arXiv:2602.05652v1 [math.NT] 5 Feb 2026

大秩双曲格的对称

TORBEN GRABBEL、GEBHARD MARTIN、GIACOMO MEZZEDIMI、MAIA RAITZ VON FRENTZ 和 PAUL JAKOB SCHMIDT

摘要。对于偶、整双曲格 L， L 的对称群是 L 的等距变换群关于 (-2)-反射的 Weyl 子群之商。按照 Nikulin 的定义， L 的例外格是由在 L 的对称群作用下具有有限轨道的元素生成的子格。我们证明，秩至少为 46 的每个双曲格都有平凡的例外格。特别地，每个这样的格都存在一个具有最大 Salem 次数的对称变换。

1. 引言

1.1. 对称与例外格。 设 L 是一个偶、整双曲格。$\mathcal{D}_L = \mathrm{O}^+(L)/W(L)$ 是 L 的正等距变换群关于沿 (-2)-根的反射所生成的 Weyl 子群之商，称为 L的对称群。Nikulin[10, 11] 和 Vinberg [13] 在 80 年代的奠基性工作，给出了有限对称群双曲格的完整分类。最近，Yu [16] （针对 K3 曲面的 Picard 格）和 Brandhorst–Mezzedimi [3, 2], 将其推广，分类了具有几乎阿贝尔对称群的双曲格，即包含一个有限指数阿贝尔子群的双曲格。这类双曲格的最大秩为 26，由幺模格 $\mathrm{II}_{1,25} := U \oplus \Lambda$ 达到，其中 Λ 表示 Leech 格。

为了刻画一般双曲格的对称群的复杂性，Nikulin 在 [12] 引入了例外格的概念：若 L 是一个双曲格，那么例外格 $E(L) \subseteq L$ 是由在 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$ 下具有有限轨道的元素生成的子格。根据 [12, §4], ，非平凡例外格有以下三种可能：

(1) $E(L)$ 是一个双曲格。因此 $E(L) = L$，特别地，$\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$ 是有限群。(2) $E(L)$ 是负半定的。因此它包含一个各向同性向量，故 L 是一个*Borcherds* 格 （见 [3,定义 1.1]）。特别地，$\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$ 几乎是阿贝尔群。(3) $E(L)$ 是负定的。

如上所述，满足 (1) 或 (2) 的格已经完成分类。此外，Nikulin 在 [12, 定理 4.4] 中证明，对于秩为 ≥ 3 的固定双曲格，具有非平凡例外格的格只有有限多个。本文旨在通过证明在秩足够大时 $E(L)$实际上是平凡的，进一步推进情形 (3) 的完整分类。更准确地说，我们将证明以下结论：

定理 1.1. 设 L 是秩至少为 46 的双曲格。那么， L的例外格是平凡的。

特别是，对具有非平凡例外格的双曲格进行分类成为一个有限问题：

推论 1.2. 在等距变换意义下，秩为 ≥ 3 且具有非平凡例外格的双曲格只有有限多个。

日期：2026年2月6日。

注意，在秩为 2 时，双曲格具有非平凡例外格，当且仅当它的有限对称群是有限的；等价地，当且仅当它表示 0 或 -2 （见 [6, 推论 3.4]）。

根据推论 1.2 中的有限性结果，自然会问：具有非平凡例外格的双曲格的最大秩是多少？若 $L := \mathrm{II}_{1,25}$，那么 Borcherds 已在 [1] 指出， $E(L)$ 的秩为 1，且由唯一的尖点（即基本域 $\mathcal{D}_L$ 闭包中的本原各向同性向量）生成，该尖点具有无限稳定子。我们不知道任何秩更高的例子。秉承 [10, 11, 13, 3], 中的分类思路，对具有非平凡例外格的双曲格进行完整分类将很有意义，从而完成 [12]中的 Nikulin纲领。

1.2. 来自 K3 曲面的动机及其应用。 若 $L = \mathrm{Pic}(X)$ 是复 K3 曲面 X 的 Picard格，那么 L 中有效（-2）曲线的类决定了一个基本域 $\mathcal{D}_L$，用于描述 $W(L)$ 在 L 上的作用，以及相应的作用

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}(X) & \to & \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L) \\ g & \mapsto & g^* \end{array}$$

具有有限的核和余核。本文所研究的 L 的尖点 对应于 X 的椭圆纤维化，而具有无限稳定子的尖点对应于其雅可比簇的 Mordell–Weil群为无限群的椭圆纤维化。若 X 至少存在一个具有无穷自同构群的椭圆纤维化，则例外格是 $\mathrm{Pic}(X)$ 的本原子格，由所有包含在这类椭圆纤维化的纤维中的 (-2)-曲线生成（参见命题 3.3）。

为了衡量自同构 g 的复杂性，我们考察 $f = g^*$ 的特征多项式。它在 $L_{\mathbb{R}}$ 上分解为 $S(x)C(x)$, 其中 $S(x)$ 是一个 Salem多项式（或二次多项式，或平凡多项式），称为***Salem*** 因子；而 $C(x)$ 是分圆多项式的乘积（见 [4, Définition 1.2] 之前的讨论）。Salem 因子尤其值得关注，因为其最大根的对数等于 X [7, 14] 的拓扑熵。因此，为了衡量这个数的复杂程度，我们将 f 的***Salem*** 次数 定义为 f 的次数；由于这个次数总是偶数，当 $\mathrm{rk}(L)$ 为偶数时，若 f 的 Salem 次数为 $\mathrm{rk}(L)$，或当 $\mathrm{rk}(L)$ 为奇数时，若 f 的 Salem 次数为 $\mathrm{rk}(L)-1$，则称 f 具有最大 ***Salem*** 次数 。

现在请注意，这些定义完全没有用到存在一个底层 K3 曲面 X这一事实。事实上，为了将 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$ 视为 $\mathrm{O}^+(L)$ 的子群而需要选择的 $\mathcal{D}_L$，也无关紧要，因为任意两种选择都会得到共轭子群。因此，我们关于双曲格的结果可用于将文献中关于以例外格描述 K3 曲面自同构的结论，应用于对称群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$。Yu [15, 定理 6.2] 给出了这样一个结论。对于偶数 Picard秩的 K3 曲面情形，原证明很容易推广到抽象情形，我们可以用本文的术语将结果表述如下：

定理1。 3 （Yu）。设 L 是一个例外格平凡的双曲格 $E（L）$。则 ：

(1) 唯一的 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$-不变的 $\mathbb{R}$-线性子空间是 $L_{\mathbb{R}}$ 中的 $\{0\}$ 和 $L_{\mathbb{R}}$。*(2)* 存在一个具有最大 ***Salem*** 次数的对称变换 $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$。此外，若 $\mathrm{rk}(L) \geq 4$ 为偶数，则条件 $E（L） = 0$、*(1)* 和 *(2)* 彼此等价。

根据注记 3.4，当 $\mathrm{rk}(L) \geq 20$ 时，总存在一个具有无限稳定子的尖点；而根据主定理1.1，只要 $\mathrm{rk}(L) \geq 46$，例外格便是平凡的。因此，我们得到关于 Salem 次数的如下推论：

推论1.4. 设 L是一个秩至少为46的双曲格。那么，以下结论成立：

(1) 不存在 $L_{\mathbb{R}}$的非平凡$\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$-不变 $\mathbb{R}$-线性子空间。*(2)* 存在一个具有最大 ***Salem*** 次数的等距变换 $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$ 。

1.3. 证明的策略与提纲。 定理 1.1 的证明的出发点，是对双曲格的例外格的显式描述，最初源于 Nikulin [12,定理 4.2]（另见命题 3.3）。更精确地说，它断言：只要每个单（-2）-根 $r \in L$ 都容许一个具有无限稳定子 $e \in \mathcal{D}_L$ 的尖点，使得 $e.r > 0$，则 $E(L)$是平凡的。

现在设 L 是一个秩至少为 46 的双曲格。取 L 的任意一个极大超格后，我们便可将问题归结为形如 $L = U \oplus E_8^n \oplus M$ 的格，其中 $n \geq 5$，且 M 的秩至多为 11（参见命题 2.8）。利用等距变换 $U \oplus E_8^3 \cong U \oplus \Lambda$，以及 Leech 格 Λ 不含 (-2)-根这一事实，我们推得例外格 $E(L)$ 包含于 M。由于 M 的根部分只有有限种可能，我们在第 4 节证明，对于所有这些可能性，$E(L) = 0$，从而完成定理 1.1 的证明。

鉴于我们方法的性质，我们预计定理 1.1 中的界限远非最优。此外，很可能通过扩展 Dynkin 图对我们在第 4 节中的论证进行改进（或许借助计算机辅助），能够使定理 1.1 中的界限大幅提高。

我们简要概述本文的结构。第 2 节回顾负定格和双曲格的基本性质，并在命题 2.8 中证明双曲格的极大超格的结构结果。第 3 节回顾 Nikulin 对例外格的定义，以及命题 3.3 中给出的显式描述。最后，我们在第 4 节证明定理 1.1。

致谢。我们衷心感谢马克斯·普朗克数学研究所（波恩）给予我们的热情接待与支持。我们在一次实习项目期间开始撰写本文。

2. 格的预备知识

2.1. 记号。格 L 是一个有限秩的自由 $\mathbb{Z}$-模，带有一个对称、非退化的双线性形式 $(-.-) : L \times L \to \mathbb{Z}$。对于格 L，记 $L(m)$（$m \in \mathbb{Z}$）为缩放格，即 $L(m)$ 与 L 具有相同的底层群，并且对于任意一对向量u，v，都有 $(u.v)^{L(m)} = m \cdot (u.v)_L$。若对所有 $u \in L$，$(u.u)$ 都是偶数，则称 L 偶，否则称为奇。为简化记号，我们假定所有格都是偶格。

格的秩 $\mathrm{rk}(L)$是格 L 作为一个 $\mathbb{Z}$-模的秩。格的符号 是相应形式在 $L \otimes \mathbb{R}$上的符号。若格的符号为 $(1,\mathrm{rk}(L) - 1)$，则称其为双曲的 。

格 L的判别式 $\mathrm{disc}(L)$是相对于 L的任意一组基而言，格拉姆矩阵行列式的绝对值。若格 L 满足 $\mathrm{disc}(L) = 1$，则称其为幺模 。对偶格 定义为 $L^\vee = \mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z}) \subset L \otimes \mathbb{Q}$，并配备 $L \otimes \mathbb{Q}$上双线性形式的自然限制。判别群 A_L 定义为有限阿贝尔群 $L^\vee/L$，并配备取值于 $\mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$的有限二次型 q。判别式 $\mathrm{disc}(L)$等于 $|A_L|$。长度 $\ell(A_L)$定义为 A_L的最少生成元个数，而 p-长度 $\ell_p(A_L)$定义为 A_L的 p-西罗子群的最少生成元个数。注意，长度 $\ell(A_L)$等于各个 p-长度的最大值。

格的子格 L 是一个格 M，带有嵌入 $M \hookrightarrow L$，使得 L 上的双线性形式限制为 M上的双线性形式。若另外 $\mathrm{rk}\ M = \mathrm{rk}\ L$（或等价地 $[L : M] < \infty$），则称 L 为 M的超格。一个标准事实（例如见 [9, 命题 1.4.1]）是，L 的超格与 A_L 中二次型为零的子群相对应。子格 $M \subseteq L$ 的饱和定义为 $M_{\mathrm{pr}} = (M \otimes \mathbb{Q}) \cap L$，即包含于$M \hookrightarrow M_{\mathrm{pr}} \hookrightarrow L$中的 M 的最大超格。

给定两个格 L_1 和 L_2，它们的直和 $L_1 \oplus L_2$ 就是它们作为阿贝尔群的直和，并将双线性形式定义为：当 $u_1 \in L_1, u_2 \in L_2$ 时，$(u_1.u_2) = 0$；并且包含映射 $L_1, L_2 \hookrightarrow L_1 \oplus L_2$ 均为子格。注意，若幺模格 M是格 L的子格，那么它已经是一个直和项。事实上，对于 $u \in L$，我们可以考虑

泛函 ψ_u: $M \to \mathbb{Z}$，满足 $\psi_u(v) = (u.v)$。由 M 的酉模性，存在唯一的$u_M \in M$，使得对于每个 $v \in M$，都有 $(u_M.v) = \psi_u(v) = (u.v)$，因此 $u - u_M \in M^\perp$，从而将 u映射到 $(u_M, u - u_M)$ 的同态 $L \to M \oplus M^\perp$是一个同构。

记 U 为秩为 2 的唯一双曲幺模格。具有相同符号 L、L' 的两个格，若 A_L 和 $A_{L'}$ 作为有限二次模同构，则称它们属于同一属。这等价于格 $U \oplus L$ 和 $U \oplus L'$ 等距同构（见[9,推论 1.13.4]）。

2.2. 根与根格。格 L 的一个根是一个范数为 -2的元素 $r \in L$。格 L 的根部分 L_{root} 是由其根生成的子格。若负定格等于其根部分，则称其为根格。本节中，设 R 为一个根格。我们用 Δ_R表示 R 的根的有限集合。

每个根格都可分解为 ADE 格的直和，包括无限序列A_n、$n \geq 1$、D_n、$n \geq 4$，以及另外三个格 E_6、E_7 和 E_8 [5, 定理 1.2]。我们始终考虑配有标准根 $\{r_1, \ldots, r_n\}$ $\mathbb{Z}$-基的 ADE 格，该基由相应的 Dynkin 图给出（见 [5, 定理 1.1]）。如果根格 R 分解为直和 $R_1 \oplus \ldots \oplus R_m$，其中的 R_i 均为 ADE 格，则可见 $\Delta_R = \Delta_{R_1} \cup \ldots \cup \Delta_{R_m}$。

我们需要确定对于哪些根格 R，和 $U \oplus R$ 包含 $U \oplus E_8$。若 $R \neq E_8$，显然需要 $\text{rk}(R) \geq 9$。若 R 是 ADE 格，这就足够了：

命题 2.1 命题。设 R 是秩为 $n \geq 9$的 *ADE* 格。那么，$U \oplus R$ 包含 $U \oplus E_8$.

证明。由 ADE 格分类可得 $R \in \{A_n, D_n\}$，因此 $\ell(A_R) \leq 2$，且 $\ell(A_R) = 1$ 也成立，除非 $R = D_n$ 且 n 为偶数（见 [5, 表 1.1]）。利用 [9, 推论 1.13.5] 以及不等式

$$\text{rk}(U \oplus R) \geq 11 \geq 9 + \ell(A_R),$$

我们得出，对于一个秩为 $n-6 \geq 3$且满足 $\ell(A_M) = \ell(A_R)$ 的双曲格 M，$U \oplus R \cong E_8 \oplus M$成立。根据 [9, 推论 1.13.5], ，若 $n - 6 \geq 3 + \ell(A_R)$，结论即得。因此还需考察以下情形：$R \in \{D_9, D_{10}, A_9\}$。直接计算可知，$D_9$（分别为 D_{10}、A_9）的判别群与 $\langle -4 \rangle$（分别为 $A_1 \oplus A_1$、$\langle -10 \rangle$）的判别群作为有限二次模同构，参见例如 [8, 表 1]。因此，D_9（分别为 D_{10}、A_9）与 $E_8 \oplus \langle -4 \rangle$（分别为 $E_8 \oplus A_1 \oplus A_1$、$E_8 \oplus \langle -10 \rangle$）属于同一属，由此

$$U \oplus D_9 \cong U \oplus E_8 \oplus \langle -4 \rangle, \quad U \oplus D_{10} \cong U \oplus E_8 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad U \oplus A_9 \cong U \oplus E_8 \oplus \langle -10 \rangle.$$

□

每个 ADE 格 R 都有一个最高根，它可以定义为满足以下条件的唯一根：r_0 对于标准基 $\{r_1, \ldots, r_n\}$ 中的每个根，R 均有 $r_0.r_i \leq 0$。为方便读者，我们在图 1 中列出了每个 ADE 格最高根的系数；更多详情请参见 [5, §1.5]。

对于每个 ADE 格 R，我们都可以一个扩展 *ADE* 格 $\tilde{R}$。关于其精确定义，请参见 [5, §1.5, 第 29 页]。这里仅回顾一下：R 是负半定的，秩为 $\text{rk}(R) + 1$，由向 R 添入唯一的根 $\tilde{r}$ 得到。此外，若 $r_0 \in R$ 表示最高根，则 R 的唯一迷向向量$\tilde{}$是 e 的倍数：$= \tilde{r} + r_0$，而 e 生成与 R 相关的双线性$\tilde{}$型的核。

$\tilde{}$引理 2.2。设 R 是一个具有标准基 $\{r_1, \ldots, r_n\}$ 的 *ADE* 格，R 是通过将根 $\tilde{r}$ 添入 R 而得到的相应扩展 *ADE* 格。每个根 $r \in R$ 都可以写成

$$r = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i + \beta \tilde{r}$$

对于整数 α_i、β，要么全部非负，要么全部非正。

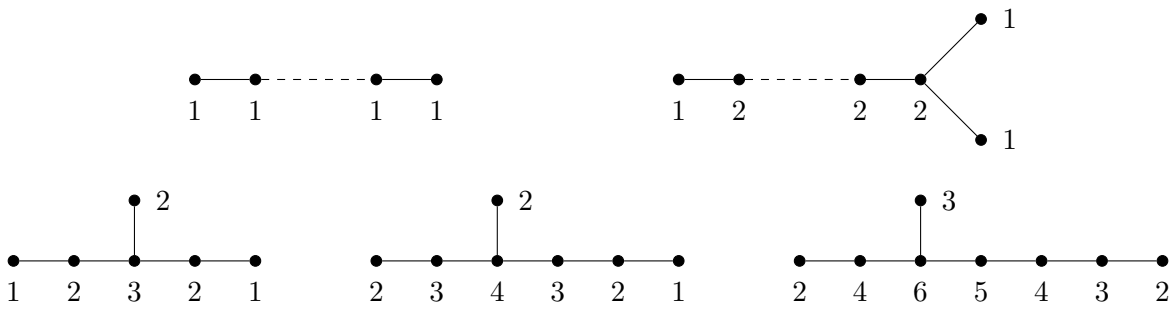


图 1. ADE 格的最高根

~证明。 由于 e 属于 R的二次型的核，我们有 $r = \alpha e + r'$，其中 $r' \in R$ 是一个根。根据 [5, 引理 13], r' 是 r_1、 ..... 、 r_n 的线性组合，且所有系数均为非负（或非正）。将 r 的符号改变后，不妨设 r' 的所有系数均为非负。如果 $\alpha \geq 0$，那么

$$r = \alpha e + r' = \alpha \tilde{r} + \alpha r_0 + r',$$

其中 $r_0 \in R$ 是最高根，结论由此得出。若 $\alpha < 0$，则

$$r = \alpha e + r' = \alpha \tilde{r} + \alpha r_0 + r' = \alpha \tilde{r} + (\alpha + 1) r_0 + (r' - r_0),$$

根据引理 1.13], $r' - r_0$ 的系数均为非正。 □

2.3. 根、魏尔群与对称群。 本节中，我们假设 L 是一个双曲格。正锥 $\mathcal{P}_L$ 是集合 $\{x \in L \otimes \mathbb{R}$ 的一个连通分支：$(x.x) > 0\}$以及 $\mathbb{H}_L := \{x \in \mathcal{P}_L : (x.x) = 1\}$ 是维数为 $\mathrm{rk}(L) - 1$的双曲空间对应的双曲面模型。将 $\mathbb{H}_L$转为共形球模型后，边界 $\partial \mathbb{H}_L$ 中的元素与 $L \otimes \mathbb{R}$中的各向同性射线之间存在自然对应。令 $\mathrm{O}^+(L)$ 表示保持连通分支 $\mathcal{P}_L$的 L 的等距变换群。

对于任意根 $r \in L$，我们将与 r 相关的反射定义为由下式给出的 L 的等距变换

$$\begin{array}{rccc} \phi_r : & L & \to & L \\ & v & \mapsto & v + (v.r) r. \end{array}$$

L 的魏尔群 $W(L)$ 定义为由与根相关的反射生成的 $\mathrm{O}^+(L)$ 的子群。在双曲空间 $\mathbb{H}_L$ 中，这些反射可视为沿子空间 $r^\perp \cap \mathbb{H}_L$ 的反射，它们将 $\mathbb{H}_L$ 切分为称为室的连通分支。魏尔群在这些室上单纯传递地作用。注意， $W(L)$ 是 $\mathrm{O}^+(L)$ 的正规子群。此外，短正合列

$$0 \to W(L) \to \mathrm{O}^+(L) \to \mathrm{O}^+(L)/W(L) \to 0$$

是分裂的，而固定一个室 $\mathcal{D}_L$ 的子群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L) \subset \mathrm{O}^+(L)$ 对应于投影 $\mathrm{O}^+(L) \twoheadrightarrow \mathrm{O}^+(L)/W(L)$ 的截面。由于魏尔群 $W(L)$ 在室的集合上单纯传递地作用，对于不同的室 $\mathcal{D}_L$，$\mathrm{O}^+(L)$ 中的子群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$ 彼此共轭。

我们固定 $\mathcal{D}_L$ $\mathbb{H}_L$的一个胞腔；根据构造，它是$W(L)$作用于 $\mathbb{H}_L$上的基本域。群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$称为 L的对称群 ，$\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$中的等距变换称为 L的对称变换 。若 $v \in \mathbb{R}^+ \cdot \mathcal{D}_L$，则称向量 $v \in L \otimes \mathbb{R}$ 为基本 向量。若 v 与所有基本向量的内积均非负，则称向量$v \neq 0$ 为正的 。

引理 2.3。 若 $0 \neq v \in L$ 是一个范数为 $v^2 \geq -2$的向量，则 v 和 $-v$ 中恰有一个是正的。更确切地说， v 是正的，当且仅当 v 与某个基本向量的内积为正。

证明。由于 $v^2 \geq -2$，超平面 $v^\perp$ 与 $\mathcal{D}_L$ 不相交（若 $v^2 \geq 0$，则甚至与$\mathbb{H}_L$不相交），因此 $\mathcal{D}_L$ 位于超平面 $v^\perp$的唯一一侧。因此， v 是正的，当且仅当v 与某个基本向量的内积为正。□

若一个正根是单根，则称它是不可分解的，也就是说，它不能写成两个正向量之和。注意，若 r， $r' \in L$ 是满足 $r.r' < 0$ 的单根，则 $r = r'$。事实上，若 $r.r' < 0$，则 $(r-r')^2 \geq -2$，因此 $r-r'$ 或 $r'-r$ 为正，除非 $r = r'$，否则矛盾。

L 的尖点 是一个本原的基本各向同性向量 $e \in L$。注意，正交补 $e^\perp$ 是负半定的，其核为一维，由 e 生成，而格 $e^\perp/\langle e\rangle$ 是负定的。此外，投影 $e^\perp \to e^\perp/\langle e\rangle$ 保持双线性形式。

引理 2.4。设 e、$f \in L \otimes \mathbb{R}$ 是线性无关的基本向量。则 $e.f > 0$。特别地，若 e、f 是不同的尖点，则 $e.f > 0$。

证明。首先假设 $e^2 > 0$。由于超平面 $e^\perp$ 与 $\mathcal{D}_L$ 不相交，向量 e 和 f 位于 $e^\perp$ 的同一侧。由于 $e.e > 0$，可得 $e.f > 0$。

反之，假设 $e^2 = 0$。根据上面一段， e 与 $\mathcal{D}_L$ 中的每个向量都正相交，因此由引理 2.3， e 是正的。由于 f 是基本域，可得 $e.f \geq 0$。若 $e.f = 0$，则 $f \in e^\perp$，且其在 $e^\perp/\langle e\rangle$ 中的像具有非负自交数。然而， $e^\perp/\langle e\rangle$ 是负定的，因此 f 是 e 的倍数，矛盾。□

处理基本域时，下面的引理至关重要：

引理 2.5。设 L 是一个双曲格， M 是一个负定格，并将 $\mathbb{H}_L$ 视为 $\mathbb{H}_{L\oplus M}$ 中在 M上的投影为零的向量所构成的子空间。存在 $\mathcal{D}_L$ 的基本域$\underline{L}$和 $L \oplus M$ 的基本域 $\mathcal{D}_{L\oplus M}$，使得 $\mathcal{D}_L = \mathcal{D}_{L\oplus M} \cap \mathbb{H}_L$。

证明。为 L 选取一个基本域 $\mathcal{D}_L$，并任取 $v_L \in \mathcal{D}_L$。记 $v = (v_L, 0) \in L \oplus M$，并令 $\mathcal{D}_{L\oplus M}$ 为 $L \oplus M$ 的一个基本域，使得 $v \in \mathcal{D}_{L\oplus M}$。$L$ 的正根集是 $L \oplus M$ 的正根集的子集：事实上，若 $r \in L$ 是一个正根，则根据假设有 $v.r = v_L.r > 0$，因此由引理 2.3 可知 r 在 $L \oplus M$ 中为正。由此可得 $\mathcal{D}_{L\oplus M} \cap \mathbb{H}_L \subseteq \mathcal{D}_L$。反过来，设 $w \in \mathcal{D}_L$。为证明 $w \in \mathcal{D}_{L\oplus M}$，只需证明对每个正根 $r \in L \oplus M$，都有 $w.r \geq 0$。写作 $r = z_1 + z_2$，其中 $z_1 \in L$ 且 $z_2 \in M$。若 $z_1 = 0$，则 $w.r = 0$，故不失一般性，设 $z_1 \neq 0$。此外， M 是负定的，因此 $z_1^2 \geq -2$，于是 z_1 或 $-z_1$ 在 L 中为正。根据假设有 $v.r = v.z_1 \neq 0$，再由 r 的正性可推出 $v.r = v.z_1 > 0$，即 z_1 在 L 中为正。因此 $w.r = w.z_1 \geq 0$，如所求。□

2.4. 等距变换与 Salem 多项式。设 L 是一个双曲格，其基本域为 $\mathcal{D}_L$。如第 2.3 节所述，对称群 Aut($\mathcal{D}_L$) 可等同于保持基本域 $\mathcal{D}_L$ 不变的 L 的等距变换群。因此，Aut($\mathcal{D}_L$) 是等距变换群 O($\mathbb{H}_L$) 的子群。

双曲空间 $\mathbb{H}_L$ 上的每个等距变换 f 都有一个特征多项式 $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$，其在单位圆盘外至多有一个根（参见 [4, Définition 1.2]之前的讨论）。特别地，我们可以写成 $P(x) = S(x)C(x)$ 的形式，其中 $S(x)$或者是平凡多项式、二次多项式，或者是*Salem*多项式，而 $C(x)$是分圆多项式的乘积。我们称 $S(x)$为 f的*Salem* 因子，其次数称为 f的*Salem* 次数。注意，当且仅当 P 的所有根都是单位根时， f 的 Salem 次数为零；此时我们称 f 具有零熵。回顾一下，Salem 多项式的次数总是偶数。因此，若 L 的秩 rk(L)为偶数，或者若 rk(L)为奇数且 L的 Salem 次数为 -1，则称 f 具有最大 *Salem* 次数。

2.5. **双曲格的结构理论**。 本节最后给出一个关于双曲格的极大超格的结构结果。以下引理为专家所熟知。由于缺乏确切的参考文献，我们给出一个证明。

引理 2.　6. 若 L 是长度为 $\ell(A_L) \geq 4$的格，则它容许一个非平凡超格。

证明。 由假设，存在素数 p ，使得 p-长度 $\ell_p(A_L)$至少为4。由于寻找非平凡超格相当于在 A_L 中寻找非零各向同性向量，我们可以限制到 A_L 的p-挠子群，并假设 A_L 是一个 p-初等群。每个元素 $\bar{v} \in A_L$ 都可以写成 $\bar{v} = \frac{v}{p}$，其中 $v \in L$ 是整除性 为 p 的倍数的向量（即对每个$u \in L$， p 整除 $u.v$ ）。特别地，若 $\bar{v}, \bar{w} \in A_L$，则 $\bar{v}.\bar{w} \in \frac{1}{p}\mathbb{Z}$。

假设 $p > 2$。在乘以 p的意义下，方程 $\bar{v}^2 = 0 \in \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$ 可改写为 $Q(v) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$，其中 Q是 $\mathbb{Z}$上的非退化二次型。由于 A_L 的 p-长度至少为3，二次型 Q 至少有3个变量，因此由Chevalley–Warning 定理，方程 $Q(v) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$有非平凡解。

现在假设 $p = 2$。如上所述，方程 $\bar{v}^2 = 0 \in \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$ 可改写为 $Q(v) \equiv 0$（模 4），其中 Q 是定义在 $\mathbb{Z}$ 上、至少含有 4 个变量的非退化二次型。根据 Chevalley–Warning 定理，存在 v_1 使得 $Q(v_1) \equiv 0$（模 2）。若 $4 \mid Q(v_1)$，则这给出了 A_L 中一个非平凡的各向同性向量。反之，若 $Q(v_1) \equiv 2$（模 4），则正交补 $v_1^{\perp}$ 的维数为 ≥ 3，因此存在一个与 v_1 正交的向量 v_2，使得 $Q(v_2) \equiv 0$（模 2）。于是，要么 $4 \mid Q(v_2)$，要么 $4 \mid Q(v_1 + v_2)$，无论哪种情况，都能得到 A_L 中一个非平凡的各向同性向量。□

注记 2.7. 上述界是最优的。事实上，根格 $A_1^{\oplus 3}$不容许非平凡的偶超格。尽管如此，同一证明表明，只要对某个奇素数 p 有 $\ell_p(A_L) \geq 3$ ，则 L 便容许一个非平凡超格。

命题 2.8. 若 L 是一个秩至少为 6 的双曲格，则存在 L 的一个超格 L' 、一个整数 n 以及一个负定格 M ，使得

$$L' \cong U \oplus E_8^n \oplus M,$$

其中 $\mathrm{rk}\, M \leq 11$ ，并且 M 的根部分不含任何 E_8 ，也不含秩至少为 9 的 *ADE* 格。

证明。 设 L' 为 L 的一个极大超格。则由引理 2.6，有 $\ell(A_{L'}) \leq 3$ 。由于 $\mathrm{rk}(L') \geq 6$，由 [9, 推论 1.13.5] 可知 L' 包含 U 的一个拷贝。设 n 为使 $U \oplus E_8^n$ 嵌入 L' 的极大整数 ≥ 0 。

由于 $U \oplus E_8^n$是幺模的，我们得到一个分解 $L' = U \oplus E_8^n \oplus M$，其中某个 M满足条件，且$\ell(A_M) = \ell(A_{L'}) \leq 3$。根据 [9, 推论 1.13, 5], 若 $\mathrm{rk}\ M \geq 12$，则 $U \oplus M$ 有一个直和项 E_8 ，且其补格的秩至少为 6（长度至多为 3），因此由同一推论，$U \oplus M \cong U \oplus E_8 \oplus M'$对某个 M'成立，这与 n的极大性矛盾。因此 $\mathrm{rk}\ M \leq 11$。由于 n取为极大的，根据命题 2.1，关于根部分的结论立即成立。□

3. 例外格

本节回顾例外格的概念。Nikulin 在 K3 曲面的背景下提出了这一概念，更一般地说，它也适用于任意双曲格。

设 L为一个双曲格，其对称群为 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$。按照 Nikulin [12, §4], ，我们将 L 的例外格 $E(L)$定义为在 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$ 作用下具有有限轨道的向量 $v \in L$ 所构成的子格。更一般地，若 $G \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$是一个子群，我们用 $E_G(L)$表示在 G作用下具有有限轨道的向量$v \in L$ 所构成的子格。

我们注意到，例外格对于超格的性质良好：

引理 3.1. 设 L 是一个双曲格，L' 是 L 的一个超格。存在 L 的室 $\mathcal{D}_L$ 以及 L' 的室 $\mathcal{D}_{L'}$，使得 $\mathcal{D}_{L'} \subseteq \mathcal{D}_L$。特别地，$E(L) \subseteq E(L')$。

证明。第一个结论显然，因为 L 和 L' 的秩相同，而且 L 的任一根也是 L' 的根。若 $G \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{L'})$ 是保持 $L \subseteq L'$ 的等距变换的有限指数子群，根据该结论的第一部分，我们有一个单同态 $G \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$。由于 $G \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{L'})$ 的指数有限，因此有 $E_G(L') = E(L')$，并且显然 $E(L) \subseteq E_G(L) \subseteq E_G(L')$，证明完毕。□

令 $\mathcal{E}(L)$ 表示 L 中尖点的集合，并令 $\mathcal{E}_\infty(L)$ 表示 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$ 中具有无限稳定子的尖点子集。对于尖点 $e \in \mathcal{E}(L)$，我们将由 e 以及与 e 正交的根生成的 L 的子格记为 $(e^\perp)^{(2)}$，并将 $(e^\perp)^{(2)}$ 在 L 中的饱和记为 $(e^\perp)^{(2)}_{\mathrm{pr}}$。

注记 3.2。由于格 $e^\perp$ 是退化的，且核为 e，因此根据 [3, 引理 4.1]，它分解为直和 $\langle e\rangle \oplus W$，其中格 $W := e^\perp/\langle e\rangle$ 是负定的。于是，我们可以通过复合 $W \hookrightarrow e^\perp \hookrightarrow L$，将$W$ 视为 L 的本原子格。

如果 $R \subseteq W$是任意本原子格，那么 $\langle e\rangle \oplus R$在 $e^\perp$中是本原的，因此在 L中也是本原的。事实上，格嵌入是本原的，当且仅当余核无挠，并且

$$e^\perp/(\langle e\rangle \oplus R) = (\langle e\rangle \oplus W)/(\langle e\rangle \oplus R) = W/R.$$

因此，若 $R := W_{\mathrm{root,\ pr}}$ 是由 W的根张成的格在 W中的饱和，则有 $(e^\perp)^{(2)}_{\mathrm{pr}} = \langle e\rangle \oplus R$。

回顾一下，根据 Shioda–Tate 公式的一个推广（完整证明见例如 [10, Corollary1.5.4], and[3, Proposition 3.2] ），尖点 $e \in \mathcal{E}(L)$ 具有无限稳定子，当且仅当 $\mathrm{rk}(e^\perp)^{(2)} < \mathrm{rk}\, e^\perp$；等价地，当且仅当 $e^\perp/e$ 不是根格的超格。

Nikulin 在 [12, Theo- rem 4.2], 中陈述了例外格的以下显式描述，不过他只对 K3 曲面的 Picard 格证明了这一结果（见 [12, Theorem 4.1]）。为求完整起见，我们给出一个证明。

命题 3.3. 设 L 是一个格，使得 $\mathcal{E}_\infty(L)$ 非空。那么例外格满足

$$E(L) = \bigcap_{e\in\mathcal{E}_\infty(L)} (e^\perp)^{(2)}_{\mathrm{pr}}.$$

证明。为了证明包含关系 $\supseteq$，只需证明其中的所有向量

$$E' := \bigcap_{e\in\mathcal{E}_\infty(L)} (e^\perp)^{(2)}_{\mathrm{pr}}$$

在 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$ 作用下具有有限轨道。显然，$\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$ 将 E' 送到 E'。如果 $\mathcal{E}_\infty(L)$ 由唯一的尖点 e 构成，那么 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$ 固定它；此外，$E' = (e^\perp)^{(2)}_{\mathrm{pr}} = \langle e\rangle \oplus R$，其中 R 是一个负定格（见注 3.2），因此 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$ 在 R （从而也在 E'）上的作用具有有限阶。反之，如果 $\mathcal{E}_\infty(L)$ 至少包含两个不同的尖点，例如 e_1、e_2，那么 $(e_1+e_2)^2 = 2(e_1.e_2) > 0$，因此 $E' \subseteq \langle e_1+e_2\rangle^\perp$ 是负定的，于是 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$ 在 E' 上的作用同样具有有限阶。

对于另一个包含关系，只需证明对于每个具有无限稳定子的尖点 e，$E(L) \subseteq (e^\perp)^{(2)}_{\mathrm{pr}}$。事实上，我们将证明更强的包含关系

$$E_{\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L,e)}(L) \subseteq (e^\perp)^{(2)}_{\mathrm{pr}},$$

其中 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L, e)$ 表示 e 在 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$ 中的稳定子。

令 $v \in E_{\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L,e)}(L)$。任取一个无限阶的 $g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L, e)$。通过取 g 的某个幂，根据假设，不妨设 $g(v) = v$，即 g 在由以下元素张成的秩二

子格 $\langle e, v\rangle$ 上恒等作用，其中由 e 和 v 张成。若 $(e.v) \neq 0$，则格 $\langle e, v\rangle$ 是双曲的，因此 g 诱导了负定格 $\langle e, v\rangle^{\perp}$ 的一个无限阶等距变换，矛盾。因此 $E_{\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L,e)}(L) \subseteq e^{\perp}$。

若 $W = e^{\perp}/\langle e\rangle$, $R = W_{\mathrm{root,pr}} \subseteq W$，且 $R_W^{\perp}$表示 W 中 R 的正交补，那么由注 3.2 可得 $(e^{\perp})^{(2)}_{\mathrm{pr}} = \langle e\rangle \oplus R$，并且包含关系

$$\langle e\rangle \oplus R \oplus R_W^{\perp} = (e^{\perp})^{(2)}_{\mathrm{pr}} \oplus R_W^{\perp} \subseteq e^{\perp}$$

具有有限指数。由证明的第一部分可知 $(e^{\perp})^{(2)}_{\mathrm{pr}} \subseteq E_{\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L,e)}(L)$，因此只需证明每个 $0 \neq y \in R_W^{\perp}$ 在 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L, e)$ 下都有无限轨道。为此，考虑 Eichler–Siegel 变换

$$\psi_y : x \mapsto x + (x.y)e - (x.e)y - \frac{1}{2}(x.e)(y.y)e.$$

由 [3, 命题 3.2] 可知，ψ_y 是 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L, e)$ 中的一个对称变换。由于 $\psi_y(e) = e$ 且$\psi_y(y) = y + (y.y)e$, 我们得到

$$\psi_y^m(y) = y + m(y.y)e \neq y$$

对每个 $m > 0$，由归纳法可得，因此 y 在 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L, e)$ 下有无限轨道，从而完成证明。 □

备注 3.4. (1) 每个秩为 ≥ 20 的双曲格都存在一个具有无限稳定子的尖点。事实上，每个秩为 ≥ 20 的双曲格都有一个无限对称群（参见 [10]），因此由 [10, 定理 6.4.1] 可知，它存在一个具有无限稳定子的尖点。(2) 注意，如果 L 不存在具有无限稳定子的尖点，那么命题 3.3 不成立。例如，设 L 是一个秩为 3 的双曲格，满足 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L) \cong \mathbb{Z}$，且没有具有无限稳定子的尖点。这类格确实存在，且已在 [2] 中分类；例如可以取 $L = U(11) \oplus A_1$。那么 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_L)$ 由一个无限阶、Salem 次数为 2 的对称变换 f 生成，因此 f保留 L中的一条直线。于是 $E(L)$ 的秩为 1，而 E' 就是其自身 L。

4. 定理 1.1 的证明

现在我们证明定理 1.1。在本节中，L 是一个双曲格，并固定其 L的基本域 $\mathcal{D}_L$。我们从以下众所周知的观察开始。

引理 4.1. 设 L是一个双曲格，Δ 是 L的一组有限单根，其对应的交图是一个扩展 *Dynkin* 图。记 e_Δ 为扩展 *ADE* 格 $\mathbb{Z}[\Delta] \subseteq L$中唯一的正原始各向同性向量。则 e_Δ 是 L中的一个尖点。

证明。只需证明对于 L的每个单根 r，$(e_\Delta.r) \geq 0$。若 r 是 Δ中的一个根，则$(e_\Delta.r) = 0$。反之，若 $r \notin \Delta$，则 r 与 Δ中的所有单根的内积均非负，特别是$(e_\Delta.r) \geq 0$。□

以下是我们方法中的一个关键观察：

引理 4.2. 若 $L = U \oplus E_8^n \oplus M$ 满足 $n \geq 5$ 且 M 负定，则 $E(L) \subseteq M$。

证明。回想存在一个等距变换 $U \oplus E_8^3 \cong U \oplus \Lambda$，其中 Λ 是 Leech 格。特别地，存在一个尖点 $e \in U \oplus E_8^3$，使得 $e^{\perp}/\langle e\rangle \cong \Lambda$ 没有根，因此 $(e^{\perp})^{(2)}_{\mathrm{pr}} = \langle e\rangle$。

对于每个三元组 (i, j, k)，其中 $i < j < k$且 $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$，考虑一个尖点 $e_{ijk} \in U \oplus E_8^3$（其中 E_8 的三个副本分别是 L 中类型为 E_8 的第 i、第 j和第 k 个直和项），如同上一段所述，使得 $e_{ijk}^{\perp}/\langle e_{ijk}\rangle \cong \Lambda$, 并由引理 2.5 将其视为 L 中的一个尖点。由 Shioda–Tate 公式 [10,推论 1.5.4], e_{ijk} 在 L中具有无限稳定子。此外

$$(e_{123}^{\perp})^{(2)}_{\mathrm{pr}} \subseteq \langle e_{123}\rangle \oplus E_8^{n-3} \oplus M,$$

其中 E_8 的各个副本是最后的 $n-3$。由于根据命题 3.3， $E(L)$ 由根（在 $\mathbb{Q}$ 上）生成，因此只需证明任一正根 $r \in E(L)$ 属于 M。由于 e_{123} 具有无限稳定子，根据命题 3.3，$r \in (e_{123}^{\perp})^{(2)}_{\mathrm{pr}} \subseteq \langle e_{123} \rangle \oplus E_8^{n-3} \oplus M$。由于 E_8 与 M 是负定的，根 r 属于 $\langle e_{123} \rangle \oplus E_8$ （对应于 E_8 的 $n-3$ 个副本之一）或 $\langle e_{123} \rangle \oplus M$；换言之，$\sim r$ 是 E_8 的扩展 Dynkin 图 E_8 中的某个根，或是 M_{root} 中某个 ADE 格的某个根。

首先假设对于 E_8 的第 i 个副本， $r \in \langle e_{123} \rangle \oplus E_8$。若 $\{r_1, \ldots, r_8\}$ 是 E_8 的标准基，且 $r_0 \in E_8$ 为最高根，则我们考虑 $\langle e_{123} \rangle \oplus E_8$ 的根基 $\{r_1, \ldots, r_8, \tilde{r}\}$，其中 $\tilde{r} = e_{123} - r_0$。根据引理 2.2，我们可以假设 $r \in \{r_1, \ldots, r_8, \tilde{r}\}$。注意，由于 Leech 格 Λ 没有根，对于每个 $1 \leq j \leq 8$，都有 $r_j.e_{12i} > 0$，因此 $r_j \notin E(L)$。若 $r = \tilde{r}$，则考虑某个 $j \geq 3$、 $j \neq i$ 对应的尖点 e_{12j}。它与 E_8 的第 i 个副本正交，但根据引理 2.4，$e_{12j}.e_{12i} > 0$，因此 $e_{12j}.\tilde{r} > 0$，从而 $\tilde{r} \notin E(L)$。

现在假设 $r \in \langle e_{123} \rangle \oplus M_0$ 属于 M_{root}的一个 ADE 因子 M_0。若 r 是 M_0的最高根 $e_{123} - r_0$，则 $e_{124}.r > 0$，因为根据引理 2.4， $M \subseteq e_{124}^{\perp}$ 且 $e_{123}.e_{124} > 0$。特别地，我们已经证明

$$\bigcap_{i \geq 3} (e_{12i}^{\perp})^{(2)}_{\mathrm{pr}} \subseteq M,$$

因此，根据命题 3.3， $E(L) \subseteq M$。 □

现在我们可以证明定理 1.1 了。

定理 *1.1* 的证明。设 L 是任意一个秩为 ≥ 46的双曲格。根据命题 2.8，存在 L的一个超格 L'，使得

$$L' \cong U \oplus E_8^n \oplus M,$$

其中 $n \geq 5$ 和 M 是秩至多为 11 的负定格。根据引理 3.1，只需对 L'证明该定理。

根据引理 4.2，例外格 $E(L')$包含于 M中，特别地，它是负定的。因此，根据命题 3.3，只需证明：对于 M中的任意单根 r，存在一个尖点 $e \in \mathcal{E}_\infty(L')$，其稳定子是无限的，且满足 $e.r > 0$。

利用该等距变换

$$L' \cong U \oplus \Lambda \oplus E_8^{n-3} \oplus M,$$

其中 Λ 表示 Leech 格，我们只需找到一个尖点 e，位于

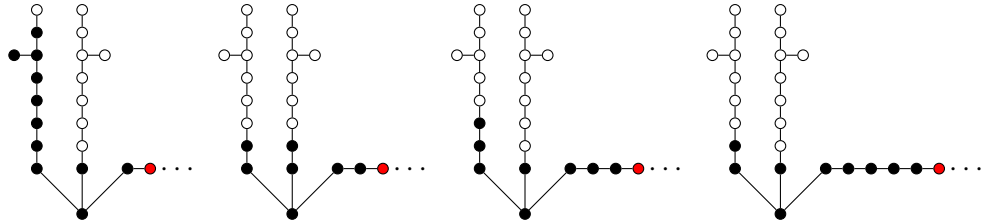
$$L'' \coloneqq U \oplus E_8^{n-3} \oplus M = \Lambda^{\perp} \subseteq L'$$

使得 $(e.r) > 0$，因为由引理 3.1 可知， e 是 L' 中具有无限稳定子的尖点

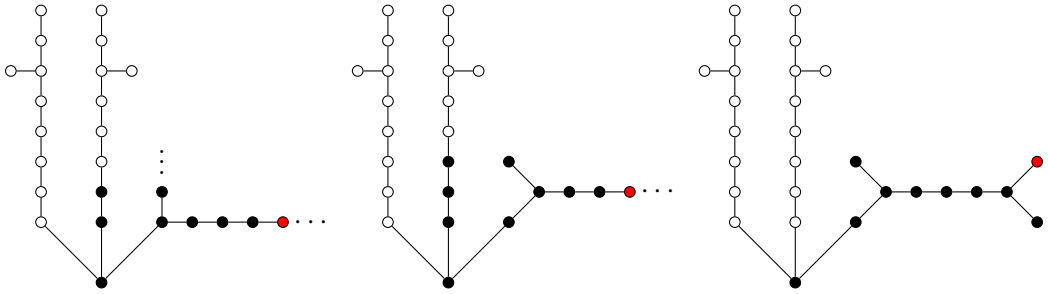
我们可以利用一些最终约化步骤：首先，由于 $n - 3 \geq 2$，我们可以假设$n - 3 = 2$。其次，M 的根部分 M_{root} 分解为 ADE 格$R_1, \ldots, R_k$的直和，并且 M中的单根集合是每个 R_i中单根的并集，因此不失一般性，我们可以假设 M_{root} 是一个 ADE 格。最后，由命题 2.8，根据 n 的极大性，我们可以假设 M_{root} 是带有 $m \leq 8$的 A_m 型或 D_m 型，或者是 E_6 型或 E_7型。

剩下要证明以下结论：若 $L'' = U \oplus E_8^2 \oplus M$，其中 M的根部分 M_{root}是上述 ADE 格之一，且 $r \in M$ 是一个单根，则存在 L'' 的一个尖点 e，使得 $(e.r) > 0$。我们将采用以下策略：唯一的尖点 $e_0 \in U$ 诱导出由包含在 $e_0^{\perp}$中的 L'' 的单根构成的对偶图 Γ。图 Γ 包含两个 $\sim$ $\sim E_8$ 型的扩展 Dynkin 图、一个 M_{root} 型的扩展 Dynkin 图，以及与每个扩展 Dynkin 图中一个重数为 1 的顶点简单相交的单根 $s_0 \in U$。对于 M_{root}的 Dynkin 图中的每个顶点 r，我们将给出一个扩展 Dynkin 图 $\Delta \subseteq \Gamma$，其对应的本原正各向同性向量 e_Δ （根据引理 4.1，它是一个尖点）满足 $(e_\Delta.r) > 0$。

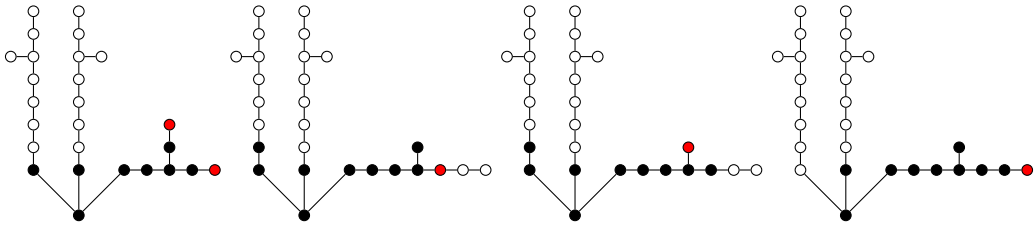
首先考虑 Dynkin 图 M_{root}中距离 s_0 为 2、3、4 或 6 的顶点。在这$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$种情形下，分别存在形状为 D_{10}、 E_6、 E_7 和 E_8的扩展 Dynkin 图，它们与该顶点正相交，如下图所示：



注意，这就解决了 A_m 与 $m \leq 6$ 以及 D_m 与 $m \leq 5$的情形。接下来，给定一个$\tilde{}$ $\tilde{}$型或 D_m型的图，其中 $m \geq 6$，我们将展示其关联尖点与距 s_0 5 个单位处的节点相交的扩展 Dynkin 图，其形状分别为 E_7 和 E_8。这就处理了 A_m, $m \leq 8$ 的所有单根，以及 D_m, $m \leq 7$ 的所有单根。对于 D_8 ，我们还将展示一个与最远顶点相交的尖点；这些顶点距 s_0 7 个单位，该尖点来自一个形状为 E_8 的扩展 Dynkin 图$\tilde{}$。



剩下的是 $M_{\mathrm{root}} = E_6$ 和 $M_{\mathrm{root}} = E_7$的情形。第一种情形中，距 s_0 5 个单位的顶点由一个 D_7 图所对应的尖点相交；第二种情形中，距$\tilde{}$ 5 个单位的两个顶点以及距其 7 个单位的顶点，均由一个 E_8 图所对应的尖点相交，如下所示：



这表 明 $E(L') = 0$，因此 L 的例外格是平凡的，正如我们 ll.

□

参考文献

[1] R. E. Borcherds.《类似 Leech 格的格》。载于：《代数杂志》130.1（1990），第 219–234 页。[2] S. Brandhorst、M. Kirschmer 和 G. Mezzedimi。双曲格的虚阿贝尔对称群。2025年。arXiv：2507.20743。[3] S. Brandhorst 和 G. Mezzedimi。*Borcherds* 格与零熵 *K3* 曲面。《美国数学杂志》，即将刊出。2023年。arXiv：2211.09600。[4] S. Cantat。《曲面自同构的动力学 $K3$》。载于：《数学学报》187.1（2001），第 1–57 页。

[5] W. Ebeling。格与编码：一门部分基于 *Friedrich Hirzebruch* 讲座内容的课程。英文。第 3 版，修订版。柏林：Springer，2013年。[6] F. Galluzzi、G. Lombardo 和 C. Peters。《不定二元二次型的自同构与皮卡数为 2 的 $K3$曲面》。载于：都灵理工大学数学研讨会论文集68.1（2010），第 57–77 页。[7] M. Gromov。《全纯映射的熵》。英文。载于：《数学教学》（第 *2* 辑）49.3-4（2003），第 217–235 页。[8] D. Gvirtz-Chen 和 G. Mezzedimi。《恩里克斯曲面的希尔伯特不可约性定理》。载于：《美国数学会汇刊》376.6（2023），第 3867–3890 页。[9] V. V. Nikulin。《整对称双线性型及其若干应用》。英文。载于：《苏联科学院消息》14（1980），第 103–167 页。[10] V. V. Nikulin。《关于双曲型的自同构群模由 2反射生成的子群所得的因子群：代数几何应用》。英文。载于：《苏联数学杂志》22（1983），第 1401–1475 页。[11] V. V. Nikulin。《具有有限自同构群且皮卡群秩为三的$K3$ 曲面》。载于：第 165 卷，《代数几何及其应用》。1984年，第 119–142 页。[12] V. V. Nikulin。《K3 曲面上的椭圆纤维化》。载于：《爱丁堡数学学会会刊》（第 *2* 辑）57.1（2014），第 253–267 页。[13] È. B. Vinberg。《秩为 4 的 2反射双曲格的分类》。载于：《莫斯科数学学会论文集》68（2007），第 44–76 页。[14] Y. Yomdin。《体积增长与熵》。英文。载于：《以色列数学杂志》57（1987），第 285–300 页。[15] X. Yu。《 $K3$ 曲面上的椭圆纤维化与最大次数 Salem数》。英文。载于：《日本数学会杂志》70.3（2018），第 1151–1163 页。[16] X. Yu。《K3曲面熵与自同构群》。载于：《代数几何杂志》34.2（2025），第 205–231 页。

Torben Grabbel：苏黎世联邦理工学院，雷米街101号，8092 苏黎世，瑞士电子邮箱：tgrabbel@ethz.ch Gebhard Martin：波恩大学数学研究所，恩德尼希大道60号，53115 波恩，德国电子邮箱：gmartin@math.uni-bonn.de Giacomo Mezzedimi：波恩大学数学研究所，恩德尼希大道60号，53115 波恩，德国电子邮箱：mezzedim@math.uni-bonn.de Maia Raitz von Frentz：哥廷根大学数学研究所，本生街3-5号，37073 哥廷根，德国电子邮箱：m.raitzvonfrentz@stud.uni-goettingen.de Paul Jakob Schmidt：波恩大学数学研究所，恩德尼希大道60号，53115 波恩，德国电子邮箱：s07pschm@uni-bonn.de