arXiv:2602.05642v1 [math.CA] 5 Feb 2026

凸 C^1 Lipschitz 函数的尖锐惠特尼延拓定理

CARLOS MUDARRA

Abstract. 对于任意集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 以及函数 $f\colon E \to \mathbb{R}$, $G\colon E \to \mathbb{R}^n$ （其中 G 有界），我们构造具有尖锐 Lipschitz 常数的 $C^1(\mathbb{R}^n)$ 凸延拓 $(F, \nabla F)$，使其延拓 (f, G)

$$\mathrm{Lip}(F) = \sup_{x \in E} |G(x)|,$$

前提是 (f, G) 满足关于 C^1 凸性及 Lipschitz 可延拓性的相关充要条件。此外，还可以根据强制性方向预先指定的全局行为来构造这些延拓。

1. Introduction and main results

给定一个集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 以及函数 $g\colon A \to \mathbb{R}$，我们将把 g 在 A 上的 Lipschitz 常数记为 b y

$$\mathrm{Lip}(g, A) := \inf\{C \geq 0 \,:\, |g(x) - g(y)| \leq C|x - y| \ \text{ for all } \ x, y \in A\}.$$

当 $A = \mathbb{R}^n$. 时，我们将 $\mathrm{Lip}(g) = \mathrm{Lip}(g, \mathbb{R}^n)$ 简记为 $\mathrm{Lip}(g)$。如果 $L \geq 0$, 我们称 g 在 A 上是L-Lipschitz 的，当 $\mathrm{Lip}(g, A) \leq L$. 时。此外，对于 $\mathbb{R}^n$ 的子集 E 上的 1-喷流，我们指一对函数 (f, G)，其中 $f\colon E \to \mathbb{R}$, $G\colon E \to \mathbb{R}^n$.

经典惠特尼延拓定理 [27] 针对 C^1，给出了喷流 (f, G) 存在延拓的充要条件：存在 $C^1(\mathbb{R}^n)$ 函数 F, 使得 $(F, \nabla F) = (f, G)$ 在 E. 上成立。于是我们称 F（或 $(F, \nabla F)$）是喷流 (f, G) 的延拓。

本文证明了适用于 凸 $C^1(\mathbb{R}^n)$ Lipschitz函数的惠特尼延拓定理，其中延拓具有可能达到的最佳 Lipschitz 常数 $\mathrm{Lip}(F) = \|G\|_{L^\infty(E)}$.

近几十年来，大量惠特尼型问题已针对各类喷流和函数得到深入研究并解决。其中包括关于 C^m 或 $C^{m,\,\omega}$ 函数 [4, 9, 13, 14, 15, 17, 18, 20,21, 22, 26], 凸函数 [4, 5, 6, 7, 10, 11, 12], Sobolev函数 [16, 19, 25], 或海森堡群中的光滑函数 [24, 23, 28]的结果。这绝非一份详尽的清单。

在 [5], 中，我们得到了定义在 $\mathbb{R}^n$. 的紧子集 E 上的1-喷射的凸 C^1 延拓定理。喷流（f, G）的可延拓性判据由一对充要条件组成，即

$$(C) \qquad f(x) \geq f(y) + \langle G(y), x - y\rangle \quad \text{for all } \ x, y \in E,$$

$$(CW^1) \qquad x, y \in E, \quad f(x) = f(y) + \langle G(y), x - y\rangle \implies G(x) = G(y).$$

于是，喷流 (f, G) 的延拓 F可以取为满足 $\mathrm{Lip}(F) \leq c(n) \sup_{x \in E} |G(x)|$, 其中维数常数 $c(n)$ 满足 $c(n) \to \infty$ 当 $n \to \infty$. 后来用不同方法在[8] 中证明，维数因子 $c(n)$ 可以替换为 $c = 5$. 同一问题在E 为 $\mathbb{R}^n$ 的任意（可能无界）子集的情形下，已在 [6], 中解决，对于 Lipschitz函数，界的形式为 $\mathrm{Lip}(F) \leq c(n) \sup_{x \in E} |G(x)|$。与紧集 E或 $C^{1,\omega}$ 正则性类的情形不同，这个问题要困难得多，尤其是因为

Date: 2026年2月6日。*2020 Mathematics Subject Classification.* 26A16, 26B05, 26B25, 52A41, 54C20, 90C25。*Key words and phrases.* 凸函数，利普希茨函数，最佳常数，惠特尼延拓定理。

所谓的无穷远处的拐角 的存在，以及它们与处处可微凸延拓可能不相容。我们还参阅 [7] ，以了解定义在 $\mathbb{R}^n$的紧凸子集上的喷流的 C^∞ 凸延拓。

在一项非常近期的工作中， [11], 我们成功构造了具有最佳 Lipschitz 常数的 C^1 和 $C^{1,\,\omega}$ 凸延拓，即使是在超自反 Banach 空间的情形下也是如此。更准确地说，若X 是超自反的，且 $E \subset X$ 是紧集，那么定义在 E 上的任意喷流（f， G）都存在一个属于 $C^1(X)$类的凸延拓（F， DF），使得 $\mathrm{Lip}(F,\ X) = \sup_{y\in E} \|G(y)\|_*$，前提是（$f$， G）满足必要条件（C）和（CW^1）。这一结果对应于 [11, 定理 1.6] ，其证明基于对 $C^{1,\,\omega}$ 凸延拓的一个类似定理的应用，所用连续模适当 ω；参见 [11,定理 1.2]。

我们从 [6] 得知，从 $\mathbb{R}^n$的无界集 E 上用凸函数延拓喷流（f， G），比有界情形复杂得多。当 E 是无界集时，条件（C）和（CW^1）已不再充分；我们需要仔细研究喷流可能出现的无穷远处的拐角，以及凸函数的整体形状如何由强制性方向决定。

给定 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间 X，我们用 $X^\perp$ 表示其正交补，用 $P_X : \mathbb{R}^n \to X$ 表示到 X. 上的正交投影。按照 [6], 的术语，我们称喷流 $(f,\ G) :\ E \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 在 $X^\perp$ 的一个方向上具有无穷远处的角点，如果存在两个序列 $(x_j)_j,\ (z_j)_j$ ，它们属于 E ，满足 $(|x_j|)_j \to \infty$，且 $(G(z_j))_j$ 和 $(P_X(x_j))_j$ 均有界，并且

$$\lim_{j\to\infty} \left(f(x_j) - f(z_j) - \langle G(z_j), x_j - z_j\rangle\right) = 0 \quad \text{and} \quad \limsup_{j\to\infty} |G(x_j) - G(z_j)| > 0.$$

此外，根据 [1, 引理 4.1] 或 [6, 定理 1.11], ，对于每个凸函数 F （不一定属于 $C^1(\mathbb{R}^n)$ 类），都存在唯一的线性子空间 X_F （属于 $\mathbb{R}^n$）、凸强制函数 $c\colon X_F \to \mathbb{R}$ 以及 $v \in \mathbb{R}^n$ ，使得

$$F(x) = c(P_{X_F}(x)) + \langle v, x\rangle \quad \text{for all} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

强制性仅表示 $\lim_{|x|\to\infty} c(x) = +\infty.$。文中已在 [6] 中隐含地证明，事实上

$$X_F = \mathrm{span}\{\xi_x - \xi_y \,:\, \xi_x \in \partial F(x),\, \xi_y \in \partial F(y),\, x, y \in \mathbb{R}^n\}. \tag{1.2}$$

例如，详见下文引理 2.3 的详细证明。这里 $\partial F(x)$ 表示 F 在 $x \in \mathbb{R}^n.$ 处的次微分。子空间 X_F 在 (1.1) 的意义下决定了 F 的强制性方向。对于可微函数，与无穷远处的拐角的联系如下：若 $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$, 则喷流 $(F, \nabla F)$ 不能在 $(X_F)^\perp.$ 的某个方向上具有无穷远处的拐角。此外，若 $\nabla F = G$ 在 E 上，则由公式 (1.2) 可知， X_F 必须包含子空间 $Y(E, f, G) := \mathrm{span}\{G(x) - G(y) :\ x, y \in E\}$.因此，存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个包含 Y 的线性子空间 X，使得 (f, G) 在 $X^\perp$ 的方向上没有无穷远处的拐角，这是 (f, G) 的凸 $C^1(\mathbb{R}^n)$ 延拓存在的一个必要条件。然而，除非 $X = Y(E, f, G)$，否则还需要进一步的条件才能保证此类延拓的存在，因为 (f, G) 在 E 上的形状可能会迫使 (f, G) 的所有凸延拓沿 $\mathbb{R}^n.$ 的某条半直线不可微。我们通过引入必要条件解决了这一问题；粗略地说，这些条件使我们把数据 (E, f, G) 延拓到有限多个额外的点，从而使新的喷流 (E^*, f^*, G^*) 确实满足 $Y(E^*, f^*, G^*) = X.$

有趣的是，这些延拓可以取为具有规定的全局行为 的形式，即按强制性方向来规定，同样是在 (1.1) 的意义下。更确切地说，这些条件刻画了喷流 (f, G) 以及子空间 $X \subset \mathbb{R}^n$，使得存在凸 $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$, 满足 $(F, \nabla F) = (f, G)$ 在 E 上以及$X_F = X.$ 这对应于 [6, 定理 1.13] （对所有凸函数），以及 [6, 定理 1.14] （对 Lipschitz 凸函数）。这些以定制强制性方向构造延拓的结果，在获得凸函数的 Lusin 型定理时已经发挥了作用；参见 [2, 3]。

在本文中，我们构造 1-喷射 (f, G) 的凸 $C^1(\mathbb{R}^n)$ Lipschitz 延拓，其具有最佳可能的 Lipschitz 常数 $\mathrm{Lip}(F) = \sup_{x\in E} |G(x)|$，并且额外规定给定的全局行为，从而得到 [6, 定理 1.14] 的精确形式。我们将使用的可延拓条件与该定理中的相同，即，

$(\mathrm{C_b})$ G 连续且有界，并且对于所有 $x, y \in E$， $f(x) \geq f(y) + \langle G(y)\ x - y\rangle$。

$(\mathrm{S}_{Y,X})$ $Y :=$ 跨度$\{G(x) - G(y) :\ x, y \in E\} \subseteq X$.

$(\mathrm{C}_{Y,X})$ 如果 Y如 $(\mathrm{S}_{Y,X})$ 中所述且 $Y \neq X$，并记 $k =$dim Y 和 $d =$dim X，则存在点$p_1, \ldots, p_{d-k} \in \mathbb{R}^n \setminus E$、一个数 $\varepsilon \in (0,1)$, 以及线性无关的单位向量$w_1, \ldots, w_{d-k} \in X \cap Y^\perp$，使得对于每个 $j = 1, \ldots, d-k$, 该锥

$$V_j := \{x \in \mathbb{R}^n \ :\ \varepsilon\langle w_j, x - p_j\rangle \geq |P_Y(x - p_j)|\}$$

满足 $V_j \cap E = \emptyset$.

(CW^1_X) 若 $(x_j)_j$，$(z_j)_j$ 是 E 中的序列，且 $(P_X(x_j))_j$ 有界，则

$$\lim_{j\to\infty} (f(x_j) - f(z_j) - \langle G(z_j), x_j - z_j\rangle) = 0 \implies \lim_{j\to\infty} |G(x_j) - G(z_j)| = 0.$$

条件 (CW^1_X) 表示，喷流 $(f,\ G)$ 在与 X 正交的方向上不能有无穷远处的拐角。最具技术性的条件 $(\mathrm{C}_{Y,\ X})$ 大致表示，如果 $Y \neq X$，那么 $\mathbb{R}^n \setminus E$ 中应有足够的空间插入与 Y 正交的 $d-k$ 个锥。

本文的主要结果如下。

定理 *1.1.* 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个子集， $X \subset \mathbb{R}^n$ 是一个线性子空间，且 $f :\ E \to \mathbb{R}$, $G :\ E \to \mathbb{R}^n$ 是一个 *1-*喷流，其中 G 非常数。假设 f, G, X 在集合 E 中满足条件 $(\mathrm{C_b})$、$(\mathrm{S}_{Y,X})$、$(\mathrm{C}_{Y,X})$、(CW^1_X)。那么存在一个 *Lipschitz* 凸函数 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ，属于 $C^1(\mathbb{R}^n)$ 类，使得 $(F, \nabla F) = (f, G)$ 在 E, $X_F = X$ 上成立，并且

$$\mathrm{Lip}(F) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\nabla F(x)| = \sup_{y\in E} |G(y)|. \tag{1.3}$$

我们已经从 [6] 知道，$(\mathrm{C_b})$、$(\mathrm{S}_{Y,X})$、$(\mathrm{C}_{Y,X})$、(CW^1_X) 是存在凸的 Lipschitz C^1 函数 F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的充要条件，其中 $(F, \nabla F) = (f, G)$ 在 E 上且$X_F = X$. 然而，为了构造满足尖锐 Lipschitz 条件 (1.3) 的延拓，我们需要：1）为 Lipschitz 凸函数建立如 (1.1) 所示的分解定理，并对 $|v|$ 给出良好的估计；2）在若干处修改 [6, 定理 1.14] 中非尖锐延拓的构造；3）将某种 Lipschitz 包络应用于该非尖锐延拓。下文将概述定理 1.1 的证明。

我们来谈谈定理 1.1 中恒等式 (1.3) 的一些注记。

注 1.2。 令 $E \subset \mathbb{R}^n$ 和 $(f,\ G)$: $E \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 一个 1-喷流。

(1) 对于非紧集 E，在定理 1.1 之前，凸 $C^1(\mathbb{R}^n)$ 延拓 $(f,\ G)$ 的 Lipschitz 常数 $\mathrm{Lip}(F)$ 的最佳估计形式为 $\mathrm{Lip}(F) \leq c(n) \sup_{y\in E} |G(y)|$，其中 $c(n)$ 随维数增长而趋于无穷；参见 [6, 定理 1.14]。对于紧集 E，在超自反 Banach 空间的框架下，最优界最近已在 [11, 定理 1.6]，中得到。

(2) 定理 1.1 排除了 G 为常数这一平凡情形，因为如果对所有 $y \in E$， $G(y) = u \in \mathbb{R}^n$，则条件 $(\mathrm{C_b})$ 很容易推出，对所有 x， $f(x) - f(y) = \langle u,\ x - y\rangle$。因此，$(f,\ G)$ 已有一个满足 (1.3) 的平凡仿射延拓，即函数 $F(x) = f(y_0) + \langle u,\ x - y_0\rangle$，其中 $y_0 \in E$. 可以任取。然而，在这一平凡情形下，并非总能找到满足 (1.3) 且同时具有指定全局行为 $X \neq \{0\}$ 的延拓 F；例如，当 G 在 E. 上恒为零时。

(3) 条件 (C_b) 确保 $\sup_{y\in E}|G(y)|$ 是衡量喷流 $(f,\ G)$ 的 ***Lipschitz*** 性质的恰当常数。事实上，很容易看出

$$|f(x)-f(z)|\le \max\{\langle G(x),x-z\rangle,\langle G(z),z-x\rangle\}\le \big(\sup_{y\in E}|G(y)|\big)|x-z|,\quad x,z\in E,$$

因此 $\mathrm{Lip}(f,E)\ \le \sup_{y\in E}|G(y)|$.

(4) 对于一般（不一定是凸的） C^1 函数，已知最尖锐的 Whitney 型延拓形式来自 [20], ，它们为每个 $\varepsilon>0$，提供一个 (f,G) 的延拓 $F_\varepsilon\in C^1(\mathbb{R}^n)$，满足

$$\mathrm{Lip}(F_\varepsilon,\mathbb{R}^n)\le \varepsilon+\max\left\{\mathrm{Lip}(f,E),\sup_{y\in E}|G(y)|\right\}.$$

即使将 $\mathbb{R}^n$ 替换为希尔伯特空间，在适当的充要条件下，这一结果仍然成立。值得注意的是，定理 1.1 中的恒等式 (1.3) 表明，对于类似的凸延拓问题，可以不再需要 $\varepsilon>0$ 。如果我们不考虑对全局行为的规定，而只关注在某个加性$\varepsilon>0$，范围内最优的延拓，那么定理 1.1 的证明会大大简化；见注记3.8。

定理 1.1 的证明概要。我们首先将在第 2 节证明，非仿射的 L-Lipschitz 凸函数可以写成 $f=c\circ P_X+\langle v,\ \cdot\rangle$，其中 $c\colon\ X\to\mathbb{R}$ 凸且强制，并且 $|v|<L$；见定理 2.2。为此，我们先对仿射函数的最大值证明该结果，在这一步中需要利用 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. 中欧几里得范数的严格凸性。定理 1.1 的证明见第 3 节，并分为若干小节。对于子空间 $X\subset\mathbb{R}^n$ 以及满足 $|G|$ 在 E上由 L 控制的喷流 $(f,\ G)$，我们首先通过公式定义该喷流 $(f,\ G)$ 的一个最小凸延拓（不一定处处可微）

$$m(x)=\sup\{f(y)+\langle G(y),x-y\rangle\ :\ y\in E\},\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

并根据定理 2.2 对其进行分解。也就是说， $m=c\circ P_Y+\langle v,\ \cdot\rangle$；其中 Y是条件 $(S_{Y,\ X})$ 中的函数，且 $|v|<L$。然后，利用这个严格不等式和条件 $(C_{Y,\ X})$，我们将 $(f,\ G)$ 从E 延拓到 $E^*=E\cup\{q_1,\dots,q_{d-k}\}$，其中 $q_j\in V_j$，并使扩展喷射 $(f^*,\ G^*)$ 同时满足$X=\mathrm{span}\{G^*(x)\ -G^*(y)\colon\ x,\ y\in E^*\}$ 以及条件 (CW^1_X)，**并且仍然** $|G^*|\le L$ **在** E^*. 这将意味着更新后的最小凸延拓

$$m^*(x)=\sup\{f^*(y)+\langle G^*(y),x-y\rangle\ :\ y\in E^*\},\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

是 L-Lipschitz，因此可以写成 $m^*=c\circ P_X+\langle v^*,\ \cdot\rangle$，其中 $|v^*|<L$，且 $c^*\colon\ X\to\mathbb{R}$在 $P_X(E^*)$ 中凸、强制且可微。接下来我们将找到一个凸的 $C^1(X)$ 和强制函数 $H\colon\ X\to\mathbb{R}$，使得 $(H,\ \nabla H)$ 在 $P_X(E^*)$ 上满足 $=(c,\ \nabla c)$。定义

$$\widetilde{F}(x)=H(P_X(x))+\langle v^*,x\rangle,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

我们得到一个凸的 $C^1(\mathbb{R}^n)$ 函数，它在 $E^*$and $|v^*|\le L$ 上满足 $(F,\nabla F)\ =(f^*,G^*)$。定理 1.1 中所需的函数将

$$F(x)=\inf\{\widetilde{F}(y)+L|x-y|\ :\ y\in\mathbb{R}^n\},\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

为了证明 $X_F=X$，关键在于 m^* 恰好是 L-Lipschitz，这又意味着$m^*\le F$。接下来，我们验证 F 的其余性质，其中最困难的是证明 F在每个 $x\in\mathbb{R}^n$. 处的$\widetilde{}$可微性。这里的第一个关键思想是公式 $F=H\circ P_X+\langle v^*,\ \cdot\rangle$ 以及 H 是强制的且 $|v^*|\le L$ 这一事实，使我们能够用序列 $(y_k)_k\widetilde{}$逼近下确界 $F(x)$，并使 $(P_X(y_k))_k$有界。另一方面， $X_{\widetilde{F}}=X$，因此 F在垂直于 X. 的方向上不能在无穷远处出现拐角。这两个事实（隐含地）结合起来，用于恰当地估计证明可微性时出现的某些有限差分。

2. Global behavior of Lipschitz convex functions

本节我们证明，非仿射、凸且 Lipschitz 的函数 f 可以写成 $f = c \circ P_X + \langle v, \cdot \rangle$，其中 $c\colon X \to \mathbb{R}$ 是凸且强制的，并且 $|v| < \mathrm{Lip}(f)$。这一结果可视为 [6,定理 1.11]或 [1, 引理 4.2]的 Lipschitz 版本。

我们首先证明，对于作为仿射函数有限最大值的凸函数，这样的分解是存在的；按照 [6] 的术语，这类函数也称为角函数。

引理 2.1。设 $1 \le k \le n$，向量 v_1、……、$v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ 和 a_1、……、$a_{k+1} \in \mathbb{R}$，使得 $\{v_j - v_1\}_{j=2}^{k+1}$ 在 $\mathbb{R}^n$. 中线性无关。则函数

$$C(x) = \max\{\langle v_j, x\rangle + a_j \,:\, j = 1, \dots, k+1\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

可以写成如下形式

$$C(x) = c(P_X(x)) + \langle v, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

其中

$$X = \mathrm{span}\{v_j - v_1 \,:\, j = 2, \dots, k+1\} \quad \textit{and} \quad v = \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1} v_j, \tag{2.2}$$

且 $c\colon \ X \to \mathbb{R}$ 在 X 上是凸且强制的。此外，若 $L\colon = \max\{|v_j|\colon \ j = 1,\dots, k+1\}$，则有

$$\mathrm{Lip}(c, X) \le L + |v| \quad \textit{and} \quad |v| < L.$$

证明。令 $C\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ 和 $v \in \mathbb{R}^n$ 如 (2.1) 和 (2.2) 中所示。定义向量 $u_j := v_1 - v_j$，其中$j = 2, \dots, k+1,$，并注意到

$$v = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} v_i = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}(v_1 - u_i) = v_1 - \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} u_i.$$

利用这个恒等式，我们可以将 $C(x)$ $x \in \mathbb{R}^n$，改写如下

$$\begin{aligned} C(x) - \langle v, x\rangle &= \max\left\{\langle v_j - v_1, x\rangle + b_j - \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\langle u_i, x\rangle \,:\, j = 1, \dots, k+1\right\} \\ &= \max\left\{\frac{1}{k+1}\sum_{i=2}^{k+1}\langle u_i, x\rangle + b_1, -\langle u_j, x\rangle + \frac{1}{k+1}\sum_{i=2}^{k+1}\langle u_i, x\rangle + b_j \,:\, j = 2, \dots, k+1\right\}. \end{aligned}$$

由于 $u_j \in X$， 我们有 $\langle u_j,\ x\rangle = \langle u_j,\ P_X(x)\rangle$，因此可以将 C分解为以下形式

$$C(x) = c(P_X(x)) + \langle v, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n; \tag{2.3}$$

其中

$$c(y) = \max\left\{\langle \xi, y\rangle + b_1, \langle \xi - u_j, y\rangle + b_j \,:\, j = 2, \dots, k+1\right\}, \quad y \in X, \quad \xi := \frac{1}{k+1}\sum_{i=2}^{k+1}\langle u_i, y\rangle. \tag{2.4}$$

作为仿射函数的最大值， $c\colon \ X \to \mathbb{R}$ 在 X 上是凸的。接下来我们证明 c 是 X 上的强制函数。为此，我们当然可以假设 $b_1 = \cdots = b_{k+1} = 0$， 从而 c就是

$$c(y) = \max\{\langle \xi, y\rangle, \langle \xi - u_j, y\rangle + b_j \,:\, j = 2, \dots, k+1\}, \quad y \in X.$$

族 $\{u_j\}_{j=2}^{k+1}$ 是 X, 的一组基，因此

$$\|y\| := \max\{|\langle u_2, y\rangle|, \dots, |\langle u_{k+1}, y\rangle|\}, \quad y \in X,$$

在 X. 中定义了一个等价范数。给定 $y \in X$，首先假设 $\langle \xi, y\rangle \geq \langle \xi - u_j, y\rangle$ 对所有 j =2, . . . , $k+1$. 都成立。我们有 $\langle u_j, y\rangle \geq 0$ 对所有 j都成立，因此

$$c(y) = \langle \xi, y\rangle \geq \frac{1}{k+1} \max\{|\langle u_2, y\rangle|, \dots, |\langle u_{k+1}, y\rangle|\} = \frac{1}{k+1}\|y\|.$$

并且，当定义 $c(y)$ 的最大值为 $\langle \xi - u_j,\ y\rangle$ 其中某个 $j \in \{2, \dots, k+1\}$ 取到时，我们有不等式

$$\langle u_j, y\rangle \leq \min\{0, \langle u_l, y\rangle \ : \ l = 2, \dots, k+1\}.$$

这给出了以下估计

$$\begin{aligned} c(y) = \langle \xi - u_j, y\rangle &= -\langle u_j, y\rangle + \frac{1}{k+1} \sum_{\{l \,:\, \langle u_l, y\rangle \leq 0\}} \langle u_l, y\rangle + \frac{1}{k+1} \sum_{\{l \,:\, \langle u_l, y\rangle > 0\}} \langle u_l, y\rangle \\ &\geq -\frac{1}{k} \sum_{\{l \,:\, \langle u_l, y\rangle \leq 0\}} \langle u_l, y\rangle + \frac{1}{k+1} \sum_{\{l \,:\, \langle u_l, y\rangle \leq 0\}} \langle u_l, y\rangle + \frac{1}{k+1} \sum_{\{l \,:\, \langle u_l, y\rangle > 0\}} \langle u_l, y\rangle \\ &= \frac{1}{k(k+1)} \sum_{\{l \,:\, \langle u_l, y\rangle \leq 0\}} |\langle u_l, y\rangle| + \frac{1}{k+1} \sum_{\{l \,:\, \langle u_l, y\rangle > 0\}} |\langle u_l, y\rangle| \\ &\geq \frac{1}{k(k+1)} \max\{|\langle u_2, y\rangle|, \dots, |\langle u_{k+1}, y\rangle|\} = \frac{1}{k(k+1)}\|y\|. \end{aligned}$$

这些不等式给出了 c 在 X. 中的强制性

我们来证明不等式 $|v| < L$。由于族 $\{v_j - v_1\}_{j=2}^{k+1}$ 线性无关，至多有一个 v_i 等于 0。如果某个 v_i 等于 0，简单应用三角不等式以及对所有 j 都有 $|v_j| \leq L$ 这一事实，可得

$$|v| \leq \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} |v_j| = \frac{1}{k+1} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{k+1} |v_j| \leq \frac{k}{k+1} L < L.$$

如果所有 $v_j's$ 都不为零，我们就利用以下事实：对所有 j， $|v_j| \leq L$； v 是 v_1、.....、v_{k+1} 的严格凸组合；并且欧几里得范数 $|\cdot|$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. 中严格凸。更确切地说，如果 $m \in \mathbb{N}$、λ_1、.....、$\lambda_m \in (0, 1)$ 满足 $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$，且 $\{x_j\}_{j=1}^m \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 是满足 $\{x_j - x_1\}_{j=1}^m$ 线性无关的向量，那么

$$\left| \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j \right| < \sum_{j=1}^m \lambda_j |x_j|.$$

利用 $\langle x_i,\ x_j\rangle < |x_i||x_j|$ 对 $i \neq j$，再通过归纳法即可轻松证明这一性质。

既然我们知道 $|v| < L$，根据三角不等式可得 $|v_j - v| \leq L + |v|$，这意味着 Lip$(c,\ X) \leq L + |v|$，因为 c 的构造： $X \to \mathbb{R}$ （见（ 2.3 ））给出

$$c(y) = \max\{\langle v_j - v, y\rangle + b_j \ : \ j = 1, \dots, k+1\}, \quad y \in X.$$

□

现在我们将引理 2.1推广到 $\mathbb{R}^n$. 中的任意凸 Lipschitz函数。在证明中，我们采用了 [6, 定理 1.11], 中的策略和许多论证，但进行了若干非平凡的修改，以获得加性线性扰动 $\langle v,\ \cdot\rangle$.的范数的正确估计

定理 2.2. 设 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个非仿射凸利普希茨函数，且 $L > 0$ 满足 $\mathrm{Lip}(f) \leq L$.那么存在一个子空间 $X \subset \mathbb{R}^n$、一个函数 $c\colon X \to \mathbb{R}$ 以及一个向量 $v \in \mathbb{R}^n$，使得

(1) $f(x) = c(P_X(x)) + \langle v, x\rangle$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$.均成立。(2) $c\colon X \to \mathbb{R}$ 是凸且强制的。(3) $|v| < L$。

证明。 首先，我们假设 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$。 由于 f 不是仿射函数，我们可以找到点 $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ ，使得 $\nabla f(y_1) \neq \nabla f(y_2)$。根据 f的凸性，我们可知

$$f(x) \geq C(x) := \max\{f(y_1) + \langle \nabla f(y_1), x - y_1\rangle, f(y_2) + \langle \nabla f(y_2), x - y_2\rangle\}, \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^n.$$

我们还知道 $|\nabla f(y_1)|, |\nabla f(y_2)| \leq L,$，因为 f是 L-Lipschitz。接着，令 $1 \leq k \leq n$为满足以下条件的最大整数: 存在 $v_1, \ldots, v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$，使得 $\{v_j - v_1\}_{j=2}^{k+1}$线性无关，并且对所有 $j = 1, \ldots, k+1, a_1, \ldots, a_{k+1} \in \mathbb{R}$，均有 $|v_j| \leq L$，从而

$$f(x) \geq C(x) := \max\{\langle v_j, x\rangle + a_j \,:\, j = 1, \ldots, k+1\}, \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

令 $v_1, \ldots, v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$, $a_1, \ldots a_{k+1} \in \mathbb{R}$和 $x_0 \in \mathbb{R}^n$如上所述，并按照引理 2.1，定义$u_j = v_j - v_1$，其中 $j = 2, \ldots, k+1$, $X =$张成$\{u_j\colon\ j = 2, \ldots, k+1\}$ 以及 $v = \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1} v_j$. 接下来的论断是，函数 $f - \langle v, \cdot\rangle$ 在每个仿射子空间 $y + X^\perp$, $y \in \mathbb{R}^n$上都是常数。事实上，否则我们可以找到 $w \in X^\perp$, $y \in \mathbb{R}^n$，使得函数 $\mathbb{R} \ni t \mapsto (f - \langle v, \cdot\rangle)(y + tw)$ 在某个 $t \in \mathbb{R}.$处的导数非零。因此 $\langle \nabla f(y + tw) - v, w\rangle \neq 0$，从而 $\nabla f(y + tw) - v$与 $\{u_j\}_{j=2}^{k+1}$线性无关，因为该族构成了 $X.$ 的一个基。但我们还注意到

$$v_1 - v = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{k+1}(v_1 - v_j) \in X,$$

这意味着族 $\{\nabla f(y + tw) - v_1, v_j - v_1\}_{j=2}^{k+1}$由 $k+2$ 个线性无关的向量组成。同样，由于 f是 L-Lipschitz 的，有 $|\nabla f(y+tw)| \leq L.$结合 f的凸性和 (2.5) 的性质，我们得到

$f(x) \geq C^*(x) :=$max$\{f(y+tw)+\langle \nabla f(y+tw)\ x-y-tw\rangle, \langle v_j, x\rangle + a_j\colon\ j = 2, \ldots, k+1\}$对所有 $x \in \mathbb{R}^n.$ 这与使 f 满足 (2.5) 的 k 的极大性相矛盾。

因此， $f - \langle v, \cdot\rangle$ 在每个仿射子空间 $y + X^\perp$ 上是常数函数， $y \in \mathbb{R}^n.$ 因此，若我们将凸函数 $c\colon X \to \mathbb{R}$ 定义为

$$c(z) = f(z) - \langle v, z\rangle \quad \text{for all } z \in X,$$

则对每个 $x \in \mathbb{R}^n$ ，我们可以写出

$$(f - \langle v, \cdot\rangle)(x) = (f - \langle v, \cdot\rangle)(P_X(x)) = c(P_X(x)),$$

从而证明了定理的第一个陈述。由 v 的定义以及引理 2.1，我们还知道 $|v| < L.$ 。为验证 c 在 $X,$ 中是强制的，我们利用引理 2.1 将 (2.5) 中的函数 $C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 写成形式 $C(x) = \widetilde{c}(P_X(x)) + \langle v, x\rangle,$ $x \in \mathbb{R}^n,$其中 $\widetilde{c}\colon\ X \to \mathbb{R}$ 在$X.$ 中是凸的且强制的。因为 $f \geq C$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中，我们有不等式

$$c(z) = f(z) - \langle v, z\rangle \geq C(z) - \langle v, z\rangle = \widetilde{c}(z), \quad z \in X.$$

由此我们得出， c 在 X 中也具有强制性，从而证明了函数 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$。

现在令 $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个非仿射的凸 L-Lipschitz函数，但不一定属于$C^1(\mathbb{R}^n)$。 对于一族非负磨光函数 $\{\theta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，满足 $\int_{\mathbb{R}^n} \theta_\varepsilon(y)\, \mathrm{d}y = 1$, $\theta_\varepsilon \geq 0$ 且 $\mathrm{supp}(\theta_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$，这是一个标准结果: 积分卷积 $g_\varepsilon := f * \theta_\varepsilon$, $\varepsilon > 0,$ 定义了凸的 L-Lipschitz函数，且属于 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$，使得 $g_\varepsilon \to f$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致成立，当 $\varepsilon \to 0^+.$ 时。因此，我们可以找到 $g\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 属于 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$，是凸的 L-Lipschitz函数，并且满足 $f - 1 \leq g \leq f$ 在 $\mathbb{R}^n.$上。我们注意到 g 不可能是仿射函数，否则非仿射函数 f 将位于

整个 $\mathbb{R}^n$中的仿射 $g+1$ 之下，这就产生了矛盾。因此，我们可以将针对 C^1 函数的情形应用于 g，从而得到一个分解

$$g(x) = c(P_X(x)) + \langle v, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n; \tag{2.6}$$

其中 $X \subset \mathbb{R}^n$ 是一个s 子空间， $c\colon\ X \to \mathbb{R}$ 是凸的且强制的，并且 $|v| < L$. 我们将首先证明tha t

$$f(x+w) = f(x) + \langle v, w\rangle \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^n,\, w \in X^\perp. \tag{2.7}$$

事实上，我们定义函数 $h(t) = f(x+tw)$和 $\varphi(t) = g(x+tw)$，对于 $t \in \mathbb{R}$。我们有

$$\varphi(t) = c(P_X(x+tw)) + \langle v, x+tw\rangle = c(P_X(x)) + \langle v, x+tw\rangle,$$

也就是说， φ 是仿射的，且 $\varphi'(t) = \langle v,\ w\rangle$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$. 成立。出于与上文类似的理由， h 必定是仿射的，其导数为 $\langle v,\ w\rangle$。让我们明确写出这一论证。若 $\varphi(t) = a + t\langle v,\ w\rangle$ 且 $a \in \mathbb{R}$，我们看到对于 $s \in \mathbb{R}$ 和 $\xi \in \partial h(s)$，不等式 $f \le 1 + g$ 给出

$$a + 1 + \langle v, w\rangle t = \varphi(t) + 1 \ge h(t) \ge h(s) + \xi(t-s),$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$. 成立。这当然意味着 $\xi = \langle v,\ w\rangle$。我们已经证明 $\partial h(s) = \{\langle v, w\rangle\}$ 对所有$s \in \mathbb{R}$，成立，因此 h 是具有线性形式 $\langle v,\ w\rangle$. 的仿射函数。这表明(2.7)。

接下来，我们定义凸函数 $\widetilde{c}\colon\ X \to \mathbb{R}$，其定义为 $\widetilde{c}(x) = f(x) - \langle v,\ x\rangle$ 对所有 $x \in X$. 成立。利用 $f \ge g$属于 $\mathbb{R}^n$ 以及 (2.6)，我们得到关于 $x \in X$ 的以下不等式：

$$\widetilde{c}(x) = f(x) - \langle v, x\rangle \ge g(x) - \langle v, x\rangle = c(x);$$

其中 $c\colon\ X \to \mathbb{R}$ 是强制的。因此， $\widetilde{c}$ 在 X 中也是强制的。此外，对每个 $x \in \mathbb{R}^n$，我们可以利用 (2.7) 写出

$$f(x) = f(P_X(x)) + \langle v, P_{X^\perp}(x)\rangle = \widetilde{c}(P_X(x)) + \langle v, P_X(x)\rangle + \langle v, P_{X^\perp}(x)\rangle = \widetilde{c}(P_X(x)) + \langle v, x\rangle.$$

由此，我们证明了对于所有非仿射凸 L-Lipschitz函数，性质 (1)，(2)，(3) 均成立。

□

在下面的引理中，我们汇总了与定理 2.2 中此类分解相关的若干性质。这些性质在 [6] 中已被隐含地证明并使用；例如，参见该文中的引理 4.4。为完整起见，我们在此给出详细证明。这些性质对于不一定是 Lipschitz 的函数也成立。

引理 2.3. 设 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为非仿射凸函数，使得 $f(x) = c(P_X(x)) + \langle v, x\rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$ ，其中 $X \subset \mathbb{R}^n$ 是一个子空间， $c : X \to \mathbb{R}$ 在 X中为凸且强制的，且 $v \in \mathbb{R}^n$。则对每个 $x \in \mathbb{R}^n$和 $\eta \in \partial f(x)$，我们有 $\eta - v \in \partial c(P_X(x)) \subset X$. 此外，成立

$$X = \operatorname{span}\{\xi_x - \xi_y \ :\ \xi_x \in \partial f(x),\, \xi_y \in \partial f(y),\, x, y \in \mathbb{R}^n\}. \tag{2.8}$$

此外，若 f可表示为形式 $f(x) = \sup\{f(p) + \langle u_p, x-p\rangle\colon\ p \in A\}$, $x \in \mathbb{R}^n$，其中 $A \subset \mathbb{R}^n$且$(u_p)_{p\in A} \subset \mathbb{R}^n$，则

$$X = \operatorname{span}\{u_p - u_q \ :\ p, q \in A\}. \tag{2.9}$$

证明. 给定 $x \in \mathbb{R}^n$以及 $\eta \in \partial f(x)$，为得出矛盾，假设 $\eta - v \notin X$. 则我们可以找到 $w \in X^\perp$，使得 $\langle \eta - v, w\rangle = 1$. 根据 $\partial f(x)$, 的定义，我们可以写成

$$\langle \eta, w\rangle \le f(x+w) - f(x) = c(P_X(x+w)) + \langle v, x+w\rangle - c(P_X(x)) - \langle v, x\rangle = \langle v, w\rangle,$$

因此 $\langle \eta - v, w\rangle \le 0$，矛盾。这表明 $\eta - v \in X$. 现在，对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 和$z \in X$，再次利用 $f = c \circ P_X + \langle v, \cdot\rangle$, ，我们可以写成

$$c(z) - c(P_X(x)) = f(z) - \langle v, z\rangle - f(x) + \langle v, x\rangle \ge \langle \eta - v, z - x\rangle = \langle \eta - v, z - P_X(x)\rangle.$$

因此， $\eta - v \in \partial c(P_X(x))$。

为证明 (2.8)，我们用 Z 表示 f. 的任意两个次微分之差所构成的线性张成。包含关系 $Z \subset X$ 由我们刚刚关于 f 和 c. 的次微分所证明的结果可得。为证明 $X \subseteq Z$，反设存在方向 $w \in X \setminus \{0\}$，满足 $w \in Z^{\perp}$. 。我们固定一点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，并取某个 $\xi_t \in \partial f(x_0 + tw)$。特别地，我们有 $\xi_0 \in \partial f(x_0)$。因此，对于每个 $t \in \mathbb{R}$，都有 $\xi_0 - \xi_t \in Z$，于是

$$0 \leq f(x_0 + tw) - f(x_0) - \langle \xi_0, tw \rangle \leq \langle \xi_t - \xi_0, tw \rangle = 0,$$

即，$f(x_0 + tw) = f(x_0) + \langle \xi_0, tw \rangle$ 对每个 $t \in \mathbb{R}$. 再次利用 $f = c \circ P_X + \langle v, \cdot \rangle$ 我们得到

$$c\,(P_X(x_0) + tw) = f(x_0 + tw) - \langle v, x_0 + tw \rangle = f(x_0) + \langle \xi_0, w \rangle - \langle v, x_0 + tw \rangle, \quad t \in \mathbb{R},$$

从而表明 c 沿直线 $\{P_X(x_0) + tw\}_{t \in \mathbb{R}}$, 不是强制的，矛盾。

最后，为了证明(2.9)，记 $Y =$ 张成$\{u_p - u_q : \ p, q \in A\}$. 显然对每个 $p \in A$都有 $u_p \in \partial f(p)$，因此包含关系 $Y \subset X$ 是(2.8)的推论。反之，如果有 $X \neq Y$，我们可以找到 $w \in (X \cap Y^{\perp}) \setminus \{0\}$。我们固定一点 $q \in A$，并对每个 $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 \leq f(q + tw) - f(q) - \langle u_q, tw \rangle &= \sup_{p \in E} \{ f(p) + \langle u_p, q + tw - p \rangle - f(q) - \langle u_q, tw \rangle \} \\ &= \sup_{p \in E} \{ f(p) + \langle u_p, q - p \rangle - f(q) + \langle u_p - u_q, tw \rangle \} \\ &= \sup_{p \in E} \{ f(p) + \langle u_p, q - p \rangle - f(q) \rangle \} \leq 0, \end{aligned}$$

在最后一个不等式中使用了 $u_p \in \partial f(p)$ 后。因此，对于每个$t \in \mathbb{R}$. ， $f(q + tw) = f(q) + \langle u_q, \ w \rangle t$ 重复一个与证明 (2.8) 几乎相同的论证，我们得到 c 沿直线 $\{P_X(p) + tw\}_{t \in \mathbb{R}}$, 不是强制的，这就产生了矛盾。由此可得 $X = Y$。□

3. Proof of Theorem 1.1

假设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是任意的，$(f, \ G)$: $E \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 是 E 上的一个 1-喷流，且 G 非常数；又设 Y, $X \subset \mathbb{R}^n$ 是线性子空间，使得 f, G, Y, X 在集合 E. 上满足条件 (C_b)、$(\mathsf{S}_{Y,\ X})$、$(\mathsf{C}_{Y,\ X})$、(CW^1_X)。我们还将记

$$L := \sup_{z \in E} |G(z)|. \tag{3.1}$$

在本节中始终成立。

3.1. **第一个极小函数**。我们首先定义

$$m(x) = \sup_{y \in E} \{ f(y) + \langle G(y), x - y \rangle \}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

首先请注意，如果我们固定 $y_0 \in E$, 则可以利用 (3.1) 和条件 (C_b)，对所有 $y \in E$和 $x \in \mathbb{R}^n$ 得到:

$$\begin{aligned} f(y_0) + L|y_0 - x| &\geq f(y_0) + \langle G(y), y_0 - x \rangle \\ &\geq f(y) + \langle G(y), y_0 - y \rangle + \langle G(y), y_0 - x \rangle = f(y) + \langle G(y), x - y \rangle. \end{aligned}$$

因此，对所有 $x \in \mathbb{R}^n$. ，定义 $m(x)$ 的上确界 (3.2) 都是有限的。并且，由于每个函数 $x \mapsto f(y) + \langle G(y) \ x - y \rangle$ 都是凸函数且为 L-Lipschitz 函数，因此 m 也是凸函数且为 L-Lipschitz 函数。此外，应用条件 (C_b)，可知对所有 $x \in \mathbb{R}^n$. ， $m(x) = f(x)$。因此，另一种表示 m 的方式是取以下上确界

$$m(x) = \sup_{y \in E} \{ m(y) + \langle G(y), x - y \rangle \}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.3}$$

特别地，我们推得对所有 $y \in E$， $G(y) \in \partial m(y)$，并且由于 G 不是常函数，我们有 m 在 $\mathbb{R}^n$. 中不是仿射函数

因此，我们可以应用定理 2.2，找到一个线性子空间 $Z \subset \mathbb{R}^n$、凸强制函数$c\colon Z \to \mathbb{R}$ 以及一个向量 $v \in \mathbb{R}^n$，使得 $|v| < L$ 并且

$$m(x) = c\,(P_Z(x)) + \langle v, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

其中 $P_Z\colon \mathbb{R}^n \to Z$ 是到 Z. 上的正交投影。此外，鉴于 (3.3)，我们可以应用引理 2.3 中的公式 (2.9)，推得 $Z = Y = \operatorname{span}\{G(x) - G(y)\colon x, y \in E\}$ 因此我们有

$$m(x) = c(P_Y(x)) + \langle v, x\rangle, \qquad x \in \mathbb{R}^n; c\colon Y \to \mathbb{R} \text{ 凸且强制}; \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad |v| < L. \tag{3.4}$$

我们还注意到，由于 $G(x) \in \partial m(x)$, $x \in E$，引理 2.3 给出

$$Y = \operatorname{span}\{G(x) - v : x \in E\}. \tag{3.5}$$

作为凸强制函数， $c\colon Y \to \mathbb{R}$ 满足以下性质:

$$\text{there exist } 0 < \alpha \le L + |v|,\ \beta \in \mathbb{R} \text{ so that } c(y) \ge a|y| + b \text{ for every } y \in Y. \tag{3.6}$$

这一事实的简单证明如下。必定存在 $a > 0$，使得当$|y|$足够大时有 $c(y) \ge a|y|$， $y \in Y$，因为否则我们可以找到一个序列$(y_j)_j \subset Y$，满足

$$|y_j| \ge j \quad \text{and} \quad c(y_j) \le \frac{1}{j}|y_j| \quad \text{for every} \quad \ell \in \mathbb{N},$$

而 c 的凸性将使我们得到

$$c\left(\frac{j}{|y_j|}y_j\right) \le \frac{j}{|y_j|}c(y_j) + \left(1 - \frac{j}{|y_j|}\right)c(0) \le 1 + \left(1 - \frac{j}{|y_j|}\right)c(0) \le 1 + c(0),$$

这与 c 是强制的相矛盾。因此存在 a， $r > 0$，使得对所有 $|y| \ge r$. 都有 $c(y) \ge a|y|$。容易看出，令 $b = \min\left\{\inf_{B(0,r)} c - \alpha r,\ 0\right\}$，则对每个 $y \in Y$. 都有 $c(y) \ge a|y| + b$。上界$a \le L + |v|$ 由$\operatorname{Lip}(c) \le L + |v|$ 这一事实得出，而这是(3.4)的推论。

3.2. 保持 Lipschitz 常数不变的新数据。 我们的下一个目标是将喷流 (f, G) 的定义扩展到 $E \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 个 $\dim(X) - \dim(Y)$ 个新点，使得新的喷流 $(f^*, G^*)\colon E^* \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$满足 C^1 凸扩张所需的性质，其中 $X = \operatorname{span}\{G^*(x) - G^*(y)\colon x, y \in E^*\}$并且使 G^* 不增加 G. 的上确界

记 $k = \dim Y$和 $d = \dim X$，以及 $w_1, \dots, w_{d-k} \in Y^\perp \cap X$, $\varepsilon \in (0,1)$ $p_1, \dots, p_{d-k}$和锥$V_1, \dots, V_{d-k}$，如条件 $(C_{Y,X})$ 中所述。此外，令 a, b为 (3.6) 中的常数。由于 $|v| < L$ （见 (3.4)），我们可以找到

$$0 < \theta < 1 \text{ such that } \theta \cdot a \cdot \varepsilon < \frac{L - |v|}{2}. \tag{3.7}$$

接下来，我们选择一个足够大的参数 $T > 0$，使得

$$T > \max_{1 \le i < j \le d-k} \frac{|p_i - p_j|}{|w_i - w_j|}, \tag{3.8}$$

$$(\theta \cdot \varepsilon \cdot a)\,T \ge 2 - b + \max_{j=1,\dots,d-k}\{c(P_Y(p_j)) + a|P_Y(p_j)|\}, \quad \text{and} \tag{3.9}$$

$$\frac{\varepsilon \cdot a}{2} \cdot T \min_{1 \le i < j \le d-k} |w_i - w_j|^2 \ge 1 + \max_{1 \le i,j \le d-k}\{|c(P_Y(p_j)) - c(P_Y(p_i)) + \varepsilon \cdot a \cdot \langle w_j, p_i - p_j\rangle|\}. \tag{3.10}$$

我们按如下方式定义新的点及其处的 1-喷射数据

$$q_j = p_j + Tw_j, \quad f^*(q_j) = m(q_j) + 1, \quad G^*(q_j) = v + (\theta \cdot \varepsilon \cdot a) \cdot w_j, \quad j = 1, \dots, d-k. \tag{3.11}$$

注意，条件 (3.8) 确保 $q_i \neq q_j$ 对于 $i \neq j$. 此外，显然 $q_j \in V_j$, 因为 $w_j \in Y^\perp$.特别地，条件 ($C_{Y,X}$) 保证，对于所有 $j = 1, \ldots, d-k.$，都有 $q_j \notin E$

与 [6, 引理 6.2], 中一样，接下来我们证明新的 1-喷射数据与一个 C^1 凸延拓问题相容。这意味着旧数据 (f， G) 与新数据 (f^*， G^*) 共同满足自然的凸性条件 (C_b)。事实上，我们证明该条件具有正下界，这将使我们能够把条件 (CW^1_X) 的有效性也推广到新的喷流上。

引理 3.1。 对于数据 (3.11)，以下结论成立。

(1) $f^*(q_j) - f(x) - \langle G(x)\ q_j - x\rangle \geq 1$ 对每个 $x \in E,\ \ j = 1,\ \ldots\ldots,\ \ d-k.$(2) $f(x) - f^*(q_j) - \langle G^*(q_j)\ x - q_j\rangle \geq 1$ 对每个 $x \in E,\ \ j = 1,\ \ldots\ldots,\ \ d-k.$(3) $f^*(q_i) - f^*(q_j) - \langle G^*(q_j)\ q_i - q_j\rangle \geq 1$ 对每个 $1 \leq i \neq j \leq d-k.$

证明。
(1) 回顾 (3.2) 中 m 的定义，以及 $f^*(q_j) = m(q_j) + 1.$。由此得到以下不等式

$$f^*(q_j) - f(x) - \langle G(x), q_j - x\rangle = m(q_j) - f(x) - \langle G(x), q_j - x\rangle + 1 \geq 1,$$

对所有 $x \in E$、 $j = 1$、……、 $d-k.$
(2) 固定 $x \in E$ 和 $j = 1$、……、 $d-k.$。由 m 和 $w_j \in Y^\perp$ 的公式 (3.4)，容易得到

$$m(q_j) = m(p_j) + \langle v, q_j - p_j\rangle.$$

由这个恒等式和 (3.4) 再次得到

$$m(x) - m(q_j) = m(x) - m(p_j) - \langle v, q_j - p_j\rangle = c(P_Y(x)) - c(P_Y(p_j)) + \langle v, x - q_j\rangle. \tag{3.12}$$

考察 (3.11) 中 $f^*(q_j)$ 和 $G^*(q_j)$ 的定义，回想 $m = f$ 在 E 上（正如我们在第 3.1 节中所观察到的），并利用 (3.12)，可得

$$\begin{aligned} f(x) - f^*(q_j) - \langle G^*(q_j), x - q_j\rangle &= c(P_Y(x)) - c(P_Y(p_j)) + \langle v - G^*(q_j), x - q_j\rangle - 1 \\ &= c(P_Y(x)) - c(P_Y(p_j)) - \theta\cdot\varepsilon\cdot a\langle w_j, x - q_j\rangle - 1 \\ &= c(P_Y(x)) - c(P_Y(p_j)) - \theta\cdot\varepsilon\cdot a\langle w_j, x - p_j\rangle + (\theta\cdot\varepsilon\cdot a)T - 1. \end{aligned}$$

利用 (3.9)，最后一项不小于

$$c(P_Y(x)) - b + 1 - \theta\cdot\varepsilon\cdot a\langle w_j, x - p_j\rangle.$$

再利用 (3.6)，最后一项又大于或等于

$$a|P_Y(x)| + a|P_Y(p_j)| + 1 - \theta\cdot\varepsilon\cdot a\langle w_j, x - p_j\rangle \geq a|P_Y(x - p_j)| + 1 - \theta\cdot\varepsilon\cdot a\langle w_j, x - p_j\rangle.$$

为从下方估计最后一项，我们作如下讨论。当 $\langle w_j, x - p_j\rangle \leq 0$, 时，最后一项显然不小于 1. 而当 $\langle w_j, x - p_j\rangle > 0$ 时，我们利用条件 ($C_{Y,X}$)（即$x \notin V_j$）来估计

$$a|P_Y(x - p_j)| + 1 - \theta\cdot\varepsilon\cdot a\langle w_j, x - p_j\rangle \geq a\langle w_j, x - p_j\rangle + 1 - \theta\cdot\varepsilon\cdot a\langle w_j, x - p_j\rangle \geq 1.$$

沿着这一系列不等式，我们得到所需的估计。
(3) 设 $1 \leq i \neq j \leq d-k$。根据 (3.11) 中 f^* 的定义、公式 (3.4) 以及 $w_i,\ \ w_j \in Y^\perp$ 这一事实，我们很容易得到

$$f^*(q_i) - f^*(q_j) = c(P_Y(p_i)) - c(P_Y(p_j)) + \langle v, q_i - q_j\rangle.$$

由这个恒等式以及 (3.11) 中 q_i, q_j 和 G^* 的定义，可得

$$\begin{aligned} f^*(q_i) - f^*(q_j) - \langle G^*(q_j), q_i - q_j\rangle &= c(P_Y(p_i)) - c(P_Y(p_j)) + \langle v, q_i - q_j\rangle - \langle v + \varepsilon\cdot\alpha\cdot w_j, q_i - q_j\rangle \\ &= c(P_Y(p_i)) - c(P_Y(p_j)) - \varepsilon\cdot a\langle w_j, p_i - p_j + T(w_i - w_j)\rangle \\ &= c(P_Y(p_i)) - c(P_Y(p_j)) - \varepsilon\cdot a\langle w_j, p_i - p_j\rangle + \varepsilon\cdot a\cdot T\,(1 - \langle w_i, w_j\rangle) \\ &= c(P_Y(p_i)) - c(P_Y(p_j)) - \varepsilon\, a\langle w_j, p_i - p_j\rangle + \frac{\varepsilon\cdot a}{2}\cdot T|w_i - w_j|^2. \end{aligned}$$

在最后一个等式中，我们用到了 $|w_i| = |w_j| = 1$. 最后一项显然大于或等于 1，这是由 (3.8) 得出的。□

3.3. **扩展到有限多个点**。给定初始数据 E, f, G 以及新的数据 (3.11)，我们定义扩展喷射 E^*, f^*, G^*:

$$E^* := E \cup \{q_1, \dots, q_{d-k}\}, \quad (f^*, G^*) := \begin{cases} (f, G) & \text{on } E \\ \text{as in (3.11)} & \text{on } \{q_1, \dots, q_{d-k}\}. \end{cases} \tag{3.13}$$

下面的引理给出了新喷流 (E^*, f^*, G^*)的关键性质。对于我们的目的而言，尤其重要的是，G^* 保留了 G. 的上确界

引理 3.2。在 (3.13) 中定义的喷流具有以下性质。

(1) $X =$ 张成$\{G^*(x) - G^*(y)\colon\ x, y \in E^*\}$.*(2)* $\sup_{x\in E^*}|G^*(x)| = \sup_{x\in E}|G(x)| = L$。*(3)* 对于 (E^*, f^*, G^*)，条件 (C_b) 成立，可代替 (E, f, G): G^* 在 E^* 上连续，且对于所有 $x, y \in E^*$., $f^*(x) \geq f^*(y) + \langle G^*(y)\ x - y\rangle$。*(4)* 对于 (E^*, f^*, G^*)，条件 (CW^1_X) 成立，可代替 (E, f, G): 对于任意两个序列 $(x_j)_j$、$(z_j)_j \subset E^*$，只要 $(P_X(x_j))_j$ 有界，就有

$$\lim_{j\to\infty}\left(f^*(x_j) - f^*(z_j) - \langle G^*(z_j), x_j - z_j\rangle\right) = 0 \implies \lim_{j\to\infty}|G^*(x_j) - G^*(z_j)| = 0.$$

证明。

(1) 这很容易由 (3.5)、$(G^*(q_j))_{j=1}^{d-k}$ 在 (3.11) 中的定义，以及向量 $w_1, \dots, w_{d-k}$ 线性无关且包含于 $Y^\perp$. 这一事实推出。

(2) 回忆一下，L 是 G 在 E. 上的上确界。此外，$G^*(q_j) = v + (\theta\cdot\varepsilon\cdot a)\cdot w_j$（见 (3.11)）；其中 θ 如 (3.7) 中所述。因此，对所有 $j = 1, \dots, d-k$.，都有 $|G^*(q_j)| \leq \frac{L+|v|}{2}$。但根据 (3.4)，还有 $|v| < L$,。由此可得，对所有 $x \in E^*$.，都有 $|G^*(x)| \leq L$ 。

(3) 正如我们在 (3.11) 之后立即注意到的，点 $q_1, \dots, q_{d-k}$ 互不相同，且位于 E. 之外。因此，G^* 在 E^* 上连续，正如 G 在 E 上连续一样。此外，条件 (C_b) 对于 (f, G) 成立，再结合引理 3.1，可得

$$f^*(x) \geq f^*(y) + \langle G^*(y), x - y\rangle \quad \text{for all} \quad x, y \in E^*.$$

(4) 根据引理 3.1，极限

$$\lim_{j\to\infty}\left(f^*(x_j) - f^*(z_j) - \langle G^*(z_j), x_j - z_j\rangle\right) = 0$$

意味着序列 $(x_j)_j$，$(z_j)_j$ 要么是平稳的，且都等于某个 q_i，要么在足够大的 j. 时完全包含于 E 中。前一种情形下结论显然成立，而后一种情形下我们得到

$$\lim_{j\to\infty}|G^*(x_j) - G^*(z_j)| = \lim_{j\to\infty}|G(x_j) - G(z_j)| = 0$$

由条件 (CW^1_X) 得出。□

3.4. **第二个极小函数**。我们定义

$$m^*(x) = \sup_{y\in E^*}\{f^*(y) + \langle G^*(y), x-y\rangle\}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.14}$$

牢记引理 3.2 中的性质 (2) 和 (3)，我们可以沿用第 3.1 节中关于m 的论证，推得 m^* 定义良好、是 L-Lipschitz 且为凸函数，并且 $m^*(x) = f^*(x)$ 且$G^*(x) \in \partial m^*(x)$，对所有 $x \in E^*$.

应用定理 2.2，我们可以将 m^* 写作

$$m^*(x) = c^*(P_X(x)) + \langle v^*, x\rangle, \qquad x \in \mathbb{R}^n;\ c^*:\ X \to \mathbb{R}\text{凸且强制};\ v^* \in \mathbb{R}^n,\ |v^*| < L \tag{3.15}$$

请注意，我们结合引理 2.3 的公式 (2.2) 以及引理 3.2(1) 应用了定理 2.2。

最后，引理 3.2 的性质 (4) 可用于得到以下关于 c^* 可微性的重要引理，其证明与 [6,引理 4.6] 的证明完全相同。

引理 3.3。函数 *on* c^*在 P_X（E^*）上可微，且 $\nabla c^*(P_X(x)) = G^*(x) - v^*$对所有 $x \in E^*$ 都成立。

3.5. **第一个 C^1 凸延拓**。我们将对函数 c^*. 应用以下延拓引理

引理 3.4。设 h: $X \to \mathbb{R}$ 是一个凸强制函数，且 h 在 X. 的一个闭子集 A 上可微。存在 $H \in C^1$（X）凸强制，使得 $H = h$ 且 $\nabla H = \nabla h$ 在 A. 上

证明。参见 [6,引理 6.5]。 □

由于 $c^*: X \to \mathbb{R}$ 是凸强制的，引理 3.3 和 3.4 给出一个凸强制函数$H \in C^1(X)$，使得在 $P_X(E^*)$ 上有 $(H, \nabla H) = (c^*, \nabla c^*)$。我们定义

$$\widetilde{F}(x) = H(P_X(x)) + \langle v^*, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.16}$$

函数 $\widetilde{F}$ 是 $C^1(\mathbb{R}^n)$ 且为凸函数，因为 $H: X \to \mathbb{R}$ 是凸函数，且属于 $C^1(X)$ 类。由于对于 $y \in P_X(E^*)$，$H(y) = c^*(y)$，公式 (3.15) 告诉我们，只要 $x \in E^*$,

$$\widetilde{F}(x) = H(P_X(x)) + \langle v^*, x\rangle = c^*(P_X(x)) + \langle v^*, x\rangle = m^*(x) = f^*(x).$$

由引理 3.3 以及再次应用 (3.15)，我们可知，对所有 $x \in E^*$

$$\nabla\widetilde{F}(x) = \nabla H(P_X(x)) + v^* = G^*(x) - v^* + v^* = G^*(x).$$

3.6. **精确的 C^1 凸延拓**。 最后，我们定义函数

$$F(x) := \inf\{\widetilde{F}(y) + L|x-y| \ :\ y \in \mathbb{R}^n\} \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.17}$$

本节证明 F 是定理 1.1 所需的延拓。事实上，我们将在下一个引理中证明，在扩展集 E^* 上有 $(F, \nabla F) = (f^*, G^*)$，进而根据 (3.13)，在 E上有 $(F, \nabla F) = (f, G)$。

引理 3.5。 公式 (3.17) 定义了一个凸的 *Lipschitz* 函数 F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，其 $\mathrm{Lip}(F) \le L$ 且 $m^* \le F \le \widetilde{F}$ 在 $\mathbb{R}^n$. 中特别地， $F = f^*$ 在 E上，并且 F在 E上可微，满足 $\nabla F(y) = G^*(y)$对所有 $y \in E^*$.

证明。 正如我们在第 3.5 节中所证明的，在 E^* 上，$(F, \nabla F) = (f^*, G^*)$，因此，由于 F 的凸性，我们有

$$\widetilde{F}(x) \ge \widetilde{F}(y) + \langle\nabla\widetilde{F}(y), x-y\rangle = f^*(y) + \langle G^*(y), x-y\rangle$$

对每个 x, $y \in E^*$ 都成立。根据公式 (3.14)，这个不等式给出 $F \geq m^*$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中成立。正如 (3.14) 中所指出的， m^* 是 L-Lipschitz 的，因此

$$\widetilde{F}(y) + L|x-y| \geq m^*(y) + L|x-y| \geq m^*(x)$$

对所有 x, $y \in \mathbb{R}^n$. 这意味着 F 定义良好， $F \geq m^*$ 属于 $\mathbb{R}^n$，并且 F 是 L-Lipschitz 的，因为它是有限个 L-Lipschitz函数的下确界。利用 F的凸性，下确界卷积的一个标准论证表明， F 也是凸的。为完整起见，我们给出其证明。设点 x、 $z \in \mathbb{R}^n$、$\lambda \in [0,1]$以及 $\varepsilon > 0$，我们可以 y_x, $y_z \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$F(x) \geq \widetilde{F}(y_x) + L|x-y_x| - \varepsilon, \quad F(z) \geq \widetilde{F}(y_z) + L|z-y_z| - \varepsilon.$$

根据 $F(\lambda x + (1-\lambda)z)$ 的定义， X 中的凸性 F 以及 y_x 和 y_z 的取值，得到以下不等式链。

$$\begin{aligned}
F(\lambda x + (1-\lambda)z) &\leq \widetilde{F}(\lambda y_x + (1-\lambda)y_z) + L|\lambda x + (1-\lambda)z - (\lambda y_x + (1-\lambda)y_z)| \\
&\leq \lambda \widetilde{F}(y_x) + (1-\lambda)\widetilde{F}(y_z) + L\lambda|x-y_x| + L(1-\lambda)|z-y_z| \\
&\leq \lambda(\widetilde{F}(y_x) + L|x-y_x|) + (1-\lambda)(\widetilde{F}(y_z) + L|z-y_z|) \\
&\leq \lambda(F(x)+\varepsilon) + (1-\lambda)(F(z)+\varepsilon) \\
&= \lambda F(x) + (1-\lambda)F(z) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$，由上可知 F 是凸的。

不等式 $F \leq F$由（3.17）显然成立。下面证明 $(F, \nabla F) = (f^*, G^*)$ 在 E^*上成立。我们在第 3.4 节中证明了，$m^* = f^*$ 在 E^* 上成立，并且对于所有 $y \in E^*$， $G^*(y) \in \partial m^*(y)$；在第 3.5 节中证明了 $(F, \nabla F) = (f^*, G^*)$ 在 E^*. 上成立。由于 $m^* \leq F \leq F$，这立即推出 $F = f^*$在 E^*上成立。此外，对于 $y \in E^*$和 $x \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{m^*(x) - f^*(y) - \langle G^*(y), x-y\rangle}{|x-y|} \\
&\leq \frac{F(x) - f^*(y) - \langle G^*(y), x-y\rangle}{|x-y|} \\
&\leq \frac{\widetilde{F}(x) - f^*(y) - \langle G^*(y), x-y\rangle}{|x-y|},
\end{aligned}$$

其中最后一项在 $|x-y| \to 0^+$. 时趋于 0。由 F的凸性，我们可以得出， F 在 y 处可微，并且对每个 $y \in E^*$. $\square$, $\nabla F(y) = G^*(y)$

接下来证明 F 具有所需的全局行为。回顾一下， X_F 是 $\mathbb{R}^n$ 的唯一线性子空间，使得 F可以写成 $F(x) = C(P_{X_F}(x)) + \langle u, x\rangle, x \in \mathbb{R}^n$，其中 C: $X_F \to \mathbb{R}$ 在 X_F 中凸且强制，并且 $u \in \mathbb{R}^n$.

引理 3.6。 函数 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足 $X_F = X$.

证明。 记 $Z = X_F$。由定理 2.2，我们可以将 $F(x)$ 写成 $= C(P_Z(x)) + \langle u, x\rangle, x \in \mathbb{R}^n$，其中$C$: $Z \to \mathbb{R}$ 在 X_F 中凸且强制，并且 $u \in \mathbb{R}^n$.

现在，根据公式 (3.16)，沿函数 w 生成的直线是仿射的。但由于 $F \leq F$ 属于 $\mathbb{R}^n$ ，我们有

$$C(tP_Z(w)) = F(tw) - \langle u, w\rangle t \leq \widetilde{F}(tw) - \langle u, w\rangle t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

由于根据上述内容， $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(tw)$ 在 Z 中是仿射的，而 C 是强制的，因此这个不等式意味着必然有$P_Z(w) = 0$，也就是说 $w \in Z^\perp$. 因此，我们已经证明了包含关系 $Z \subset X$.

反向包含关系 $X \subset Z$ 可以通过不等式 $m^* \leq F$ 以及与上述类似的论证来证明；也可以利用引理 2.3 中的公式 (2.2) 和 (2.8)，以及 $\nabla F = G^*$ 在 E^* 上这一事实来证明:

$$X = \operatorname{span}\{G^*(x) - G^*(y) : x, y \in E^*\} \subseteq \operatorname{span}\{\xi - \eta : \xi \in \partial F(x),\, \eta \in \partial F(y),\, x, y \in \mathbb{R}^n\} = Z.$$

□

为了完成定理 1.1 的证明，尚需证明 $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$。

引理 3.7。 函数 F 属于 $C^1(\mathbb{R}^n)$类。

证明。 由 F的凸性可知，只需证明 F 在每个 $x \in \mathbb{R}^n$. 处可微。此外， F 在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 处可微，等价于证明

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) + F(x_0 - h) - 2F(x_0)}{|h|} = 0. \tag{3.18}$$

为证明 (3.18)，令 $(h_k)_k \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 为满足 $|h_k| \downarrow 0.$ 的一个序列。根据 $F(x_0)$，我们可以找到一个序列 $(y_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ ，使得

$$\widetilde{F}(y_k) + L|x_0 - y_k| \leq F(x_0) + \frac{|h_k|}{k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.19}$$

特别地，利用 (3.16) 可得

$$H(P_X(y_k)) + \langle v^*, y_k \rangle + L|x_0 - y_k| \leq F(x_0) + \frac{|h_k|}{k} \text{ for all } k;$$

其中 $|v^*| < L$ 和 $H:\ X \to \mathbb{R}$ 是凸的、强制的，且 $C^1(X)$。 由此可得

$$\begin{aligned} H(P_X(y_k)) - L|y_0| &\leq H(P_X(y_k)) - L|y_k| + L|x_0 - y_k| \\ &\leq H(P_X(y_k)) + \langle v^*, y_k \rangle + L|x_0 - y_k| \leq F(x_0) + \frac{|h_k|}{k}. \end{aligned}$$

H的强制性意味着序列 $(P_X(y_k))_k$有界。根据 $F(x_0 \pm h_k)$的定义，可得

$$\sim F(x_0 + h_k) \leq F(y_k + h_k) + L|x_0 + h_k - (y_k + h_k)| = H(P_X(y_k + h_k)) + \langle v^*, y_k + h_k \rangle + L|x_0 - y_k|,$$

$$F(x_0 - h_k) \leq \widetilde{F}(y_k - h_k) + L|x_0 - h_k - (y_k - h_k)| = H(P_X(y_k - h_k)) + \langle v^*, y_k - h_k \rangle + L|x_0 - y_k|.$$

结合 (3.19)，这些不等式给出以下估计

$$\begin{aligned} F(x_0 + h_k) + F(x_0 - h_k) - 2F(x_0) &\\ &\leq H(P_X(y_k + h_k)) + H(P_X(y_k - h_k)) + 2\langle v^*, y_k \rangle + 2L|x_0 - y_k| - 2F(x_0) \\ &\leq H(P_X(y_k + h_k)) + H(P_X(y_k - h_k)) + 2\langle v^*, y_k \rangle - 2\widetilde{F}(y_k) + \frac{2|h_k|}{k} \\ &\leq H(P_X(y_k + h_k)) + H(P_X(y_k - h_k)) - 2H(P_X(y_k)) + \frac{2|h_k|}{k}. \end{aligned}$$

记作 $z_k = P_X(y_k)$ 和 $\xi_k = P_X(h_k)$，我们有 $|h_k| \leq |\xi_k|$ ，上述不等式给出

$$\frac{F(x_0 + h_k) + F(x_0 - h_k) - 2F(x_0)}{|h_k|} \leq \frac{H(z_k + \xi_k) + H(z_k - \xi_k) - 2H(z_k)}{|\xi_k|} + \frac{2}{k}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.20}$$

其中 $(z_k)_k \subset X$ 有界，且 $|\xi_k| \to 0.$ 。我们声称:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{H(z_k + \xi_k) + H(z_k - \xi_k) - 2H(z_k)}{|\xi_k|} = 0. \tag{3.21}$$

事实上，反设存在 $\varepsilon > 0$，以及 $(z_k)_k$ 和 $(\xi_k)_k$ 的子列（仍分别记为 $(z_k)_k$ 和 $(\xi_k)_k$），使得

$$\frac{H(z_k+\xi_k)+H(z_k-\xi_k)-2H(z_k)}{|\xi_k|} \geq \varepsilon \text{ for all } k \in \mathbb{N}.$$

进一步取一个子列，我们还可以假设 $(z_k)_k \to z_0 \in X$. 根据 X中的 H 的凸性和可微性，我们有以下不等式

$$H(z_k) \geq H(z_k+\xi_k) - \langle \nabla H(z_k+\xi_k), \xi_k \rangle$$
$$H(z_k) \geq H(z_k-\xi_k) + \langle \nabla H(z_k-\xi_k), \xi_k \rangle,$$

结合前面的 ε下界，可得

$$\varepsilon \leq \frac{\langle \nabla H(z_k+\xi_k) - \nabla H(z_k-\xi_k), \xi_k \rangle}{|\xi_k|} \leq |\nabla H(z_k+\xi_k) - \nabla H(z_k-\xi_k)|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

由于 $H \in C^1(X)$，梯度 $\nabla H : X \to X$ 连续，并且 $(z_k)_k$ 收敛到 z_0，且 $(\xi_k)_k \to 0$，最后一项趋于 0，因为 $k \to \infty$，这就产生了矛盾。这说明 (3.20) 成立；结合 (3.20)，便可证明 (3.18)，证毕。□

关于定理 1.1 的证明，我们注意到以下几点。

注记3.8。 假设 (f, G) 满足 E 上的条件 (C_b)、$(S_{Y,X})$、$(C_{Y,X})$、(CW^1_X)，并令$L = \sup_{y\in E} |G(y)|$. 如果我们希望得到 (f, G) 的凸Lipschitz扩张 $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$，且它仅满足

$$\mathrm{Lip}(F) \leq \varepsilon + \sup_{y\in E} |G(y)|,$$

对于 $\varepsilon > 0$，并且在 X_F 不一定要指定给定的全局行为 $X \subset \mathbb{R}^n$ 的情况下，只需考虑一个 $C^1(\mathbb{R}^n)$ 凸延拓 $\widetilde{F}$of $(f,\ G)$，（例如，直接将定理 1.14] 应用于 $(f,\ G)$）然后定义

$$F(x) = \inf\{\widetilde{F}(y) + (L+\varepsilon)|x-y| : y \in \mathbb{R}^n\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

通过检查引理 3.7 的证明可以看出，在这种情况下证明会更容易。我们的目的是构造一个延拓 F，其最佳常数为 $\mathrm{Lip}(F) = L$，这促使我们开展第 2 节和第 3 节中的工作。

Acknowledgements

我获得了来自 HorizonEuropeFunding 项目的玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里（MSCA-EF）欧洲研究员项目资助，资助编号为 101151594。

References

1. D. Azagra, *Global and fine approximation of convex functions*, 伦敦数学会会刊 (3) **107** (2013), no. 4, 799–824. 2. D. Azagra, M. Drake, and P. Haj-lasz, *C^2-Lusin approximation of strongly convex functions*, 数学发明 **236** (2024), no. 3, 1055–1082. 3. D. Azagra and P. Haj-lasz, *Lusin-type properties of convex functions and convex bodies*, 几何分析杂志 **31** (2021), no. 12, 11685–11701. 4. D. Azagra, E. Le Gruyer, and C. Mudarra,

Explicit formulas for $C^{1\ 1}$ and $C^{1\ \omega}_{\mathrm{conv}}$ extensions of 1-jets in Hilbert and ,, superreflexive spaces **274** 2018 10, 3003 3032

泛函分析杂志 ( ), no. – . 5. D. Azagra and C. Mudarra,

Whitney extension theorems for convex functions of the classes C^1 and $C^{1,\omega}$, 伦敦数学会会刊 (3) **114** (2017), no. 1, 133–158. 6. , *Global geometry and C^1 convex extensions of 1-jets*, 分析与偏微分方程 **12** (2019), no. 4, 1065–1099. 7. ,

Smooth convex extensions of convex functions, 变分法与偏微分方程 **58** (2019), no. 3, Paper No. 84, 27.

8. , *Convex C^1 extensions of 1-jets from compact subsets of Hilbert spaces*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 358 (2020), no. 5, 551–556. 9. , *$C^{1,\omega}$ extension formulas for 1-jets on Hilbert spaces*, Adv. Math. 389 (2021), Paper No. 107928, 44. 10. A. Daniilidis, M. Haddou, E. Le Gruyer, and O. Ley, *Explicit formulas for $C^{1\,1}$ Glaeser-Whitney extensions of 1-Taylor fields in Hilbert spaces* **146** 2018 10, 4487 4495 Amer. Math. Soc. ( ), no. – . 11. T.-F. Deck and C. Mudarra, *Differentiable convex extensions with sharp Lipschitz constants*, preprint (2025), https://arxiv.org/abs/2512.13324. 12. M.-K. Drake, *Finiteness principles for smooth convex functions*, Adv. Math. 445 (2024), Paper No. 109652, 28. 13. C. Fefferman, *A sharp form of Whitney's extension theorem*, Ann. of Math. (2) 161 (2005), no. 1, 509–577. 14. , *Whitney's extension problem for C^m*, Ann. of Math. (2) 164 (2006), no. 1, 313–359. 15. , *C^m extension by linear operators*, Ann. of Math. (2) 166 (2007), no. 3, 779–835. 16. C. Fefferman, A. Israel, and G.K. Luli, *Sobolev extension by linear operators* **27** 2014 1, , J. 69 145 Amer. Math. Soc. ( ), no. – . 17. C. Fefferman and B. Klartag, *Fitting a C^m-smooth function to data. I*, Ann. of Math. (2) 169 (2009), no. 1, 315–346. 18. C. Fefferman and P. Shvartsman, *Sharp finiteness principles for Lipschitz selections*, Geom. Funct. Anal. 28 (2018), no. 6, 1641–1705. 19. A. Israel, *A bounded linear extension operator for $L^{2,p}(\mathbb{R}^2)$*, Ann. of Math. (2) 178 (2013), no. 1, 183–230. 20. M. Jiménez-Sevilla, P. Sánchez-Gonzalez, and L. Sanchez-Gonzalez, *On smooth extensions of vector-valued functions defined on closed subsets of Banach spaces* **355** 2013 4, 1201 1219, **392** 2025 , Math. Ann. ( ), no. – corrigendum in Math. Ann. ( ), no. 2, 2969 2979– . 21. M. Johanis and L. Zajíček, *On C^1 Whitney extension theorem in Banach spaces*, 泛函分析杂志 289 (2025), no. 9, Paper No. 111061, 34. 22. E. Le Gruyer, *Minimal Lipschitz extensions to differentiable functions defined on a Hilbert space*, Geom. Funct. Anal. 19 (2009), no. 4, 1101–1118. 23. A. Pinamonti, G. Speight, and S. Zimmerman, *A C^1 Whitney extension theorem for horizontal curves in the Heisenberg group* **371** 2019 12, 8971 8992 , Trans. Amer. Math. Soc. ( ), no. – . 24. , *Higher order Whitney extension and Lusin approximation for horizontal curves in the Heisenberg group*, J. Math. Pures Appl. (9) 188 (2024), 320–344. 25. P. Shvartsman, *Whitney-type extension theorems for jets generated by Sobolev functions*, Adv. Math. 313 (2017), 379–469. 26. J. C. Wells, *Differentiable functions on Banach spaces with Lipschitz derivatives*, J. Differential Geometry 8 (1973), 135–152. 27. H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), no. 1, 63–89. 28. S. Zimmerman, *Whitney's extension theorem and the finiteness principle for curves in the Heisenberg group*, Rev. Mat. Iberoam. 39 (2023), no. 2, 539–562.

Department of Mathematical Sciences, Norwegian University of Science and Technology, 7941 Trondheim, Norway*Email address*: carlos.mudarra@ntnu.no