arXiv:2602.05620v1 [math.LO] 5 Feb 2026

关于双重集合与函数的计算性质

Dag Normann[1] 和 Sam Sanders[2]

[1] 数学系，奥斯陆大学，挪威 dnormann@math.uio.no[2] 哲学系 II，波鸿鲁尔大学，德国 sasander@me.com

摘要。 欧拉、阿贝尔、狄利克雷、傅里叶和波尔查诺的著作中，早已出现不连续函数的例子。Baire 的一项开创性发现是，许多不连续函数表现得良好，因为它们是连续函数序列的逐点极限；这类函数如今统称为“第一类贝尔函数”。我们将研究一类严格介于半连续函数与第一类贝尔函数之间的函数，称为二义函数。具体而言，我们将使用克莱尼 S1-S9 方案，考察二义函数与集合这一类的计算性质，记作 $\mathbf{\Delta}$。我们证明了若干标准运算（上确界、第一类贝尔函数表示，.....）在 $\mathbf{\Delta}$ 上的计算等价性，其中包括结构泛函$\Omega_{\mathbf{\Delta}}$，它能判定给定的双重集合是否非空。我们证明，选择子可相对于 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$ 和克莱尼量词 $\exists^2$计算。

关键词： 克莱尼 S1-S9 · 双重集合与函数 · 结构泛函 · 实分析

1 引言

1.1 目标与动机

首先，可计算性理论 是理论计算机科学与数理逻辑交汇处的一门学科，其核心问题是:

给定两个对象 X 和 Y，原则上能否从 Y 计算出 X？

图灵著名的“机器”模型是标准参照（[36]），适用于 X，Y为实数的情况。我们对三阶（及更高阶）对象的计算研究，基于克莱尼 S1-S9 的一种等价表述（[24, 26]），其中使用了源自普拉特克（[29]）的不动点算子。第1.2.1节对此作了介绍。

其次，作者已经研究过有界变差函数（[24]）和半连续函数（[26]）的计算性质。现在，第一类贝尔函数构成了后者一个广为人知的超类，并具有令人愉悦的概念性质。事实上，正如贝尔本人（[2, 3]）早已观察到的，第一类贝尔函数类涵盖了不连续函数中的很大一部分。此外，如果一个函数是连续函数的逐点极限，那么它就是第一类贝尔函数；这是一种对本科生而言也不陌生的基本描述。受这些观察启发，我们

研究双义函数，这是一类严格介于半连续函数与第一类贝尔函数之间的函数。前者的定义（见定义5）可视为第一类贝尔函数定义与半连续性定义的“混合”。

第三，上述对有界变差函数和半连续函数的计算研究围绕所谓的结构泛函展开。后者以给定类 Γ 中的一个集合 X 为输入，并判断它是否为空，如下列规范所示：

$$\Omega_\Gamma(X)=\begin{cases}1 & \text{if } X\in\Gamma\wedge X\neq\emptyset\\ 0 & \text{if } X\in\Gamma\wedge X=\emptyset\\ \text{undefined} & \text{otherwise}\end{cases}. \qquad (\Omega_\Gamma)$$

现在，研究有界变差函数（分别为半连续函数）的核心是 Ω_b（分别为 Ω_C），它是 Ω_Γ，其中 Γ 是实数的有限集合（分别为闭集）的类（[24, 26]）。例如，根据乌雷松引理计算连续函数，其难度恰好与[3] 一样 Ω_C；而根据乔丹分解定理计算单调函数，其难度恰好与 Ω_b一样；我们再次说明，这里的“计算”是通过克莱尼 S1-S9来解释的。

最后，双重集合类 $\mathbf{\Delta}=\mathbf{F}_\sigma\cap\mathbf{G}_\delta$（见定义2）推广了开集和闭集。若一个函数的水平集都是双重集合，则称该函数为双义的（见定义5）。我们将确立双重集合及函数的以下计算性质。

– 我们得到关于 $\mathbf{\Delta}$ 的初步结果，它们是文献中定理的有效版本（第2.1节）– 我们为结构泛函 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$得到一个簇定理，即关于二义函数的若干计算等价关系（第2.2节）。– 我们证明 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$ 能为 $\mathbf{\Delta}$-集合计算一个选择子，也就是说，后者的选择公理是有效的（第3节）。

所有必要的预备知识均可见第1.2节。补充说明一下，双重集合这一概念可追溯至约1916年的德拉瓦莱-普桑（[37]）。也就是说，双重集合有着一定的历史。

1.2 预备知识和定义

我们将在第1.2.1节简要介绍克莱尼的高阶可计算性理论。我们还将介绍一些重要公理（第1.2.2节）和定义（第1.2.3节）。完整的介绍可参见例如 [22,§2] 或 [15]。

由于克莱尼可计算性理论大量借鉴了类型论，我们采用后者的常见记号；例如，自然数是类型 0 对象，记作 n^0 或 $n\in\mathbf{N}$。同样，贝尔空间中的元素是类型 1 对象，记作 $f\in\mathbf{N}^{\mathbb{N}}$ 或 f^1。从贝尔空间 $\mathbf{N}^{\mathbb{N}}$ 到 N 的映射记作$Y\colon\mathbf{N}^{\mathbb{N}}\to\mathbf{N}$ 或 Y^2。例如， [15, 24]中可以找到这类记号的概述。

[3] 我们始终假设已给定第1.2节中的克莱尼量词 $\exists^2$。

1.2.1 克莱尼可计算性理论 我们的主要结果属于可计算性理论，下面将对“可计算性”作出精确定义。

（I）除非另有明确说明，我们采用ZFC，即带选择公理的策梅洛-弗兰克尔集合论，作为所有结果的正式元理论。（II）我们采用克莱尼关于高阶计算的概念，即由其九条条款S1-S9所给出的概念（见 [15, 第 5]章或 [11]），作为我们对“可计算”的正式概念。我们使用来自 [24, 26]的基于不动点算子的表述。

我们参阅 [15, 24]，以全面概述高阶可计算性理论。我们确实会提及基于 [15, §5.4]中如下定义的“正规”泛函与“非正规”泛函之间的区分。我们仅将 $\exists^n$ 用于 $n = 2$,3，如第1.2.2节所定义。

定义1 对于 $n \geq 2$，类型为 n 的泛函若能依照*S1-S9*计算克莱尼量词 $\exists^n$，则称为正规，否则称为非正规。

这是一个历史事实：基于克莱尼 S1-S9 的高阶可计算性理论，主要关注正规泛函； [15, §5.4] 中可以找到这一观察，而这可以用当时有趣的非正规泛函相对匮乏来解释，例如最初由 Kreisel 提出的扇函数（历史详情见 [27] ）以及由 Gandy 提出的超跳跃。作者们已经找到了有趣的非正规泛函，即那些能够计算以下声称存在的对象的泛函：

– 海涅-博雷尔、维塔利和林德勒夫提出的覆盖定理（[19]），– 贝尔纲定理（[18, 32]），– 局部-整体原理，例如平凯莱定理（[19]），–（可数）选择公理的弱片段（ [20] ），– 乔丹分解定理及相关结果（[23, 24]），– R 的不可数性（[21, 22]）。

本文继续研究源自第一类贝尔函数及其子类基本性质的非正规泛函。

最后，第一个非可计算的非正规泛函——Kreisel（又称 Tait）的扇函数（见 [27]）相当温和：它可在 $\exists^2$ 中计算。相比之下，基于前述列表的泛函可在 $\exists^3$ 中计算，但不能在任何 S_k^2 中计算；后者可以判定 Π_k^1 公式（见第 1.2.2 节）。

1.2.2 一些概括泛函 在图灵风格的可计算性理论中，计算难度是根据预言机集合在著名概括层级中的位置来衡量的。因此，本节将介绍一些与高阶概括 相关的泛函。这里我们主要讨论传统的 概括，即公式类（如 Π_k^1 和 Σ_k^1）中只允许出现取值于 N 和 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 的参数。

首先，克莱尼量词 $\exists^2 : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \{0, 1\}$ 是满足以下条件的泛函：

$$(\forall f^1)\big[(\exists n^0)(f(n) = 0) \leftrightarrow \exists^2(f) = 0\big]. \tag{$\exists^2$}$$

显然，$\exists^2$ 在通常的 ε-δ 意义下于 $f = 11\ldots$ 处不连续。事实上，给定 $\mathsf{N}^{\mathbb{N}}$ 或实数集 R 上的一个不连续函数，*Grilliot* 技巧 可通过哥德尔 T 中一个相当底层的项从前者计算出 $\exists^2$（参见 [12, §3]）。此外，$\exists^2$可计算出 ***Feferman*** 的 μ^2，其对任意 f^1 的定义如下:

$$\mu(f) := \begin{cases} n & \text{if } n^0 \text{ is the least natural number such that } f(n) = 0 \\ 0 & \text{if there are no } m^0 \text{ such that } f(m) = 0 \end{cases}. \qquad (\mu^2)$$

希尔伯特和伯奈斯仅使用 μ^2（以此名称）就在 [10, 附录 IV]中形式化了数学的相当大一部分内容。
其次，苏斯林泛函 $\mathsf{S}^2 : \mathsf{N}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}$ N（见 [1, 12]）是满足以下条件的唯一泛函:

$$(\exists g^1)(\forall n^0)(f(\overline{g}n) = 0) \leftrightarrow \mathsf{S}(f) = 0. \qquad (\mathsf{S}^2)$$

根据定义，苏斯林泛函 S^2 可以判定左边 (S^2) 中的 Σ^1_1-公式是真是假。类似地，我们定义泛函 S^2_k，它可以判定以克莱尼标准形给出的 Σ^1_k-公式是真是假（例如见 [35, IV.1.4]）。

第三，克莱尼量词 $\exists^3 : (\mathsf{N}^{\mathbb{N}} \to \mathsf{N}) \to \{0,1\}$ 是满足以下条件的泛函:

$$(\forall Y^2)\big[(\exists f^1)(Y(f) = 0) \leftrightarrow \exists^3(Y) = 0\big]. \qquad (\exists^3)$$

希尔伯特和伯奈斯在例如 [10, 附录 IV，第 479]页中引入了能够直接计算 $\exists^3$的泛函。

1.2.3 一些定义 我们先介绍下文所需的一些定义，这些定义大多源自主流数学。需要指出的是，实数集的子集由其特征函数给出（定义 2）；特征函数在测度论和概率论中很常见。

首先，我们采用（开）集合的常规定义，其中 $B(x,\ r)$ 表示半径为 $r > 0$ 、中心位于 $x \in$ 的开球。请注意，“RM”代表“反向数学”，因为相关的表示在反向数学中会用到。

定义 2（集合）

– 实数集 R 的子集 A 由其特征函数 $F_A : R \to \{0,1\}$给出，即对于所有 $x \in R$，我们记 $x \in A$ 为 $F_A(x) = 1$。– 如果对于所有 $x \in R$，$F_A(x) \leq F_B(x)$，我们就写作「$A \subset B$」。– 子集 $O \subset R$ 是开集，当 $x \in O$ 蕴含存在 $k \in N$，使得$B(x, \frac{1}{2^k}) \subset O$。– 子集 $F \subset R$ 是闭集，当其补集 $R \setminus F$ 是开集时。– 任意 $D \subset R$ 若等于闭集序列 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的 $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$，则称为 F_σ。– 任意 $D \subset R$ 若等于开集序列 $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的 $\cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$，则称为 G_δ。– 我们将类 $\mathbf{\Delta}$ 定义为 $F_\sigma \cap G_\delta$。集合 $X \in \mathbf{\Delta}$ 称为双义的（[28,30]）、二价的（[6]）或含混的（[7,13]）。

– 子集 $O \subset$ 实数集 是 RM开集，如果存在实数序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $O = \cup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n)$。– 子集 $C \subset$ 实数集 是 RM 闭，如果其补集 实数集 $\setminus C$ 是 *RM* 开集。– 集合 $X \in \mathbf{\Delta}$ 的 *RM* 编码或表示，是由开集和闭集的 *RM* 编码组成的序列 $(O_n, F_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $X = \cap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$。

我们指出，$\mathbf{\Delta}$-集合的 RM 编码类是完备的 Π^1_1，正如第一类贝尔函数的规范 RM 编码类一样。

我们对开集的定义不假定任何计算数据/额外表示。正如 [23, 24, 33], 中所确立的，在基础实分析（傅里叶级数）中很容易遇到没有额外表示的闭集。

其次，以下集合在实分析的证明中通常至关重要。

定义3 集合 C_f 和 D_f 分别汇集了 f： 实数集 $\to$ 实数集连续和不连续的点。

关于 C_f， D_f的一个问题是，“$x \in C_f$”涉及对实数集上的量词。一般而言，判断给定的实数集 $\to$ 实数集函数在给定实数处是否连续，其难度与第1.2.2节中的 $\exists^3$ 一样。基于这些原因，集合 C_f， D_f通常确实存在，但例如在 $\exists^2$中不可计算。对于准连续函数和半连续函数，这些集合可在 $\exists^2$ 中通过 [24, §2] 或 [34,定理2.4]定义。

第三，我们将研究以下概念，其中许多早已为人熟知，可追溯至 Baire、Darboux、Hankel 和 Volterra（[2, 3, 5, 8, 9, 38]）。

定义4 对于 f： 实数集 $\to$ 实数集，有以下定义：

– f 在 $x_0 \in$实数集上是上半连续的，当且仅当对任意 $k \in \mathbf{N}$，存在 $N \in \mathbf{N}$，使得 $(\forall y \in B(x_0, \frac{1}{2^N}))(f(y) \prec f(x_0) + \frac{1}{2^k})$，– f 在 $x_0 \in$实数集上是下半连续的，当且仅当对任意 $k \in \mathbf{N}$，存在 $N \in \mathbf{N}$，使得 $(\forall y \in B(x_0, \frac{1}{2^N}))(f(y) > f(x_0) - \frac{1}{2^k})$，– f 是有界变差的，如果定义域中的每个 x_0 处，其“左”极限和“右”极限 $f(x_0-) = lim_{x\to x_0-} f(x)$ 和 $f(x_0+) = lim_{x\to x_0+} f(x)$ 都存在。– f 是零阶贝尔函数，如果它是连续函数。– f是 *Baire* $n+1$，如果它是 *Baire* n 函数序列的逐点极限。

关于记号，前两项通常分别缩写为“上半连续”和“下半连续”。此外，如果一个函数在实数集 R（或其预定定义域）中的所有实数处都具有某种弱连续性，我们就说该函数具有该性质。我们通常研究 R $\to$R-函数，但请注意，“上半连续”和“下半连续”对于 f： $[0, 1] \to$ R 也有明确定义，其中 R $=$R $\cup \{+\infty, -\infty\}$ 按规定涉及两个特殊符号，它们满足 $(\forall x \in$R$)(-\infty <_{\mathbb{R}} x <_{\mathbb{R}} +\infty)$。

接下来，我们列出上半连续函数和第一类贝尔函数的以下等价定义，这些定义为二值函数的定义提供了依据。

定义5 对于 f： 实数集 $\to$ 实数集，我们有以下定义：

– f： $R \to R$ 是上半连续的，当且仅当对任意 $a \in R$， $f(x) \geq a\}$ 是闭集；– f： $R \to R$ 是第一类贝尔函数，当且仅当对任意开集 $V \subset R$（[16, 31]）， $f^{-1}(V)$ 是 F_σ；– f： $R \to R$ 是双义的，当且仅当对任意 $a \in R$（[28, 30]）， $f(x) < a\}$ 且 $f(x) > a\}$ 都是 $\mathbf{\Delta}$。

2 簇定理

我们研究双义集合的结构泛函，称为 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$，并建立一个簇定理（第 2.2 节）。所需的预备知识见第 2.1 节。

2.1 预备知识

我们得到了一些第二节 2.2 所需的预备结果，这些结果通常是文献中已知结果的有效版本。

首先，下面是 [31, 引理 11.6] 的一个部分有效版本。

引理 6 设给定 $X \in \mathbf{\Delta}$。那么，$\exists^2$ 根据 X 的 *RM* 编码计算出 $\mathbb{1}_X$ 的第一类贝尔表示。

证明。首先，我们回顾一下：当 C 为 RM 闭时，（连续）距离函数 $d(x, C) = \inf_{y\in C} d(x, y)$ 存在；利用 $\exists^2$，通常的区间二分技术仍然适用。现在，假设 $X = \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n = \cup_{m\in\mathbb{N}} F_m$，其中 G_n（分别为 F_m）是通过 RM 编码给出的开集（分别为闭集），且 $G_{n+1} \subseteq G_n$ 和 $F_m \subseteq F_{m+1}$。利用 $\exists^2$，根据这些编码定义连续函数 $f_n(x) := d(x,\mathbb{R}\setminus G_n)\, d(x,F_n)+d(x,\mathbb{R}\setminus G_n)$。现在注意到，对所有 $x \in\mathbb{R}$，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathbb{1}_X(x)$，这正是所需结论。□

其次，下面的引理是 [31, 引理 11.7] 的一个有效版本。

引理 7 设 $(F_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ 是由连续函数构成的双重序列，令 f_n 为 $\lim_{m\to\infty} F_{n,m}$，并假设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 一致收敛到 f。那么 $\exists^2$ 可通过该双重序列给出 f 的第一类贝尔表示。

证明。由 [31, 引理 11.7] 可知，f 是第一类贝尔函数。f 的第一类贝尔表示定义如下：由于 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 一致收敛到 f，因此存在一个子序列 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$，满足

$$(\forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R})(|f(x) - g_n(x)| < \tfrac{1}{2^n}).$$

通过将 $\exists^2$ 限制在 $\mathbb{Q}$ 上并使用常见的“$\varepsilon/3$-技巧”，即可计算这个子序列。类似地，令 $(G_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ 为 $(F_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ 的相应子序列。定义 $h_n = g_{n+1} - g_n$，并注意到，对于所有 $x \in$ 实数集 和 $n \in$ 自然数集，均有 $f = g_1 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n$ 和 $|h_n(x)| < \frac{1}{2^n}$。显然，对于 $m \to \infty$，$H_{n,m} := G_{n+1,m} - G_{n,m}$ 收敛到 h_n。如有必要，可修改 $H_{n,m}$，以确保与 h_n 类似，对于所有 $m, n \in$ 自然数集和 $x \in$ 实数集，均有 $H_{n,m}(x) \leq \frac{1}{2^n}$。于是，根据魏尔斯特拉斯 M 判别法，$\lambda m.\lambda x.\sum_{n=1}^{\infty} H_{n,m}(x)$ 是连续函数序列。此外，由于 $f = g_1 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n$，该序列收敛到 $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$，正如所需。□

第三，我们得到以下版本的贝尔刻画定理。

引理8 设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个连续函数序列，其逐点极限为 f，且 C 是一个闭集。则 $\exists^2$ 根据该序列以及 C 的 *RM* 编码，计算出 $x \in C$ 的连续点 $f_{\restriction C}$。

证明。 给定 f的第一类贝尔表示， $\exists^2$将 $\sup_{x\in[p,q]} f(x)$ 计算为 $p, q \in \mathbb{Q}$ ([25, §2]) 上的一个序列。因此，很容易得到振荡函数 $\mathrm{osc}_f(x)$，其定义如下：

$$\mathrm{osc}_f([a,b]) := \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x) \text{ and } \mathrm{osc}_f(x) := \lim_{k\to\infty} \mathrm{osc}_f(B(x, \tfrac{1}{2^k})).$$

我们现在有 $D_f = \cup_{n\in\mathbb{N}} D_n$，其中 $D_n :=$ {$x \in$ 实数集：$\mathrm{osc}_f(x) \geq \frac{1}{2^n}$} 是闭集且无处稠密。贝尔纲定理保证 $C_f = \cap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$，其中 C_n 是 D_n的补集。此外，给定 f的第一类贝尔表示， $\exists^2$ 可计算出贝尔纲定理所断言存在的那个点（[18, §6]）。同样的做法相对于任意 RM 闭 C也成立，至此证明完毕。□

我们认为， [31] 中的许多结果同样可以有效化，从而得到关于 $\Omega_{\mathbf{F}_\sigma}$的有趣结果。

2.2 若干等价

我们指出双重集合与双义函数上的若干运算，其难度恰好与 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$相同。为使这一点精确化，我们引入 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$-簇（定义 9）。

首先，与 [24, 26], 中一样，我们现在引入以下等价类。

定义 9 我们称泛函 Φ^3 属于 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$-簇，当且仅当

– 组合 $\Phi + \exists^2$ 计算出 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$，并且– 组合 $\Omega_{\mathbf{\Delta}} + \exists^2$ 计算出 Φ。

我们称泛函 Φ 和 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$ 在给定 $\exists^2$的情况下计算等价。

其次，为避免复杂的定义和定义域限制，我们有时会滥用记号，并作出如下形式的陈述

任何满足给定规范(A) 的泛函 Ψ 都属于 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$-簇。

中心表述的意思是，对于**任意**满足给定规范 (A) 的泛函 Ψ_0 ，组合 $\Psi_0 + \exists^2$ 计算 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$，而 $\Omega_{\mathbf{\Delta}} + \exists^2$ 计算某个**满足**规范 (A) 的泛函 Ψ_1 。

第三，我们现在有关于 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$ 的以下“簇定理”。我们注意到，第三项推广了乌雷松引理，而第五项基于二义函数的原像刻画。

定理 10 以下内容属于 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$-簇。

– 任意泛函 Φ_0 ，使得对于 $X \in \mathbf{\Delta}$， $\Phi_0(X)$ 是 $X \subset [0,1]$ 的 *RM* 编码。– 任意泛函 Φ_1 ，使得对于 $X \in \mathbf{\Delta}$，序列 $\Phi_1(X) = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{1}_X$ 的第一类贝尔表示（[31,引理 *11*.6]）。–（乌雷松）任意泛函 Φ_{1b}，使得对于不相交的 X、$Y \in \mathbf{\Delta}$， $\Phi_{1b}(X, Y)$ 是第一类贝尔函数加表示，它在 X 上为 *0*，在 Y 上为 *1*（[30]）。– 任意泛函 Φ_2 ，使得对于双义的且有界的 $f : [0,1] \to$ 实数集，实数 $\Phi_2(f, p, q)$ 等于任意 p、$q \in \mathbb{Q}$ 的 $\sup_{x\in[p,q]} f(x)$。

– 任意泛函 Φ_{2b}，使得对于双义的 f：实数集 $\to$实数集以及开的 $V \in$ 实数集，$\Phi_{2b}(f,V)$ 等于双重集合 $f^{-1}(V)$ 的 *RM* 编码。– 任意泛函 Φ_3，使得对于双义的且有界的 f：$[0,1] \to$ 实数集，序列 $\Phi_3(f)$ 等于 f 的第一类贝尔表示。– 任意泛函 Φ_4，使得对于 $X \in \mathbf{\Delta}$，实数 $\Phi_4(X)$ 等于 $\sup X$。– 任意泛函 Φ_5，使得对于 $X \in \mathbf{\Delta}$ 以及连续的 f：$[0,1] \to$ 实数集，实数 $\Phi_5(X,f)$ 等于 $\sup_{x\in X} f(x)$。

证明。首先，定理 21 证明了 $\Omega_{\mathbf{\Delta}} + \exists^2$ 可计算 Φ_0。

其次，假设给定一个泛函 Φ_0，并固定 $X \in \mathbf{\Delta}$。利用前者可写出 $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$，其中 F_n 是开集，G_n 是闭集，且它们都由 RM 编码给出。根据引理 6，可以计算出 $\mathbb{1}_X$ 的一个贝尔表示，因此泛函 Φ_1 可由 $\Phi_0 + \exists^2$计算得出。现在，假设给定一个第一类贝尔表示，$\exists^2$ 可通过[25,定理 2.6]计算第一类贝尔函数的上确界。因此可见，Φ_1 能够计算 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$，即 (∃$x \in$ 实数集)($x \in X$) $\leftrightarrow$ (∃$n \in$ N)[上确界$_{X\in[-n,n]} \mathbb{1}_X = 1$]。显然，对于 $X \in \mathbf{\Delta}$，X^c 与前者不相交，而且也是双义的。因此，Φ_{1b} 能够计算 Φ_1，反之亦然，证毕。

第三，要从 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$ 计算 Φ_2，令 $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 Q 的一个枚举，固定双义的 f：实数集 $\to$R，并使用 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$ 得到实数序列 $(a_{n,m,k})_{n,m,k\in\mathbb{N}}$ 和 $(b_{n,m,k})_{n,m,k\in\mathbb{N}}$，使得 $\{x \in [0,1] : f(x) < q_k\} = \cap_{n\in\mathbb{N}} G_{n,k}$，且 $G_{n,k} = \cup_{m\in\mathbb{N}} (a_{n,m,k}, b_{n,m,k})$。显然，我们有

$$\begin{aligned} &(\forall x \in [0,1])(f(x) < q_k) \\ &\leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})([0,1] \subset G_{n,k}) \\ &\leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\exists m_0 \in \mathbb{N})([0,1] \subset \cup_{m\le m_0}(a_{n,m,k}, b_{n,m,k})), \end{aligned} \tag{1}$$

其中最后一步由（可数）海涅–博雷尔紧致性得出。最终公式 (1) 是（等价于）算术命题，也就是说，我们现在可以用通常的区间二分法（使用 $\exists^2$）求出 f 的上确界。要从 Φ_2 计算 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$，很容易验证，对于 $X \in \mathbf{\Delta}$，$\mathbb{1}_X$ 是双义的（通过简单的分类讨论）。后一个泛函中的上确界随即给出前一个泛函。对于 Φ_{2b}，后者显然可由 Φ_0 计算，而关于 $f^-((q, +\infty))$ 的 RM 代码很容易通过类似于 (1) 的公式求得 $\sup_{x\in[0,1]} f(x)$；因此 Φ_2 如所需得出。

第四，为了根据 Φ_0 计算 Φ_3，我们按如下步骤进行。设 f：$[0,1] \to$ 实数集为双义的，其上界为 $m-1 \in$ N，下界为 0，并考虑以下集合$i < m$

$$A^m_{2i} := \{x \in [0,1] : i/m < f(x) < (i+1)/m\}, A^m_{2i+1} := \{x \in [0,1] : f(x) = i/m\}.$$

每个 A^m_j都是双义的，因为 f 也是如此，而且这些集合两两不相交。现在定义 g_m：实数集 $\to [0,1]$ 如下：$g_m(x) := \sum_{i=0}^m \mathbb{1}_{A^m_i}(x)\ \frac{i}{m}$。根据已知结果（[31, 引理11.6-7]），每个函数 g_m 都是第一类贝尔函数，而其一致极限也是第一类贝尔函数，即原来的 f。因此，我们可以使用引理 6 和 7，得到 f的第一类贝尔表示，如所要求的。为计算 Φ_2 的 Φ_3形式，我们

回想一下， $\exists^2$ 根据 [25, 定理 2.6]，利用给定的第一类贝尔表示来计算第一类贝尔函数的上确界。

要从 Φ_0 计算 Φ_4，固定 $X \in \mathbf{\Delta}$，并令 $\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n = X$，其中每个 C_n 都是一个闭集的 RM 编码。然后 $\exists^2$ 计算 $\sup C_n$，并令 $\Phi_4(X) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup C_n$。要从 Φ_4 计算 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$，考虑 $X \in \mathbf{\Delta}$ 并检查 $0 \in X$ 是否成立；若成立，则 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}(X) = 1$。若不成立，则考虑双重集合 $\{0\} \cup X$。当且仅当后一个集合的上确界非零时，X 非空。对于 Φ_5，当 f 是恒等函数时，后者计算 Φ_4。要计算前者，按计算 Φ_4 的方法进行：固定 $X \in \mathbf{\Delta}$，并令 $\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n = X$，其中每个 C_n 都是一个闭集的 RM 编码。然后 $\exists^2$ 计算 $\sup_{x\in C_n} f(x)$，并令 $\Phi_5(X, f) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in C_n} f(x)$。
□

总之，对二义函数和集合进行的各种基本运算在计算上是等价的。我们相信，$\Omega_{\mathbf{\Delta}}$簇中还有许多其他成员。

2.3 规范与第一类贝尔函数

我们介绍第一类贝尔函数的等价“规范”定义（定义 11），并将其与我们的结构泛函联系起来（定理14）。

首先，我们考虑 [14] 中提出的第一类贝尔函数的以下等价定义。我们将函数 δ 称为第一类贝尔函数的 ε- 规范 。

定义 11 函数 f： 实数集 $\to$ 实数集 是第一类贝尔函数，当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$，存在 δ： 实数集 $\to$实数集$^+$，使得对所有 $x, y \in$实数集，若 $|x - y| < \min(\delta(x)\ \delta(y))$，则 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$。

其次，从计算的角度来看，得到规范很容易，如下所示。

定理 12 设$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一列以 f为逐点极限的连续函数序列。则 $\exists^2$ 可根据该序列计算出 f 的规范表示。

证明。 [14,定理 1]的部分证明是能行的，如下所述。设$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$为一列以 f为逐点极限的连续函数序列。则 $\exists^2$ 可直接计算出连续模 $\delta_n(x, \varepsilon)$，即我们有

$$(\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N})(\forall x, y \in \mathbb{R})(|x - y| < \delta_n(x, \varepsilon) \to |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon).$$

类似地，设 $\eta(x, \varepsilon)$为 f_n 收敛到 f的模，即

$$(\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R})(\forall n \geq \eta(x, \varepsilon))(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

定义 $\delta_\varepsilon(x) := \max_{1\leq\eta(x,\varepsilon)} \delta_n(x, \varepsilon)$，并验证它是 f的一个 ε-规范。 □

第三，我们在下文的定理14中将规范定义与结构泛函联系起来。为此，我们需要 [17]中的如下定义，其中作者开创了对库辛引理（[4]）的计算研究。

定义13 任意 Θ :(实数集 $\to$ 实数集) $\to$ 实数集，如果对于任意 $\Psi[0, 1] \to$实数集$^+$, $\Theta(\Psi) = (x_0, \ldots, x_k)$ 均满足 $[0, 1] \subset \cup_{i\leq k} B(x_i, \Psi(x_i))$，则称其为 库辛引理的实现器 。

设 $\Phi_X : ((\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \times \mathbb{N}) \to (\mathbb{R} \to \mathbb{R})$，满足 $\Phi_\Gamma(f,k)$ 是 f 所属类[4] Γ 中的一个 $\frac{1}{2^k}$-规范。下面的定理表明，计算 ε-规范等价于计算结构泛函，差别仅在于库辛引理的一个实现器。

定理14 设 Θ 是 *Cousin* 引理的任意实现器。

- 组合 $\Phi_{\mathsf{reg}} + \Theta + \exists^2$ 计算 Ω_b。
- 组合 $\Phi_{\mathsf{usco}} + \Theta + \exists^2$ 计算 Ω_C。
- 组合 $\Phi_{\mathbf{\Delta}} + \Theta + \exists^2$ 计算 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$。

证明。对于第一部分，设 $X \subset$ 实数集是至多包含一个元素的任意集合。那么 $\mathbb{1}_X$ 是有界变差的，并考虑 $1/2$-规范 $\delta(x) := \Phi_{\mathsf{reg}}(f,2)(x)$。如果 $x_0 \in X$，那么根据规范函数的定义，对于任意 $y \in B(x_0, \delta(x_0)) \setminus \{x_0\}$，都有 $x_0 \notin B(y, \delta(y))$。因此，若存在 $x_0 \in X$，则 $\Theta(\lambda x.\delta(x)$ $B(x_0, \delta(x_0)/2))$ 必须包含前一个实数，以提供对 $B(x_0, \delta(x_0)/2))$ 的覆盖。特别地，我们有

$$X \neq \emptyset \leftrightarrow (\exists p, q \in [0,1] \cap \mathbb{Q})(\exists i \in \mathbb{N})(\Theta(\lambda x.\delta(x), [p,q])(i) \in X).$$

因此，组合 $\Theta + \Phi_{\mathsf{reg}} + \exists^2$ 计算出 Ω_b。

对于第二部分，令 $C \subset [0,1]$ 为闭集，并考虑上半连续函数 $\mathbb{1}_C$。定义 $1/2$-规范 $\delta(x) := \Phi_{\mathsf{usco}}(\mathbb{1}_C, 2)(x)$ 以及集合 $O := [0,1] \setminus C$。如果 $x_0 \in O$，那么 Feferman 的 μ 足以找到 $N_0 \in \mathbb{N}$，使得 $(B(x_0, \frac{1}{2^{N_0}}) \cap \mathbb{Q}) \subset O$。然而，球 $B(x_0, \frac{1}{2^{N_0}})$ 仍可能包含 C 中的点。现在我们说明如何判定是否存在这样的点（使用该规范以及任意 Θ-泛函）。假设 $x_1 \notin O$ 但 $x_1 \in B(x_0, \frac{1}{2^{N_0}})$。那么，根据规范函数的定义，对于任意 $y \in [O \cap B(x_1, \delta(x_1))]$，都有 $x_1 \notin B(y, \delta(y))$。因此，有限序列 $\Theta(\lambda x.\delta(x)\ B(x_1, \delta(x_1)/2))$ 必须包含 $x_2 \notin O$，以便为 $B(x_1, \delta(x_1)/2))$ 提供覆盖。这样，我们得到 $(\exists x \in B(x_0, \frac{1}{2^{N_0}}))(x \notin O)$ 与

$$(\exists p, q \in \mathbb{Q} \cap [0,1])(\exists i \in \mathbb{N})\big[[p,q] \subset B(x_0, \tfrac{1}{2^{N_0}}) \wedge \Theta(\lambda x.\delta(x), [p,q])(i) \notin O\big].$$

其中，中心公式可用 $\exists^2$ 判定。因此，我们可以将 N_0 “缩小”（如有必要），使其满足 $B(x_0, \frac{1}{2^{N_1}}) \subset O$。将范围限制在 O 中的有理数上，我们得到 O 的 RM 编码，即得到 Ω_C。

对于第三部分，固定 $X \in \mathbf{\Delta}$ 并考虑 $\mathbb{1}_X$。根据[31,引理 11]，后者是第一类贝尔函数[6]，并且“按定义”是双义的。现在考虑 $1/2$ 规范 $\delta(x) := \Phi_{\mathbf{\Delta}}(\mathbb{1}_X, 2)(x)$。与前面一样，$(\exists x \in [0,1])(x \in X)$ 等价于

$$(\exists p, q \in \mathbb{Q} \cap [0,1])(\exists i \in \mathbb{N})\big[\Theta(\lambda x.\delta(x), [p,q])(i) \in X\big],$$

由此立即得到 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$。 □

我们注意到，给定一个库辛引理的实现器，Ω_Γ 和 Φ_Γ 恰好相互吻合。

最后，正如 [39], 中所探讨的，规范可以取为上半连续，但这种构造远非初等，例如与定理 12 相比便可看出。

[4] 我们用“reg”和“usco”表示有界变差函数类和上半连续函数类。

3 递归与选择子

本节将证明，结构泛函 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$ 能够计算 **Δ**-集合的 RM 编码。由此可得，前者还可以为 **Δ**-集合计算一个选择子，也就是说，输出非空 **Δ**-集合中某个元素的泛函。

我们先给出一些观察和引理。我们使用“P”作为变量，表示 **Δ** 中的集合，而不总是明确说明这一点。

观察 15 设 Φ 是一个泛函，其输出为 P 的 *RM* 编码，输入为集合 $P \in \mathbf{\Delta}$ 。那么 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$ 可由 Φ 和 $\exists^2$ 计算。

以下引理可追溯至 Baire，其证明运用了实数集 R 的闭子集上的贝尔纲定理。

引理 16 设 X 是闭集且非空，并设 $P \in \mathbf{\Delta}$。那么存在一个开集 O，使得 $O \cap X \neq \emptyset$，并且 $O \cap X \subset P$ 或 $O \cap X \subset P^c$。

现在令 $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为所有端点为有理数的开区间（包括端点 $+\infty$ 和 $-\infty$）的一个可计算枚举。

定义17 通过对序数 α 进行递归，我们如下定义 $A_\alpha \subseteq \mathbb{N}$ 和闭集 $X_\alpha = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i\in A_\alpha} B_i$。

– 我们定义 $A_0 = \emptyset$，对于极限序数 γ，令 $A_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha$。– 若 $B_i \cap X_\alpha = \emptyset$，或者若 $B_i \cap X_\alpha \neq \emptyset$ 且后一个集合包含于 P 或 P^c，则令 $i \in A_{\alpha+1}$。

根据引理 16，这个超限递归将以空的 X_α 终止，并且按构造有 $A_\alpha = \mathbb{N}$。显然，每个递归步骤都能在 P、P^c 和 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$ 中计算。此外，该递归将为最终集合 $A_\alpha = \mathbb{N}$ 导出一个预良序（见定义 18），并且我们可以根据这个预良序算术地定义 P 和 P^c 的$\mathbf{F}_\sigma$-代码，利用 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$ 来判断哪些新线段将加入 P，哪些将加入 P^c。

还需证明上述预良序在 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$ 和 $\exists^2$中是可计算的。为此，我们必须引入几个概念。

定义 18（预良序）

1. 集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ 上的预序 是 $\preceq$ 上的一种关系 A，它具有传递性和自反性。
2. 当 $a \preceq b$ 且 $b \preceq a$时，我们记作 $a \simeq b$；当 $a \preceq b$ 而 $a \simeq b$不成立时，我们记作 $a \prec b$。如果 $a \prec b$，我们称 a 低于 b。*3.* 下降链 是满足对所有 n都有 $a_{n+1} \prec a_n$ 的序列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。*4.* 不含下降链的预序称为预良序。

所有预序都有一个最大的预良序初始片段，由所有其下不存在下降序列的点组成。

现在，我们再次考虑定义17中的归纳定义。

定义19 如果满足以下条件，则称预序$(\mathbb{N} \preceq)$ 是协调的。

对于每个 $a \in \mathbb{N}$，令 $X_a = \mathbb{R}$ *{v7>*。于是，要么 $B_a \cap X_a = \emptyset$，要么 $B_a \cap X_a \neq \emptyset$，并且 $B_a \cap X_a$ *либо* 包含于 P 中，或包含于 P^c 中。

这反映了上文所述递归中的递归步骤。

通过超限归纳，我们还可看到，给定一个相容预序，预良序初始片段将与通过递归得到的对象的某个初始片段重合。最后，我们看到 $\exists^2$ 和 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$ 可以判断一对 $(A, \preceq)$ 是否按我们的意义构成相容预序。

引理20 如果 $(\mathbb{N} \preceq)$ 是一个相容预序，那么它实际上就是 $\mathbb{N}$ 上唯一的相容预良序。

证明。 假设并非如此，令 A^w 为预良序初始片段的定义域。令 $X^w = \mathbf{R} \setminus \bigcup_{a \in A^w} B_a$。我们必有 $X^w \neq \emptyset$，否则归纳将在非预良序部分的每一点停止。取 n，使得 $B_n \cap X^w \neq \emptyset$，并且其包含于 P 或 P^c 中。现在，令 $c \in \mathbf{N} \setminus A^w$。于是，要么 $B_n \cap X_c = \emptyset$，要么 $n \simeq c$（因为二者都满足递归步骤的要求）。由于 $c \in \mathbf{N} \setminus A^w$ 是任意的，因此对于所有 $c \in \mathbf{N} \setminus A^w$，都有 $B_n \cap X_c = \emptyset$，这与 n 的选择矛盾。□

以下结果是定理 10 中非平凡的方向。这里， Ω_1 是一个泛函，用于选出单元素集合中的那个元素。泛函 Ω_1 在迄今为止我们考察过的所有结构泛函中都是可计算的。

定理 21 存在一个泛函 Φ，它可由 $\Omega_{\mathbf{\Delta}} + \exists^2$ 计算，且对任意 $X \in \mathbf{\Delta}$， $\Phi(X)$ 都是一个 *RM* 编码。

证明。 相容预序类可由 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$ 和 $\exists^2$计算。根据引理20，恰好存在一个相容预序，它就是通过超限递归得到的那个预序。将 Ω_1 应用于这个类，我们便得到这个预（良）序，并可从中读出 P和 P^c的 $\mathbf{F}_\sigma$-编码。□

推论22 我们有如下结论。

a. 存在一个适用于 $\mathbf{\Delta}$-集合的选择算子，可由 $\Omega_{\mathbf{\Delta}}$计算。*b.* 泛函 $\Omega_{\text{countable}}$，因而 $\Omega_{\mathbf{F}_\sigma}$，不能由 $\Omega_{\mathbf{\Delta}} + \exists^2$计算。

证明。给定 $P \in \mathbf{\Delta}$，$\Omega_{\mathbf{\Delta}}$ 提供了一个$\mathbf{F}_\sigma$-编码，用于表示递增的闭集序列 $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$，其并集为 P。当 P 非空时，我们从第一个非空的 $P_k \cap [-k, k]$ 中提取最小元素。这就证明了定理的 a 项。b 项也随之成立，因为只要某个泛函 Ω_Γ 为 Γ提供选择子，那么 Ω_Γ 就无法计算出 $\Omega_{\text{countable}}$。□

致谢。 第二作者的研究得到了 Klaus Tschira Boost Fund 通过资助项目 Projekt KT 43 提供的支持。我们谨向该机构表示感谢。

利益披露。 据我们所知，我们没有需要声明且与本文内容相关的利益冲突。

参考文献

[1] Jeremy Avigad 和 Solomon Feferman，《哥德尔的泛函（“Dialectica”）解释》，《证明论手册》，Stud. Logic Found. Math.，第137卷，1998年，第337–405页。[2] 勒内·贝尔，《关于实变量函数》，Ann. di Mat. 3 3, 1 1899 123 ( )，第 – 期。[3] ，《不连续函数讲义》，Les Grands Classiques Gauthier-Villars, Éditions Jacques Gabay，索城，1995年（法文）。1905年原版的重印本。[4] 皮埃尔·库赞，《关于 n 复变函数》，Acta Math. 19（1895年），第1–61页。[5] 加斯东·达布，《不连续函数回忆录》，Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure 2e série，4（1875年），第57–112页。[6] James Dugundji，《拓扑学》，Allyn and Bacon, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，1966年。[7] Márton Elekes，《巴拿赫不动点定理的一个逆命题》，Proc. Amer. Math. Soc. 137（2009年），第9期，第3139–3146页。[8] Hermann Hankel，《关于无限次振荡函数和不连续函数的研究》，L. F. Fues, 1870年3月6日在图宾根大学宣读的论文。[9] ,《关于无限次振荡函数和不连续函数的研究》，第20卷，Math. Ann.，Springer，1882年。[10] 大卫·希尔伯特和保罗·贝尔奈斯，《数学基础》第二卷，第二版。Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften，第50卷，Springer，1970年。[11] 斯蒂芬·克林，《递归泛函与有限型量词 I》，Trans. Amer. Math. Soc. 91（1959年），第1–52页。[12] Ulrich Kohlenbach，《高阶反向数学》，《反向数学2001》，Lect. Notes Log.，第21卷，ASL，2005年，第281–295页。[13] 库拉托夫斯基，《拓扑学》第一卷，Academic Press，1966年。[14] 李秉彝、Wee-Kee Tang 和 Dongsheng Zhao，《第一贝尔类函数的一个等价定义》，Proc. Amer. Math. Soc. 129（2001年），第8期，第2273–2275页。[15] John Longley 和 Dag Normann，《高阶可计算性》，《可计算性理论与应用》，Springer，2015年。[16] Gerald I. Myerson，《第一类函数》，Amer. Math. Monthly 98 3, 237 1991 240 ( )，第 – 期。[17] Dag Normann 和 Sam Sanders，《非标准分析、可计算性理论及其联系》，《符号逻辑杂志》84（2019年），第4期，第1422–1465页。[18] ,《反向数学与可计算性理论中的开集》，《逻辑与计算杂志》30（2020年），第8期，第40页。[19] ，《反向数学与可计算性理论中的平凯莱定理》，Ann. Pure Appl. Logic 171（2020年），第5期，102788，41页。[20] ,《可计算性理论与反向数学中的选择公理》，《逻辑与计算杂志》31（2021年），第1期，第297–325页。[21] ,《反向数学中由波尔查诺、若尔当、魏尔斯特拉斯和康托尔提出的稳健定理》，《符号逻辑杂志》，doi: doi.org/10.1017/jsl.2022.71（2022年），第51页。

[22] ———，《R 的不可数性》，《符号逻辑杂志》，doi：doi.org/10.1017/jsl.2022.27（2022年），第43页。[23] ，《图灵与克莱尼之间》，《计算机科学讲义》13137，LFCS22论文集（2022年），第18页。[24] ，《基本数学概念的计算性质》，《逻辑与计算杂志》，doi：doi.org/10.1093/logcom/exac075（2022年），第44页。[25] ，《反向数学五大体系》，《数学逻辑杂志》，doi：https://doi.org/10.1142/S0219061324500077（2023年），第56页。[26] ，《开集的计算性质》，《逻辑与计算杂志》，doi：https://doi.org/10.1093/logcom/exae048（2024年），第26页。[27] Dag Normann 和 William Tait，《扇函数的可计算性》，《基础问题论文集》，《逻辑杰出贡献》，第13卷，Springer，2017年，第57–69页。[28] Richard J. O'Malley，《近似可微函数：r 拓扑学》，Pacific J. Math. 72（1977年），第1期，第207–222页。[29] Richard A. Platek，《递归理论基础》，ProQuest LLC，1966年。博士论文——斯坦福大学。[30] Franciszek Prus-Wiśniowski，《由双重集合实现的分离》，Real Anal. Exchange 30（2004/05年），第1期，第289–293页。[31] Arnoud C. M. van Rooij 和 Wilhelminus H. Schikhof，《实函数进阶教程》，剑桥大学出版社，1982年。[32] Sam Sanders，《贝尔纲定理的计算性质》，已提交，arxiv：https://arxiv.org/abs/2210.05251（2022年）。[33] ，《反向数学中的"大"：实数的不可数性》，《符号逻辑杂志》，doi：https://doi.org/10.1017/jsl.2023.42（2023年），第26页。[34] ，《反向数学中的"大"：测度与纲》，《符号逻辑杂志》，doi：https://doi.org/10.1017/jsl.2023.65（2023年），第44页。[35] Stephen G. Simpson，《二阶算术子系统》，第2版，《逻辑视角》，剑桥大学出版社，2009年。[36] 艾伦·图灵，《论可计算数及其在判定问题中的应用》，《伦敦数学会会刊》42（1936年），第230–265页。[37] Charles-Jean de la Vallée-Poussin，《勒贝格积分》，Guathier-Villars，1916年。[38] Vito Volterra，《关于不连续点函数的一些观察》，Giornale di matematiche XIX（1881年），第76–86页。[39] Zulijanto Atok、Wee-Kee Tang 和 Dongsheng Zhao，《第一类贝尔函数的规范》，J. Math. Anal. Appl. 343（2008年），第2期，第866–870页。