arXiv:2602.05673v1 [math.GT] 5 Feb 2026

二分交替链的属

NOBORU ITO 和 NODOKA KAWAJIRI

Abstract. 我们将 Ito–Takimura 和 Kindred 关于交替纽结不可定向亏格的等式型结果推广至二分量交替链环。我们证明，对于这类链环，同时刻画可定向与不可定向亏格的一个统一量，完全由实现拼接解纽数的拼接序列决定，至多相差一个明确给出的修正项。

1. 引言 Introduction

长期以来，纽结与链环的可定向和不可定向亏格的确定一直是拓扑学中的经典核心问题。对于纽结，可定向亏格已有成熟的理论，其研究始于 Seifert 构造 [11, 19]，并通过 Alexander 多项式 [3, 15], 得到交替纽结的等式型结果，同时也发展出 Heegaard Floer 同调等强有力的一般工具。相比之下，不可定向亏格（又称交叉帽数）在一般情形下历来难以获得类似的刻画。除了一些特定类别——例如 Hatcher–Thurston、Teragaito [20], Hirasawa–Teragaito [5], 和市原–水岛 [6]研究的类别——几十年来一直没有可用的等式型框架。Ito–Takimura [8, 9] 和 Kindred [12], 分别取得了一项重要突破：他们证明，对于任意素交替纽结，不可定向亏格恰由拼接解纽数确定。

然而，将这些结果从纽结推广到链环仍存在一个根本困难。在可分链环情形中，该问题可约化为纽结分支，并且通过将经典纽结不等式与初等欧拉示性数考量相结合，可得到等式型界。特别地，对于可分的二分支链环，Zhang [21] 在基于连通非定向跨越曲面的约定下得到了精确公式。然而，对于不可分链环，如可分情形中那样的这种约化不再可用。即使对于二分支链环，分支之间的相互作用也会产生真正新的现象，而且此前并不知道任何类似于纽结情形的等式型描述。因此，本文的目的是通过研究二分支交替链环来处理这一剩余情形，并证明它们的可定向与不可定向亏格由拼接解纽数所控制，至多相差一个显式且可计算的修正项。

在 [7], 中引入的拼接解纽数 $u^{-}(K)$ 与不可定向亏格（交叉帽数） $C(K)$ 之间的关系已得到充分理解（事实1）。

Date: 2026年2月5日。*Key words and phrases.* 交叉帽数；不可定向链环亏格；拼接解纽数；链环；纽结。

事实1 (Ito-Takimura [8], Kindred [12])。 对于任意素交替纽结 K, $u^-(K)= C(K)$。

我们通过引入与链环情形对应的定义（定义 1 和定义 2），将事实1推广到二分量情形（定理 1）。

定义 1. 设 L 是一个不可分裂二分支链环， D 是 L 的任意一个图。设 seq(D) 是一个拼接序列，它仅由类型为 S^- 连接、 S^- 和 RI$^-$ （定义 5 和图 2）的拼接组成，并由此从 D 得到一个无交叉圆。令 $\#S^-$(seq(D)) 表示 seq(D) 中出现的类型为 S^- 的拼接次数。于是我们定义

$$u^-(D) := \min_{\mathrm{seq}(D)} \#S^-(\mathrm{seq}(D)), \qquad u^-(L) := \min_{D} u^-(D),$$

其中，最小值取遍上述所有拼接序列 seq(D) 以及 L 的所有图 D 。

这里，符号 RI$^-$ 被视为图 2 意义下的一种拼接，而不是 Reidemeister 变换。

注 1. 在 seq(D) 中，一旦施行类型为 S^- 连接 的拼接，所得的图就变为单分量，因此不再能施行类型为 S^- 连接 的拼接；特别地，任何实现 u^-(D) 的拼接序列 seq(D) 都恰好包含一次类型为 S^- 连接 的拼接（引理 2）。

定义 2。 任意交替纽结 K 都具有素分解 $K = K_1\# \cdots \# K_n$，其中每个 K_i 都是交替的 [13]。令 $B(K_i)$ 如定义9所述，$B(K_i) = u^-(K_i)$ 或 $u^-(K_i)-1$ [9]。若后一个等式成立，则称 K_i 为负因子。设负因子的数目为 m。于是令 $[m] = m$ 若 $m = 0$, 1，否则令 $[m] = m - 1$ 。

定义 3。 给定一个 n分支链环 L，定义

$$C(L) = \min\left\{ \begin{matrix} 2 - \chi(\Sigma) - n \\ \mid \Sigma \text{ is a connected non-orientable spanning surface with } \partial\Sigma = L \end{matrix} \right\},$$

其中 χ(·)表示欧拉示性数。定义 L 的亏格 为

$$\min\{\, C(L),\, 2g(L)\,\},$$

其中 g(L)表示可定向亏格， C(L)表示 L 在 $\mathbb{R}^3$中的不可定向亏格。

注 2: 引入量 min$\{C(L)$ $2g(L)\}$ ，以统一处理可定向和不可定向张成曲面。

在下文中，本文始终用 L 表示不可分裂二分支链环。[1]

在陈述主要结果（定理 1）之前，从此处起我们只考虑交替图。需要强调的是，采用交替假设仅仅是为了保证张成曲面的最大欧拉示性数由某个状态曲面实现，论证的其他部分均不依赖交替性。主要结果如下。

[1]关于可分裂的二分支链结，我们在 [21]中得到了相关结果。

定理 1. 设 L是一个不可分裂的二分量交替链环， c是 L的交替链环图 D 中连接两个分支的一个交叉。设K 和 K' 是对 c进行两种不同类型的拼接后得到的纽结。假设 K 的张成曲面的最大欧拉示性数大于K' 的张成曲面的最大欧拉示性数，且 K 包含 m 个负因子。设 $u^-(L)$、 $[m]$、 $C(L)$和 $g(L)$如定义*1*、*2*和*3*所述。则

$$\min\{C(L), 2g(L)\} = u^-(L) - [m].$$

在继续之前，我们先简要回顾一些关于纽结／链环可定向亏格、尤其是不可定向亏格的文献。确定纽结的可定向／不可定向亏格这一问题历史悠久。在可定向情形下，Seifert [19] 提出了一种构造以纽结为边界的可定向曲面的方法。在四维情形中，Milnor 著名地猜测了由复代数曲线产生的纽结的亏格，这一猜想被称为Milnor猜想。随着时间推移，纽结可定向亏格领域逐渐发展出一套通用理论，并得到系统性方法和理论进展的支撑。

相比之下，对于以交叉帽数衡量的不可定向曲面（也称不可定向亏格），长期以来一直没有基于等式型公式的通用方法。自Hatcher和Thurston [4], 研究二桥纽结补空间中的曲面以来，人们已针对特定类别的纽结计算了交叉帽数：环面纽结（Teragaito [20]）、二桥纽结（Hirasawa-Teragaito [5]）以及许多椒盐纽结（Ichihara-Mizushima [6]）。

另一方面，针对任意纽结的一般界已经建立。例如，Murakami-Yasuhara [14] 给出了以最小交叉数 n(*K*)表示的强上界，而Kalfagianni-Lee [10] 则利用纽结图 D 的扭转数*t*(*D*)得到双侧界。也就是说，交叉帽数与琼斯多项式等量子纽结多项式之间也表现出紧密联系。例如，若该纽结是交替的，则 n(*K*)与琼斯多项式的跨度一致，而 *t*(*D*)等于和 $|a_{M-1}| + |a_{m+1}|$，其中 a_{M-1} 与 a_{m+1} 分别是琼斯多项式次最高次项与次最低次项的系数。近年来，通过Ito- Takimura [8]与Kindred [12], 各自独立的工作，已得到一个较为一般的等式型结果，它们给出了交替纽结交叉帽数的精确公式。在本文中，我们将这一等式型方法推广到二分量交替链环的情形。

接下来，我们回顾 [8, 12] (事实1) 中的一项论述，然后介绍本文的主要结果（定理 1），将他们的公式推广到二分量交替链环的情形。

本文不仅将拼接解纽数推广到二分支链环，还为任意链环得到了 Clark 型不等式。对于可分链环，可以将原始的 Clark 不等式分别应用于各个纽结分支，并计入转化为连通生成曲面时欧拉示性数的变化，从而得到 Clark 型界。此外，对于可分二分量链环，Zhang [21] 的结果给出了更精确的估计[2]。然而，对于不可分链环情形，这种将问题化归到纽结分支的方法不再适用。按照定义 3 中通过欧拉示性数来度量亏格的约定，

[2]她的论文采用了不同的交叉帽数约定，参见注8。

我们在此框架下记录了一个关于链环的 Clark 型不等式（命题 2）。

本节最后概述本文的结构。第 2 节介绍必要的定义和记号。第 3 节陈述第 1 节定理 1 的更详细版本，并给出命题 1，总结本文的主要结果。第 4 节证明命题 1，第 5 节证明定理 2。第 6 节列出计算所得数值，第 7 节通过图示说明我们的结果。

2. Definitions and notations

定义 4. 给定一个链环图，如图 1 所示的操作称为对一个交叉进行拼接。注意，链环图中的每个交叉恰有两种拼接方式。

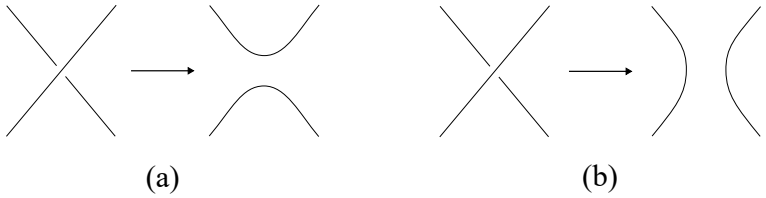


Figure 1. 拼接

定义 5。 如果交叉处的变形 c 如图 2(a) 所示但不是图 2(d) 所示，则称其为 S^{-}型拼接。如果交叉 c由两条路径组成，且每条路径都属于同一个分支，则分支数不变，这种拼接称为 S^{-}型拼接，或简称为一个 S^{-}。如果交叉 c由不同分支组成，则分支数减少，这种拼接称为 $S^{-}{}_{\text{join}}$型拼接；我们也将其记作 $S^{-}{}_{\text{join}}$，简称为 join。应用一次 S^{-}-拼接后，我们可以任意重新赋予所得链环图定向，因为我们的论证不依赖于定向的选择。设 T_{split} 为如图 2(b) 所示的拼接，它保持拼接施加区域之外的定向。如果对一个单分量图应用一次 T_{split}，分支数会增加。图 2(c) 展示了 T_{split} 分离出一个单边形的特殊情形。在下面的计数论证中，每次 RI^{-}-约化都被解释为在相应状态中恰好产生一个这样的 T_{split}。符号 RI^{-} 表示如图 2(d) 所示的移动。上述拼接均不依赖于任何交叉的上下信息。

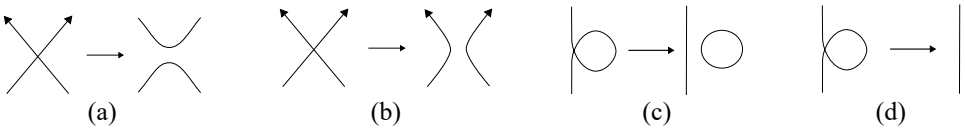


Figure 2. (a) 类型 S^{-} 或 $S^{-}{}_{\text{连接}}$，（b）类型 T_{split}，（c）对应于 RI^{-} 的类型 T_{split}，（d）类型 RI^{-}

定义 6。 链环 L 到 $\mathbb{R}^2$ 的一个正则投影称为一个 链环图D_L。对于任意链环图 D_L， S_{D_L} 表示在 D_L的每个交叉处选择一种拼接后，在平面中得到的圆的构型。这一构型称为 D_L的状态，状态中的每个圆称为一个状态圆。我们用 $|S_{D_L}|$表示 S_{D_L}中的状态圆数量。特别地，状态 S_u 指的是从 D_L 出发，通过应用实现其 u^- 或 u_2^-的拼接而得到的状态。随后，通过在 S_u 上附加半扭转带来恢复 D_L [3] 的原始交叉，从而构造曲面 Σ_u ，并称其为一个状态曲面[4]。 Σ_u 实现的是 $u^-(D_L)$ 还是 $u_2^-(D_L)$，将由上下文明确。如果我们要指定 $u^-(D_L)$ 或 $u_2^-(D_L)$，

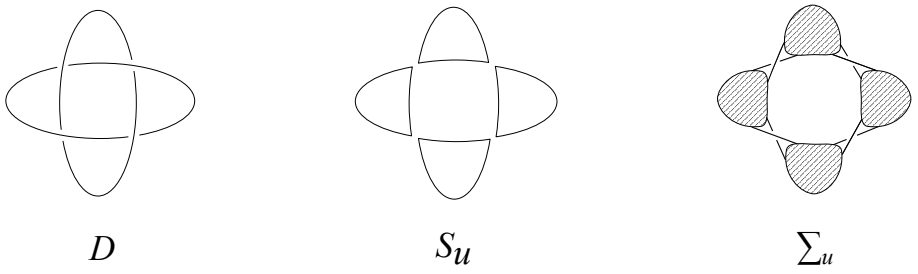


FIGURE 3. D, S_u, Σ_u

我们可以写作 $\Sigma_{u^-(D_L)}$ 或 $\Sigma_{u_2^-(D_L)}$ ，以表示 Σ_u 的 $u^-(D_L)$ 或 $\Sigma_{u_2^-(D_L)}$。

定义 7. 设 L 是一个不可分裂二分支链环， D 是 L 的任意一个图。设 seq(D) 是一个拼接序列，它仅由类型为 S^- 合并、 S^- 和 RI$^-$ （定义 5 和图 2）的拼接组成，从而由 D 得到一个无交叉圆。令 #S(seq(D)) 表示 seq(D) 中出现的类型为 S^- 和 S^- 合并的拼接总数。于是我们定义

$$u_2^-(D) := \min_{\text{seq}(D)} \#S(\text{seq}(D)), \qquad u_2^-(L) := \min_D u_2^-(D),$$

其中，最小值是在上述所有拼接序列 seq(D) 以及 L 的所有图 D 上取到的。

注记 3。 对于不可分裂二分支链环的任意图 D ，我们有

$$u_2^-(D) = u^-(D) + 1,$$

因为实现 $u^-(D)$或 $u_2^-(D)$ 的任意拼接序列都恰好包含一次类型为 S^- 拼接的拼接（引理 2），而 u_2^- 除类型为 S^-的拼接外，还将这次拼接计入其中。

定义 8 （Adams-Kindred极小亏格算法 [1]）。 我们定义一种算法，用于得到一个边界是纽结的曲面。

(1) 找出给定链环图中包含 m边形的最小 m ，并选择其中一个 m边形。(2) 拼接 m边形中的 m 个交叉：

[3]注意， Σ_u 并不唯一，但其欧拉示性数 $\chi(\Sigma_u)$是唯一的。[4]Pabiniak、Przytycki 和 Sazdanovi´c [17] 以及 Ozawa [16]此前也分别研究过这些状态曲面。

(a) 情形 $m = 1$：拼接这个单边形上的交叉，使该区域变成一个圆，如图4(i)所示。(b) 情形 $m = 2$：拼接这个二边形上的交叉，使该区域变成一个圆，如图4(ii)所示。(c) 情形 $m = 3$：建立两个分支。对于其中一个分支，拼接这个3边形上的交叉，使该区域变成一个圆；对于另一个分支，则以相反的方式拼接这三个交叉（图4(iii)）。

(3) 重复此步骤，直到每个分支都得到一个没有交叉的链环图。
(4) 在由这些状态得到的所有状态曲面中，选择欧拉示性数最大的一个。

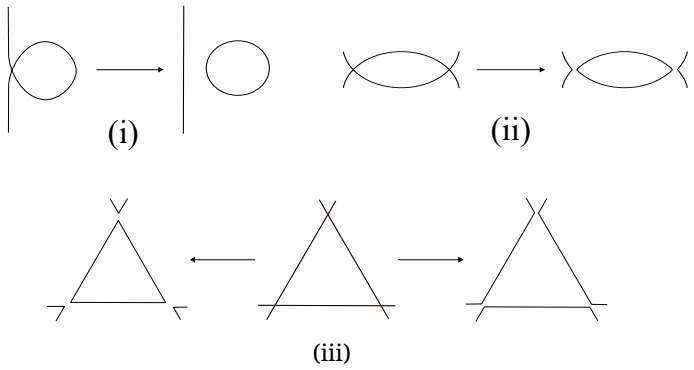


FIGURE 4. Adams-Kindred 算法中使用的拼接

对于一个链环图，令 Σ_{AK} 为通过 Adams-Kindred 算法得到的张成曲面。注意，如果该图是交替的，则存在一个具有最大欧拉示性数的张成曲面 Σ_{AK}。

定义9. 给定一个链环图 D，我们进行变形 B 和拼接 RI^{-}，得到无交叉圆，而这些有序操作构成一个序列。用 $\mathrm{seq}_B(D)$ 表示该序列。于是，$\#B(\mathrm{seq}_B(D))$ 表示 $\mathrm{seq}_B(D)$ 中变形 B 的数量。令

$$B(D) := \min_{\mathrm{seq}_B(D)} \#B(\mathrm{seq}_B(D)), \quad B(L) := \min_{D} B(D).$$

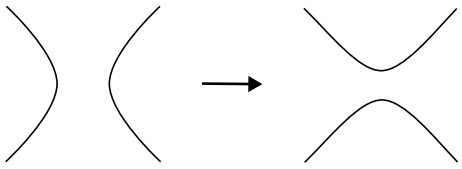


FIGURE 5. 变形 B

注记 4. 两个数 $B(K)$ 和 $u^{-}(K)$ 之差可用于检测负因子（事实2）。

事实2 (Ito-Takimura [9])。 对于任意交替纽结 K,

(1) $B(K) = C(K) - 1$ 当且仅当 $C(K) = 2g(K) + 1$, *(*
2) $B(K) = C(K)$ 当且仅当 $C(K) \neq 2g(K) + 1$.
事实1和事实2推出推论1。

推论1。 对于任意素交替纽结 K,
(1) $B(K) = u^-(K) - 1$ 当且仅当 $C(K) = 2g(K) + 1$, *(2)*
$B(K) = u^-(K)$ 当且仅当 $C(K) \neq 2g(K) + 1$。
另请参见事实3。

事实*3*（*Murakami-Yasuhara* [14]）。对于任意由两个纽结 K 和K' 连通和得到的链环, $C(K\#K') = C(K) + C(K')$ 当且仅当 $C(K) = min\{C(K)\ 2g(K)\}$ 且$C(K') = min\{C(K')\ 2g(K')\}$。

因此， $B(K)$ 与 $u^-(K)$ 之差等于负因子的数量。

定义10（分量间二边形 S^- 拼接）。 设 D 是一个二分量交替链环图，其中包含一个由属于不同分支的两条边构成的二边形。如果一个二边形由属于不同分支的两条边构成，我们称之为分量间二边形。对于 D，我们按照图6给这个二边形赋予定向，使得该二边形围成的圆盘不允许与边的定向相容的定向。根据定义，在二边形任一交叉处，以与给定定向不一致的方式进行拼接，会得到S^- 拼接。接着，我们将作用 S^- 拼接 于由分量间二边形的两条边构成的交叉这一操作称为对分量间二边形进行二边形 S^- 拼接。

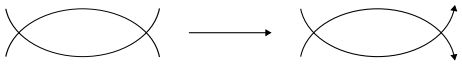


FIGURE 6. 分量间二边形的定向。不一致的拼接会产生 S^- 连接。

注 5（关于 u^- 和 u_2^-的约定）。 由引理 2 可知，实现定义 $u^-(D)$ 或 $u_2^-(D)$ 中最小值的每个拼接序列 seq(D)，都恰好包含一次 S^- 连接类型的拼接。这里的“恰好一次”指的是拼接序列 seq(D) 中的出现次数，而不是指 D中的某个特定交叉。因此，这两个不变量 u^- 和 u_2^- 仅在计数约定上有所不同： u_2^- 统计 S^- 和 S^- 连接类型的拼接，而 u^- 只统计 S^-类型的拼接。

3. MAIN RESULT

定理 1 可由定理 2 以及 $u^-(L)$ 的定义（定义 1）和 $u_2^-(L)$ 的定义（定义 7）[5]推出。

定理 2. 给定一个交替双分支链环 L，设 D_L 是 L 的交替链环图。那么我们有

$$\begin{aligned}\min\{C(L), 2g(L)\} &= u^-(D_L) - [m] \\ &= u_2^-(D_L) - 1 - [m].\end{aligned}$$

[5]不过，我们仍为 u^- 和 u_2^- 都安排了公式，因为将来的推广可能会需要其中任意一个；参见注 3。

特别地，如果 $C(L) \leq 2g(L)$，

$$C(L) = u^-(D_L) - [m],$$
$$C(L) = u_2^-(D_L) - 1 - [m].$$

若 $C(L) > 2g(L)$，

$$g(L) = \frac{u^-(D_L) - [m]}{2},$$
$$g(L) = \frac{u_2^-(D_L) - [m] - 1}{2}.$$

定理 2 的证明需要一条基于额外假设的技术性陈述，如下文的命题 1 所述。

命题 1。 对于二分量交替链环 L 的任意交替链环图 D_L ，假设条件 $(*)$ 成立。

$(*)$ ： D_L 有一个2边形，其两条边属于不同分支。

在这一额外假设 $(*)$ 下，下述结论成立。

$$\begin{aligned}\min\{C(L), 2g(L)\} &= u^-(D_L) - [m] \\ &= u_2^-(D_L) - 1 - [m].\end{aligned}$$

特别地，如果 $C(L) \leq 2g(L)$，

$$C(L) = u^-(D_L) - [m],$$
$$C(L) = u_2^-(D_L) - 1 - [m].$$

如果 $C(L) > 2g(L)$，

$$g(L) = \frac{u^-(D_L) - [m]}{2},$$
$$g(L) = \frac{u_2^-(D_L) - [m] - 1}{2}.$$

注 6。 命题 1 是定理 2 在特定假设下的一种技术形式。定理 2 的证明是将一般情形化归为命题 1 的设定。

4. A proof of Proposition 1

在继续证明之前，我们先整理计数恒等式，以便统一处理 u^-和 u_2^-。注意，引理 1 中的计数是沿着框架 1 的思路得出的。

引理 1 (关于 u^- 和 u_2^-的计数**)**。 设 D_L 是一个具有n 个交叉的二分支链 L的交替图。固定一个拼接序列$\mathrm{seq}(D_L)$，它实现$u_2^-(D_L)$ （分别为 $u^-(D_L)$）。经过唯一一次类型为 S^- 拼接的拼接后，该图变为单分量，而$\mathrm{seq}(D_L)$ 的剩余部分可视为作用于所得纽结图上的拼接序列；因此，只需改变计数约定（注 *5*），便可用同一序列比较 $u^-(D_L)$ 和 $u_2^-(D_L)$。

令 D_K 为对 $\mathrm{seq}(D_L)$ 应用唯一一次 [6] 型 S^- join 拼接，并通过 RI^- 消去所有 1 边形后得到的纽结图。则 $\mathrm{seq}(D_L)$ 也实现 $u^-(D_L)$ （分别为 $u_2^-(D_L)$），并且以下恒等式成立。

[6]这种类型的拼接 S^- 连接的唯一性由引理 2 得出。

(1) 每个实现 $u^-(D_L)$ 或 $u_2^-(D_L)$ 的序列中，恰好出现一次 S^- join 型拼接。
(2) $u^-(D_L)$ 和 $u_2^-(D_L)$ 满足

$$u_2^-(D_L) = u^-(D_L) + 1 = u^-(D_K) + 1.$$

(3) 连通和运算T^{RI^-} 分裂表示类型为 T_{split} 、对应于RI^-（图 2 (c)）且在某一状态的构造中出现的拼接的数目，而连通和运算$T_{\mathrm{RI}^-\text{分裂}}{}'$表示$\mathrm{RI}^-$-约化从 D_L 到 D_K的数目。此处上标“RI^-”是表示对应关系的标记，而不是指数。

根据构造，

$$n = \#T_{\mathrm{split}}^{\mathrm{RI}^-\prime} + u^-(D_K) + 1.$$

(4) $|S_u|$表示状态 S_u 中状态圆的数目，该状态来自实现 $u^-(D_L)$的拼接序列，并且满足

$$|S_u| = \#T_{\mathrm{split}}^{\mathrm{RI}^-} + 1.$$

4.1. **证明的共同框架**。

框架 1. 根据引理 2 和引理 3，我们按如下方式进行:
步骤 1 选取一个分量间二边形，并在其两个交叉之一处应用 S^- 连接。根据引理 3，我们可以为 $u^-(D_L)$（或$u_2^-(D_L)$）选取一个实现序列，其中类型为 S^- 连接的拼接恰好有一个；根据引理 2，它是类型为 S^- 连接的唯一拼接。将类型为 S^- 连接的拼接应用于一个分量间二边形。

步骤 2 依次应用类型为 RI^- 的拼接，以消去所有单边形，从而得到交替纽结 K 的一个纽结投影。
步骤 3 使用由 S^-与 RI^-构成的、实现 $u^-(K)$ 的拼接序列（事实 5）。
在以下第4.2–4.4节中，我们应用框架 1，将欧拉示性数 $\chi(L)$ 的计算归结为引理 1 中的计数恒等式；素与非素情形之间的区别涉及所得的纽结图D_K。

引理 2 （ S^- join 在实现拼接序列中的唯一性）。 对于固定的二分支链环图 D, 任何实现 $u^-(D)$ 或 $u_2^-(D)$ 的拼接序列恰好包含一次类型为 S^- join的拼接。

证明。 给定二分支链环图 D，为了实现 $u^-(D)$ 或 $u_2^-(D)$，D 通过类型 S^-、类型 S^- join以及类型 RI^- 的拼接，被变换为没有交叉的圆 O 。在本证明中，我们将使用统一符号来指称“类型 S”，并令 $S = S^-$， S^- join。设 $\mathrm{seq}(D)$ 表示这样一条固定的拼接序列。

注意，任何 RI^- 只会影响包含图中一个单边形的局部圆盘。因此，在受影响的圆盘之外，曲线保持不变，包括其定向。因此，只要 RI^- 的应用不会妨碍后续的拼接，就可以将其推迟。特别地，可以将 RI^-类型的拼接推迟到 S 类型的拼接应用之后。通过推迟 RI^- 类型拼接的应用来重新排列序列 $\mathrm{seq}(D)$，可得到一个新序列 $\mathrm{seq}'(D)$，其中 S 类型拼接的数量与 $\mathrm{seq}(D)$ 中的相同。因此，

只需考虑 RI^{-} 拼接出现在序列末尾的情形，此时序列呈现如下形式

$$S \cdots S \, \mathrm{RI}^{-} \cdots \mathrm{RI}^{-} .$$

在涉及的拼接中， S^{-} 连接是唯一会改变分支数量的拼接，而 S^{-} 和 RI^{-} 会保留分支数量。由于目标是将二分量图 D 转变为圆 O，因此序列中必须至少包含一次 S^{-} 连接。

此外，一旦应用了一次 S^{-} 连接 类型的拼接，图就会变为单分支。由于 S^{-} 连接 拼接仅适用于至少有两个分支的图，因此无法再应用其他 S^{-} 连接拼接。因此，序列中恰好出现一次 S^{-} 连接。□

引理 3 （分量间二边形是 χ-最大化的）。设 L 是一个二分量交替链环。若一个交替链环图 D_L 含有一个分量间二边形（必要时改变一个链分量的定向），那么，对该分量间二边形应用拼接 S^{-} 连接，是能够获得一种状态的拼接之一；该状态产生的状态曲面在 L的张成曲面中具有最大欧拉示性数 $\chi(L)$ 。

此外，对于 D_L，先应用 S^{-} 合并仍可得到一个状态曲面，其$\chi(L)$ 在 L的张成曲面中达到最大值。

证明。由于分量间二边形由不同分支之间的两个交叉组成，因此它不可能是单边形交叉，即同一分支上两条路径之间的交叉。因此，若对 D_L 应用 Adams-Kindred 算法（定义 8），并选取最小的 m边形，则完成 $m = 1$这一步（即单边形这一步）后，分量间二边形仍然存在。因此，在 $m = 2$这一步中，会出现与所述 S^{-} 合并相对应的交叉，该交叉会产生一个状态，使其张成状态曲面具有最大的欧拉示性数。

回顾这一拼接过程，拼接序列如下：

(1) 执行 $m = 1$ 步骤，这些步骤不涉及分量间二边形；(2) 在分量间二边形的两个交叉之一处应用 S^{-} 合并，

(3) 从 $m = 1$ 步开始，应用其余的拼接。

如果我们改为在开头应用 (2) S^{-} 连接，然后依次应用 (1) 和 (3)，就会得到具有最大欧拉示性数的相同状态曲面。

根据事实 4，这样的状态曲面在 L的所有张成曲面中实现最大欧拉示性数，从而完成证明。□

事实 4 (Adams–Kindred [1])。对于任意交替链环，具有最大欧拉示性数的状态曲面，在所有（状态或非状态）张成曲面中实现最大欧拉示性数。

记号 1。我们将步骤重新诠释为一个构造状态 S_u 的过程，用于计算 $u^{-}(L)$；具体做法是将每个 RI^{-} 视为一个 T_{split}，它对 $\#T^{\mathrm{RI}^{-}}$ 分裂或 $\#T'_{\mathrm{RI}^{-}}$ 分裂有所贡献。定义如下：

(1) 连通和运算T_{split} ： 在实现 $u^{-}(L)$的序列中，类型为 T_{split} 的拼接次数；(2) $\#T'_{\mathrm{RI}^{-}}$ 拆分： 从 D_L到 D_K的类型为 RI^{-} 的拼接次数；以及

(3) $\#T_{\mathrm{RI}^-\text{拆分}}(D_K)$：在实现$u^-(D_K)$的序列中，类型为 RI^- 的拼接次数。

计数恒等式。令 n 表示交替链环 L的给定图 D_L 的数量。

对于 u^-:

(1) $|S_u|$将状态圆计为 1 加上 $\#T_{\mathrm{split}}$；(2) $\#T_{\mathrm{split}}$ 分解为来自 D_K 和中间步骤（步骤 2）的贡献，后者来自 D_L；(3) n 等于对 $\#T_{\mathrm{split}} + u^-(D_K)$ 有贡献的拼接总数，且只有一个S^- 连接；(4) $u^-(D_K)$是 S^-的数量，等于 $u^-(D_L)$（定义 1, [7,8]）。

$$|S_u| = \#T_{\mathrm{split}}^{\mathrm{RI}^-} + 1. \tag{1}$$

$$\#T_{\mathrm{split}} = \#T_{\mathrm{split}}^{\mathrm{RI}^-}(D_K) + \#T_{\mathrm{split}}^{\mathrm{RI}^-\prime}. \tag{2}$$

$$n = \#T_{\mathrm{split}}^{\mathrm{RI}^-\prime} + u^-(D_K) + 1. \tag{3}$$

$$u^-(D_L) = u^-(D_K). \tag{4}$$

由引理 1(2)可得结论 (4)。

对于 u_2^-：理由类似，但 $u_2^-(D_L)$ 相差 1，因为它包含初始的 S^- 拼接，这是对一个分量间二边形的应用。

$$\#T_{\mathrm{split}} = \#T_{\mathrm{split}}^{\mathrm{RI}^-}(D_K) + \#T_{\mathrm{split}}^{\mathrm{RI}^-\prime}. \tag{5}$$

$$n = \#T_{\mathrm{split}}^{\mathrm{RI}^-\prime} + u_2^-(D_L). \tag{6}$$

$$u_2^-(D_L) = u^-(D_K) + 1 \qquad (Lemma\ 1\ (2)). \tag{7}$$

连通和情形：由于重叠，圆的计数需调整 $\ell - 1$；负因子对应于非负整数 $[m]$。

$$|S_{D_K}| = |S_{D_{K_1}}| + |S_{D_{K_2}}| + \cdots + |S_{D_{K_\ell}}| - (\ell - 1). \tag{8}$$

$$\#T_{\mathrm{split}}^{\mathrm{RI}^-} = \#T_{\mathrm{split}}^{\mathrm{RI}^-}(D_{K_1}) + \#T_{\mathrm{split}}^{\mathrm{RI}^-}(D_{K_2}) + \cdots + \#T_{\mathrm{split}}^{\mathrm{RI}^-}(D_{K_l}). \tag{9}$$

$$|S_{D_K}| = |S_u| + [m], \tag{10}$$

其中 $[m]$ 计入了定义 2 中所定义的负因子的贡献。

事实 5 ([8])。对于任意纽结 K，都存在一个由 S^- 和 RI^- 构成的拼接序列，实现 $u^-(K)$。

Clark 不等式。

事实 6 (Clark [2])。对于任意纽结 K,

$$C(K) \le 2g(K) + 1.$$

现在，我们记录一个在定义 3 所采用的约定下适用于链环的 Clark 型不等式。

命题 2. 对于任意 n 分支链环 L，令 $g(L)$ 表示 L 的可定向亏格，并令 $C(L)$表示如定义 *3* 中通过连通生成曲面的欧拉示性数定义的不可定向亏格。那么

$$C(L) \le 2g(L) + 1. \tag{11}$$

注 7. 命题 2 为定义 3 提供了依据。这是因为，对于任意 n 分支链环，按照定义 3 的约定，当$C(L) \leq 2g(L)$（等价地，$C(L) \neq 2g(L)+1$）时，最大欧拉示性数 $\chi(L)$ 满足 $\chi(L) = 2 - C(L) - n$；而当$C(L) > 2g(L)$（等价地，$C(L) = 2g(L)+1$）时，$\chi(L) = 2 - 2g(L) - n$。因此，我们采用量 $\min\{C(L)\ 2g(L)\}$，它以统一的方式自然地涵盖了这两种情形。

命题 *2* 的证明。设 L是一个 n分支链环。若 Σ是跨越 L、亏格为最小值 $g(L)$ 的可定向曲面，则 $\chi(\Sigma) = 2 - 2g(L) - n$。考虑在 L 的链环图上施行第一次 Reidemeister 变换，将曲面改为不可定向曲面（投影见图 2 (d)）。通过添加一个平凡环，我们在曲面 Σ上添加一个不可定向把手，并令 Σ' 表示所得曲面，其 $\chi(\Sigma)$ 满足 $\chi(\Sigma') = \chi(\Sigma) - 1 = 1 - 2g(L) - n$。由于 $C(L)$是 $2 - n - \chi$ 的最小数量，其中 χ 是以 L为边界的不可定向曲面中最大欧拉示性数，

$$\begin{aligned} C(L) &\leq 2 - n - \chi(\Sigma') \\ &= 2 - n - (1 - 2g(L) - n) \\ &= 1 + 2g(L). \end{aligned}$$

□

注 8。设 L 是一个 n分支链环。若 $\beta_1(L)$表示以 L为边界的不可定向曲面中最小的第一 Betti 数，则对于 $\beta_1(L)$，有一个类似但略有不同的不等式。实现 $\beta_1(L)$的欧拉示性数 $\chi(L)$满足 $\chi(L) = 1 - \beta_1(L)$。因此，取与命题 2 中相同的 Σ 和 Σ'，可得

$$\begin{aligned} \beta_1(L) &\leq 1 - \chi(\Sigma') \\ &= 1 - (\chi(\Sigma) - 1) \\ &= 2 - \chi(\Sigma) \\ &= 2 - (2 - 2g(L) - n) \\ &= 2g(L) + n, \end{aligned}$$

这意味着

$$\beta_1(L) \leq 2g(L) + n. \tag{12}$$

由于 $\chi(L)$ 是实现 $\beta_1(L)$ 的欧拉示性数，因此我们有 $C(L) = 2 - \chi(L) - n$且 $\beta_1(L) = 1 - \chi(L)$，因此不等式 (11) 和 (12) 之间的差为 $n - 1$。请注意，有些参考文献将 $\beta_1(L)$ 作为 $C(L)$ 的定义，因此需要谨慎。

4.2. 情形 u^- （素）。首先，我们处理 D_K 为素 的情形，其中 D_K 是由 D_L 经过初始的 S^- 拼接（引理 2）（作用于一个分量间二边形）以及随后进行的 RI$^-$约简所得到的纽结图。设 n为链环 L的一个交替图 D_L 的交叉数。按照框架 1 中的（步骤 1），首先在一个分量间二边形处应用 S^- 拼接（引理 2 和引理 3），并令 D_K 为所得的纽结图。通过 RI$^-$ 的连通和运算 $\#T_{\mathrm{RI}^-\text{拆分}}'$ 次移除所有单边形，从而得到素交替图或素交替图的连通和（框架 1 的步骤 2）。

根据事实1，我们找到一个实现 $u^-(D_K) = u^-(K)$ 的拼接序列（框架 1 的步骤 3）；将 RI^- 替换为 T_{split}后，可将其解释为：

$$|S_{D_K}| = |S_u|, \tag{13}$$

其实现了 K 的最大欧拉示性数（关于原因的详细说明，见 [8]）。

设对于 D_L，我们有一个状态 S_L，它对应一个具有最大欧拉示性数 $\chi(L) = |S_L| - n$ 的张成曲面（定义 8）。于是，

$$\begin{aligned}
\chi(L) &= |S_L| - n \\
&= |S_{D_K}| + \#T_{\mathrm{split}}^{\mathrm{RI}^{-\prime}} - n \quad (\because \text{the definition of } D_K) \\
&= |S_u| + \#T_{\mathrm{split}}^{\mathrm{RI}^{-\prime}} - n \quad (\because (13)) \\
&= 1 + \#T_{\mathrm{split}}^{\mathrm{RI}^-}(D_K) + \#T_{\mathrm{split}}^{\mathrm{RI}^{-\prime}} - n \quad (\because (1)) \\
&= 1 + \#T_{\mathrm{split}} - n \quad (\because (2)) \\
&= 1 + \#T_{\mathrm{split}} - (\#T_{\mathrm{split}} + u^-(D_K) + 1) \quad (\because (3)) \\
&= 1 + \#T_{\mathrm{split}} - (\#T_{\mathrm{split}} + u^-(D_L) + 1) \quad (\because (4)) \\
&= -u^-(D_L). \qquad (14)
\end{aligned}$$

如果 Σ_{AK} 是不可定向的，那么由于 L 有两个分支，定义 3 给出

$$\chi(\Sigma_{AK}) = 2 - C(L) - 2 = -C(L).$$

结合上面得到的 $\chi(L) = \chi(\Sigma_{AK}) = -u^-(D_L)$，这意味着 $C(L) = u^-(D_L)$。

如果 Σ_{AK} 是可定向的，命题 2 意味着

$$2g(L) < C(L) \Leftrightarrow C(L) = 2g(L) + 1,$$

然后 $g(L) = u^-(L)$ 且 $C(L) = u^-(L) + 1$，这可通过在一个交叉处用拼接 S^-（例如图 7）替换T_{split} 来实现。这里我们将在L的不可定向张成曲面中，寻找欧拉示性数最大的曲面。我们已经找到的可定向曲面 Σ_{AK}，通过在图 7 所示的同一交叉处用 S^- 连接替换拼接 T_{split}，便转变为不可定向曲面。这次手术使欧拉示性数 $\chi(L)$ 改变了 -1。根据$\chi(L) - 1 = -2g(L) - 1 = -C(L)$，且 $\chi(L) = -u^-(L)$ (14)，

$$C(L) - 1 = u^-(L),$$

$$g(L) = \frac{u^-(L)}{2}.$$

4.3. 情形： u^- **（非素）**。接下来，我们假设 D_K 是非素的，因此按照 Menasco [13] 的定义，它可分解为若干素交替纽结图的连通和。若 D_K 是非素的，那么 K 就是若干素结的连通和。此外，根据 Menasco [13] 的一项结果，D_K 是若干素交替纽结图的（显然的）连通和，其中每一个称为一个因子。若 D_K 不含单边形，则不失一般性，我们可以假设每个因子也都不含单边形（如果某个因子相对于交叉 c含有一个单边形，那么这个 c 就是一个可消去交叉）。令 ℓ为因子的个数。我们通常用符号 # 表示 $D_K = D_{K_1} \# D_{K_2} \# \cdots \# D_{K_l}$，其中 # 表示连通和运算。

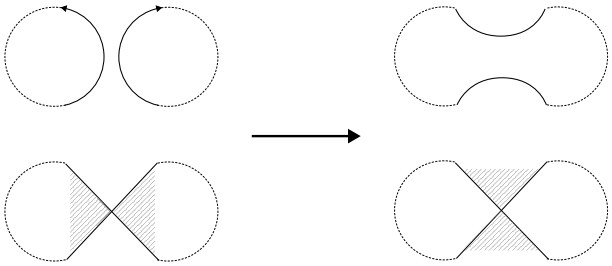


FIGURE 7. 改变拼接类型

对于每个因子 D_{K_i}（$1 \le i \le \ell$），应用事实1，可得 Σ_u（D_{K_i}） u^-（D_{K_i}）。接着，按如下方式计算 Σ_u（D_K） u^-（D_K）：

$$\Sigma_u(D_K) = \Sigma_u(D_{K_1})\#\Sigma_u(D_{K_2})\#\cdots\#\Sigma_u(D_{K_\ell}),$$

并且，注意到 u^- [7, 命题 3],的可加性

$$u^-(D_K) = u^-(D_{K_1}) + u^-(D_{K_2}) + \cdots + u^-(D_{K_\ell}).$$

注意，对于每一项 $u^-(D_{K_i})$，状态圆的数目由下式给出

$$|S_{u^-(D_{K_i})}| = \#T^{\mathrm{RI}^-}_{\mathrm{split}} + 1$$

（见(1)）。

S_{D_K} 中圆的数目利用状态圆 $|S_{D_{K_i}}|$ $(1 \le i \le \ell)$按(8)计算（注意，该公式同时使用数目 $|S_{D_{K_i}}|$ 与因子数目 ℓ）：

$$|S_{D_K}| = |S_{D_{K_1}}| + |S_{D_{K_2}}| + \cdots + |S_{D_{K_\ell}}| - (\ell - 1).$$

这里，每一项 $|S_{D_{K_i}}|$ 表示对应因子图中的状态圆数量，而减去 $(\ell - 1)$ 则是为了扣除形成连通和时去除的重叠部分。这一调整确保总数反映组合图中实际的圆数量。

由于实现 $u^-(D_K)$ 的拼接序列中，对应于 RI^- 的 T_{split} 类拼接数量等于实现各个 $u^-(D_{K_i})$ 的拼接序列中这类拼接数量之和（$1 \le i \le \ell$），因此有 (9)：

$$\#T^{\mathrm{RI}^-}_{\mathrm{split}} = \#T^{\mathrm{RI}^-}_{\mathrm{split}}(D_{K_1}) + \#T^{\mathrm{RI}^-}_{\mathrm{split}}(D_{K_2}) + \cdots + \#T^{\mathrm{RI}^-}_{\mathrm{split}}(D_{K_l}).$$

此外， S_{D_K} 中圆的数量$|S_{D_K}|$ 满足 (10)：

$$|S_{D_K}| = |S_u| + [m],$$

其中， $[m]$ 计入了定义 2 中所定义的负因子的贡献。

这里，令 n 为 D_L 中交叉的数量，令 $|S_L|$ 为对 n 个交叉应用 Adams-Kindred 算法（定义 8）进行拼接后得到的 S_L 中圆的数量。显然，链环 L 的最大欧拉示性数 $\chi(L)$ 为 $\chi(L) = |S_L| - n$。

因此，我们计算：

$$\begin{aligned}
\chi(L) &= |S_L| - n \\
&= |S_{D_K}| + \#T_{\text{split}}^{\text{RI}^-\prime} - n \\
&\qquad (\because \text{the definition of } D_K \text{ from } D_L \text{ applying RI}^- \text{ exactly } \#T'_{\text{split}} \text{ times}) \\
&= |S_{D_{K_1}}| + |S_{D_{K_2}}| + \cdots + |S_{D_{K_l}}| - (l-1) + \#T_{\text{split}}^{\text{RI}^-\prime} - n \quad (\because (8)) \\
&= |S_{u^-(D_{K_1})}| + |S_{u^-(D_{K_2})}| + \cdots + |S_{u^-(D_{K_l})}| \\
&\quad - (l-1) + \#T_{\text{split}}^{\text{RI}^-\prime} - n + [m] \quad (\because (10)) \\
&= (1 + \#T_{\text{split}}^{\text{RI}^-}(D_{K_1})) + (1 + \#T_{\text{split}}^{\text{RI}^-}(D_{K_2})) + \cdots + (1 + \#T_{\text{split}}^{\text{RI}^-}(D_{K_l})) \\
&\quad - (l-1) + \#T_{\text{split}}^{\text{RI}^-\prime} - n + [m] \quad (\because (1)) \\
&= 1 + \#T_{\text{split}}^{\text{RI}^-}(D_K) + \#T_{\text{split}}^{\text{RI}^-\prime} - n + [m] \quad (\because (9)) \\
&= 1 + \#T_{\text{split}} - n + [m] \quad (\because (2)) \\
&= 1 + \#T_{\text{split}} - (\#T_{\text{split}} + u^-(D_L) + 1) + [m] \quad (\because (3)) \\
&= -u^-(D_L) + [m].
\end{aligned}$$

对于负因子的数量 m （$0 \le m \le l$），我们有

$$\begin{aligned}
C(L) &= u^-(D_{K_1}) + u^-(D_{K_2}) + \cdots + u^-(D_{K_l}) - [m] \\
&= u^-(D_K) - [m] \\
&= u^-(D_L) - [m].
\end{aligned}$$

如果 Σ_{AK} 是不可定向的，那么 χ（L）$= -C$（L）$= -u^-$（L）$+ [m]$。

如果 Σ_{AK} 是可定向的，命题 2 蕴含

$$2g(L) < C(L) \Leftrightarrow C(L) = 2g(L) + 1,$$

然后 g（L）$= {}^{u^-}{}_{(L)\,2}$ 且 C（L）$= u^-$（L）$+ 1$，这可以通过将交叉处的 T_{split} 替换为拼接 S^- 来实现（例如，图 7）。此替换使圆盘数量减少 1，这意味着 χ（L）减少 1。由于 χ（L）$- 1 = -2g$（L）$- 1 = -C$（L）χ（L）$= -u^-$（L）$+ [m]$，我们有

$$\begin{aligned}
C(L) &= u^-(L) + 1 - [m], \\
g(L) &= \frac{u^-(L) - [m]}{2}.
\end{aligned}$$

4.4. 情形： u_2^-**.** 通过以下方式将 u_2^- 的计算归约到 u^--情形

$$u_2^-(D_L) = u^-(D_L) + 1 \qquad \text{(Lemma 1(2))}.$$

因此，最大欧拉示性数 $\chi(L)$ 满足

$$\chi(L) = 1 - u_2^-(D_L)$$

在素情形中，出于相同原因，我们有

$$\chi(L) = 1 - u_2^-(D_L) + [m]$$

在非素情形中。因此，u_2^-的结论可由上述已证明的相应 u^-情形推出；在连通和情形中，修正项 $[m]$ 相同。

素与非素情形的论证与u^-情形中的论证相同，因此略去。详细情况留给读者。

5. Proof of Theorem 2

设 L 是一个不可分裂二分支链环。对于 L 的一个交替图 D_L， D_L 至少包含一个由两个不同分支形成的交叉。应用图 8 所示的局部操作，可得到两个可能的链环。于是， L' 表示其中张成曲面的欧拉示性数较大的链环。对于 L 和 L' 中的每一个，设 $\Sigma(\cdot)$ 为实现最大欧拉示性数的张成曲面。则有如下等式：

引理 4。

$$\chi(\Sigma(L)) = \chi(\Sigma(L')).$$

证明。设 $|S_\cdot|$ ($\cdot = L$ 或 L') 表示状态 $S_\cdot$ 的状态圆 $D_\cdot$ 的数量。设 n 表示 D_L 中交叉的数量。则张成曲面的最大欧拉示性数为

$$\chi(\Sigma(\cdot)) = |S_\cdot| - n.$$

由于 L 是一个不可分裂二分支链环，我们任选 L 中由两个不同分支组成的交叉，并应用图 8 所示的操作，该操作增加了两个二边形。对于所得链环 L'，相应的张成曲面 $\Sigma(L')$ 比 $\Sigma(L)$ 恰好多出两个状态圆，而交叉的数量也增加了两个。由于增加一个交叉至多使状态圆的数量增加一个，因此通过该操作得到的欧拉示性数已经达到最大值。因此，

$$\chi(\Sigma(L')) = |S_{L'}| - (n+2) = (|S_L| + 2) - (n+2) = |S_L| - n = \chi(\Sigma(L)).$$

□

定理 *1* 的证明。给定一个不可分裂二分支链环 L及其交替图 D_L，上述构造可得到一个链环 L'，它具有一个包含分量间二边形的交替图，且最大欧拉示性数不变。因此，不失一般性，我们可以假设给定的链环L 具有一个包含分量间二边形的交替图。于是 L满足命题 1 的假设。

将命题 1 应用于 L，即可得到定理 1 的结论。 □

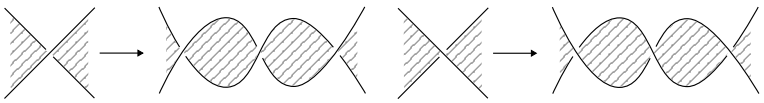


Figure 8. 添加二边形

6. Table

表1列出了若干来自链环表 [18] 的二分量素交错链环的链环拼接解组数 $u^-(L)$ 和 $u_2^-(L)$、交叉帽数 $C(L)$ 以及最大欧拉示性数 $\chi(L)$。

L	$u^-(L)$	$u_2^-(L)$	$C(L)$	$\chi(L)$
2_1^2	0	1	1	0
4_1^2	0	1	1	0
5_1^2	1	2	1	-1
6_1^2	0	1	1	0
6_2^2	1	2	1	-1
6_3^2	2	3	2	-2
7_1^2	1	2	1	-1
7_2^2	2	3	2	-2
7_3^2	2	3	2	-2
7_4^2	1	2	1	-1
7_5^2	2	3	2	-2
7_6^2	2	3	2	-2

TABLE 1. 素二分量交替链环的拼接解纽数、不可定向亏格及相关值。

7. EXAMPLES

我们将说明几个二分量交错链环的拼接操作以及 $u^-(L)$ 的计算方法。

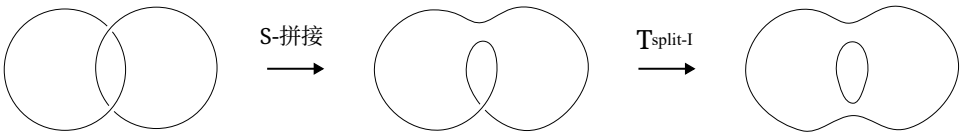


FIGURE 9. 链环 2_1^2 的一个拼接序列。这里使用记号 $T_{\text{split-I}}$ 仅为排版方便，因为在这幅图中将“T_{split} 对应于 RI$^-$”写在箭头上方并不实际；这并不表示要进行其他操作。

二分量链环 7_6^2 的交替图不包含分量间二边形。因此，在进行拼接操作之前，我们先按照图 8 添加二边形。图11展示了一种添加二边形的方式，它实现了最大的欧拉示性数；而图12展示了一种无法实现这一点的修改方式。

REFERENCES

[1] Colin Adams 与 Thomas Kindred, *A classification of spanning surfaces for alternating links*, 代数几何与拓扑 **13** 2013 5, 2967 3007 3116310 ( ), 第 – 期。MR

[2] Bradd Evans Clark, *Crosscaps and knots*, 国际数学与数学科学杂志 **1** (1978), 第 1 期, 113–123。MR478131

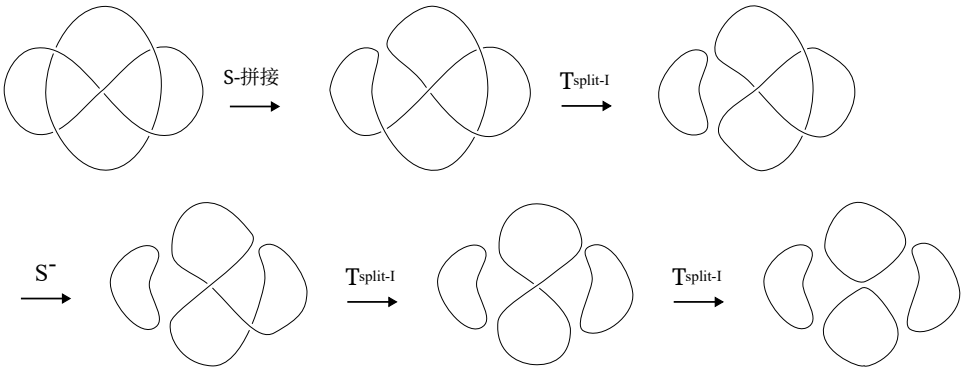


FIGURE 10. 链环 5_1^2 的拼接序列。这里使用记号 $T_{\text{split-I}}$ 仅为排版方便，因为在此图中将“T_{split} 对应 RI⁻”写在箭头上方并不实际；这并不表示有额外的操作。

[3] Richard Crowell, *Genus of alternating link types*, 《数学年刊》（2）69（1959），258–275。MR99665[4] A. Hatcher 与 W. Thurston, *Incompressible surfaces in 2-bridge knot complements*, 《数学发明》79（1985），第 2 期，225–246。MR778125[5] Mikami Hirasawa 与 Masakazu Teragaito, *Crosscap numbers of 2-bridge knots*, 《拓扑学》45（2006），第 3 期，513–530。MR2218754[6] Kazuhiro Ichihara 与 Shigeru Mizushima, *Crosscap numbers of pretzel knots*, 《拓扑学应用》 **157** 2010 1, 193 201 2556097 ( ), 第 – 期。MR Noboru Ito 与 Yusuke Takimura, [7] *Crosscap number and knot projections*, 《国际数学杂志》 **29** 2018 12, 1850084, 21 3883412 ( ), 第 期。MR , *Crosscap number of knots and volume bounds* [8] **31** 2020 13, , 《国际数学杂志》( ), 第 期。MR[9] , *A lower bound of crosscap numbers of alternating knots*, 《纽结理论及其分枝》29（2020），第 1 期，1950092，15。MR4079618[10] Efstratia Kalfagianni 与 Christine Ruey Shan Lee, *Crosscap numbers and the Jones polynomial* **286** 2016 308 337 , 《数学进展》( ), – 。MR[11] *Combinatorics and knot theory* Louis H. Kauffman, , 低维拓扑学（加利福尼亚州旧金山, 1981 1983, 181 200 718142 ），第 – 页。MR Thomas Kindred, [12] *Crosscap numbers of alternating knots via unknotting splices*, 《国际数学杂志》 **31** 2020 7, 2050057, 30 4123946 ( ), 第 期。MR W. Menasco, [13] *Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements*, 《拓扑学》 **23** 1984 1, 37 44 721450 ( ), 第 – 期。MR Hitoshi Murakami 与 Akira Yasuhara, [14] *Crosscap number of a knot*, 《太平洋数学杂志》171（ 1995 1, 261 273 1362987 ），第 – 期。MR Kunio Murasugi, *On the genus of the alternating knot. I, II*, 《日本数学会杂志》10（1958），94–105, 235–248。MR99664[16] Makoto Ozawa, *Essential state surfaces for knots and links*, 《澳大利亚数学会杂志》91（2011），第 3, 391 404 2900614 – 期。MR Milena D. Pabiniak、Jozef H. Przytycki 与 Radmila Sazdanovi [17] ´ *On the first group of the* c, , 《几何献礼》( ), – 。MR[18] *chromatic cohomology of graphs* **140** 2009 19 48 2504733 *Knots and links* 7, Dale Rolfsen, , 数学讲义丛书，卷 AMS Chelsea 出版社，普罗维登斯，罗得岛州，2003年。1976年版的重印本。MR0515288[19]H. Seifert, *Über das Geschlecht von Knoten*, 《数学年刊》110（1935），第 1 期，571–592。MR1512955[20] Masakazu Teragaito, *Crosscap numbers of torus knots* **138** 2004 1 3, , 《拓扑学应用》( ), 219 238 2035482 第 - – 期。MR

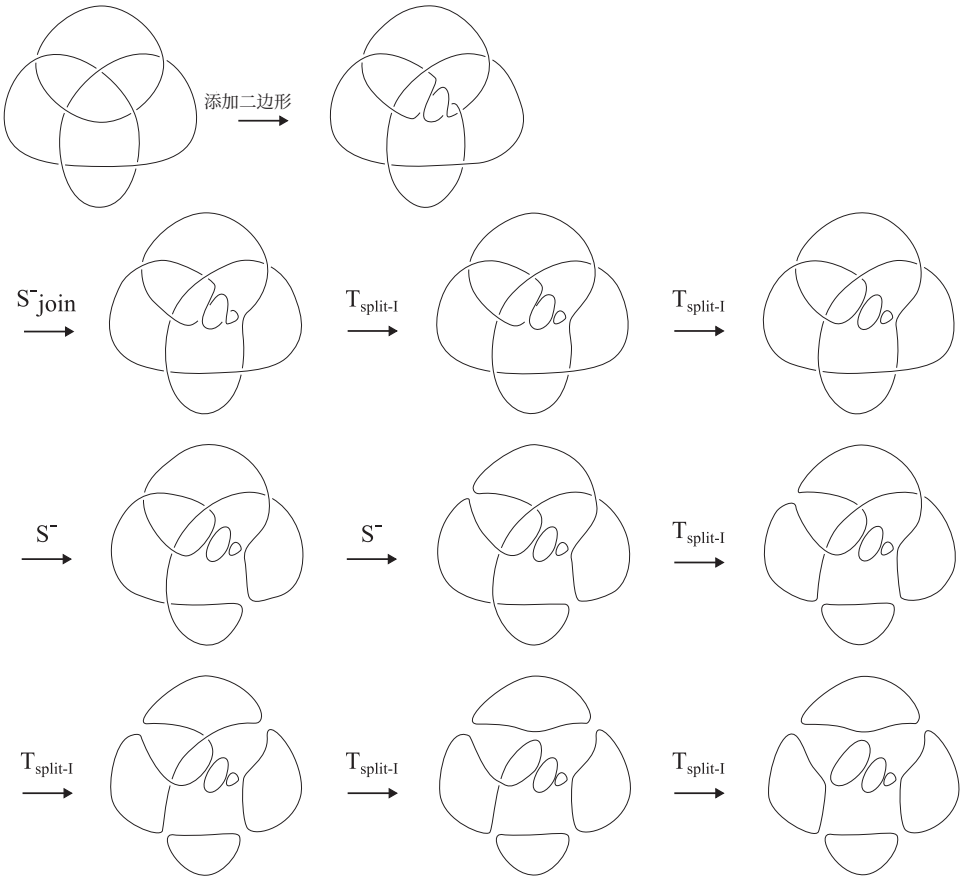


FIGURE 11. 由一个实现最大欧拉示性数的 7_6^2 图得到的修改后的图的拼接序列。这里使用记号 $T_{\text{split-I}}$ 仅为排版方便，因为在此图中难以在箭头上方写出“T_{split} 对应于 RI^-”；这并不表示有任何额外操作。

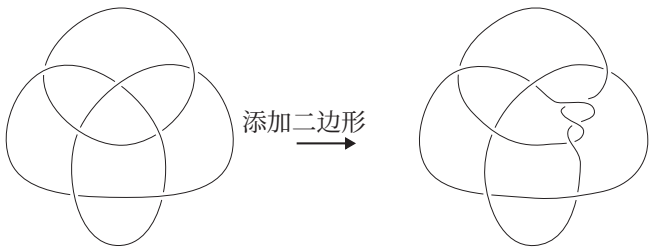


FIGURE 12. 对 7_6^2 的修改，但该修改未实现最大欧拉示性数

[21] Gengyu Zhang, *Crosscap numbers of two-component links*, 庆北数学杂志 **48** （2008年），第 2 期，241–254。MR2429312

Department of Mathematics, Shinshu University, Wakasato 4-17-1, Nagano, 380-8553, Japan.
Email address: nito@shinshu-u.ac.jp