《泛函分析杂志》108366, 23（），第 pp. 期。[Dr19b] D. Drimbe： *Orbit equivalence rigidity for product actions*，《数学物理通讯》379（2020），41-59。[Dr20] D. Drimbe： *Product rigidity in von Neumann and C*-algebras via s-malleable deformations*，《数学物理通讯》388, 329-349（2021）。[DV24] M. Donvil、S. Vaes： *W*-superrigidity for cocycle twisted group von Neumann algebras*，《数学发明》240（2025），193-260。[DV25] M. Donvil、S. Vaes： *W*-superrigidity for groups with infinite center*，《数学进展》480（2025），文章编号 110527。[ER18] C. Eckhardt、S. Raum： *C*-superrigidity of 2-step nilpotent groups*，《数学进展》338（2018），175–195。[FGS10] J. Fang、S. Gao、R. Smith： *The Relative Weak Asymptotic Homomorphism Property for Inclusions of Finite von Neumann Algebras* 22 2011 991 1011 ，《国际数学杂志》（）-。[HPV11] C. Houdayer、S. Popa、S. Vaes： *A class of groups for which every action is W*-superrigid*，《群与几何动力学》7（2013），577-590。[Io11] A. Ioana： *Uniqueness of the group measure space decomposition for Popa's $\mathcal{HT}$ factors*，《几何与泛函分析》22（2012），第 3 期，699-732。[Io12a] A. Ioana： *Cartan subalgebras of amalgamated free product II_1 factors*，附录作者为 Adrian Ioana 和 Stefaan Vaes，《高等师范学校科学年刊》（第 4 辑）48（2015），第 1 期，71-130。[Io12b] A. Ioana： *Classification and rigidity for von Neumann algebras*，《欧洲数学大会论文集》，EMS（2013），601-625。[Io17] A. Ioana： *Rigidity for von Neumann algebras*，《2018 年里约热内卢国际数学家大会论文集》第 III 卷：特邀报告，1639-1672，World Sci. Publ.，哈肯萨克，新泽西州，2018。[IPP05] A. Ioana、J. Peterson、S. Popa： *Amalgamated free products of weakly rigid factors and calculation of their symmetry groups* **200** 2008 85 153 ，《数学学报》（），-。[IPV10] A. Ioana、S. Popa、S. Vaes： *A class of superrigid group von Neumann algebras*，《数学年刊》（第 2 辑）178（2013），第 1 期，231-286。[Is19] Y. Isono：
On fundamental groups of tensor product II_1 factors 19 2020 4, 。《朱西厄数学研究所杂志》（），第 - 期。[KV15] A. Krogager、S. Vaes： *A class of II_1 factors with exactly two crossed product decompositions*，《纯粹与应用数学杂志》（第 9 辑）108（2017），第 1 期，88–110。
[43] **44** 1943 716 808 MvN F. J. Murray、J. von
[18] *Free nilpotent groups are C*-superrigid* **148** 2020
Neumann：算子环，IV。《数学年刊》（），- Om T. Omland，，《美国数学会会刊》（），第 1 期，283–287。[OP07] N. Ozawa、S. Popa： *On a class of II_1 factors with at most one Cartan subalgebra*，《数学年刊》（第 2 辑）172（2010），第 1 期，713-749。[Oz03] N. Ozawa： *Solid von Neumann algebras*，《数学学报》192（2004），第 1 期，111-117。[Po99] S. Popa，
Some properties of the symmetric enveloping algebra of a factor with applications to amenability ，，《文献数学》（），-。*and property (T)* **4** 1999 665 744
[Po03] S. Popa： *Strong rigidity of II_1 factors arising from malleable actions of w-rigid groups. I.*，《数学发明》165（2006），第 2 期，369-408。[Po07] S. Popa： *Deformation and rigidity for group actions and von Neumann algebras*，载于《国际数学家大会论文集》（马德里，2006），第 I 卷，欧洲数学会出版社，2007，445-477。[PP86] M. Pimsner、S. Popa：
Entropy and index for subfactors，《高等师范学校科学年刊》19（1986），57–106。[PV09] S. Popa、S. Vaes：
Group measure space decomposition of II_1 factors and W-superrigidity*，《数学发明》182（2010），第 2 期，371-417。[PV12] S. Popa、S. Vaes： *Unique Cartan decomposition for II_1 factors arising from arbitrary actions of hyperbolic groups* **694** 2014 215 239 ，《纯粹与应用数学杂志》（），-。[Sc74] S. Scheinberg： *Homeomorphism and isomorphism of abelian groups*，《加拿大数学杂志》26(6):1515–1519，1974。[Va08] S. Vaes： *Explicit computations of all finite index bimodules for a family of II_1 factors*，《高等师范学校科学年刊》 ´Ec. Norm. Sup´er.（第 4 辑）41（2008），第 5 期，743-788。

[Va10a] S. Vaes： *Rigidity for von Neumann algebras and their invariants*，国际数学家大会论文集（印度海得拉巴，2010），第三卷，Hindustan Book Agency（2010），1624-1650。[Va10b] S. Vaes：*One-cohomology and the uniqueness of the group measure space decomposition of a II_1 factor*，《数学年刊》**355**（2013），第2期，661-696。[Va13] S. Vaes： *Normalizers inside amalgamated free product von Neumann algebras*，《数理解析研究所出版物》**50**（2014），695–721。