近场与远场波束覆盖的低复杂度设计：一种傅里叶变换方法

Chao Zhou、Changsheng You、Cong Zhou、Li Chen、Yi Gong 和 Chengwen Xin g

arXiv:2602.05666v1 [cs.IT] 5 Feb 2026

摘要——**本文研究多天线系统在远场和近场情形下的高效波束覆盖设计。为降低现有基于采样与优化的方法的计算复杂度，我们利用天线域与空间域之间的傅里叶变换（FT）关系，提出一种新的低复杂度且高效的波束覆盖设计。为此，我们首先针对远场和近场情形建立通用的波束覆盖优化问题，以最大化目标区域内的最坏情况波束成形增益。对于远场情形，我们证明波束覆盖设计可视为空间频率滤波问题：通过逆傅里叶变换在天线域进行权重整形，即可实现角度覆盖，并得到一个无限长度加权序列。在天线数量有限的约束下，我们提出一种直接截断该无限长度序列的代理方案，但这不可避免地会在角度边界处引入滚降效应，导致最坏情况波束成形增益下降。为解决这一问题，我们刻画了有限天线所引起的滚降效应，并据此开发了一种滚降感知设计，采用保护性缩放来确保目标角度区域内的波束成形增益曲线平坦。随后，我们将所提方法扩展到近场情形。具体而言，对近场信道导向向量（CSV）的相位应用一阶泰勒近似后，二维（2D）近场波束覆盖设计（同时涵盖角度和逆距离）可转换为二维逆傅里叶变换，从而得到一种低复杂度的闭式波束成形设计。此外，我们观察到近场固有的距离散焦效应，这表明足够宽的角度覆盖能够实现距离不敏感波束转向。最后，数值结果表明，与传统的基于采样的优化方法相比，所提基于傅里叶变换的方法在显著降低计算运行时间（达数个数量级）的同时，实现了相当的最坏情况波束成形性能。**

索引词——**波束覆盖、傅里叶变换、远场与近场。**

I. 引言

多输入多输出（MIMO）技术的发展，是迈向下一代无线网络的一条主流路径。例如，大规模 MIMO 是第五代（5G）的关键物理层赋能技术，它利用丰富的天线资源来提升频谱效率、增强覆盖并抑制用户间/小区间干扰 [1]。同样，超大规模超大规模多输入多输出（XL-MIMO）正成为第六代（6G）通信的一项重要技术。该技术使基站（BS）的天线数量增加一个数量级，从而显著提升频谱效率和空间分辨率 [2]。此外，与主要服务于具有平面波前的远场用户的大规模多输入多输出相比，超大规模多输入多输出显著扩大了瑞利距离，使用户更有可能处于以球面波前为特征的近场区域 [3]。这些新的信道特性实现了一项颇具吸引力的功能，即波束聚焦，可将大部分波束能量聚焦在用户位置或区域周围。该特性可用于支持多种应用，例如高精度定位 [1], 、集成感知与通信 [4], 以及物理层安全 [5]。其中，波束覆盖设计在为广大空间区域提供可靠连接方面发挥着关键作用，从而支持无线感知 [6], 、波束跟踪 [7], 和分层波束训练 [8], [9]。

本文研究多输入多输出系统在远场和近场情形下的波束覆盖设计。鉴于这一方向的现有工作大多基于复杂优化方法设计，因而计算复杂度高；或者仅采用启发式替代方案，无法保证性能。为解决这些问题，我们基于傅里叶变换（FT）原理提出一种新的低复杂度波束覆盖设计方法，其覆盖性能可媲美基于采样的优化方法。

A. 相关工作

1）远场情形：在远场场景中，波束覆盖设计旨在指定的角度区域内实现均匀的波束成形增益，这通常通过波束展宽（或平顶波束合成）实现。文献中提出了多种实现这一目标的方法，可分为基于优化的方法和启发式方法。对于基于优化的方法，波束覆盖设计可采用不同形式建模为优化问题。例如， [6],中将最坏情况波束覆盖性能建模为优化问题，并提出了一种基于采样的优化方法，以确保目标区域内的连续感知覆盖。另一种宽波束设计问题则在 [10]–[12],中进行了探讨，作者旨在尽量减小生成的波束图与目标参考图样之间的差异。尽管这些基于优化的方法有效，但通常需要大量角度采样点来近似连续覆盖，并且优化过程中涉及复杂的矩阵运算,

Chao Zhou、Changsheng You、Cong Zhou 和 Yi Gong 任职于南方科技大学（SUSTech）电子与电气工程系，中国深圳 518055（电子邮箱：zhouchao2024@mail.sustech.edu.cn、youcs@sustech.edu.cn、zhoucong@stu.hit.edu.cn 和 gongy@sustech.edu.cn）。Li Chen 任职于中国科学技术大学电子工程与信息科学系，中国合肥 230026（电子邮箱：chenli87@ustc.edu.cn）。ChengwenXing 任职于北京理工大学信息与电子学院，中国北京 100081（电子邮箱：xingchengwen@gmail.com）。（通信作者：*Changsheng You*。）

因此当天线数量和采样点数量足够大时，计算复杂度会很高。为降低基于优化的方法的计算复杂度，研究者开发了多种启发式方法。例如，一种有代表性的方法是叠加多个离散傅里叶变换（DFT）码字，这些码字的波束指向落在目标角度区间内，以实现波束覆盖设计 [12], [13]。另一种方法是基于啁啾序列的方法 [14],，它通过在天线阵列上有意引入二次相位变化，从而在模拟波束成形架构中展宽波束宽度。尽管这些启发式方法提供了可行的替代方案，但在最坏情况波束覆盖场景中，其性能可能并不理想。

2）近场情形：与远场情形不同，近场波束覆盖带来了若干新的挑战。首先，不同于仅在角度域实现的远场波束覆盖，近场对应方案需要同时覆盖角度域和距离域 [3]。其次，天线数量庞大，且波束覆盖设计涉及矩阵求逆和迭代优化过程，因此通常具有很高的计算复杂度 [1]。第三，近场球面波前在近场导向向量中呈现二次相位变化 [15], ，使得传统的远场低复杂度波束覆盖设计（例如 [12], [13]）在近场情形下效率低下。为应对这些挑战，近期已有多种基于优化的方法被提出。例如， [16] 和 [17] 中的作者利用信道协方差矩阵优化波束成形向量，以实现近场波束覆盖设计。尽管这些方法在某些场景中有效，但它们主要着眼于提升平均性能，因此无法保证最坏情况性能。为进一步提升波束覆盖性能， [18]中的作者将基于采样的优化方法扩展至近场场景，通过迭代优化全数字波束成形器来支持混合波束成形架构。沿用类似的优化框架， [19]提出了波数域波束图设计，以实现令人满意的近场波束覆盖性能。为降低上述基于优化的方法的计算复杂度 [18], [19],, [20]提出了一种启发式波束成形覆盖设计。该方法通过在波束成形向量中引入额外的二次相位变化，产生所谓的波束发散效应，从而以显著降低的复杂度有效拓宽波束宽度。尽管取得了这些进展，现有文献仍缺乏对近场波束覆盖设计的全面、系统研究。

B. 研究动机与贡献

受上述研究启发，我们研究多天线系统在远场和近场情形下的高效波束覆盖设计，其中，配备均匀线性阵列（ULA）的基站旨在为指定目标区域提供波束覆盖。具体而言，我们构建了一个通用的波束覆盖优化问题，以最大化预设目标区域内的最坏情况波束成形增益。为降低现有基于优化的方法的计算复杂度，我们提出了一种全新的低复杂度且高效的框架，利用傅里叶变换原理，以闭式形式实现近场和远场情形下的波束覆盖设计。本文的主要贡献总结如下。

- 首先，对于远场情形，我们证明，通过傅里叶变换，角度域中的波束覆盖设计可以重构为天线域中的权重整形问题，对应于无限长度的天线加权序列。考虑到天线数量有限，一种可行的方法是截断天线域序列，从而得到一种代理方案。然而，这种截断不可避免地会在角度边界处引入滚降效应，进而降低波束成形增益。为解决这一问题，我们进一步提出一种考虑滚降的波束覆盖设计，通过引入宽度随天线数量增加而反比缩小的保护性缩放，避免滚降行为，并确保目标角度区域内的波束成形增益曲线保持平坦。

- 其次，我们将所提出的基于傅里叶变换的方法扩展到近场情形，此时需要在角度域和距离域内同时确保波束覆盖。具体而言，通过应用一阶泰勒展开，在适度角度偏差下，近场信道导向向量（CSV）的相位可近似线性化。在此近似下，角度域和距离域中的近场波束覆盖设计可通过二维（2D）逆傅里叶变换重构为天线域中的权重整形问题，从而实现低复杂度的波束成形设计。此外，我们揭示了一种固有的近场距离散焦效应：当角度波束覆盖范围足够宽时，近场波束聚焦特性会退化为距离不敏感波束转向，此时仅基于角度的波束覆盖设计即可提供宽范围覆盖。

- 最后，我们讨论所提方法向更一般场景的扩展，包括多区域波束覆盖、角度偏差较大的近场情形，以及基于模拟波束成形架构的波束覆盖。数值结果表明，与高复杂度的基于采样和优化的基准方法相比，所提出的低复杂度波束覆盖设计能够实现相当的最坏情况波束成形性能，同时将计算运行时间缩短数个数量级（例如，远场情形下从 885 ms 缩短至 0.0074 ms，近场情形下从 1275 ms 缩短至 0.0292 ms），因此适用于波束训练和跟踪等实时应用。

符号说明：粗体小写字母（例如，$\mathbf{a}$）表示向量，粗体大写字母（例如，$\mathbf{A}$）表示矩阵。花体字母（例如， $\mathcal{N}$）表示集合。上标 $(\cdot)^H$ 和 $(\cdot)^T$ 分别表示厄米（共轭转置）运算和转置运算。标量的绝对值记为 $|\cdot|$，向量的欧几里得范数记为 $\|\cdot\|_2$。符号 $\odot$ 表示哈达玛积，而 $\circledast$表示卷积运算。最后，

$\mathcal{O}(\cdot)$ 表示用于表征算法复杂度的标准大-$\mathcal{O}$ 记法。

II. 系统模型与问题表述

我们考虑一个多天线通信系统，其中部署了一个由 N 天线均匀线性阵列（ULA）（索引为 $\mathcal{N} \triangleq\{1,2,\ldots,N\}$）组成的基站，为目标区域提供波束覆盖。[1] 该均匀线性阵列沿 y 轴部署，中心位于原点 (0,0) m。因此，第 n 个天线的位置为 $\mathbf{u}_n = [0,u_n]^T, \forall n \in \mathcal{N}$，其中 $u_n = \frac{2n-N-1}{2}d$，$d = \frac{\lambda}{2}$ 表示半波长天线间距。

A. 信道模型

根据阵列规模的不同，我们考虑两种信道建模情况。具体而言，当天线数量相对较少时，采用远场（平面波前）信道模型。然而，当阵列孔径足够大时，则需要考虑近场（球面波前）信道模型，以准确表征电磁传播特性。

1）远场情形：对于这种情形，我们考虑以视距（LoS）路径为主的信道模型。由于非视距（NLoS）路径的功率可忽略不计，该模型广泛用于高频（例如毫米波和太赫兹）频段 [21]。因此，从基站到任意用户的远场信道记为 $\mathbf{h}_{\mathrm{FF}}^H \in \mathbb{C}^{1\times N}$，可建模为

$$\mathbf{h}_{\mathrm{FF}}^H = \sqrt{N}\beta_0 \mathbf{a}_{\mathrm{FF}}^H(\theta), \tag{1}$$

其中，β_0 和 $\theta \in [-1,1]$ 分别表示 LoS 路径的复值信道增益及其空间角。此外，远场信道空间变体 $\mathbf{a}_{\mathrm{FF}}(\theta)$ 表示为

$$\mathbf{a}_{\mathrm{FF}}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{N}}\left[e^{\jmath\frac{2\pi}{\lambda}u_1\theta},\ldots,e^{\jmath\frac{2\pi}{\lambda}u_N\theta}\right]^T, \tag{2}$$

2）近场情形：当阵列孔径足够大时，用户位于基站的近场区域，其距离 r 满足 $Z_{\mathrm{Fres}} \le r \le Z_{\mathrm{Rayl}}$，其中 $Z_{\mathrm{Rayl}} = \frac{2D^2}{\lambda}$ 为瑞利距离，$Z_{\mathrm{Fres}} = 0.5\sqrt{\frac{D^3}{\lambda}}$ 为菲涅耳距离，$D = (N-1)d$ 表示阵列孔径 [1]。对于这种情形，基于球面波前，近场视距信道建模如下

$$\mathbf{h}_{\mathrm{NF}}^H = \sqrt{N}\beta_0 \mathbf{a}_{\mathrm{NF}}^H(\theta,r). \tag{3}$$

此处，近场CSV $\mathbf{a}_{\mathrm{NF}}(\theta, r)$定义为

$$\mathbf{a}_{\mathrm{NF}}(\theta,r) = \frac{1}{\sqrt{N}}\left[e^{-\jmath\frac{2\pi}{\lambda}(r_1-r)},\ldots,e^{-\jmath\frac{2\pi}{\lambda}(r_N-r)}\right]^T, \tag{4}$$

其中，r_n 是用户与基站第 n个天线之间的距离。根据菲涅耳近似 [15], [22], r_n可近似为

$$r_n = \sqrt{r^2+u_n^2-2ru_n\theta} \overset{(a)}{\approx} r - u_n\theta + \frac{u_n^2(1-\theta^2)}{2r}$$

$$\triangleq \frac{1}{\xi} - u_n\theta + \frac{u_n^2(1-\theta^2)}{2}\xi, \tag{5}$$

其中，$\xi \triangleq \frac{1}{r} \in \left[\frac{1}{Z_{\mathrm{Rayl}}}, \frac{1}{Z_{\mathrm{Fres}}}\right]$ 表示用户的逆距离。请注意，引入逆距离 ξ 是为了便于后续基于近场CSV关于 ξ 的线性近似进行低复杂度波束覆盖设计（详情见第IV节）。基于以上内容，近场CSV也可以表示为空间角 θ 和逆距离 ξ的函数，即:

$$\left[\mathbf{a}_{\mathrm{NF}}(\theta,\xi)\right]_n = \frac{1}{\sqrt{N}}e^{\jmath\frac{2\pi}{\lambda}\left(u_n\theta - \frac{u_n^2(1-\theta^2)}{2}\xi\right)}, \forall n \in \mathcal{N}. \tag{6}$$

B. 问题表述

本文旨在最大化指定目标区域内的最小波束成形增益（或等效的功率增益），这一目标已在现有文献中得到广泛研究（例如参见 [10], [12], [18]），以确保可靠的波束覆盖（具体应用详见第 IV-B 节）。具体而言，对于远场情形，目标区域定义为

$$\mathcal{A}_{\mathrm{FF}} \triangleq \left\{\theta \mid \theta \in \Theta\right\}, \tag{7}$$

其中，$\Theta \triangleq [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ 表示所考虑的空间角区间，$\theta_{\min}$ 和 $\theta_{\max}$ 分别表示目标空间角的最小值和最大值。令$\mathbf{w} = [w_1,\ldots,w_N]^T$表示基站的全数字发射波束成形向量。[2] 那么，远场情形下的波束成形增益为 $g_{\mathrm{FF}}(\theta;\mathbf{w}) \triangleq |\mathbf{a}_{\mathrm{FF}}^H(\theta)\mathbf{w}|$。对于近场情形，波束覆盖应同时考虑角度域和距离域。因此，目标区域变为一个二维区域，其特征为

$$\mathcal{A}_{\mathrm{NF}} \triangleq \left\{(\theta,\xi) \mid \theta \in \Theta, \xi \in \Xi\right\}, \tag{8}$$

其中，$\Xi \triangleq [\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ 表示逆距离区间，$\xi_{\min}$ 和 $\xi_{\max}$ 分别表示目标逆距离的最小值和最大值。类似地，近场情形下的波束成形增益定义为 $g_{\mathrm{NF}}(\theta,\xi) \triangleq |\mathbf{a}_{\mathrm{NF}}^H(\theta,\xi)\mathbf{w}|$。

基于上述内容，为确保指定目标区域内的波束覆盖可靠（即，$\mathcal{A}_\chi$，$\chi \in \{\mathrm{FF}, \mathrm{NF}\}$），将最大化最坏情况波束成形增益的优化问题表述如下

$$\textbf{(P1)}: \max_{\mathbf{w}} \min_{\mathcal{U}_\chi \in \mathcal{A}_\chi} g_\chi(\mathcal{U}_\chi;\mathbf{w})$$
$$\text{s.t.} \quad \|\mathbf{w}\|_2^2 \le P_{\mathrm{t}}, \tag{9}$$

其中 P_{t} 表示基站的最大发射功率，χ =NF和 χ = FF分别对应于近场和远场情形。此外，$\mathcal{U}_{\mathrm{FF}} \triangleq \{\theta\}$ 和 $\mathcal{U}_{\mathrm{NF}} \triangleq \{(\theta,\xi)\}$ 表示各情形对应的空间域。注意，问题**(P1)** 是一个非凸优化问题，通常难以最优求解，因为1）目标函数关于波束成形向量$\mathbf{w}$是非凸的，以及2）最坏情况波束成形增益在

[1]所提出的低复杂度波束覆盖设计可扩展至均匀平面阵列（UPA）系统。然而，由于近场和远场CSV中水平角与垂直角相互耦合，要获得闭式解，需要进行特定的坐标变换以解耦空间角，这将留待我们未来的工作。

[2]本文考虑全数字波束成形架构，而纯模拟波束成形架构（例如，相控阵）的扩展将在第 IV-B 节讨论。

目标函数涉及连续不确定集 $\mathcal{A}_\chi$中无穷多个候选位置。

为解决上述困难，我们首先将其重新表述为以下等价形式

$$(\mathbf{P2}):\ \max_{\mathbf{w}}\ \ \gamma_\chi \quad \text{s.t.}\ \ (9),\ g_\chi\big(\mathcal{U}_\chi;\mathbf{w}\big)\geq\gamma_\chi,\ \forall\,\mathcal{U}_\chi\in\mathcal{A}_\chi, \tag{10}$$

其中 γ_χ，$\chi\in\{\mathrm{FF},\ \mathrm{NF}\}$ 是引入的一个辅助变量。为处理式 **(10)** 中的非凸约束，现有研究（例如 [10], [12]）大多通过离散化目标区域并应用连续凸近似（SCA）技术，将其重新表述为凸约束。然而，这种方法在实际应用中不可避免地会带来高昂的计算复杂度，且复杂度会随着天线数量和采样点数量的增加而线性增长。为解决这一问题，在接下来的章节中，我们首先考虑远场情形，并提出一种低复杂度且高效的方法，以最大化目标空间区域内的最坏情况波束成形增益。随后，我们通过纳入额外的距离域，将该方法进一步扩展到近场情形。

III. 远场波束覆盖

本节提出一种新颖且高效的基于傅里叶变换的远场波束覆盖设计，其计算复杂度显著低于现有的基于优化的方法。具体而言，我们表明，角度域中的远场波束覆盖问题可以等价地重新表述为空间–频率滤波问题，其中天线域波束成形与远场波束覆盖通过傅里叶变换相联系。此外，为应对由天线数量有限而产生的滚降效应（该效应会导致目标区域角度边界处的波束成形增益损失），我们特意设计了保护性缩放，以防止期望目标区域内出现滚降。

A. 空间频率域与天线域之间的傅里叶变换

为便于进行低复杂度波束覆盖设计，我们首先研究天线域中的波束成形向量与角度域中相应波束图之间的内在关系。具体而言，通过刻画目标区域 $\mathcal{A}_{\mathrm{FF}}$上的远场信道空间变体（CSV），我们表明空间频率域与天线域之间存在傅里叶变换关系。

1) 远场信道空间变体（*CSV*）：为处理非凸约束 **(10)**，我们首先将 $\mathcal{A}_{\mathrm{FF}}$ 内的远场信道空间变体刻画如下。

引理**1**（远场信道空间变体）。给定目标区域 $\mathcal{A}_{\mathrm{FF}}$ 和参考角度 $\theta_0\in\mathcal{A}_{\mathrm{FF}}$，关于任意角度 $\theta\in\mathcal{A}_{\mathrm{FF}}$ 的远场信道空间变体可表示为

$$\big[\mathbf{a}_{\mathrm{FF}}(\theta)\big]_n=\frac{1}{\sqrt{N}}\exp\Big(\jmath\frac{2\pi}{\lambda}u_n(\theta_0+\Delta\theta)\Big),\forall n\in\mathcal{N}, \tag{11}$$

其中 $\theta=\theta_0+\Delta\theta$。

2）归一化波束成形增益：根据**引理 1**，任意角度 $\theta\in\mathcal{A}_{\mathrm{FF}}$ 对应的远场信道空间变体可表示为参考角度 θ_0 与角度差 $\Delta\theta$的函数。因此，任意空间角对应的波束成形增益可重新表示如下。

引理 **2**（天线域与空间频率域之间的傅里叶变换）。对于远场情形，给定发射波束成形向量 $\mathbf{w}_{\mathrm{FF}}$，在 $\theta=\theta_0+\Delta\theta$ 处的（归一化）波束成形增益（即 $|\mathbf{a}_{\mathrm{FF}}^H(\theta)\mathbf{w}_{\mathrm{FF}}|$）为

$$g_{\mathrm{FF}}(\theta)=|\mathbf{a}_{\mathrm{FF}}^H(\theta)\mathbf{w}_{\mathrm{FF}}|=\Big|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}w_{\mathrm{FF},n}e^{-\jmath\frac{2\pi}{\lambda}u_n(\theta_0+\Delta\theta)}\Big|$$
$$=\Big|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}v_{\mathrm{FF},n}e^{-\jmath\frac{2\pi}{\lambda}u_n\Delta\theta}\Big|\triangleq|f_{\mathrm{FF}}(\Delta\theta;\theta_0,N)|, \tag{12}$$

其中 $v_{\mathrm{FF},\,n}\triangleq w_{\mathrm{FF},\,n}e^{-\jmath\frac{2\pi}{\lambda}u_n\theta_0}$，$\forall n\in\mathcal{N}$，或者等价地，有 $\mathbf{w}_{\mathrm{FF}}=\mathbf{a}_{\mathrm{FF}}(\theta_0)\odot\mathbf{v}_{\mathrm{FF}}$，其中 $\mathbf{v}_{\mathrm{FF}}=[v_{\mathrm{FF},1},\ldots,v_{\mathrm{FF},N}]^T$。

由（12）可知，$f_{\mathrm{FF}}(\Delta\theta;\theta_0)$本质上是 $\{v_{\mathrm{FF},n}\}_{n=1}^N$的离散傅里叶变换（DFT）。这一等价关系建立了一个傅里叶变换关系，其中，天线位置 u_n 被视为离散时间采样点，向量$\mathbf{v}_{\mathrm{FF}}$ 充当时域信号，而空间角度偏差 $\Delta\theta$ 则类似于频率变量。这揭示了天线域与空间频率域之间固有的傅里叶变换关系，表明角度域中的波束覆盖设计可以通过天线域中相应的谱滤波器设计有效实现。

B. 所提出的替代远场波束覆盖设计

基于上述认识，本小节首先提出一种替代的远场波束覆盖设计。随后，我们说明有限的天线数量会导致不可避免的滚降效应，从而使目标区域角度边界处的波束成形增益降低。

1）问题重构：根据**引理 2**，我们首先通过考虑目标区域上的理想矩形波束成形增益轮廓，对原问题（**P2**）进行重新表述。

具体而言，不失一般性，我们选取目标角度区域的几何中心作为参考角度，即 $\theta_0=\big(\theta_{\min}+\theta_{\max}\big)/2$，使得目标区域内的角度偏差满足

$$|\Delta\theta|\leq\big(\theta_{\max}-\theta_{\min}\big)/2\triangleq\mu. \tag{13}$$

据此，基于 **(12)**，远场情形下的约束 **(10)** 可改写为

$$|f_{\mathrm{FF}}(\Delta\theta;\theta_0,N)|\geq\gamma_{\mathrm{FF}},\ \forall\,|\Delta\theta|\leq\mu. \tag{14}$$

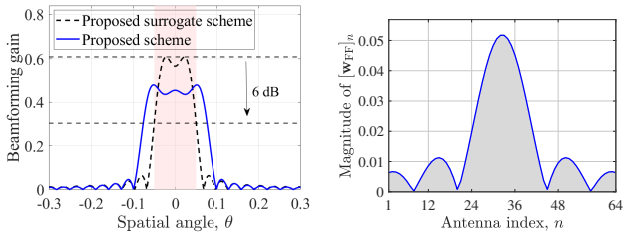
为满足约束 **(10)** 并保证最坏情况波束成形增益性能，我们构造一个在目标区域上具有理想平坦矩形轮廓的波束图。此外，为便于低复杂度波束覆盖设计，我们强制 f_{FF} 为实值。据此，所考虑空间区域内的目标波束成形增益由下式给出

$$f_{\mathrm{FF}}(\Delta\theta;\theta_0,N)=\begin{cases}\gamma_{\mathrm{FF}}, & \forall\,|\Delta\theta|\leq\mu,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{15}$$

需要指出的是，尽管实值条件限制了波束成形设计中的自由度，但第五节将表明其可达到与基于采样的方法相当的覆盖性能。

基于以上内容，目标区域 $\mathcal{A}_{\mathrm{FF}}$ 上的波束覆盖设计可重新表述为

$$(\mathbf{P3}):\ \max_{\mathbf{w}_{\mathrm{FF}}}\ \gamma_{\mathrm{FF}}\quad\text{s.t. (9), (15).}$$



(a) 波束成形增益。 (b) $[\mathbf{w}_{\mathrm{FF}}]_n$的幅度。

图1：波束成形增益和 $[\mathbf{w}_{\mathrm{FF}}]_n$的幅度。

2）所提出的代理方案：请注意，问题**(P3)** 可视为在空间角度域中设计矩形窗，因此可通过下文详述的两步代理方法高效地求得向量$\mathbf{v}_{\mathrm{FF}}$ 。

步骤1（逆傅里叶变换）：给定目标区域 $\mathcal{A}_{\mathrm{FF}}$ 上具有矩形窗状波束成形增益，理想的天线域序列 $[\bar{\mathbf{s}}_{\mathrm{FF}}]_n$，$n \in \mathcal{Z}$（假设天线数为无限）可通过以下逆傅里叶变换得到，从而在（15）中的 $\mathcal{A}_{\mathrm{FF}}$ 上实现所需的平坦波束覆盖

$$[\bar{\mathbf{s}}_{\mathrm{FF}}]_n \triangleq \bar{s}_{\mathrm{FF},n} = 2\mu\gamma_{\mathrm{FF}}\mathrm{sinc}\big(\frac{2u_n\mu}{\lambda}\big), \forall n \in \mathcal{Z}, \tag{16}$$

其中 $\mathrm{sinc}(a) = \frac{\sin(\pi a)}{\pi a}$ 。（16）的证明见附录A。

步骤2（天线域截断）：令 $[\bar{\mathbf{v}}_{\mathrm{FF}}]_n \triangleq \bar{v}_{\mathrm{FF},\,n} = \mathrm{sinc}\big(\frac{2u_n\mu}{\lambda}\big)$，$n \in \mathcal{Z}$。然后，通过使用阵列掩模$\mathbf{m}$截断天线数为无限时的理想无限序列 $\bar{\mathbf{v}}_{\mathrm{FF}}$，即可得到 N 维向量$\mathbf{v}_{\mathrm{FF}}$。数学上，向量$\mathbf{v}_{\mathrm{FF}}$ 可表示为

$$[\mathbf{v}_{\mathrm{FF}}]_n = \alpha \cdot [\bar{\mathbf{v}}_{\mathrm{FF}} \odot \mathbf{m}]_n = \alpha \cdot \mathrm{sinc}\big(\frac{2u_n\mu}{\lambda}\big), n \in \mathcal{N}, \tag{17}$$

其中，$\alpha = \sqrt{\frac{P_{\mathrm{t}}}{\sum_{n\in\mathcal{N}} \left|\mathrm{sinc函数}\left(\frac{2u_n\mu}{\lambda}\right)\right|^2}}$ 是用于满足发射功率约束的辅助变量，$\mathbf{m}$ 表示矩形窗掩模，其元素定义如下：

$$[\mathbf{m}]_n \triangleq m_n = \begin{cases} 1, & \text{if } n \in \mathcal{N}, \\ 0, & \text{if } n \in \mathcal{Z} \text{ and } n \notin \mathcal{N}. \end{cases} \tag{18}$$

注意，在式（17）中，向量$\mathbf{v}_{\mathrm{FF}}$ 充当幅度整形向量，用于指定各天线上的功率分布，以合成以 $\theta = 0$为中心的矩形波束成形增益。根据关系$\mathbf{w}_{\mathrm{FF}} = \mathbf{a}_{\mathrm{FF}}(\theta_0) \odot \mathbf{v}_{\mathrm{FF}}$，所提出的代理方法得到的波束成形向量如下。

代理波束覆盖设计

步骤 1（权重整形设计）：

$$[\mathbf{v}_{\mathrm{FF}}]_n = \alpha \cdot \mathrm{sinc}\big(\frac{2u_n\mu}{\lambda}\big), n \in \mathcal{N}. \tag{19}$$

步骤 2（波束成形设计）：

$$\mathbf{w}_{\mathrm{FF}} = \mathbf{a}_{\mathrm{FF}}(\theta_0) \odot \mathbf{v}_{\mathrm{FF}}. \tag{20}$$

示例 **1.** 在图 1 中，我们数值展示了给定 $\theta_{\min} = -0.05$、$\theta_{\max} = 0.05$ 和 $N = 64$ 时远场情形下的波束成形增益以及分配给不同天线的功率。以下总结了几个关键观察结果：

- 矩形增益轮廓：所提出的代理方案可实现平坦且类似矩形窗的波束成形增益，并覆盖目标角度区域。
- sinc(·)形状的功率分布：如式（16）所示，所设计波束成形向量在天线域上的幅度呈现类似 sinc(·) 的形状。
- 滚降特性：由于天线数量有限，波束成形增益方向图的主瓣通常呈现非理想滚降，因此不可避免地会在目标区域的角度边界处造成波束成形增益损失（约 6 dB）。

C. 远场情形下的波束覆盖设计方案

在本小节中，我们首先对所提出代理方法的滚降效应进行解析表征，并据此通过保护性缩放谨慎扩大目标空间区域，设计一种考虑滚降的波束覆盖设计方法，从而提升原始目标区域空间边界处的波束成形增益（见图 1(a)）。

具体而言，对于天线数量有限的均匀线性阵列，式（17）中的权重整形向量$\mathbf{v}_{\mathrm{FF}}$ 可解释为对理想权重序列 $\bar{\mathbf{v}}_{\mathrm{FF}}$应用矩形窗函数$\mathbf{m}$，等价地可改写为

$$v_{\mathrm{FF},n} = \bar{v}_{\mathrm{FF},n} \cdot m_n, \tag{21}$$

其中，m_n 定义见式（18）。在远场和近场情形下（见第 IV 节），权重整形向量 $\mathbf{v}_\chi$、$\chi \in${FF、NF} 会重新配置各天线上的功率分配，其中引入参数 α 以满足发射功率约束。由于 α 的取值不会影响波束覆盖区域，因此，将不考虑发射功率约束时获得的波束成形增益（即设定 $\alpha = 1$）称为功率无约束波束成形增益（简称无约束波束成形增益），其刻画了由代理方法的波束成形向量生成的波束覆盖方向图。因此，矩形窗函数 $\mathbf{m}$ （即有限数量的天线）所对应的无约束波束成形增益如下所示。

引理 **3**（无约束波束成形增益）**：** 给定式（17）中的权重整形向量$\mathbf{v}_{\mathrm{FF}}$，期望波束覆盖区域内的无约束波束成形增益可写成如下卷积形式

$$\begin{aligned} \left|f_{\mathrm{FF}}^{(\mathrm{unc})}(\Delta\theta, N)\right| &\triangleq \left|\mathbf{a}_{\mathrm{FF}}^H(\theta_0+\Delta\theta) \cdot \left(\mathbf{a}_{\mathrm{FF}}(\theta_0) \odot \mathbf{v}_{\mathrm{FF}}\right)\right| \\ &= \frac{1}{N}\left|f_{\bar{\mathrm{v}}}(\Delta\theta) \circledast \Omega(\Delta\theta, N)\right| \\ &= \frac{1}{2\mu N}\int_{-\mu}^{\mu} N\frac{\sin\left(\frac{N\pi(\Delta\theta-x)}{2}\right)}{\frac{N\pi(\Delta\theta-x)}{2}}\,dx, \end{aligned} \tag{22}$$

其中 $f_{\bar{\mathrm{v}}}(\Delta\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\mu}, & \text{若 } |\Delta\theta| \le \mu, \\ 0, & \text{若 } |\Delta\theta| > \mu, \end{cases}$ 是 $\bar{\mathbf{v}}_{\mathrm{FF}}$ 的傅里叶变换，而 $\Omega(\Delta\theta,\ N) \triangleq \sum_{n=1}^{N} e^{-\jmath\frac{2\pi}{\lambda}u_n\Delta\theta} = e^{-\jmath\pi\Delta\theta(N+1)/2}\frac{\sin(N\pi\Delta\theta/2)}{\sin(\pi\Delta\theta/2)}$ 是由 $\mathbf{m}$ 诱导的狄利克雷核。

证明：请参阅附录B ■

为更好地理解空间边界附近无约束波束成形增益的滚降行为，下面

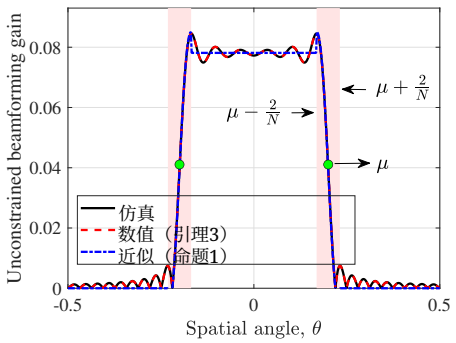


图2：给定 $\theta_{\min}=-0.2$、$\theta_{\max}=0.2$、$f=30$ GHz和 $N=64$时，角度域中的无约束波束成形增益。

根据 μ 的值，给出一种刻画无约束波束成形增益滚降特性的近似。

命题1 （滚降特性）。给定最大角度偏差 $\mu>\frac{2}{N}$，(22)中的无约束波束成形增益可进一步近似为[3]

$$\left|f_{\mathrm{FF}}^{(\mathrm{unc})}(\Delta\theta,N)\right| \approx \frac{1}{2\mu N}\times\begin{cases}2, & \text{if } |\Delta\theta|\le \mu-\frac{2}{N},\\ 1-\frac{2}{\pi}\mathrm{Si}\left(\frac{N\pi}{2}(|\Delta\theta|-\mu)\right), & \text{if } \mu-\frac{2}{N}<|\Delta\theta|<\mu+\frac{2}{N},\\ 0, & \text{if } |\Delta\theta|\ge\mu+\frac{2}{N},\end{cases}$$

其中$\mathrm{Si}(a)\triangleq\int_0^a \frac{\sin t}{t}\,dt$。该近似利用了当 $|a|\ge\pi$时$\mathrm{Si}(a)\approx\pm\frac{\pi}{2}$ 的渐近行为。

证明：请参阅附录C。 ■

示例2. 图2展示了远场情形下的无约束波束成形增益和功率分布，其中$\theta_{\min}=-0.2$、$\theta_{\max}=0.2$、$f=30$ GHz，且 $N=64$。可以观察到，引理3给出的无约束波束成形增益与采用基于傅里叶变换的波束覆盖设计所得到的结果一致。此外，通过用命题1中的分段函数近似无约束波束成形增益，我们确定了滚降区间，该区间以粉色突出显示（见图2）。

命题1表示，给定最大角度偏差 $\mu>\frac{2}{N}$，滚降行为会在$|\Delta\theta|<\mu+\frac{2}{N}$时发生。请注意，该滚降区域的宽度为 $\mu-\frac{2}{N}<\frac{4}{N}$，与天线数量 N 成反比。此外，当 $|\Delta\theta|=\mu$时，由于$\mathrm{Si}(0)=0$，无约束波束成形增益会降至 $|f^{(\mathrm{unc})}$ 远场 $(\Delta\theta)|=1$。与$|\Delta\theta|\le\mu-\frac{2}{N}$时的值相比，这相当于降低了 -6 dB。

为防止目标区域内出现滚降，我们提出通过增加宽度为 $2/N$ 的保护性缩放来扩大设计区域，从而得到以下波束成形设计。具体而言，给定目标区域 $\mathcal{A}_{\mathrm{FF}}$ 和参考角度 θ_0，所提出的 考虑滚降的 波束覆盖设计，

[3]鉴于实际波束覆盖需求通常超过角分辨率（即 $2/N$），我们考虑最大角度偏差满足 $\mu>2/N$ 的情形。

通过求解问题 **(P3)** 得到，其过程分为以下三个步骤。

考虑滚降的波束覆盖设计

步骤 1（添加保护性缩放）：

$$\mu^{+}=\mu+2/N. \tag{23}$$

步骤 2（权重整形设计）：

$$[\tilde{\mathbf{v}}_{\mathrm{FF}}]_n=\tilde{v}_{\mathrm{FF},\,n}=\alpha\cdot\mathrm{sinc函数}\left(\frac{2u_n\mu^{+}}{\lambda}\right),\quad\forall n\in\mathcal{N}. \tag{24}$$

步骤 3（波束成形设计）：

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\mathrm{FF}}=\mathbf{a}_{\mathrm{FF}}(\theta_0)\odot\tilde{\mathbf{v}}_{\mathrm{FF}}. \tag{25}$$

引入保护性缩放可确保滚降行为发生在目标区域之外，从而保证 $\mathcal{A}_{\mathrm{FF}}$ 上的最坏情况波束成形增益。

备注 1 （天线数量的影响）。**命题1**表明，为防止目标区域内出现滚降，必须进行宽度为 $\frac{2}{N}$的保护性缩放，其宽度与天线数量成反比。值得注意的是，当 N 趋于无穷大时，保护性缩放的宽度趋于零。这是意料之中的，因为具有无限孔径的阵列能够实现完美的矩形波束轮廓，不会出现任何滚降，因此在这种理想情况下无需进行保护性缩放。

IV. 近场波束覆盖

在本节中，我们进一步考虑近场波束覆盖设计。与远场情形相比，更为复杂的近场CSV以及对二维（角度与距离）覆盖的要求，使得求解问题**(P2)**更具挑战性。为应对这些挑战，我们借助近场CSV近似和二维逆傅里叶变换，将所提出的远场波束覆盖设计扩展到近场情形。此外，我们展示了一个有趣的结果：当角度波束覆盖足够大时，近场波束无法在距离域中很好地聚焦能量，从而产生一种新的宽波束诱导近场散焦效应。

A. 近场情形下所提出的波束覆盖设计

与远场情形类似，我们首先基于一阶泰勒展开对近场CSV进行近似，[4] 然后提出一种高效的基于傅里叶变换的近场波束覆盖设计。

1) 近似近场*CSV*与波束成形增益：对于该情形，目标二维区域中的近场CSV（见(6)）关于 θ 和 ξ 可近似如下。

引理 4 （近场CSV近似）。对于目标区域 $\mathcal{A}_{\mathrm{NF}}$，将 $(\theta_0,\xi_0)\in\mathcal{A}_{\mathrm{NF}}$ 记为参考点，则任意点 $(\theta,\xi)\in\mathcal{A}_{\mathrm{NF}}$ 对应的CSV可近似表示为

$$\left[\mathbf{a}_{\mathrm{NF}}(\theta,\xi)\right]_n\approx\frac{1}{\sqrt{N}}\exp\left(\jmath\frac{2\pi}{\lambda}\phi_n(\theta_0,\xi_0,\Delta\theta,\Delta\xi)\right)\triangleq\left[\mathbf{a}_{\mathrm{NF}}^{(\mathrm{app})}(\theta_0+\Delta\theta,\xi_0+\Delta\xi)\right]_n,\forall n\in\mathcal{N} \tag{26}$$

[4]尽管二阶展开具有更高的精度，但由此产生的二次相位项破坏了天线域与空间频率域之间的傅里叶变换关系，从而增加了低复杂度波束成形设计的难度。相比之下，所提出的一阶展开保留了这一傅里叶变换关系，同时仍能捕捉距离相关相位变化。

where $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, $\Delta\xi = \xi - \xi_0$, and

$$\phi_n(\theta_0,\xi_0,\Delta\theta,\Delta\xi) = \underbrace{u_n\theta_0 - \frac{u_n^2(1-\theta_0^2)}{2}\xi_0}_{\varphi_n(\theta_0,\xi_0)} + \underbrace{\left(u_n + u_n^2\theta_0\xi_0\right)}_{\zeta_n^{(\theta)}(\theta_0,\xi_0)}\Delta\theta + \underbrace{\left(-\frac{u_n^2(1-\theta_0^2)}{2}\right)}_{\zeta_n^{(\xi)}(\theta_0)}\Delta\xi, \forall n \in \mathcal{N}. \quad (27)$$

证明： 请参阅附录 D。 ■

通过应用**引理4**中的一阶泰勒展开，近场CSV的相位可近似为关于 $\Delta\theta$ 和 $\Delta\xi$的线性函数。忽略二阶项后，可得到式（26）中的简化CSV表达式。为评估式（26）中$\mathbf{a}_{\text{近场}}^{(\text{app})}$的近似精度，我们首先作如下定义。

定义 1（波束成形增益损失）。 给定精确的近场 CSV $\mathbf{a}_{\text{NF}}(\theta,\xi)$ 及式 (26) 中其近似的近场 CSV $\mathbf{a}_{\text{NF}}^{(\text{app})}(\theta_0+\Delta\theta, \xi_0+\Delta\xi)$，波束成形增益损失定义为

$$\mathcal{L}(\Delta\theta,\Delta\xi) \triangleq 1 - \left|\mathbf{a}_{\text{NF}}^H\mathbf{a}_{\text{NF}}^{(\text{app})}\right|. \quad (28)$$

所定义的波束成形增益损失刻画了精确近场 CSV 与其近似值之间的差异。由于忽略了二次相位项，这种一阶展开仅在 $|\Delta\theta|$ 和 $|\Delta\xi|$都相对较小时才准确。当这些偏差足够大时，二阶项便不再可忽略，从而导致精确 CSV 与近似 CSV 之间出现明显偏差。为量化近似精度，我们在图 3 $\mathcal{L}(\Delta\theta,\Delta\xi)$ 中绘制了其随角度偏差和逆距离偏差的变化曲线。可以观察到， $\mathcal{L}(\Delta\theta,\Delta\xi)$ 会随着角度和/或逆距离 $\mathcal{L}(\Delta\theta,\Delta\xi)$ 的增大而增大，这表明泰勒近似的准确性会降低。值得注意的是，例如，当 $|\Delta\theta| \le \theta_{\text{th}}$ （其中 θ_{th} 作为确保波束成形增益损失可忽略的保守判据）时， $\mathcal{L}(\Delta\theta,\Delta\xi)$ 仍相对较小（例如，$\mathcal{L}(\Delta\theta,\Delta\xi) \le 0.05$）。[5] 这表明，在此范围内，一阶泰勒近似能够充分准确地表示近场 CSV。

引理4 表明，当最大的角度偏差足够小时（例如，$|\Delta\theta| \le 0.2$），近场CSV的相位可近似为关于 $\Delta\theta$和 $\Delta\xi$的线性函数，从而简化式（26）中近似CSV的表达式。因此，$(\theta,\ \xi)$处的波束成形增益（即 $|\mathbf{a}_{\text{NF}}^H(\theta,\ \xi)\mathbf{w}_{\text{NF}}|$）可近似为

$$\left|\mathbf{a}_{\text{NF}}^H(\theta,\xi)\mathbf{w}_{\text{NF}}\right| \approx \left|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N} w_{\text{NF},n}e^{-\jmath\frac{2\pi}{\lambda}(\varphi_n+\zeta_n^{(\theta)}\Delta\theta+\zeta_n^{(\xi)}\Delta\xi)}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N} v_{\text{NF},n}e^{-\jmath\frac{2\pi}{\lambda}\zeta_n^{(\theta)}\Delta\theta}e^{-\jmath\frac{2\pi}{\lambda}\zeta_n^{(\xi)}\Delta\xi}\right|$$

[5]本文关注角度偏差较小的场景，即$\theta_{\text{th}} = |\Delta\theta| \le 0.2$。对于角度偏差较大的场景，原始目标区域可以划分为多个子区域，在这些子区域内应用所提出的基于FT的波束覆盖设计，从而确保整个目标区域得到高效覆盖。这一扩展将在第 IV-B2 节讨论。

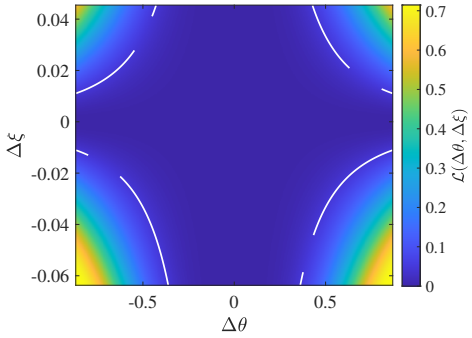


图3：当 $N = 256$、 $f = 30\,\text{GHz}$、 $\theta_0 = 0$，且 $\xi_0 = 1/15$ $[\theta_{\min},\theta_{\max}] = [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ $[\xi_{\min},\xi_{\max}] = [\frac{1}{Z_{\text{Rayl}}}, \frac{1}{Z_{\text{Fres}}}]$ 时，$\mathcal{L}(\Delta\theta,\ \Delta\xi)$随角度偏差和逆距离偏差的变化。

$$\triangleq \left|f_{\text{NF}}(\Delta\theta,\Delta\xi;\theta_0,\xi_0,N)\right|, \quad (29)$$

其中 $v_{\text{NF},\ n} = w_{\text{NF},\ n}e^{-\jmath\frac{2\pi}{\lambda}\varphi_n}$， $\forall n \in \mathcal{N}$。与远场波束覆盖设计相比，近场波束覆盖设计可视为波束赋形权向量$\mathbf{v}_{\text{NF}}$的二维离散傅里叶变换，因此可以利用逆傅里叶变换来促进近场波束成形设计。

2）基于傅里叶变换的近场波束成形设计：同样，我们选取目标区域的几何中心作为参考点 $(\theta_0,\ \xi_0)$，即

$$\theta_0 = \frac{\theta_{\min}+\theta_{\max}}{2},\ \xi_0 = \frac{\xi_{\min}+\xi_{\max}}{2}, \quad (30)$$

相应的角度与逆距离偏差满足

$$|\Delta\theta| \le \frac{\theta_{\max}-\theta_{\min}}{2} \triangleq \mu,\ |\Delta\xi| \le \frac{\xi_{\max}-\xi_{\min}}{2} \triangleq \nu. \quad (31)$$

为满足约束 (10)，我们旨在构造一个波束图，使其在近场目标区域 $\mathcal{A}_{\text{NF}}$ 内具有实值波束成形增益，该增益表示为

$$f_{\text{NF}}(\Delta\theta,\Delta\xi;\theta_0,\xi_0,N) = \begin{cases}\gamma_{\text{NF}}, & \forall\ |\Delta\theta| \le \mu, |\Delta\xi| \le \nu,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \quad (32)$$

为了在空间域的二维矩形窗口内实现所需的波束覆盖，可按照下文详述的三个步骤设计波束成形向量$\mathbf{v}_{\text{NF}} = [v_{\text{NF},1},\ldots,v_{\text{NF},N}]^T$，其方法与远场情形类似。具体而言，给定目标区域 $\mathcal{A}_{\text{NF}}$ 和参考点 $(\theta_0,\ \xi_0)$，且其角度偏差满足$|\Delta\theta| \le \theta_{\text{th}}$时，在 (32) 中，为实现 $\mathcal{A}_{\text{NF}}$ 上的平坦波束覆盖而设计的发射波束成形向量如下所示。

所提出的近场波束覆盖设计

步骤 1（添加保护性缩放）：

$$\mu^+ = \mu + 2/N. \quad (33)$$

步骤 2（权重整形设计）：

$$[\tilde{\mathbf{v}}_{\text{NF}}]_n = \alpha\cdot\text{sinc函数}\left(\frac{2\mu^+\zeta_n^{(\theta)}}{\lambda}\right)\cdot\text{sinc函数}\left(\frac{2\nu\zeta_n^{(\xi)}}{\lambda}\right),\ \forall n \in \mathcal{N}. \quad (34)$$

第 3 步（波束成形设计）：

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{NF}} = \mathbf{a}_{\text{NF}}(\theta_0,\ \xi_0) \odot \tilde{\mathbf{v}}_{\text{NF}}. \quad (35)$$

其中，$\tilde{\mathbf{v}}_{\mathrm{NF}}=[\tilde{v}_{\mathrm{NF},1},\ldots,\tilde{v}_{\mathrm{NF},N}]^T$是近场加权整形向量，其定义见 (34)，并在附录 E 中得到证明；α 是为满足发射功率约束而引入的辅助变量。与远场情形类似，在角度域中采用宽度为 $2/N$ 的保护性缩放，以减轻有限天线数量导致的滚降效应。相较之下，距离域中不采用保护性缩放，这一做法基于以下观察。

观察 **1.** 当角度覆盖足够大（即 $\mu>2/N$）时，所得波束成形向量将在距离域呈现波束转向行为，从而实现宽范围覆盖，如**命题 2**所述。

命题 **2** （距离散焦效应）。在近场情形下，考虑一种仅针对角度域（即角度偏差 $\mu>0$）进行设计、且对距离（逆距离）域（即 $\nu=0$）没有覆盖要求的波束覆盖设计。给定一个参考点（θ_0，ξ_0），所提出的近场波束成形设计在（θ_0，$\xi_0+\Delta\xi$）处实现的无约束波束成形增益可近似表示为

$$\begin{aligned}\left|f_{\mathrm{NF}}^{(\mathrm{unc})}(0,\Delta\xi,N)\right| &=\left|\mathbf{a}_{\mathrm{NF}}^H(\theta_0,\xi)\cdot(\mathbf{a}_{\mathrm{NF}}(\theta_0,\xi_0)\odot\tilde{\mathbf{v}}_{\mathrm{NF}})\right|\\ &=\left|\mathbf{a}_{\mathrm{NF}}^H(\theta_0,\xi_0+\Delta\xi)\cdot(\mathbf{a}_{\mathrm{NF}}(\theta_0,\xi_0)\odot\tilde{\mathbf{v}}_{\mathrm{NF}})\right|\\ &\approx\frac{1}{2D}\int_0^1\Big[\mathcal{I}(t)+\mathcal{I}(-t)\Big]\,dt,\end{aligned}\tag{36}$$

其中

$$\mathcal{I}(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2|\mathcal{Q}(t)|}}e^{-\jmath\frac{\mathcal{J}^2(t)}{4\mathcal{Q}(t)}}\times\begin{cases}\big[\mathcal{G}(z_2(t))-\mathcal{G}(z_1(t))\big], & \mathcal{Q}(t)>0\\ \big[\mathcal{G}^*(z_2(t))-\mathcal{G}^*(z_1(t))\big], & \mathcal{Q}(t)<0\end{cases}.\tag{37}$$

这里，$\mathcal{Q}(t)=\psi+\pi\kappa\varkappa t$和 $\mathcal{J}(t)=\pi\kappa t$，其中$\kappa=\frac{2\mu}{\lambda}$、$\varkappa=\theta_0\xi_0$ $\psi=\pi$ $z_1\ t$ 和 $(1=\theta_0^2)_\lambda$ $\Delta\xi$。此外，$()\sqrt{2|\mathcal{Q}\ t\ |}\left(-\frac{D}{2}+\frac{\mathcal{J}\ t}{2\mathcal{Q}\ t}\right)$ $z_2\ t\ =\sqrt{2|\mathcal{Q}\ t\ |}\left(\frac{D}{2}+\frac{\mathcal{J}\ t}{2\mathcal{Q}\ t}\right)()()()$，$()()()$，$\mathcal{G}\ z\ =\mathcal{C}\ z\ +\jmath\mathcal{S}\ z$ $\mathcal{C}\ z$ $()()()$，其中$()=\int_0^z\cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$和$\mathcal{S}(z)=\int_0^z\sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$为菲涅耳函数。

证明：请参阅附录 F。 ■

命题 2 刻画了仅角度波束覆盖下距离域中的无约束波束成形增益。虽然式（36）给出了距离域中无约束波束成形增益的闭式表达式，但角度波束宽度与距离域行为之间的关系涉及复杂的菲涅耳积分，因此难以获得有用的见解。因此，我们提供了一个数值示例，以便直观地理解这一关系。

示例 **3.** 为展示**命题 2**中的距离失焦行为，我们在图 4 中给出了不同角度偏差μ下距离域中的无约束波束成形增益，参考点为 (0，$1/15$)，$N=256$，以及 $f=30$ GHz。由此可以得出几个重要观察结果。

- 首先，随着角度偏差 μ 增大，可以观察到无约束波束成形增益出现明显下降。这一现象揭示了一种固有权衡：扩大角度覆盖不可避免地要以可实现波束成形增益为代价。
- 其次，对于不同的角度偏差值 μ，所提出的基于傅里叶变换的波束覆盖方法与基于采样的方法在距离域上表现出相当的波束成形增益。
- 第三，对于所有考虑的角度偏差，波束成形增益在距离域上始终近乎平坦。这一观察表明，在宽角度覆盖条件下，近场波束聚焦会退化为距离不敏感波束转向，这被称为近场距离散焦效应。[6]

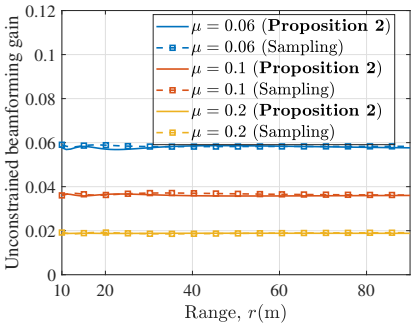


图 4：近场情形下，不同角度偏差 μ 时，逆距离偏差为 $\Delta\xi=0$、参考点为 (0，$1/15$)、$N=256$ 和 $f=30$ GHz 时，距离域中的无约束波束成形增益。

注释**2** （为何在距离域中发生散焦？）。**命题 2**和**示例 3**表明，扩大角度覆盖范围需要以近场聚焦能力下降为代价。具体而言，当强制采用平坦角度覆盖时，天线孔径上的功率分配趋近于 sinc形轮廓，发射能量主要集中在孔径中心附近。在这种情况下，只有一部分中央天线单元能够有效参与波束覆盖，而其余天线实际上未参与波束赋形。因此，有效孔径尺寸小于物理孔径，从而导致所观测到的距离域波束散焦。

注释 **3** （所提方法的优势）。与现有的波束覆盖设计（例如基于采样的方案）不同，后者依赖密集的空间采样，并在大量角度或距离网格点上进行迭代优化；所提方法则可直接根据目标区域参数化，并得到闭式波束成形解。具体而言，对于采样数为 S 的基于采样的方案，其计算复杂度为 $\mathcal{O}\left(I\sqrt{2(S+1)}\cdot\log(1/\epsilon)\ \left((S+2)\ N^3\right)\right)$，其中 I 为连续凸近似迭代次数，ϵ 为预定义精度 [24]。

[6]为了在宽角度覆盖下最大化近场情形中的最坏情况波束覆盖性能，所提出的方法和基于采样的方法都表现出距离散焦效应（见图 4）。而对于其他旨在特定区域内实现角度-距离聚焦波束方向图的目标，可以采用现有方法，例如基于Gerchberg–Saxton（GS）的算法 [23] 和基于优化的方法 [18], [19], ，在角度域和距离域中设计目标波束方向图。然而，此类场景下的低复杂度设计仍然具有挑战性，将留待未来工作研究。

通过避免迭代过程和穷举网格搜索，计算复杂度显著降低，同时所实现的最坏情况波束成形增益与基于采样的基准相当（数值结果见第五节）。

备注**4**（远场与近场情形）。针对远场和近场场景提出的波束覆盖设计方法均采用基于傅里叶变换的类似框架，主要区别在于目标区域的维数以及底层空间频率映射不同。

- **远场情形：**波束覆盖设计简化为角度域中的一维（1D）问题，其特征仅由偏差 $\Delta\theta$ 决定。在这种情形下，CSV 的相位关于空间频率变量 $u_n\Delta\theta$ 天然呈线性，从而直接建立式（12）中的一维傅里叶变换关系。因此，相应的波束成形权重具有闭式 sinc(·) 结构，如式（16）所示。
- **近场情形：**波束覆盖设计成为角度与距离联合域上的二维问题，由（$\Delta\theta$，$\Delta\xi$）参数化。由于球面波传播，式（6）中近场CSV的相位天然呈非线性。为使波束覆盖设计问题更易处理，我们在参考点附近进行一阶泰勒近似，如**引理4**所述，从而将相位关于偏差（$\Delta\theta$，$\Delta\xi$）线性化。该近似得到一个近似的二维傅里叶变换关系，如式（29）所示。因此，它导出一种可分离波束成形结构，由两个 sinc(·) 函数的乘积构成，如式（34）所示，对应于角度域和距离域中的矩形目标区域。

值得注意的是，通过设定 $\xi_0=0$ 和 $\Delta\xi=0$，远场设计也可视为(35)中近场情形的一个特例。

B. 讨论与扩展

1) 多区域波束覆盖：所提出的基于傅里叶变换的低复杂度波束成形框架可以很容易地扩展到多区域波束覆盖场景，即需要对多个空间分离区域同时实现波束覆盖。

具体而言，对于远场情形，考虑一组 K个互不重叠的目标区域 $\{\mathcal{A}_{\mathrm{FF},k}\}_{k=1}^{K}$（记为 $\mathcal{K}\triangleq\{1,2,\ldots,K\}$），每个区域由参考角度$\theta_{0,\,k}$和角度偏差 μ_k表征。为确保波束间干扰可忽略不计，假定这些区域在角度域中充分分离，并满足

$$|\theta_{0,i}-\theta_{0,j}|\geq\mu_i+\mu_j+8/N,\ \forall i\neq j\in\mathcal{K}, \tag{38}$$

其中裕度 $\frac{8}{N}$ 保证相邻波束的滚降区域互不重叠，从而保持近似的波束正交性。

对于每个区域$\mathcal{A}_{\mathrm{FF},k},k\in\mathcal{K}$，相应的波束成形向量 $\tilde{\mathbf{w}}_{\mathrm{FF},k}$ 可通过第三节所提出的波束覆盖设计得到。因此，发射向量被构造为 $\{\tilde{\mathbf{w}}_{\mathrm{FF},k}\}$的加权叠加，即

$$\mathbf{w}_{\mathrm{FF}}^{(\mathrm{MB})}=\sum_{k\in\mathcal{K}}\beta_k\tilde{\mathbf{w}}_{\mathrm{FF},k}, \tag{39}$$

其中 $\{\beta_k\}_{k=1}^{K}$ 为用于功率归一化以及在不同波束间灵活进行增益分配的缩放系数。

所提出的多区域波束覆盖设计可以很容易地扩展到近场情形，以降低相应的波束训练开销，具体细节从略。

2) 大角度偏差：在角度偏差较大的近场场景中，若直接在整个目标区域上应用近似的近场CSV，可能会产生不可忽略的近似误差。为解决该问题，可将目标区域划分为多个子区域，使每个子区域内的CSV近似仍保持局部准确，并可应用所提出的波束覆盖设计。

具体而言，考虑一个近场目标区域 $\mathcal{A}_{\mathrm{NF}}$，其满足 $|\Delta\theta|>\theta_{\mathrm{th}}$。我们首先将原始区域 $\mathcal{A}_{\mathrm{NF}}$划分为 M个子区域 $\{\mathcal{B}_{\mathrm{NF},m}\triangleq\{(\theta,\ \xi)\ |\ \theta\in\Theta_m,\ \xi\in\Xi\}\}_{m=1}^{M}$（由 $\mathcal{M}\triangleq\{1,2,\ldots,M\}$索引），且 $\Theta_m\triangleq[\theta_{m,\min},\theta_{m,\max}]$，从而使每个子区域内的最大角度偏差受 $|\Delta\theta|\leq\theta_{\mathrm{th}}$约束。为确保近场目标区域 $\mathcal{A}_{\mathrm{NF}}$上的波束覆盖平坦且连续，子区域的设计需满足以下条件：（i）所有子区域的并集完全覆盖原始目标区域；（ii）每个子区域内的近场CSV近似足够准确；（iii）相邻子区域之间保持固定的角度间隔 $4/N$。基于上述条件，所得波束成形向量构造为

$$\mathbf{w}_{\mathrm{NF}}^{(\mathrm{LAD})}=\sum_{m\in\mathcal{M}}\beta_m\tilde{\mathbf{w}}_{\mathrm{NF,m}}, \tag{40}$$

其中 $\tilde{\mathbf{w}}_{\mathrm{NF,\ m}}$ 表示为第 m 个子区域设计的波束成形向量，而 $\{\beta_m\}_{m=1}^{M}$ 是为满足发射功率约束而引入的缩放系数。

3) 模拟波束成形：对于具有恒模约束的模拟波束成形架构，即 $|[\mathbf{w}]_n|=1/\sqrt{N},\ \forall n$，可利用傅里叶变换性质实现仅相位波束展宽：时域中的线性调频（LFM）信号在频域中会产生矩形幅度谱。

具体而言，阵列孔径上的相位分布可设计如下 [25]

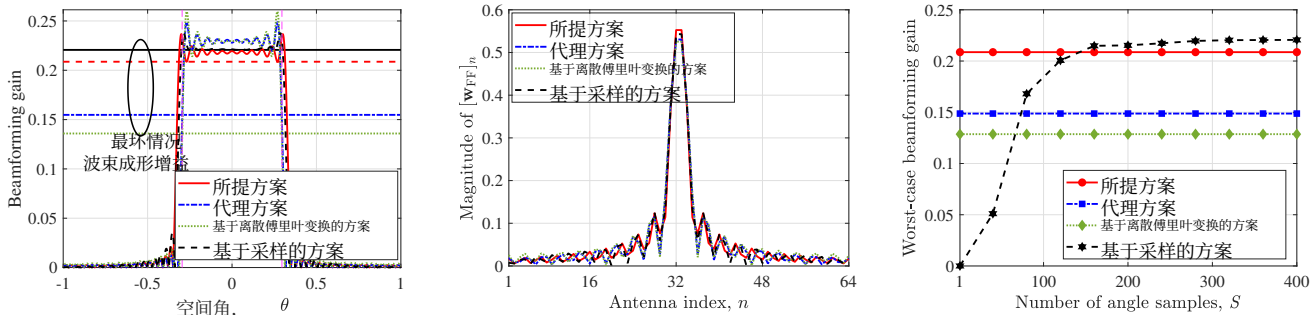
$$\Phi(u_n)=\frac{2\pi}{\lambda}\Big(\underbrace{\theta_0u_n}_{\text{linear phase}}+\underbrace{\eta u_n^2}_{\text{quadratic phase}}\Big), \tag{41}$$

其中 η 是用于控制波束宽度的二次相位系数。基于上述设计，相应的波束成形向量为

$$[\mathbf{w}_{\mathrm{NF}}^{(\mathrm{PA})}]_n=\frac{1}{\sqrt{N}}e^{\jmath\frac{2\pi}{\lambda}(\theta_0u_n+\eta u_n^2)},\forall n\in\mathcal{N}, \tag{42}$$

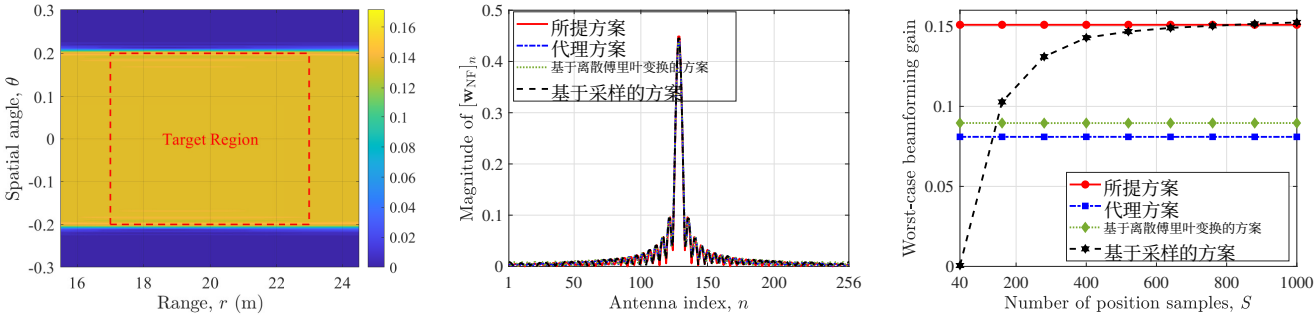
其中 $\eta=\frac{1}{2D\varpi}(2D\varpi+\lambda+\sqrt{\lambda(4D\varpi+\lambda)})$，且 $\varpi=\mu\sqrt{1-\frac{\theta_0^2}{1-\mu^2}}$。上述设计采用了 [25], 中的受LFM启发的二次相位调制方法；为简洁起见，省略详细推导。

对于近场情形，也可以利用二次相位调制来拓宽角度覆盖，同时满足恒模约束。然而，与远场情形不同，近场波束成形需要在角度域和距离域中进行联合覆盖。因此，尽管仅相位调制能够有效拓宽角度，但进一步扩展



（a）波束图。 （b） $[\mathbf{w}_{\mathrm{FF}}]_n$的幅度。 （c）最坏情况波束成形增益。

图5：远场情形的波束覆盖设计。



（a）波束图。 （b） $[\mathbf{w}_{\mathrm{NF}}]_n$的幅度。 （c）最坏情况波束成形增益。

图6：近场情形下的波束覆盖设计。

通过采用受 LFM 启发的仅相位设计实现距离域中的波束覆盖仍然并非易事，这将留待我们未来的工作。

V. 数值结果

本节给出数值结果，以展示所提出的低复杂度波束成形设计的覆盖性能。对于远场情形，基站配备64根天线，在 $f = 30$ GHz频段工作，目标是在空间角度区间 $\Theta = [-0.3, 0.3]$内实现波束覆盖，该区间对应的物理角度区间为 $[-17.46°, 17.46°]$。对于近场情形，考虑一个由 $N = 256$ 根天线组成、工作于 $f = 30$ GHz的超大规模阵列，旨在实现覆盖 $\Theta = [-0.15, 0.15]$ 和 $\Xi = [1/23, 1/17]$ 的二维波束覆盖（等效的物理角度区间为 $[-8.63°, 8.63°]$ ，距离区间为$[17, 23]$ 米（m））。为进行性能比较，考虑以下基准方案。

- 代理方案：对于该方案，波束成形向量通过使用逆傅里叶变换进行设计，且不添加保护性缩放。
- 基于采样的方案：对于该方案，目标区域 $\mathcal{A}_\chi$，$\chi \in \{$FF，NF$\}$ 按照采样数 S进行均匀离散化。因此，原问题通过处理 S 个二阶锥（SOC）约束 [26]来重新表述并求解。
- 基于离散傅里叶变换的方案：对于该方案，将目标角度区间内的所有离散傅里叶变换码字相加，得到波束成形向量，然后进行功率归一化，以满足发射功率约束 [13]。

表 I：不同方案之间的运行时间比较。

方案	运行时间（毫秒）	
	远场情形	近场情形
所提方案	0.0074	0.0292
代理方案	0.0073	0.0291
基于采样的方案（$S = 20$）	884.5942	1275.066
基于离散傅里叶变换的方案	0.0537	0.3746

A. 计算复杂度

首先，在表 I 中，我们比较了不同方案的平均运行时间。正如预期，基于采样的方案运行时间最长；由于近场情形下天线数量更多，且需要进行相应的高维信号处理，其运行时间显著增加。相比之下，所提方案的计算复杂度低得多，因此在远场和近场情形下，其运行时间均比基于采样的方案（使用 $S = 20$）缩短了约五个数量级。此外，尽管基于离散傅里叶变换的方案无需进行迭代优化，但大规模矩阵运算带来的计算开销仍使其运行时间高于所提方案。

B. 远场情形下的波束覆盖设计

为评估所提波束覆盖设计在远场情形下的性能，我们分别在图5(a)–5(c)中展示不同方案的波束图、 $[\mathbf{w}_{\mathrm{FF}}]_n$的幅度以及最坏情况波束成形增益。如图5(a)所示，所提方案在所需目标区域内实现了与基于采样的方案相当的波束图

，并在目标角度区域之外出现滚降效应，因此实现了令人满意的最坏情况波束成形增益。相比之下，代理方案和基于离散傅里叶变换的方案在目标区域边界处均出现显著滚降，导致波束成形增益下降。此外，图5(b)展示了不同方案的 $[\mathbf{w}_{\mathrm{FF}}]_n$ 幅度。根据式(16)，所有方案在天线域上的能量分布均呈现相似的sinc函数形状。这表明，在全数字波束成形架构中，波束覆盖设计主要由天线域上的功率控制决定。因此，仅考虑权重整形的所提方案，其最坏情况波束成形增益接近基于采样的方案。进一步地，我们在图5(c)中绘制了最坏情况波束成形增益随角度采样点数量的变化情况。可以看出，所提方案无需依赖密集采样，即可实现与基于采样的方案相当的最坏情况波束成形增益；而后者需要大量采样点（例如 $S > 100$），因此计算复杂度较高。

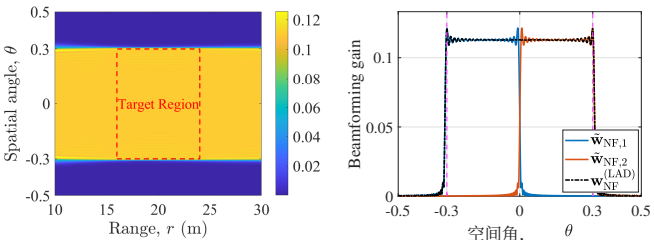
C. 近场情形的波束覆盖设计

接下来，我们研究所提方案在近场情形下的波束覆盖性能。如图6(a)所示，采用所提波束覆盖设计后，可在角度域和距离域实现高效的波束覆盖。此外，与传统的近场波束聚焦不同，近场情形下的角度覆盖会在距离域引发波束散焦，从而沿距离域形成平坦的波束指向，如**命题 2**所述。此外，如图6(b)所示，沿天线域还可观察到类似 sinc(·) 的功率分布 $|[\mathbf{w}_{\mathrm{NF}}]_n|$，这表明所提方案无需利用相位自由度即可实现灵活的波束覆盖设计。在图6(c)中，我们比较了不同方案的最差波束成形增益。基于采样的方法会随着采样点数量的增加而改进，这是因为对目标区域进行了更精细的遍历，从而获得更高的波束成形增益，但代价是计算复杂度显著增加。此外，与远场情形相比，需要更多的采样点才能

近场情形下，其最坏情况波束成形增益与所提方案相近。

D. 大角度偏差场景

对于角度偏差较大的近场情形（即 $\mathcal{A}_{\mathrm{NF}} = \{(\theta, \xi) \mid \theta \in [-0.3, 0.3], \xi \in [1/24, 1/16]\}$），我们在图7中展示了所提方案在大角度偏差场景下的波束方向图。从图7(a)可以看出，即使最大角度偏差 μ 超过预设阈值（例如 $\theta_{\mathrm{th}} = 0.2$），所提方案仍能保持有效的波束覆盖。在此类场景中，近场CSV近似值 $\mathbf{a}^{(\mathrm{app})}{}_{\mathrm{NF}}$ 的全局精度通常会下降。然而，所提方案通过将原始目标区域划分为多个子区域，有效解决了这一问题；在每个子区域内，$\mathbf{a}^{(\mathrm{app})}{}_{\mathrm{NF}}$ 仍保持局部精确。



（a）角度-距离域中的波束图。（b）角度域中的波束图。

图7：大角度偏差场景下所提方案的波束方向图。

因此，通过合理选择参考点并设计相邻子区域之间的角间距，为各子区域设计的这些波束相干叠加后，可在整个目标区域内形成均匀的平顶波束成形增益，如图7(b)所示。

VI. 结论

本文提出了一种适用于远场和近场情形的多天线系统低复杂度波束覆盖设计。通过利用天线域与空间域之间的傅里叶变换关系，我们表明，远场角度覆盖可以通过逆傅里叶变换高效实现。为减轻代理方案直接截断无限长序列所造成的滚降效应引起的波束成形损失，我们通过审慎引入保护性缩放，设计了一种滚降感知波束覆盖设计，从而确保目标角度区域内具有平坦波束成形增益曲线。随后，我们将这种基于FT的波束覆盖设计扩展到近场情形：对近场CSV的相位应用一阶泰勒近似，从而实现角度与距离联合波束覆盖的二维逆傅里叶变换。此外，我们观察到，当强制实现宽角度覆盖时，近场波束覆盖中会固有地产生距离散焦效应。数值结果表明，与传统的基于采样的优化方法相比，所提出的基于FT的设计能够实现相当的波束覆盖性能，同时显著降低计算复杂度。

附录A

向量 $\{\bar{s}_{\mathrm{FF},n}\}$ 可通过如下方式使用逆傅里叶变换得到

$$\begin{aligned}\bar{s}_{\mathrm{FF},n} &= \int_{\mathbb{R}} f_{\mathrm{FF}}(\Delta\theta;\theta_0,N)\, e^{\jmath\frac{2\pi}{\lambda}(u_n\Delta\theta)}\, d(\Delta\theta) \\ &= \int_{-\mu\le\Delta\theta\le\mu} \gamma_{\mathrm{FF}}\, e^{\jmath\frac{2\pi}{\lambda}(u_n\Delta\theta)}\, d(\Delta\theta) \\ &= \gamma_{\mathrm{FF}}\int_{-\mu}^{\mu} e^{\jmath\frac{2\pi}{\lambda}u_n x}dx = 2\mu\gamma_{\mathrm{FF}}\mathrm{sinc}\Big(\frac{2u_n\mu}{\lambda}\Big), n\in\mathcal{Z}, \quad (43)\end{aligned}$$

其中，sinc(a)的定义见下方（16），至此证明完毕。

附录B

无约束波束成形增益可重写为

$$\left|f_{\mathrm{FF}}^{(\mathrm{unc})}(\Delta\theta,N)\right| = \left|\mathbf{a}_{\mathrm{FF}}^{H}(\theta_0+\Delta\theta)\cdot\big(\mathbf{a}_{\mathrm{FF}}(\theta_0)\odot\mathbf{v}_{\mathrm{FF}}\big)\right|$$

$$=\left|\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}e^{-\jmath\frac{2\pi}{\lambda}u_n(\theta_0+\Delta\theta)}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{N}}e^{\jmath\frac{2\pi}{\lambda}u_n\theta_0}\right)[\mathbf{v}_{\mathrm{FF}}]_n\right|$$
$$=\frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{N}[\mathbf{v}_{\mathrm{FF}}]_n e^{-\jmath\frac{2\pi}{\lambda}u_n\Delta\theta}\right|. \tag{44}$$

基于 $v_{\mathrm{FF},\,n}=\bar{v}_{\mathrm{FF},\,n}\cdot m_n$，通过将求和域从有限集 $\mathcal{N}$ 扩展到无限整数集 $\mathcal{Z}$，式（44）中的无约束波束成形增益可重新表示如下

$$\left|f_{\mathrm{FF}}^{(\mathrm{unc})}(\Delta\theta,N)\right|=\frac{1}{N}\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\bar{v}_{\mathrm{FF},n}\cdot m_n)\,e^{-\jmath\frac{2\pi}{\lambda}u_n\Delta\theta}\right|, \tag{45}$$

其中表示两个序列 $\{\bar{\mathbf{v}}_{\mathrm{FF},\,n}\}$和 $\{m_n\}$的逐元素乘积的离散傅里叶变换。根据卷积定理，空间域中的乘法对应于空间频率中的卷积。具体而言，理想加权整形向量 $\bar{\mathbf{v}}_{\mathrm{FF}}$ 和矩形掩模$\mathbf{m}$ 的傅里叶变换分别为

$$\mathcal{F}\{\bar{\mathbf{v}}_{\mathrm{FF}}\}(\Delta\theta)\triangleq f_{\bar{\mathrm{v}}}(\Delta\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\mu}, & \text{if } |\Delta\theta|\le\mu,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{46a}$$

$$\mathcal{F}\{\mathbf{m}\}(\Delta\theta)\triangleq\Omega(\Delta\theta,N)=e^{-\jmath\frac{\pi\Delta\theta(N+1)}{2}}\frac{\sin(\frac{N\pi\Delta\theta}{2})}{\sin(\frac{\pi\Delta\theta}{2})}. \tag{46b}$$

因此，式（45）中的无约束波束成形增益可以写成如下卷积形式

$$\begin{aligned}\left|f_{\mathrm{FF}}^{(\mathrm{unc})}(\Delta\theta,N)\right|&=\frac{1}{N}\left|f_{\bar{\mathrm{v}}}(\Delta\theta)\circledast\Omega(\Delta\theta,N)\right|\\&=\frac{1}{N}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\bar{\mathrm{v}}}(x)\Omega(\Delta\theta-x,N)\,dx\right|\\&=\frac{1}{N}\left|\int_{-\mu}^{\mu}\frac{1}{2\mu}\Omega(\Delta\theta-x,N)\,dx\right|\\&=\frac{1}{2\mu N}\left|\int_{-\mu}^{\mu}N\frac{\sin\left(\frac{N\pi(\Delta\theta-x)}{2}\right)}{\frac{N\pi(\Delta\theta-x)}{2}}\,dx\right|,\end{aligned} \tag{47}$$

至此，证明完毕。

附录C

设 $t=\frac{N\pi}{2}(\Delta\theta-x)$。式（22）中的无约束波束成形增益$|f_{\mathrm{FF}}^{(\mathrm{unc})}(\Delta\theta,N)|$可改写为

$$\left|f_{\mathrm{FF}}^{(\mathrm{unc})}\right|=\int_{t_1}^{t_2}N\frac{\sin(t)}{t}\left(-\frac{2}{N\pi}\right)dt=\frac{2}{\pi}\int_{t_2}^{t_1}\frac{\sin(t)}{t}dt$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[\mathrm{Si}\left(\frac{N\pi}{2}(\Delta\theta+\mu)\right)-\mathrm{Si}\left(\frac{N\pi}{2}(\Delta\theta-\mu)\right)\right], \tag{48}$$

其中，$t_1=\frac{N\pi}{2}(\Delta\theta+\mu)$、$t_2=\frac{N\pi}{2}(\Delta\theta-\mu)$，以及 $\mathrm{Si}(a)$是命题 1 中定义的正弦积分函数。由于 (48) 中的$|f_{\mathrm{FF}}^{(\mathrm{unc})}(\Delta\theta,N)|$ 关于 $\Delta\theta$ 是偶函数，因此我们考虑 $\Delta\theta\ge0$ 的情形。利用近似 $\mathrm{Si}(a)\approx\frac{\pi}{2}$（当 $a\ge\pi$ 时）和 $\mathrm{Si}(a)\approx-\frac{\pi}{2}$（当 $a\le-\pi$时），可得在条件 $\mu>\frac{2}{N}$ 和 $\Delta\theta\ge0$ 下，$\mathrm{Si}\left(\frac{N\pi}{2}(\Delta\theta+\mu)\right)\approx\frac{\pi}{2}$。因此，上述无约束波束成形增益$|f_{\mathrm{FF}}^{(\mathrm{unc})}(\Delta\theta)|$ 可近似为

$$|f_{\mathrm{FF}}^{(\mathrm{unc})}(\Delta\theta,N)|=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}\left(\frac{N\pi}{2}(\Delta\theta-\mu)\right)\right]. \tag{49}$$

当 $\Delta\theta\le\mu-\frac{2}{N}$ 和 $-\Delta\theta\ge\mu+\frac{2}{N}$ 时，我们分别有 $\mathrm{Si}\left(\frac{N\pi}{2}(\Delta\theta-\mu)\right)\approx-\frac{\pi}{2}$ 和 $\mathrm{Si}\left(\frac{N\pi}{2}(\Delta\theta+\mu)\right)\approx\frac{\pi}{2}$，从而完成证明。

附录D

令 $\varphi_n(\theta,\ \xi)\triangleq u_n\theta-\frac{u_n^2}{2}(1-\theta^2)\xi$ 表示式（6）中$\left[\mathbf{a}_{\mathrm{NF}}(\theta,\ \xi)\right]_n$的相位项。对于任意点 $(\theta,\ \xi)\in\mathcal{A}_{\mathrm{NF}}$，$\varphi_n(\theta,\ \xi)$可通过在 $(\theta_0,\ \xi_0)$ 附近进行一阶泰勒展开近似为

$$\varphi_n(\theta,\xi)\approx\varphi_n(\theta_0,\xi_0)+\frac{\partial\varphi_n}{\partial\theta}\Big|_{(\theta_0,\xi_0)}\Delta\theta+\frac{\partial\varphi_n}{\partial\xi}\Big|_{(\theta_0,\xi_0)}\Delta\xi,$$

其中 $\Delta\theta=\theta-\theta_0$ $\Delta\xi=\xi-\xi_0$ $\frac{\partial\varphi_n}{\partial\theta}=u_n+u_n^2\theta\xi$ $\frac{\partial\varphi_n}{\partial\xi}=-\frac{u_n^2(1-\theta^2)}{2}$ 50

将 和 （） 代入 （） 后，即可得到近似相位表达式，从而完成证明。

附录 E

为确保类通带波束覆盖，可通过对空间频率采样点（$\zeta_n^{(\theta)}$和 $\zeta_n^{(\xi)}$）进行如下逆变换，得到理想的天线域序列 $[\bar{\mathbf{s}}_{\mathrm{NF}}]_n$，$n\in\mathcal{Z}$

$$\begin{aligned}\bar{s}_{\mathrm{NF},n}&=\iint_{\mathbb{R}^2}f_{\mathrm{NF}}\,e^{\jmath\frac{2\pi}{\lambda}(\zeta_n^{(\theta)}\Delta\theta+\zeta_n^{(\xi)}\Delta\xi)}\,d(\Delta\theta)\,d(\Delta\xi)\\&=\iint_{\substack{-\mu\le\Delta\theta\le\mu\\-\nu\le\Delta\xi\le\nu}}\gamma_{\mathrm{NF}}\,e^{\jmath\frac{2\pi}{\lambda}(\zeta_n^{(\theta)}\Delta\theta+\zeta_n^{(\xi)}\Delta\xi)}\,d(\Delta\theta)\,d(\Delta\xi)\\&=\gamma_{\mathrm{NF}}\Big[\int_{-\mu}^{\mu}e^{\jmath\frac{2\pi}{\lambda}\zeta_n^{(\theta)}u}du\Big]\cdot\Big[\int_{-\nu}^{\nu}e^{\jmath\frac{2\pi}{\lambda}\zeta_n^{(\xi)}v}dv\Big]\\&=4\gamma_{\mathrm{NF}}\Big[\mu\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{2\mu\zeta_n^{(\theta)}}{\lambda}\Big)\Big]\Big[\nu\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{2\nu\zeta_n^{(\xi)}}{\lambda}\Big)\Big],n\in\mathcal{Z}.\end{aligned}$$

令 $[\bar{\mathbf{v}}_{\mathrm{NF}}]_n\triangleq\bar{v}_{\mathrm{NF},\,n}=\mathrm{sinc}\Big(\frac{2\mu\zeta_n^{(\theta)}}{\lambda}\Big)\cdot\mathrm{sinc}\Big(\frac{2\nu\zeta_n^{(\xi)}}{\lambda}\Big)$，$n\in\mathcal{Z}$。类似地，通过使用阵列掩模$\mathbf{m}$ 截断理想的无限序列 $\bar{\mathbf{v}}_{\mathrm{NF}}$，并在角度域中添加宽度为 $\frac{2}{N}$ 的保护性缩放以减轻滚降效应，从而得到式（35）中的设计波束成形向量 $\mathbf{w}_{\mathrm{NF}}$，其基于 $w_{\mathrm{NF},\,n}=v_{\mathrm{NF},\,n}e^{\jmath\frac{2\pi}{\lambda}\varphi_n}$，$\forall n\in\mathcal{N}$，其中 α 是为确保发射功率约束而引入的辅助变量。

附录 F

给定任意角度偏差 $\mu>0$、逆距离偏差$\xi=0$和参考点（θ_0, ξ_0），点（θ_0，$\xi_0+\Delta\xi$）处的无约束波束成形增益可改写为

$$\begin{aligned}&|f_{\mathrm{NF}}^{(\mathrm{unc})}(0,\Delta\xi,N)|\\&=\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{sinc}\Big(\frac{2\mu(u_n+u_n^2\theta_0\xi_0)}{\lambda}\Big)e^{\jmath\frac{\pi(1-\theta_0^2)\Delta\xi}{\lambda}u_n^2}\right|\\&=\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{sinc}\Big(\kappa(u_n+\varkappa u_n^2)\Big)e^{\jmath\psi u_n^2}\right|\triangleq|F(\kappa,\varkappa,\psi)|,\end{aligned} \tag{50}$$

其中 $\kappa=\frac{2\mu}{\lambda}$、$\varkappa=\theta_0\xi_0$ 和 $\psi=\frac{\pi}{(1-\theta_0^2)\lambda}\Delta\xi$。函数$F(\kappa,\varkappa,\psi)$可近似表示为

$$\begin{aligned}F(\kappa,\varkappa,\psi)&=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{sinc}\Big(\kappa(u_n+\varkappa u_n^2)\Big)e^{\jmath\psi u_n^2}\\&\approx\frac{1}{D}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}}\mathrm{sinc}\Big(\kappa x+\kappa\varkappa x^2\Big)e^{\jmath\psi x^2}\,dx.\end{aligned} \tag{51}$$

在式（51）中使用 sinc函数$(a) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{\jmath\pi a t}\, dt$，$F(\kappa, \varkappa, \psi)$，可将其改写为

$$F(\kappa,\varkappa,\psi) = \frac{1}{D}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \Big[\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{\jmath\pi(\kappa x+\kappa\varkappa x^2)t}\, dt\Big] e^{\jmath\psi x^2}\, dx$$
$$= \frac{1}{2D}\int_{-1}^{1} \underbrace{\left[\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e^{\jmath\left[(\psi+\pi\kappa\varkappa t)x^2+(\pi\kappa t)x\right]}\, dx\right]}_{\mathcal{I}(t)} dt. \tag{52}$$

令 $\mathcal{Q}(t) = \psi + \pi\kappa\varkappa t$ 和 $\mathcal{J}(t) = \pi\kappa t$。式 (52) 中的内积分可识别为广义菲涅耳积分，即

$$\mathcal{I}(t) = e^{-\jmath\frac{\mathcal{J}^2(t)}{4\mathcal{Q}(t)}}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e^{\jmath\mathcal{Q}(t)\left(x+\frac{\mathcal{J}(t)}{2\mathcal{Q}(t)}\right)^2} dx. \tag{53}$$

情形 1 ($\mathcal{Q}(t) > 0$)：令 $\tau = \sqrt{\frac{2\mathcal{Q}(t)}{\pi}}\left(x + \frac{\mathcal{J}(t)}{2\mathcal{Q}(t)}\right)$。于是，积分 (53) 可改写为

$$\mathcal{I}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2\mathcal{Q}(t)}} e^{-\jmath\frac{\mathcal{J}^2(t)}{4\mathcal{Q}(t)}}\int_{z_1(t)}^{z_2(t)} e^{\jmath\frac{\pi}{2}\tau^2}\, d\tau$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2\mathcal{Q}(t)}} e^{-\jmath\frac{\mathcal{J}^2(t)}{4\mathcal{Q}(t)}}\Big[\mathcal{G}(z_2(t)) - \mathcal{G}(z_1(t))\Big], \tag{54}$$

其中 $\mathcal{G}(z) = \mathcal{C}(z) + \jmath\mathcal{S}(z)$，$z_1(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{Q}(t)}{\pi}}\left(-\frac{D}{2} + \frac{\mathcal{J}(t)}{2\mathcal{Q}(t)}\right)$，且 $\int_0^z \left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt$ $\mathcal{S}(z) = \int_0^z \left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt$ $-$ (t) $= \sqrt{\frac{2\mathcal{Q}(t)}{\pi}}\left(\frac{D}{2} + \frac{\mathcal{J}(t)}{2\mathcal{Q}(t)}\right)$。这里，$\mathcal{C}(\,)$ cos 和 $(\,)$ sin 是菲涅耳函数。**情形 2** ($\mathcal{Q}(t) < 0$)：令 $\tau = \sqrt{\frac{-2\mathcal{Q}(t)}{\pi}}\left(x + \frac{\mathcal{J}(t)}{2\mathcal{Q}(t)}\right)$。于是，积分 (53) 可改写为

$$\mathcal{I}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{-2\mathcal{Q}(t)}} e^{-\jmath\frac{\mathcal{J}^2(t)}{4\mathcal{Q}(t)}}\int_{z_1'(t)}^{z_2'(t)} e^{-\jmath\frac{\pi}{2}\tau^2}\, d\tau$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{-2\mathcal{Q}(t)}} e^{-\jmath\frac{\mathcal{J}^2(t)}{4\mathcal{Q}(t)}}\Big[\mathcal{G}^*(z_2'(t)) - \mathcal{G}^*(z_1'(t))\Big], \tag{55}$$

其中 $z_1'(t) = \sqrt{\frac{-2\mathcal{Q}(t)}{\pi}}\left(-\frac{D}{2} + \frac{\mathcal{J}(t)}{2\mathcal{Q}(t)}\right)$ 且 $z_2'(t) = \sqrt{\frac{-2\mathcal{Q}(t)}{\pi}}\left(\frac{D}{2} + \frac{\mathcal{J}(t)}{2\mathcal{Q}(t)}\right)$。综合上述两种情形，并令 $z_1(t) = \sqrt{\frac{2|\mathcal{Q}(t)|}{\pi}}\left(-\frac{D}{2} + \frac{\mathcal{J}(t)}{2\mathcal{Q}(t)}\right)$ 以及 $z_2(t) = \sqrt{\frac{2|\mathcal{Q}(t)|}{\pi}}\left(\frac{D}{2} + \frac{\mathcal{J}(t)}{2\mathcal{Q}(t)}\right)$，积分 (53) 由下式给出

$$\mathcal{I}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2|\mathcal{Q}(t)|}} e^{-\jmath\frac{\mathcal{J}^2(t)}{4\mathcal{Q}(t)}} \times \begin{cases} \big[\mathcal{G}(z_2(t)) - \mathcal{G}(z_1(t))\big], & \mathcal{Q}(t) > 0 \\ \big[\mathcal{G}^*(z_2(t)) - \mathcal{G}^*(z_1(t))\big], & \mathcal{Q}(t) < 0 \end{cases}. \tag{56}$$

因此，利用外层积分的对称性，$F(\kappa, \varkappa, \psi)$ 由 $F(\kappa, \varkappa, \psi) \approx \frac{1}{2D}\int_0^1 [\mathcal{I}(t) + \mathcal{I}(-t)]\, dt$ 给出，从而完成证明。

参考文献

[1] H. Lu、Y. Zeng、C. You、Y. Han、J. Zhang、Z. Wang、Z. Dong、S. Jin、C.- X. Wang、T. Jiang、X. You 和 R. Zhang，《面向 6G 的近场超大规模多输入多输出通信教程》，*IEEE* 通信调查与教程，第 26 卷，第 4 期，第 2213–2257 页，2024 年。[2] C. You、Y. Cai、Y. Liu、M. Di Renzo、T. M. Duman、A. Yener 和 A. Lee Swindlehurst，《面向 6G 及后续发展的下一代先进收发器技术》，*IEEE* 通信领域精选期刊，第 43 卷，第 3 期，第 582–627 页，2025 年 3 月。

[3] H. Zhang、N. Shlezinger、F. Guidi、D. Dardari、M. F. Imani 和 Y. C. Eldar，《用于近场多用户多输入多输出通信的波束聚焦》，IEEE 无线通信汇刊，第 21 卷，第 9 期，第 7476–7490 页，2022 年 9 月。[4] J. Cong、C. You、J. Li、L. Chen、B. Zheng、Y. Liu、W. Wu、Y. Gong、S. Jin 和 R. Zhang，《近场感知与通信一体化：机遇与挑战》，IEEE 无线通信，第 31 卷，第 6 期，第 162–169 页，2024 年 12 月。[5] C. Zhou、C. You、C. Zhou、C. Xing 和 J. Zhang，《近场物理层安全：位置不确定条件下的鲁棒波束成形》，2026 年。

[ ] 2601 13549 在线。可访问：

[6] https://arxiv.org/abs/。R. Li、Z. Xiao 和 Y. Zeng，《面向蜂窝多基地感知与通信一体化的无缝感知覆盖》，IEEE 无线通信汇刊，第 23 卷，第 6 期，第 5363–5376 页，2024 年 6 月。[7] H.-L. Song 和 Y.-C. Ko，《通过角度预测和自适应波束覆盖实现高速无人机波束对准》，IEEE 车辆技术汇刊，第 70 卷，第 10 期，第 10 185–10 192 页，2021 年 10 月。[8] Z. Xiao、P. Xia 和 X.-G. Xia，《采用混合预编码结构的毫米波信道估计码本设计》，IEEE 无线通信汇刊，第 16 卷，第 1 期，第 141–153 页，2017 年 1 月。[9] C. Zhou、C. Wu、C. You、J. Zhou 和 S. Shi，《采用稀疏离散傅里叶变换码本的近场波束训练》，IEEE 通信汇刊，第 73 卷，第 6 期，第 4394–4408 页，2025 年 6 月。[10] K. Chen、C. Qi 和 G. Y. Li，《采用量化移相器的毫米波大规模多输入多输出系统两步码字设计》，IEEE 信号处理汇刊，第 68 卷，第 170–180 页，2020 年。[11] A. Alkhateeb 、 O. El Ayach 、 G. Leus 和 R. W. Heath，《毫米波蜂窝系统的信道估计与混合预编码》，IEEE 信号处理主题精选期刊，第 8 卷，第 5 期，第 831–846 页，2014 年 10 月。[12] B. Ning、T. Wang、C. Huang、Y. Zhang 和 Z. Chen，《太赫兹大规模多输入多输出的宽波束设计：SCA-ATP 与 S-SARV》，IEEE 物联网期刊，第 10 卷，第 12 期，第 10 857–10 869 页，2023 年 6 月。[13] K. Xu、F.-C. Zheng、P. Cao、H. Xu 和 X. Zhu，《有限移相器分辨率下频分双工多用户大规模多输入多输出系统的快速波束训练》，IEEE 车辆技术汇刊，第 70 卷，第 1 期，第 459–473 页，2021 年 1 月。[14] R. Peng 和 Y. Tian，《信道角度信息不准确时的鲁棒宽波束模拟波束成形》，IEEE 通信快报，第 22 卷，第 3 期，第 638–641 页，2018 年 3 月。[15] M. Cui 和 L. Dai，《超大规模多输入多输出的信道估计：远场还是近场？》，IEEE 通信汇刊，第 70 卷，第 4 期，第 2663–2677 页，2022 年 4 月。[16] Y. Zheng、R. Goubran 和 M. El-Tanany，《具有距离辨别能力的鲁棒近场自适应波束成形》，IEEE 语音与音频处理汇刊，第 12 卷，第 5 期，第 478–488 页，2004 年 9 月。[17] H. Luo、Y. Zhang 和 A. Alkhateeb，《面向鲁棒近场通信的球面预编码》，2025 年。 [在线]。可访问：https: //arxiv.org/abs/2503 06756 。T. Wang、C. You 和 C. Yin，《波束转向辅助的近场波束训练分层码本》，IEEE 通信学会开放期刊，第 6 卷，第 8335–8350 页，2025 年。[19] C. Weng、X. Guo、Y. Guo 和 Y. Wang，《超大规模多输入多输出系统中的波数域波束训练：统一远场与近场》，IEEE 无线通信汇刊，第 25 卷，第 2183–2196 页，2026 年 8 月 11 日在线优先发表，doi：10.1109/TWC.2025.3595204。[20] R. Li、Z. Xu 和 Y.-J. A. Zhang，《通过波束发散实现近场波束训练》，2025 年。 [在线]。可访问：https://arxiv.org/abs/2509. 16035[21] G. R. MacCartney、H. Yan、S. Sun 和 T. S. Rappaport，《一种灵活的宽带毫米波信道探测器：局部区域及非视距到视距转换测量》，载于 IEEE 国际通信会议（ICC）论文集，法国巴黎，2017 年 5 月，第 1–7 页。[22] Y. Zhang、X. Wu 和 C. You，《超大规模阵列的快速近场波束训练》，第 11 卷，第 12 期，第 2625–2629 页，2022 年 12 月。[23] Y. Lu、Z. Zhang 和 L. Dai，《超大规模多输入多输出的分层波束训练：从远场到近场》，IEEE 通信汇刊，第 72 卷，第 4 期，第 2247–2259 页，2024 年 4 月。[24] C. Zhou、B. Lyu、Y. Feng 和 D. T. Hoang，《同时透射与反射可重构智能表面赋能的共生无线通信中的发射功率最小化》，IEEE 认知通信与网络汇刊，第 9 卷，第 6 期，第 1641–1656 页，2023 年 12 月。[25] C. Fonteneau、M. Crussi`ere 和 B. Jahan，《大型相控阵的系统化波束展宽方法》，载于 IEEE 欧洲网络与通信会议暨 6G 峰会联合会议论文集，2021 年，第 7–12 页。[26] J. Liu、A. Gershman、Z.-Q. Luo 和 K. M. Wong，《具有旁瓣控制的自适应波束成形：一种二阶锥规划方法》，IEEE 信号处理快报，第 10 卷，第 11 期，第 331–334 页，2003 年 11 月。