arXiv:2602.05680v1 [math.DS] 5 Feb 2026

从余维二奇异性涌现的有限振幅周期轨道之间的异宿连接

T.J. Bridges[1], D.J.B. Lloyd[1], D.J. Ratliff[2], 和 P. Sprenger[3]

[1]萨里大学数学与物理学院，吉尔福德，GU2 7XH，英国[2]诺森比亚大学数学、物理与电气工程系，纽卡斯尔 NE1 8ST，英国[3]加利福尼亚大学默塞德分校应用数学系，默塞德，CA 95343，美国

摘要

保守系统中两个不同双曲周期轨道之间的异宿连接在广泛的应用领域中十分重要。另一方面，从头寻找大振幅连接并进行数值计算，在理论上颇具挑战性。本文以周期轨道族中的一个余维二奇异性作为组织中心，研究异宿连接的涌现。我们推导出一个正规形，其展开产生两个不同的有限振幅周期轨道，并具有显式的异宿连接。我们还通过数值延拓，在远离奇异性处构造异宿连接，采用了两种数值策略：打靶法和核心区-远场分解。数值研究中的一个关键几何工具，是稳定流形和不稳定流形及其交点的圆柱形叶状结构。我们引入异宿连接的一种新性质——作用量，并证明它是沿叶层的不变量，在截面处发生跳跃，而且在正规形理论中发挥核心作用。我们发现，负无穷与正无穷处的渐近相位差也是一个关键性质。该理论应用于 Swift-Hohenberg 方程、具有四阶色散的非线性薛定谔方程，以及源自水波的耦合 Boussinesq 方程；这些方程均具有能量和作用量守恒律。

1 引言

动力系统中的异宿连接是连接两个不同状态的解，并已应用于天体动力学 [20]，水波 [48, 44]，图案形成 [26]，以及非线性光学 [3]，等领域。例如，涉及平衡态的异宿轨道（称为平衡态到平衡态前沿）或涉及一个平衡态和一个周期轨道的异宿轨道（称为平衡态到周期轨道前沿）在哈密顿系统中已有深入研究 [8, 1]，而对于周期轨道到周期轨道的连接（称为周期轨道到周期轨道前沿），尤其是在保守系统中的此类连接，所知甚少。本文研究并构造保守系统中两个不同有限振幅周期态之间的异宿连接；图1展示了我们所关注的异宿连接类型示例。我们介绍了作用量、连接的多重性和渐近相位计算方面的新结果，并为两个不同的有限振幅双曲周期态的合并引入了一种正规形（本文称之为余维二奇异性）。对后一个奇异性进行展开可得到显式连接，以及一种寻找异宿连接分支起始点的策略，而这些起始点通常极难找到。我们发展了一种数值延拓法来寻找奇异性，然后采用第二种延拓策略，计算远离奇异性的大振幅连接。作用量的作用包含若干出人意料之处，包括其在余维二奇异性中的作用、其在稳定与不稳定叶层上的不变性、其在弗洛凯理论中的出现，以及连接中似乎具有内禀性质的作用量跃变。该理论的主要应用是非线性波和图案，其中这些连接是两个定常或周期行波之间的前沿，因此 x 将作为类时间方向。

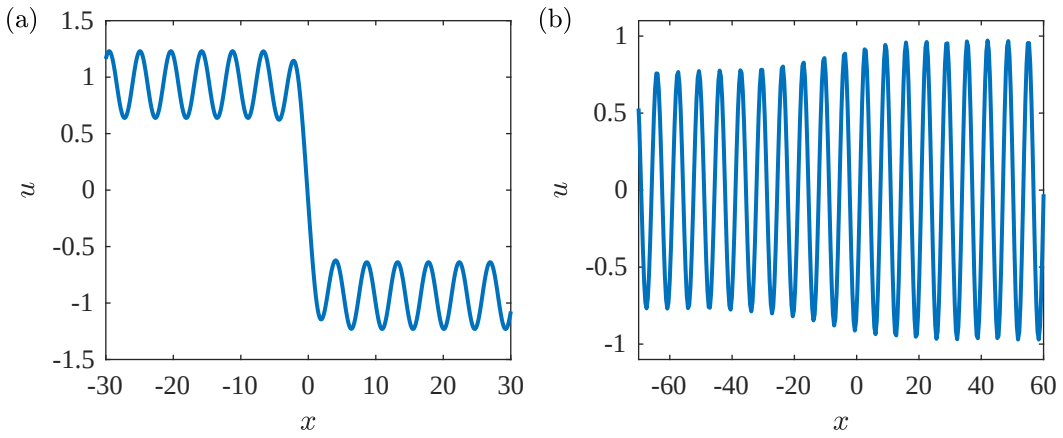

图 1： *Examples of a heteroclinic connection between two distinct periodic states (details of this example are in §5). Panel (a) shows a heteroclinic connection between two periodic orbits in the cubic SH equation with* $\sigma = 1$ *and panel (b) shows a heteroclinic connection in the SH357 equation with* $\mu = 0.305$, $a = 1.438$, *and* $b = 2.117$.

文献中关于这些状态的理论和数值计算已有一系列重要进展，我们以此为出发点并在其基础上展开研究。 Bandara et al. [4, 3, 5] 以及 Zhang et al. [56]报道了这些异宿连接的几何结构和新颖的数值计算，所采用的是 Lin 方法和边值方法。我们将复现其中一些结果并加以拓展。重数问题（两个固定周期态之间有多少条异宿连接）已在天体力学中的 Koon et al. [28] 以及摆动力学中的 Kaheman et al. [23] 得到研究，所采用的是打靶法；本文将采用他们的策略，并增加渐近相位的显式计算。 Beyn [9] 和 Dieci & Rebaza [15] 的工作突出了渐近相位对于无穷远周期态的重要性；我们通过将其纳入重数计算，并利用 Palmer [39] 的结果来帮助计算稳定与不稳定叶层，对此提出新的处理方式。除此之外，我们还指出，作用量是稳定与不稳定叶层的内禀不变量，但会在截面处发生跃变。

文献中提出的有效数值策略包括 Lin 方法（例如 Krauskopf &Reiss [27], Knobloch & Reiss [27]）、边值问题和延拓（例如 Beyn [9], Pampel [40, 41],Dieci & Rebaza [15], Doedel et al. [16]）、打靶法（例如 Koon et al. [28], Barrabes et al. [7], Kaheman etal. [23], Sprenger [48]）、用于椭圆型偏微分方程的 pde2path（Uecker et al. [53]，用于求解 [26] 中的异宿轨道），以及核心区-远场分解（例如 Lloyd & Scheel [30]）。我们采用预测-校正策略，以打靶法作为预测步骤，以核心区-远场分解作为校正步骤。打靶法在计算叶层方面很有效，但也存在误差：初始数据接近周期轨道，却并不位于其上；较大的 Floquet乘子可能导致误差增长；此外，该方法受相空间维数限制。校正步骤用于提高精度。除精度之外，核心区-远场分解的优势还在于，它很容易推广到任意维数的相空间，也适用于二维空间中的偏微分方程。

周期态之间的异宿连接在广泛的应用中受到关注：具有周期尾部的局域图样模型（例如 Aougab et al. [1], Knobloch et al. [26]）、沿具有四次色散的光波导传播的光脉冲模型（例如 Bandara et al. [4, 3, 5]）、耦合摆的动力学（例如 Kaheman et al. [23]）、非线性波理论中具有振荡尾部的行波（例如 Sprengeret al. [48]），以及天体力学中航天器轨道的设计（例如 Koon et al. [28], Wilczak &Zgliczyński [54, 55], Kirchgraber & Stoffer [25], Barrabés et al. [7], Henry & Scheeres [20], Spear [47]）。

在本文中，我们将以具有各种非线性项的 Swift-Hohenberg（SH）方程、具有高阶色散的 NLS 方程（NLS4），以及水波理论中的一个耦合 KdV 系统为例。在所有这些系统中，定常方程都可以表述为哈密顿系统。然而，我们将主要

处理应用中出现的方程，并在辛几何对理论提供启示时加以指出。为说明我们的策略，考虑上述类别中最简单的常微分方程

$$u_{xxxx} + \sigma u_{xx} + V'(u) = 0\,, \tag{1.1}$$

对于标量值 $u(x)$，其中 $V(u)$ 是给定的光滑非线性函数，而 σ 是一个实参数。该常微分方程出现在稳态 SH 方程、NLS4 的时间周期解以及五阶KdV [48]的分析中。常微分方程 (1.1) 是以下密度的拉格朗日量所对应的欧拉-拉格朗日方程:

$$L = u_x u_{xxx} + \tfrac{1}{2}u_{xx}^2 + \tfrac{1}{2}\sigma u_x^2 - V(u)\,, \tag{1.2}$$

以及能量型函数

$$H = u_x u_{xxx} - \tfrac{1}{2}u_{xx}^2 + \tfrac{1}{2}\sigma u_x^2 + V(u)\,. \tag{1.3}$$

为避免与图案形成中的“自由能”（本例中为 L ）混淆，我们将 H 称为哈密顿量，尽管这些坐标并非辛坐标。它是一个空间哈密顿函数，因为当 $dH/dx = 0$满足u(1.1) 时，有

假设方程 (1.1) 存在两个不同的周期解，其波数分别为 k^- 和 k^+。图 1 展示了满足 (1.1) 的连接这两个状态的异宿连接示例。1。当 $x \to -\infty$ $(+\infty)$ 时，存在一个波数为 k^- (k^+) 的周期解，以及一个将两个端态平滑连接起来的核心区域。这些示例的更多细节见 §5。

然而，图1掩盖了异宿连接的基本性质。首先，为了将每个周期轨道与核心相匹配，必须计算正确的渐近相位。其次，这里存在非唯一性。同一哈密顿曲面上的一对不同周期轨道可以承载许多异宿连接。我们发现，一般至少存在两个，原则上也可以存在任意有限多个。射击策略通过计算完整的稳定叶状结构和不稳定叶丛，解决了这两个问题。利用打靶法计算叶层是在（1.1）的相空间表示中进行的。按照下式将（1.1）写成一阶系统 [4], ，其坐标为 $\mathbf{u}:=(u,\ u_x,\ u_{xx},\ u_{xxx})$ ，控制方程为:

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \qquad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = [u_2, u_3, u_4, -\sigma u_3 - V'(u_1)]^T\,. \tag{1.4}$$

尽管此时还不需要，但值得注意的是，该系统具有哈密顿量和非典范辛形式

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma & 0 & -1 \\ \sigma & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

将（1.4）乘以 $\mathbf{J}$ ，可将右端变换为 ∇H，其中 H 在（1.3）中用 $\mathbf{u}$ 坐标表示。双曲周期轨道上的渐近相位是使得 θ 的那个值

$$u(x) \to \widehat{u}(z+\theta, k)\,, \quad \text{as } x \to +\infty\,, \tag{1.6}$$

当 u (x) 被初始化在某一周期态的稳定流形上，且 $\widehat{u}$ 是该周期轨道

$$\widehat{u}(z,k)\,, \quad \widehat{u}(z+2\pi,k) = \widehat{u}(z,k)\,, \quad z = kx\,. \tag{1.7}$$

所有落在某一特定渐近相位上的初始数据之并是稳定叶状结构的一片叶，而稳定叶状结构是对所有可能渐近相位取并。与位于 $-\infty$处的周期态相关联的不稳定叶丛亦同理。

射击算法计算（1.6）的逆过程。对于稳定叶状结构，固定相位值 θ^+ ，并从较大的 x 积分回 $x=0$ ；积分的初始数据位于稳定流形的切空间上。

改变 θ^+，便会生成一个圆柱流形，其极限是在截面上的一条曲线。对位于 $-\infty$ 的双曲周期轨道重复这一逆向计算，会在截面上生成另一条曲线。这两条曲线的横截交由此提供了异宿连接的候选。然而，情况要有趣得多：沿周期轨道推进相位 $\theta^{\pm}$，使其从 0 变化到 2π，并朝截面积分，会在截面上生成一条闭曲线。确切地说，在我们的大多数计算中，庞加莱截面´上都会出现一条无自交的闭曲线。例外情况是，同一哈密顿曲面上存在第三条周期轨道，且该轨道为逆双曲型，从而使曲线发生变形（见图 6，第2节）。

截面中有两条闭曲线时的示意图见图2(c)。这两条曲线的交点数给出了 $\widehat{u}^-(z+\theta^-,k^-)$ 与 $\widehat{u}^+(z+\theta^+,k^+)$ 之间异宿连接的重数，以及可用于确定 $\pm\infty$处渐近相位的相位值。图

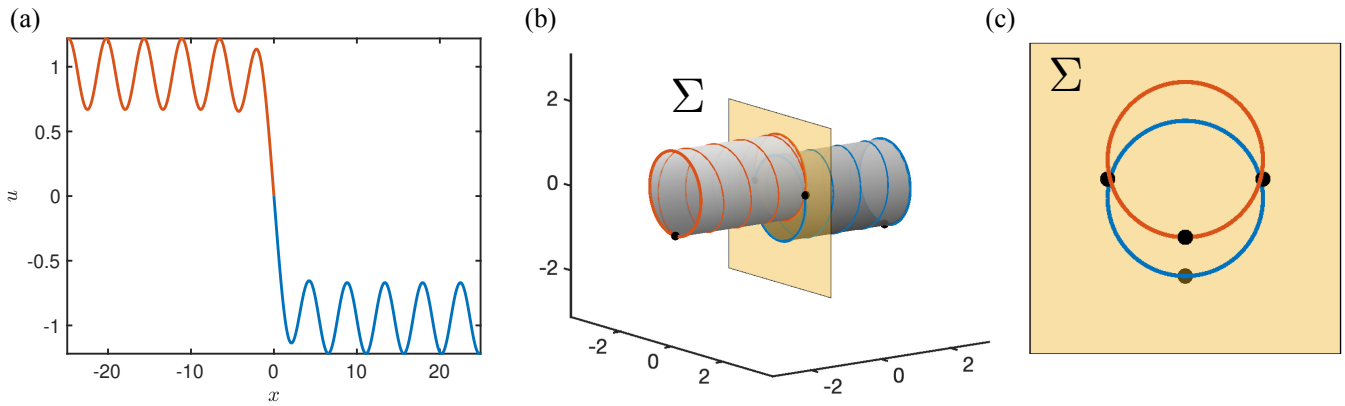

图 2： *Schematic of the computation of the stable and unstable foliations: panel (a) shows a heteroclinic connection associated with one of the intersection points in (c); panel (b) shows cylindrical foliations obtained by solving the inverse problem for the asymptotic phase; and panel (c) shows the surface of section at $x = 0$ illustrating the intersection between the stable (blue) and unstable (red) foliations.*

2(b) 展示了稳定叶状结构的示意图，右侧有一条蓝色的叶；还展示了不稳定叶丛，左侧有一条红色的叶。这两种圆柱形叶状结构随后在截面上相交，如图2(c) 所示。图2(a) 则展示了作为 x的函数的完整异宿连接。

给定一个异宿连接的良好近似，其中周期轨道 $k^{\pm}$ 及渐近相位 $\theta^{\pm}$，将其作为 [30]的全局迭代方案的初始条件。核心区-远场分解是一种边值求解器，但与 [9, 40, 41, 15, 16] 中的边值问题求解器策略不同，它不使用投影边界条件，而是采用零阶渐近边界条件；参见§3 和 [30]的附录 A，了解误差分析和收敛性质。以方程（1.1）为例，解的分解形式为

$$u(x) = w(x) + \chi_+(x)\widehat{u}^+(z+\theta^+,k^+) + \chi_-(x)\widehat{u}^-(z+\theta^-,k^-)\,,$$

其中 $w(x)$为核心区解，且使用光滑的截断函数

$$\chi_{\pm}(x) = 1\,, \quad \pm x > d+1 \quad \text{and} \quad \chi_{\pm}(x) = 0\,, \quad \pm x < d\,,$$

其中 d 是一个经过适当选择的较大正数（参见 [30]中的图9）。随后使用牛顿法迭代求解的完整方程组见 [30]中的方程（2.9）–（2.13）。数值结果见 §5.2 和6。

这里“余维”一词有两种用法。首先，它指流形的交点的余维，其中流形被视为相空间和参数空间中的子流形。这种方法最初由

提出， Beyn [9] 用于研究周期轨道之间的异宿连接，并且在此后的所有数值研究中都曾被明确或隐含地采用。它确定了解具有一般性的参数个数。此余维将在第§2节介绍数值计算的设置。本文使用的第二种余维概念，是以波数为参数的周期轨道族在参数空间中的奇异性阶数。

后一个余维概念源自正规形理论。非线性正规形将在§4中通过对有限振幅周期态进行相位调制1.7并从以下试探形式出发推导

$$u(x) = \widehat{u}(z + \varepsilon^{\rho-1}\phi, k + \varepsilon^{\rho} q) + \varepsilon^{\mu} v(z + \varepsilon^{\rho-1}\phi, X, \varepsilon)\,, \quad X = \varepsilon^{\nu} x\,, \tag{1.8}$$

其中约束条件为 $\phi_X = q$，且 v 是一个余项函数。指数 ρ， μ， ν 因所需的正规形而异。我们认为，波数调制的非线性正规形具有极其简单的形式

$$\varepsilon^{2\nu+\rho} \mathscr{K} q_{XX} + A(k + \varepsilon^{\rho} q) = 0\,. \tag{1.9}$$

函数 $A(k)$ 是在周期轨道族上求值的作用量。它是一个相对积分不变量，在周期轨道上求值时为

$$A(k) = \frac{d}{dk}\overline{L}_k\,, \tag{1.10}$$

其中 L 是拉格朗日量（1.2），在周期轨道族上取平均。定义

$$F(q) := \overline{L}(k + \varepsilon^{\rho} q)\,,$$

调制方程的形式为粒子的牛顿定律：

$$\varepsilon^{2\nu+2\rho} \mathscr{K} q_{XX} = -\nabla F(q)\,,$$

其中 $\mathscr{K}$ 起到.....的作用 质量。我们还将对 $\mathscr{K}$ 作出其他解释，包括计算 i 的策略 t.

此时，形式（1.9）只是一个断言。我们将通过将 $A(k + \varepsilon^{\rho} q)$按 ε展开为泰勒级数来证明它，然后基于试探形式（1.8），采用传统的相位调制，逐阶构造正规形，进而证明这些系数就是作用量的泰勒系数。将 A 按（1.9）展开为泰勒级数，

$$\varepsilon^{2\nu+\rho} \mathscr{K} q_{XX} + A(k) + A_k(k)\varepsilon^{\rho} q + \tfrac{1}{2} A_{kk}(k)\varepsilon^{2\rho} q^2 + \tfrac{1}{6} A_{kkk}(k)\varepsilon^{3\rho} q^3 + \cdots = 0\,. \tag{1.11}$$

我们称周期轨道分支上某个 $A_k = 0$（其中 $k \neq 0$）为余维一奇点；当 A_k =$A_{kk} = 0$时，在双参数族中，我们称其为余维二奇点。这里的余维概念突显了沿周期轨道族绘制作用量关于 k 的函数图像的重要性。图 k 所示为作用量关于3 的示意图，同时还绘出了该系统的空间哈密顿量。

作用量中的奇异性与哈密顿函数中的奇异性密切相关。求出（1.3）在（1.1）的一个周期轨道族上的哈密顿量，

$$H(k) := H(\widehat{u}(z, k))\,, \tag{1.12}$$

（为简化记号，使用相同符号）。我们在 §3 中证明， $A_k = 0$ 只要 $H_k = 0$。因此，上述余维二奇点出现在

$$H_k = H_{kk} = 0\,, \quad \text{and} \quad H_{kkk} \neq 0\,. \tag{1.13}$$

这样做的优点是，正规形中的系数也可以至少从定性的角度通过哈密顿量-波数图推导出来。

在余维二点处，正规形的首阶形式为

$$\varepsilon^{2\nu+\rho} \mathscr{K} q_{XXX} + \tfrac{1}{2} A_{kkk}\varepsilon^{3\rho} q^2 q_X = 0\,. \tag{1.14}$$

我们对方程（1.11）进行了求导，因为在§4中按常规推导相位调制时，自然会得到这种形式。（1.14）中的各项在 $\rho = \nu = 1$时达到平衡，从而得到

$$\mathscr{K} q_{XXX} + \tfrac{1}{2} A_{kkk} q^2 q_X = 0\,. \tag{1.15}$$

取 $\mu = 2$，试探形式为

$$u(x) = \widehat{u}(z+\phi, k+q) + \varepsilon^2 w(z+\phi, X, \varepsilon)\,, \quad X = \varepsilon x\,. \tag{1.16}$$

将此试探形式代入（1.1），对 ε 中的所有项展开成泰勒级数，并逐阶求解，这很容易做到。四阶的可解性条件给出一个类似于（1.15）的正规形。接下来的难点是证明推导中得到的系数确实是作用量的泰勒系数。证明概要见附录 C，详细内容见补充材料。

典型的哈密顿量-波数图如图所示，可作为寻找余维二点的起点 3。其中有两个临界点，一个是极大值点，另一个是极小值点，而余维二点

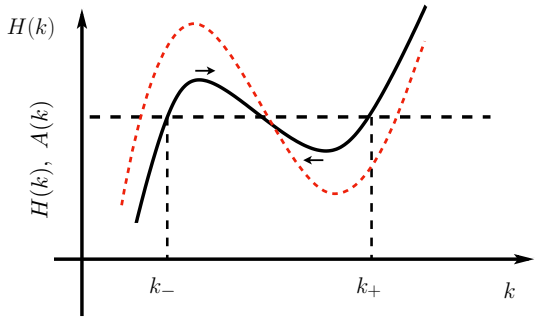

图 3: *Plot of the value of the Hamiltonian and the Action function versus the wavenumber along a branch of periodic states near an inflection point. The solid curve corresponds to the spatial Hamiltonian and the dashed curve to the Action. Arrows indicate the motion of the critical points as the codimension 2 point is approached.*

使这两个奇点汇合。若最大值左侧的周期轨道分支是双曲的，那么一般而言，最小值右侧的分支也将是双曲的，因此，只要它们位于同一哈密顿曲面上并满足横截条件，就可以彼此连接。通过画一条水平线即可找到这样的哈密顿曲面。随着余维二点逐渐逼近，这两个双曲周期轨道彼此靠近，并可得到异宿连接的显式公式。这种图示方法并非识别位于同一哈密顿曲面上的周期轨道对的唯一途径；事实上，由于哈密顿曲面不一定是连通的，不同连通分支上的周期轨道也可以配对。

该正规形完全可积。常数解 $q^{\pm}$ （1.15）表示无穷远处的周期态；当 $\mathscr{K}$ 和 A_{kkk} 具有特定符号时，这两个状态之间存在显式的异宿轨道。第§4节对该正规形进行了详细分析。正规形理论适用于任意有限维保守系统。因此，上述余维二点回答了如何判断给定系统是否存在异宿连接这一问题：找到一个余维二点，并检查 $\mathscr{K}$ 和 A_{kkk}的符号。

我们概述作用量守恒律的由来，详细内容见§3。作用量的关键在于，它定义在一个解族 $u(x,\ s)$上，其中 s 用于参数化该解族。将这个解族代入（L（1.2）中的拉格朗日量并求导，可得精确恒等式

$$L_s + u_s\Big(u_{xxxx} + \sigma u_{xx} + V'(u)\Big) = A_x\,. \tag{1.17}$$

当 $u(x,s)$ 是一个解（对每个 s）时，括号中的项消失，且（系综空间上的）守恒定律是精确的： $L_s = A_x$，其中

$$A(x,s) = u_{xxx} u_s + u_x u_{xxs} + \sigma u_x u_s\,. \tag{1.18}$$

该函数，尤其是它在周期轨道族上的取值，将在理论中占据突出地位。作用量的进一步内容在 §3中展开。

我们将把讨论范围限制在定常方程的相空间维数为四的情形。不过，许多策略也适用于更高维的相空间，甚至适用于多维空间（参见总结§7）。

我们选择了四个例　子偏微分方程来说明该理论。第一个方程是 Swift–Hohenberg 方程　　n

$$u_t + u_{xxxx} + \sigma u_{xx} + V'(u) = 0\,, \tag{1.19}$$

，其　多项式为 $V(u)$。我们关注 SH 的两种情形：二次-三次 Swift–Hohenberg 方程，其

$$V(u) = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}\nu u^3 - \frac{1}{4}u^4\,, \tag{1.20}$$

其中 ν 为指定的实参数（当 $\nu = 0$ 时，称为三次 SH 方程），以及 SH357 方程，该方程由 [26], 引入，其中

$$V(u) = \frac{1}{2}(1-\mu)u^2 + \frac{1}{4}au^4 - \frac{1}{6}bu^6 + \frac{1}{8}u^8\,, \tag{1.21}$$

其中 a、b 和 μ 是实参数（我们在 [26] 中用 μ 替换 λ），并且在该模型中取 σ =2。第三个模型是具有四阶色散的 NLS 方程 [4, 3, 5],

$$\Psi_t = \mathtt{i}\gamma|\Psi|^2\Psi - \tfrac{1}{2}\mathtt{i}\beta_2\Psi_{xx} + \mathtt{i}\frac{\beta_4}{24}\Psi_{xxxx}\,, \tag{1.22}$$

其中 $\Psi(x,\ t)$ 是复值的，而 γ、β_2 和 β_4 是实值参数。取 $\Psi(x,\ t) = u(x)\mathrm{e}^{\mathtt{i}\mu t}$，可将其化为实值函数 1.1所对应的定常方程 $u(x)$，其中

$$\sigma = -12\frac{\beta_2}{\beta_4} \quad \text{and} \quad V(u) = -12\frac{\mu}{\beta_4}u^2 + 6\frac{\gamma}{\beta_4}u^4\,. \tag{1.23}$$

在上述三个模型中，此前已发现振荡前沿；我们提出一种新的视角并对结果进行比较。第四个模型此前尚未发现振荡前沿，它是 ac–Boussinesq（或耦合 KdV）系统

$$\begin{aligned} h_t + (u + hf'(u))_x + au_{xxx} &= 0 \\ u_t + f(u)_x + gh_x + ch_{xxx} &= 0\,, \end{aligned} \tag{1.24}$$

其中 $f(u)$ 是给定的光滑函数。由水波问题导出的正则情形满足 $f(u) = \frac{1}{2}u^2$。我们将通过在 f 中加入高阶项来推广这种形式,

$$f(u) = \tfrac{1}{2}u^2 + \frac{\alpha}{3}u^3, \tag{1.25}$$

对于某个 s 指定参数 α。相对于移动参考系的定常系统 $x \mapsto x - Ct$ 为

$$\begin{aligned} ch_{xx} &= F_h \\ au_{xx} &= F_u\,, \end{aligned} \tag{1.26}$$

其中 $g > 0$ 是引力常数，a, c 是色散系数，并且

$$F(h,u) = \mathscr{A}u + \mathscr{B}h - \tfrac{1}{2}gh^2 - \tfrac{1}{2}u^2 - hf(u) + Chu\,, \tag{1.27}$$

其中 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是积分常数。偏微分方程（1.26）是水波模型（$\alpha = 0$）和内波（$\alpha \neq 0$），其中系数 a, c 取特定值（参见 Bona et al. [10]）。

本文结构安排如下。在第 2 节中，我们回顾点到点异宿轨道所涉及的稳定流形和不稳定流形的几何，并说明如何确定渐近相位和重数。作为这部分

回顾的内容，我们介绍 Bandara et al. [4, 3, 5] （1.22）的最新数值计算，并结合几何重新解读这些结果，同时将其结论推广到 $A \to -A$ 对称性遭到破坏的情形。在第 3 节中，我们介绍作用量及其与空间周期轨道的 Floquet 稳定性分析之间的联系。随后在第 4 节中，我们发展正规形理论，推导哈密顿余维 2 点附近的正规形。在第 5 节中，我们说明如何找到周期轨道的哈密顿余维 2 点，并计算 SH357 中涌现的波前。在第 6 节中，我们展示该理论如何应用于 ac–Boussinesq 方程。最后，我们在第 7 节作总结。

2 计算广义 NLS 方程中的叶层

在本节中，我们将 Bandara et al. [4, 3, 5] 的四阶 NLS 方程作为起点 t,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathtt{i}\gamma|\Psi|^2\Psi - \mathtt{i}\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \mathtt{i}\frac{\beta_4}{24}\frac{\partial^4\Psi}{\partial x^4}\,, \tag{2.1}$$

其中 $\Psi(x,t)$ 为复数，参数 β_2、β_4 和 γ 为实数。我们已将 [4, 3, 5] 中的坐标 A 和 (z,t) 替换为 Ψ 和 (t,x)，以与本文的记号相对应。

本节的目的有三方面。首先，实现图 2中所示圆柱形叶状结构的算法，并说明 $H-k$与 $A-k$图的用法。其次，与 [4, 3, 5],中的先前工作进行比较；第三，展示一些破坏 $\Psi \mapsto -\Psi$ 在（2.1）中的对称性的异宿连接的新计算结果。在本例中我们没有找到余维二点；这将在稍后加入高阶非线性时出现。

为将（2.1）化为定常问题，我们寻求如下形式的时间周期解 $\Psi(x,\ t)\ = u(x)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t}$，从而得到关于 $u(x)$ (2.1)的常微分方程，

$$\frac{\beta_4}{24}\frac{d^4u}{dx^4} - \frac{\beta_2}{2}\frac{d^2u}{dx^2} - \mu u + \gamma u^3 = 0\,. \tag{2.2}$$

对于本文关注的情形，我们采用论文 [4, 3, 5]中给出的参数值：$\beta_4 = -1$，$\mu = \gamma = 1$。取这些参数值，并对 x进行缩放后，常微分方程（2.2）可化为（1.1）中的形式，其中 $V'(u)\ = u - u^3$,

$$u_{xxxx} + \sigma u_{xx} + u - u^3 = 0 \quad \text{with} \quad \sigma = \beta_2\sqrt{6}\,. \tag{2.3}$$

周期轨道记作 $\widehat{u}(z,\ k)$，它们满足常微分方程：

$$k^4\widehat{u}_{zzzz} + \sigma k^2\widehat{u}_{zz} + \widehat{u} - \widehat{u}^3 = 0\,. \tag{2.4}$$

我们考虑两种情形。首先，考察具有 $u \mapsto -u$ 第§2.1节中对称性的解。在这种情形下，这两个周期轨道是对称相关轨道。其次，考察破缺这种对称性的解：既可以像§2.2节中那样选择不同的周期轨道，也可以像§2.3节中那样，在非线性项中显式加入破缺对称项。

2.1 连接对称性相关周期轨道

这个案例清楚地展示了稳定流形和不稳定流形的圆柱形叶状结构，以及渐近相位和重数计数的计算。对于无穷远状态，我们计算出一个周期轨道族，$\widehat{u}(z,\ k)$，另一个则只是它的负值，$-\widehat{u}(z,\ k)$。

为简单起见，取 $\sigma = 1$，并寻找从常值状态 $u = \pm 1$分岔出的周期解。对这些常值状态将（2.3）线性化，并寻找形式为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$、其中 $\sigma = 1$的正规模解，可得特征方程

$$k^4 - k^2 - 2 = 0\,. \tag{2.5}$$

唯一的正实根为 $k=\sqrt{2}$。存在一对周期轨道 $\widehat{u}^{\pm}(z,\ k^{\pm})$，以 k 为参数，并通过对称性相互关联

$$\widehat{u}^{-}(z,k^{-})=-\widehat{u}^{+}(z,k^{+}):=-\widehat{u}(z,k)\,,\quad k^{+}=k^{-}:=k\,,$$

并从具有 $k=\sqrt{2}$ 的常数解处分岔。周期轨道分支上的哈密顿量和作用量函数为

$$H=k^{4}\widehat{u}_{z}\widehat{u}_{zzz}-\tfrac{1}{2}k^{4}\widehat{u}_{zz}^{2}+\tfrac{1}{2}k^{2}\widehat{u}_{z}^{2}+\tfrac{1}{2}\widehat{u}^{2}-\tfrac{1}{4}\widehat{u}^{4}\quad\text{and}\quad A=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(\sigma k\widehat{u}_{z}^{2}-k^{3}\widehat{u}_{zz}^{2}\right)\mathrm{d}z\,,$$

它们沿着图4中的分支绘制。图4 中的起点位于右侧，其中 $k=\sqrt{2}$ 且

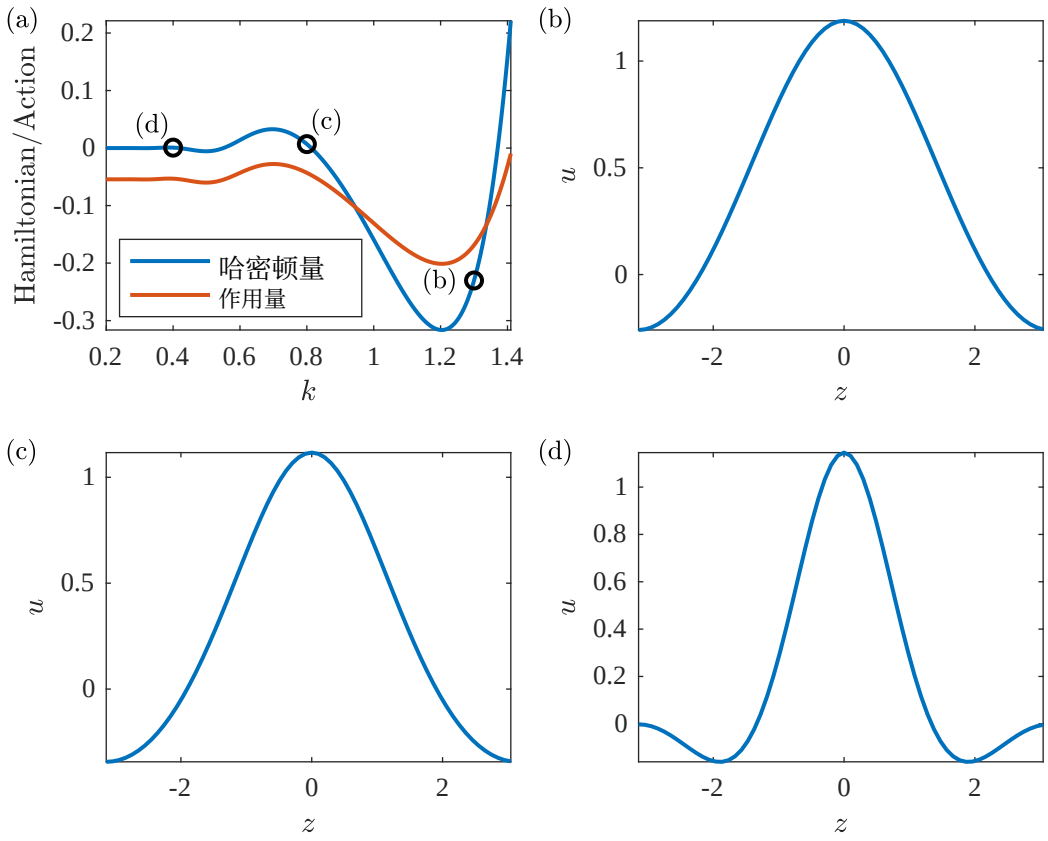

图4: *A family of periodic solutions of (2.4) with $\sigma=1$. In panel (a) the Hamitonian and Action are plotted as functions of k. Although H and A are qualitatively different, their critical points agree. Panels (b), (c) and (d) show plots of the periodic solutions $\widehat{u}(z,\ k)$ as a function of z, with $-\pi<z<+\pi$, at three $k-$points along the curves.*

$H=\frac{1}{4}$。图4（a）中，随着振幅增大，波数减小。

沿这些曲线的周期解是双曲的，至少对于小振幅而言（接近 $k=\sqrt{2},\ H=1/4$）。这是因为常值状态是鞍点：特征方程（2.5）有两个实根和两个纯虚根。

利用射击算法，我们将证明这两条周期轨道之间存在异宿连接。对于打靶法，我们使用一阶形式（1.4），在此情形下为

$$(u_1)_x=u_2\,,\quad (u_2)_x=u_3\,,\quad (u_3)_x=u_4\,,\quad (u_4)_x=-\sigma u_3-u_1+u_1^3\,.\tag{2.6}$$

为了找到这些连接，我们将计算稳定与不稳定叶层并追踪它们的交点。叶层的定义始于渐近相位。将（2.6）的一个向量值周期解记为 $\hat{\mathbf{u}}(z,\ k)$。稳定流形中的一点 $\mathbf{u}_0$ 被称为具有渐近相位 θ，如果

$$\|\Phi(\mathbf{u}_0)(x) - \widehat{\mathbf{u}}(z+\theta,k)\| \to 0 \quad \text{as } x \to +\infty\,, \tag{2.7}$$

其中 $\Phi(\mathbf{u}_0)$ 是方程 (2.6) 在初始数据 $\mathbf{u}_0$下的流。每个渐近相位定义一片叶。一片叶是所有具有相同渐近相位的 $\mathbf{u}_0$ 的并集。所有渐近相位对应的这些叶的并集构成叶状结构。Palmer [39] 证明了渐近相位的存在性与唯一性，以及叶状结构的存在性与光滑性。在 $\pm\infty$ 处每个周期态上的渐近相位，是构造异宿连接的关键部分。

计算叶状结构的一片叶时，我们采用 Koon et al. [28] 和 Kaheman et al. [23] 中的打靶策略。通过对周期轨道附近的方程 (2.6) 进行线性化，利用周期轨道的切向量对其进行初始化，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix}\delta u_1\\ \delta u_2\\ \delta u_3\\ \delta u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1+3\widehat{u}^2 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta u_1\\ \delta u_2\\ \delta u_3\\ \delta u_4\end{bmatrix},$$

其中 δu_i 表示周期轨道 $\widehat{u}^{\pm}(z,k)$ 附近的小扰动。我们分别通过沿 x正向和反向积分来计算稳定流形和不稳定流形；积分从沿着对应于稳定或不稳定 Floquet乘子的特征方向施加扰动开始。在本节所进行的数值计算中，典型的扰动幅度为 $\|\delta\mathbf{u}\| = 10^{-8}$。通过沿周期轨道逐步增加相位，逐叶构造叶状结构。

为确定异宿连接，我们在一个与叶层横截的适当 Poincaré 截面上计算不变流形的交点，如图 ´示意所示2。对于当前情形，Poincaré 截面的自然选择是´ $u_1 = 0$。这些交点确定了一片叶，它是连接的候选。通过沿选定的叶从 Poincaré 截面反向积分至周期轨道，可得到实际的连接及其渐近相位。´

在图 5中，我们展示了 $k = 1.38$这一情形的结果。图中给出了周期轨道稳定流形和不稳定流形的几何形态、Poincaré 截面及相应的异宿连接。它们绘制在（u_1，u_2，u_3）空间中；在图版 (d) 和 (f) 中，则绘制为 x的函数。图 5(a) 中以黑色显示了两个周期轨道，其中心位于 $u_1 = \pm 1$。靠近 -1 的周期轨道的不稳定流形（稳定流形）叶层分别以红色（蓝色）显示。

图 5(b) 展示了庞加莱´截面 $u_1 = 0$，其中两个流形以畸变椭圆的形式相交，显然它们有两个交点。这两个点因此是异宿连接的候选点。图5(c)-(d) 中展示了其中一条异宿连接，它平滑地连接两个周期轨道；另一条连接见图5(e)-(f)。通过将叶层中的叶片从 $\pm\infty$处反向延展，可以找到连接轨道，起点为一个交点。计算得到的渐近相位为 $\pm\theta$，其中 $\theta \approx 1.36$ （无量纲单位），由此得到渐近行为

$$\lim_{x\to\pm\infty} \|u(x) - \widehat{u}^{\pm}(z \mp \theta, k)\| = 0\,. \tag{2.8}$$

由于 $u \to -u$ 对称性且作用量在符号变换下不变，无穷远处两个周期轨道的作用量相等。

2.2 连接非对称周期轨道

可以通过多种方式连接具有不同作用量的周期轨道。其中一种方式是考虑方程（2.3）在 $\pm\infty$ 处具有不同波数的周期解。此类构型已由 Bandara

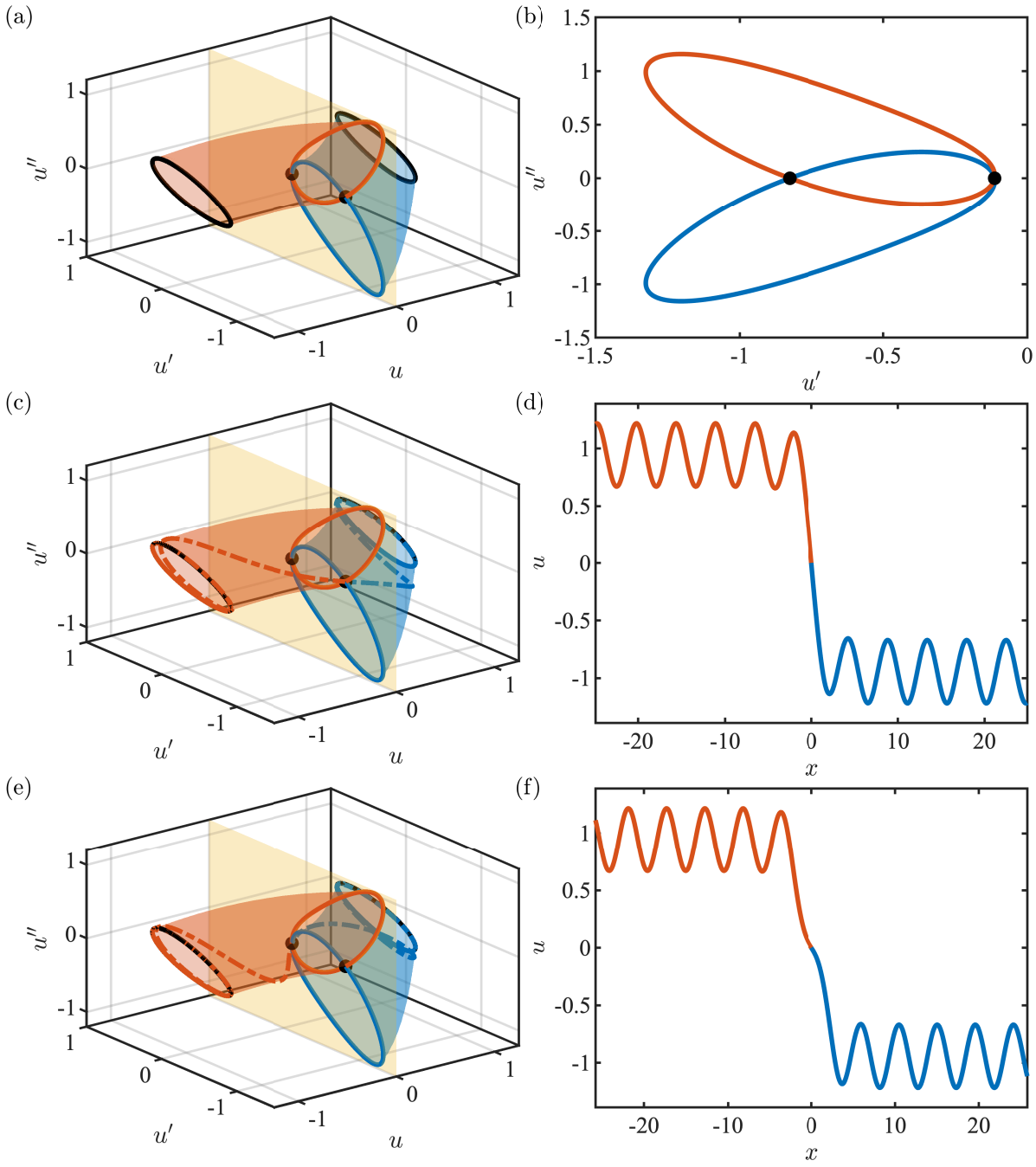

图5: *A plot of the stable and unstable foliations of the periodic orbits in (2.6). Panel (a) shows the stable and unstable manifolds (colored blue and red respectively) starting from the periodic orbits and ending on the (colored yellow) Poincaré section. Panel (b) shows a plot of the Poincaré section, with the two intersection points colored black. Panel (c) includes the manifolds along with the highlighted leaf which is the connection. That connection is shown as a function of x in panel (d). Panel (e) Shows a plot of the other heteroclinic connection on the manifolds and corresponding heteroclinic connection as afunction of x is in (f)*

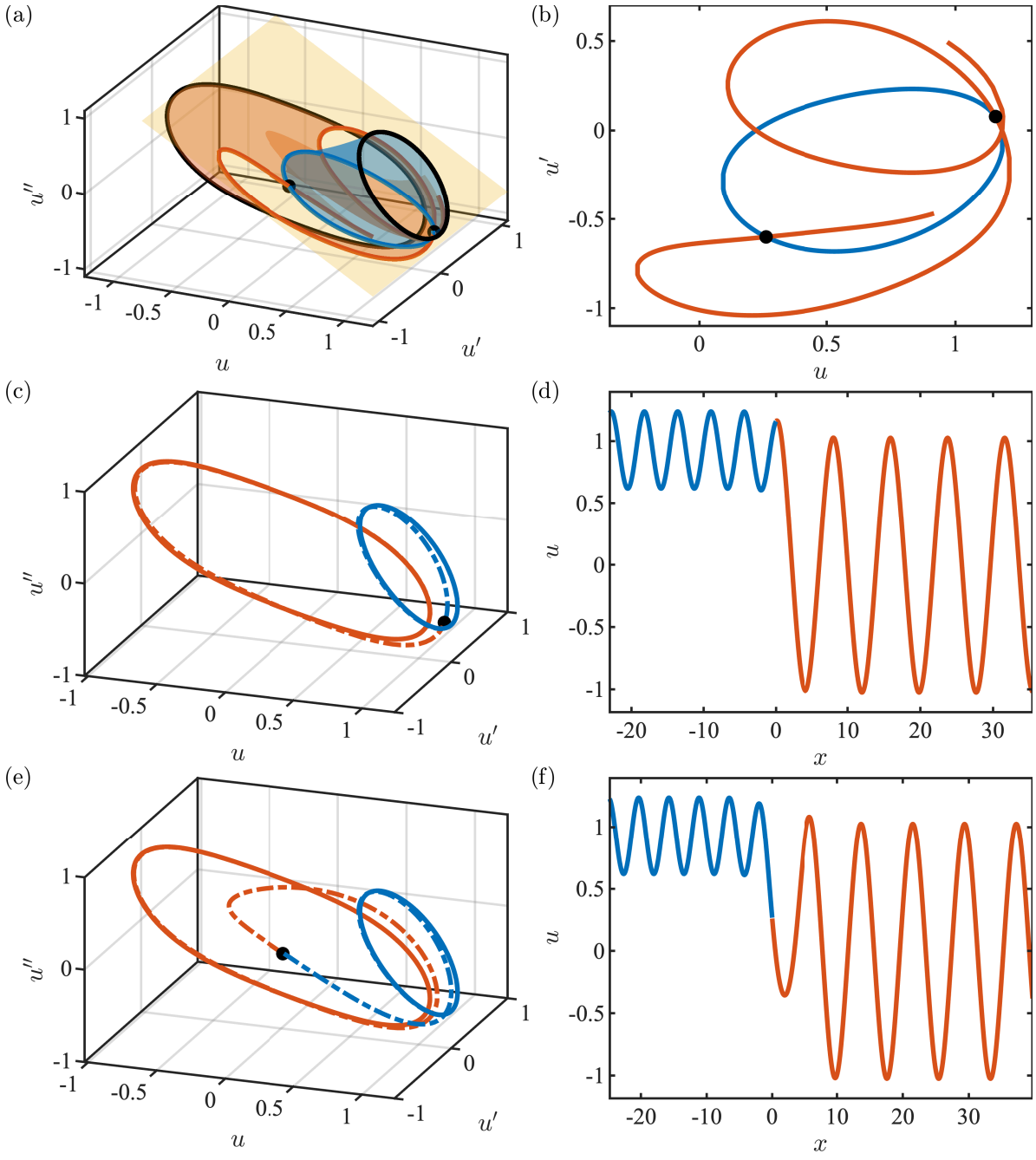

图6: *Panel (a) the stable manifold is shown in red and the unstable manifold is shown in blue with the Poincaré section at $u = 0$ shown in yellow. Panel (b) shows the stable and unstable manifolds on the Poincaré section with the two intersections identified with black dots. Panels (c) and (d) show one of the heteroclinic connections. Panels (e) and (f) show the other heteroclinic connection.*

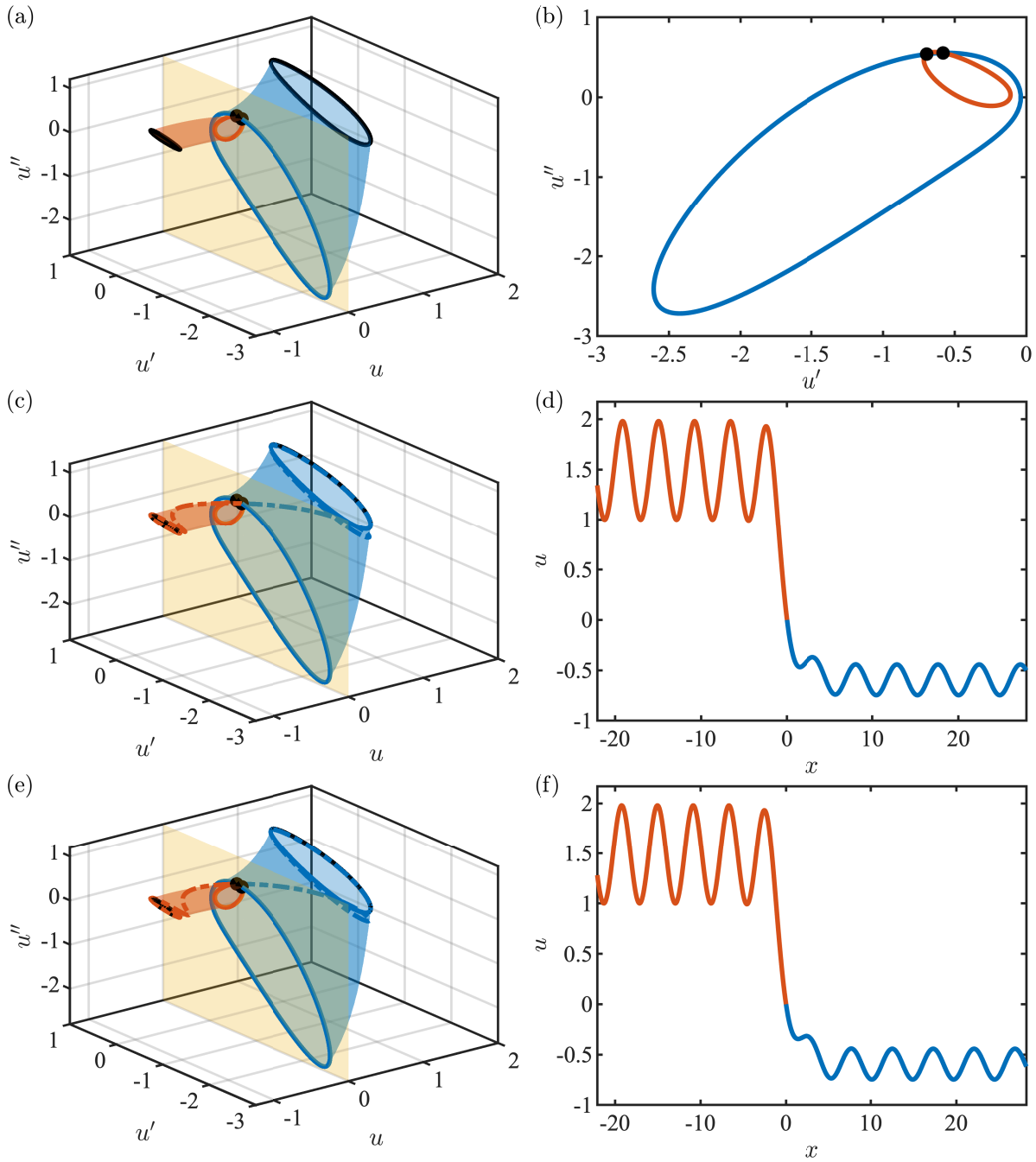

图 7: *A plot of the stable and unstable manifolds and heteroclinic connections for the symmetry breaking case in (2.9). Panel (a) the stable manifold is shown in red and the unstable manifold is shown in blue with the Poincaré section at $u_1 = 0$ shown in yellow. Panel (b) shows the stable and unstable manifolds on the Poincaré section with the two intersections shown in black dots. Panels (c) and (d) show one of the heteroclinic connections and the corresponding manifolds. Panels (e) and (f) show the other heteroclinic connection and corresponding manifolds.*

ET AL. [3]。我们将通过直接计算方程（ [3] 2.3）在 下周期解的不变流形，重现 $\sigma \approx 0.97$中的一个情形。远场双曲周期轨道的波数为 $k_+ \approx 1.365$ 和$k_- \approx 0.799$。选择这些波数，使周期轨道位于哈密顿量 $H = 0$的等值集上。相应周期轨道的作用量为 $A_- \approx -0.18$ 和 $A_+ \approx -0.1268$，由此得到跃变$\Delta A = 0.0532$。图 6 展示了计算得到的流形及其与截面的交点，

$$1.744u_1 + 1.929u_3 = -0.807\,,$$

（系数值为近似值）。选择这个庞加莱截面，是因为它能有效地将相空间中的两条周期轨道分隔开。周期轨道的稳定流形和不稳定流形分别以红色和蓝色显示。截面以黄色显示。在庞加莱截面中，稳定流形和不稳定流形的交点以黑点标出。图 (c) 和 (d) 展示了其中一条异宿连接，图 (e) 和 (f) 展示了另一条异宿连接。请注意，稳定流形与截面的交集并未形成闭环。这一结果归因于两条远场周期轨道之间存在一条逆双曲周期轨道。事实上，图 6 (e) 和 (f) 展示了一条接近这条逆双曲轨道的异宿连接。

2.3 对称性破缺

连接具有不同作用量的轨道，另一种方法是加入显式的破缺对称项。这里考虑的附加项是二次项 u_1^2，它被添加到（2.6）中的最后一个方程；也就是说，我们研究以下方程

$$u_{xxxx} + u_{xx} + u + u^2 - u^3 = 0 \tag{2.9}$$

图 7展示了稳定流形和不稳定流形的几何结构、庞加莱截面 $u_1 = 0$，以及连接具有波数 $k_- = 1.503$ 和 $k_+ = 1.31$ 的周期轨道的相应异宿连接。这些特定波数的选取旨在突出相关远场周期波振幅的显著差异。具体而言，左侧对应于 k_-的周期轨道，其振幅明显大于右侧的周期轨道。这种振幅差异在图 7(b) 所示的庞加莱截面中清晰可见：振幅较小的轨道形成了一个更紧凑的红色环，表明其在相空间中的投影范围较窄。与这些远场周期轨道相关的作用量积分进一步量化了这种差异：我们分别计算得到 $A_- = -0.638$ 和 $A_+ = -0.038$，由此得到跃变量 $\Delta A = 0.6$。

现在我们考虑周期轨道的一般性质，介绍余维二正规形，然后研究两个体现该奇异性的例子。

3 周期轨道的性质

我们将用（1.1）来描述该理论，并指出它稍作修改后也适用于 Boussinesq系统（1.24）及相关模型。波数为 k 的周期态，

$$\widehat{u}(z,k)\,, \quad \widehat{u}(z+2\pi,k) = \widehat{u}(z,k)\,, \quad z = kx\,, \tag{3.1}$$

满足

$$k^4\widehat{u}_{zzzz} + \sigma k^2\widehat{u}_{zz} + V'(\widehat{u}) = 0\,. \tag{3.2}$$

哈密顿函数 H 在（1.3）中与 z的取值无关，可用于参数化解，

$$H = k^4\widehat{u}_z\widehat{u}_{zzz} - \tfrac{1}{2}k^4\widehat{u}_{zz}^2 + \tfrac{1}{2}\sigma k^2\widehat{u}_z^2 + V(\widehat{u})\,, \tag{3.3}$$

（使用相同符号 H，如（1.3）所示，以简化记号）。

作用量是解上的一个不变量，与哈密顿函数互为对偶：它发挥着类似的作用，但属于相对不变量。作用量定义于解族

$$u(x,s)\,,\quad s\in(s_1,s_2)\,, \tag{3.4}$$

此处（s_1，s_2）只是一个实数开区间。可以将系综视为初始数据的参数化，但这种看法并非必需。假设系综随 s 平滑变化，并且对1.1中的每个 s值都满足该式，

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x,s)+\sigma\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,s)+V'(u(x,s))=0\,,\quad \text{for each } s\in(s_1,s_2)\,. \tag{3.5}$$

如引言所示，作用量由一条守恒定律确定，其中拉格朗日量在系综上取值（1.17）。对（ L 中的1.2）关于 s求导，即可验证这条守恒定律，

$$\begin{aligned} L_s &= \partial_s\left(u_xu_{xxx}+\tfrac{1}{2}u_{xx}^2+\tfrac{1}{2}\sigma u_x^2-V(u)\right)\\ &= u_{xs}u_{xxx}+u_xu_{xxxs}+u_{xx}u_{xxs}+\sigma u_xu_{xs}-V'(u)u_s\\ &= \big(u_{xxx}u_s+u_xu_{xxs}+\sigma u_xu_s\big)_x-u_s\big(u_{xxxx}+\sigma u_{xx}+V'(u)\big)\,, \end{aligned}$$

并注意到第二个　　项在解上为零。因此，第一项给出作用量　　n

$$A(x,s)=u_{xxx}u_s+u_xu_{xxs}+\sigma u_xu_s\,. \tag{3.6}$$

通过令 $s\in S^1$ 并对公式（1.17）在一个周期上积分，可得由此可知， A 是一个积分不变量。

$$\frac{d}{dx}\oint_{S^1}\left(u_{xxx}u_s+u_xu_{xxs}+\sigma u_xu_s\right)\mathrm{d}s=0\,. \tag{3.7}$$

图8 示意了作用量守恒。初始数据的一条闭曲线具有一个作用量值；用微分方程的流推进这条闭曲线会形成一个柱面，而每个 x–截面上的作用量值都相同。变换到辛坐标后，这是庞加莱´-卡当定理的一个例子（见

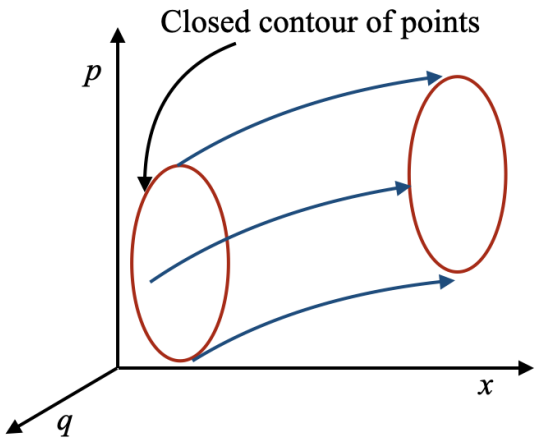

图8： *Illustration of the Poincaré-Cartan theorem, showing how a closed curve of initial data in the phase space carries a constant value of the action under the flow.* (q,p) *represent symplectic coordinates (see Appendix E).*

附录 E）。它还解释了为什么作用量积分的值沿稳定与不稳定叶层保持恒定，尽管该值在叶层中不同的叶上并未定义。这一性质与哈密顿量形成对比，后者沿每个叶均保持恒定。

周期轨道是点集的一种特殊情况。我们可以通过取 A ，在（3.6）中计算周期轨道上的值$s = z$ 和 $x = z/k$，得到

$$A(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sigma k \widehat{u}_z^2 - 2k^3 \widehat{u}_{zz}^2\right) \mathrm{d}z\,, \tag{3.8}$$

（再次使用符号 A以简化记号）。由于闭曲线上的作用量值是不变量（3.7），因此当积分（3.7）中的曲线取为与叶层横截时， A（$\widehat{u}$）在 $\pm\infty$ 处周期轨道上的值会沿稳定与不稳定叶层传播。也就是说，图 2 中的两个圆柱各自承载一个作用量不变量，其值由无穷远处周期轨道上的值决定。

公式（1.10）证明如下。平均拉格朗日量为

$$\overline{L} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(k^4 \widehat{u}_z \widehat{u}_{zzz} + \tfrac{1}{2}k^4 \widehat{u}_{zz}^2 + \tfrac{1}{2}\sigma k^2 \widehat{u}_z^2 - V(\widehat{u})\right) \mathrm{d}z\,. \tag{3.9}$$

分部积分，并对 k 求导，得到 $L_k = A$（k）对应于（ A（k）中的（3.8）。

在周期轨道上满足 $A_k \neq 0$ 的点处，一对 Floquet乘子位于 $+1$ ，另一对则为椭圆型、双曲的，或在 -1处合并。图 9 展示了两种一般构型。本文所有结果中，这两个周期轨道均为双曲的。



图9： *The two configurations of hyperbolic Floquet multipliers for periodic solutions of (1.1). The configuration on the left is called "inverse-hyperbolic" and on the right is "hyperbolic".*

一般而言， $\pm\infty$处周期轨道的作用量值并不相等，因此当两个圆柱在截面上相遇时，作用量会发生跳跃。这个跳跃是连接的一个内禀不变量

$$\Delta A := A(k^+) - A(k^-)\,. \tag{3.10}$$

据我们所知，这一性质是新的。跳跃量的数值示例见§2.1和§2.3。另一方面，这种跳跃性质的意义尚不明显。当两个周期轨道重合时，跳跃为零：即同一周期轨道的同宿连接；或者当两个周期轨道在相空间中彼此分离、但由对称性关联时（示例见§2.1）。当系统可积时，两个圆柱上的作用量似乎相同，但我们尚无此结论的证明。该跳跃是内禀的，意即在辛坐标变换下保持不变；这一点可通过在辛坐标中表示作用量得出，此时密度为$\mathbf{p}\cdot d\mathbf{q}$ （见附录E）。

引言中指出，沿着周期轨道分支，作用量和哈密顿函数会在同一个 k值处出现临界点 $H_k = A_k = 0$。现在我们证明这一点，并给出一个例子。

引理3.1。 对于方程（*1.1*），其哈密顿量为 H （*1.3*），作用量（*3.8*）在具有 $k \neq 0$的周期轨道族上取值，

$$H_k = kA_k\,. \tag{3.11}$$

证明。 首先，由于 H 的值与 z无关，我们有

$$H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(-\frac{3}{2}k^4 \widehat{u}_{zz}^2 + \tfrac{1}{2}\sigma k^2 \widehat{u}_z^2 + V(\widehat{u})\right) \mathrm{d}z\,, \tag{3.12}$$

分部积分后。对 k 求该表达式的导数，

$$H_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(-6k^3 \widehat{u}_{zz}^2 - 3k^4 \widehat{u}_{zz}\widehat{u}_{zzk} + \sigma k \widehat{u}_z^2 + \sigma k^2 \widehat{u}_z \widehat{u}_{zk} + V'(\widehat{u})\widehat{u}_k\right) \mathrm{d}z\,.$$

利用 $\widehat{u}$ 是一个解这一事实重新整理

$$H_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sigma k\widehat{u}_z^2 + 2\sigma k^2\widehat{u}_z\widehat{u}_{zk} - 6k^3\widehat{u}_{zz}^2 - 4k^4\widehat{u}_{zz}\widehat{u}_{zzk} + \left[k^4\widehat{u}_{zz}\widehat{u}_{zzk} - \sigma k\widehat{u}_z\widehat{u}_{zk} + V'(\widehat{u})\widehat{u}_k\right]\right)\mathrm{d}z\,.$$

方括号中的项在解上为零（经过分部积分后），因此得到

$$H_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sigma k\widehat{u}_z^2 + 2\sigma k^2\widehat{u}_z\widehat{u}_{zk} - 6k^3\widehat{u}_{zz}^2 - 4k^4\widehat{u}_{zz}\widehat{u}_{zzk}\right)\mathrm{d}z\,.$$

现在对 $A(k)$ 在（3.8）中求导，

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sigma\widehat{u}_z^2 + 2\sigma k\widehat{u}_z\widehat{u}_{zk} - 6k^2\widehat{u}_{zz}^2 - 4k^3\widehat{u}_{zz}\widehat{u}_{zzk}\right)\mathrm{d}z\,.$$

比较两者即可证明该结果。也就是说，当 $k \neq 0$ 时，我们有 $kA(k) = H(k)$. □

注 3.2。尽管（*3.11*）是通过直接计算证明的，但它实际上是辛结构的推论；我们将在附录 *E*中介绍辛结构后证明这一点。

引理的一个例子见图 4，其中使用了三次 SH 方程周期解的实际计算。

该方　拐点的等价性在（3.11）并不能推广到二阶导数，因　　e

$$H_{kk} = A_k + kA_{kk}\,.$$

然而，当 $A_k = 0$时，则 H_{kk} 与 A_{kk} 在 k的同一取值处为零，当 $k \neq 0$时。这一性质将用于§4中的正规形理论。

注3.3。这里的一个主要观察是，通过哈密顿函数对周期轨道进行参数化（这并不少见）与通过作用量进行参数化（这前所未闻）具有相同的关键性质。作用量更容易处理，因为它始终是二次函数。事实上，（*3.8*）中的作用量是 $H^1(S^1)$ 与 $H^2(S^1)$ 索伯列夫范数之平方的线性组合。

3.1 作用量与代数重数

关于周期态的线性化引入了弗洛凯理论，但它更为有趣之处在于谱问题对参数是非线性的。最有趣的特征是作用量如何进入约当链理论。设 $u = \widehat{u} + \widetilde{v}$（$z$，$x$），代入（1.1），并关于 $\widehat{u}$进行线性化，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)^4\widetilde{v} + \sigma\left(\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\widetilde{v} + V'(\widehat{u})\widetilde{v} = 0\,. \tag{3.13}$$

在 x, $\widetilde{v}(z,\ x) = \mathrm{e}^{\lambda x}v(z,\ \lambda)$ 中引入谱试探形式，从而得到参数非线性谱问题

$$\mathbf{L}(\lambda)v := \left(\lambda + k\frac{\partial}{\partial z}\right)^4 v + \sigma\left(\lambda + k\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 v + V''(\widehat{u})v\,. \tag{3.14}$$

解的切向量是特征值为零的特征向量，

$$\mathbf{L}(0)\xi_1 = 0\,,\quad \text{with}\quad \xi_1 = \widehat{u}_z\,. \tag{3.15}$$

我们假设几何重数为一。对于参数非线性特征值问题，我们按照 Magnus [34]、Rabier [42] 和 López-Gómez & Mora-Corral [32] 的定义来定义代数重数。上述参考文献给出了以下结果，这里表述为所需的情形（几何重数为一，代数重数为四）。

命题 3.4。 *[32, 34, 42]* 设特征值 λ_* 是$\mathbf{L}(\lambda)$ 的特征值，且其几何重数为一、代数重数为四。那么存在一条若尔当链 $\xi_1,\dots,\xi_4$，其中 ξ_1 几何特征向量满足

$$\mathbf{L}(\lambda_*)\xi_1 = 0\,,$$

以及满足以下条件的三个广义特征向量

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}(\lambda_*)\xi_2 &= -\mathbf{L}'(\lambda_*)\xi_1\\
\mathbf{L}(\lambda_*)\xi_3 &= -\mathbf{L}'(\lambda_*)\xi_2 - \tfrac{1}{2}\mathbf{L}''(\lambda_*)\xi_1\\
\mathbf{L}(\lambda_*)\xi_4 &= -\mathbf{L}'(\lambda_*)\xi_3 - \tfrac{1}{2}\mathbf{L}''(\lambda_*)\xi_2 - \tfrac{1}{3!}\mathbf{L}'''(\lambda_*)\xi_1\,.
\end{aligned}$$

此外，当 $\mathbf{L}(\lambda_*)$ 为自伴算子时，当.....时，链在四个向量处终止

$$\left\langle\!\left\langle \xi_1(z), -\mathbf{L}'(\lambda_*)\xi_4 - \tfrac{1}{2}\mathbf{L}''(\lambda_*)\xi_3 - \frac{1}{3!}\mathbf{L}'''(\lambda_*)\xi_2 - \frac{1}{4!}\mathbf{L}''''(\lambda_*)\xi_1 \right\rangle\!\right\rangle \neq 0\,, \tag{3.16}$$

其中，内积是针对周期标量值函数定义的，

$$\langle\!\langle a, b\rangle\!\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(z)b(z)\,\mathrm{d}z\,. \tag{3.17}$$

将这一结果应用于 (3.14)，取 $\lambda_* = 0$ 以及满足 (ξ_1 3.15) 的几何特征向量，链 (ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4) 定义如下

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}(0)\xi_1 &= 0\\
\mathbf{L}(0)\xi_2 &= -\left(4k^3\frac{\partial^3}{\partial z^3}\xi_1 + 2\sigma k\frac{\partial}{\partial z}\xi_1\right)\\
\mathbf{L}(0)\xi_3 &= -\left(4k^3\frac{\partial^3}{\partial z^3}\xi_2 + 2\sigma k\frac{\partial}{\partial z}\xi_2\right) - 6k^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\xi_1 - \sigma\xi_1\\
\mathbf{L}(0)\xi_4 &= -\left(4k^3\frac{\partial^3}{\partial z^3}\xi_3 + 2\sigma k\frac{\partial}{\partial z}\xi_3\right) - \left(6k^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\xi_2 + \sigma\xi_2\right) - 4k\frac{\partial}{\partial z}\xi_1\,.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

对于谱问题 (3.14)，代数重数自动为二，因为 ξ_2 方程可解，

$$\left\langle\!\left\langle \xi_1, -\left(4k^3\frac{\partial^3}{\partial z^3}\xi_1 + 2\sigma k\frac{\partial}{\partial z}\xi_1\right)\right\rangle\!\right\rangle = 0\,.$$

利用分部积分可以验证该表达式为零。此外， ξ_2还有一个显式表达式，它可通过对 ($\widehat{u}$ 中的控制方程 3.2 关于 k求导得到，

$$k^4(\widehat{u}_k)_{zzzz} + \sigma k^2(\widehat{u}_k)_{zz} + V''(\widehat{u})\widehat{u}_k + 4k^3\widehat{u}_{zzzz} + 2\sigma k\widehat{u}_{zz} = 0\,. \tag{3.19}$$

这是 ξ_2 的方程，得

$$\xi_2 = \widehat{u}_k + C\widehat{u}_z\,,$$

其中 C 是任意常数。最有趣的结果是代数重数为三的条件，这涉及作用量。

命题 3.5. 假设上述谱问题的特征值为 $\lambda = 0$，且其几何重数为一。代数重数自动为二。当且仅当 $A_k = 0$ 时，代数重数为三。此外，当代数重数为三时，它自动为四。

证明。 上文已证明代数重数为二。若 ξ_3 方程可解，则代数重数为三；即

$$\left\langle\!\left\langle \xi_1, -\left(4k^3\frac{\partial^3}{\partial z^3}\xi_2 + 2\sigma k\frac{\partial}{\partial z}\xi_2\right) - 6k^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\xi_1 - \sigma\xi_1\right\rangle\!\right\rangle = 0\,.$$

分部积分并利用 $\xi_1 = \widehat{u}_z$ 和 $\xi_2 = \widehat{u}_k$，可得

$$\left\langle\!\left\langle \widehat{u}_z, -\left(4k^3\frac{\partial^3}{\partial z^3}\widehat{u}_k + 2\sigma k\frac{\partial}{\partial z}\widehat{u}_k\right) - 6k^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\widehat{u}_z - \sigma\widehat{u}_z \right\rangle\!\right\rangle . \tag{3.20}$$

注意到

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sigma\widehat{u}_z^2 + 2\sigma k\widehat{u}_z\widehat{u}_{zk} - 6k^2\widehat{u}_{zz}^2 - 4k^3\widehat{u}_{zz}\widehat{u}_{zzk}\right)\mathrm{d}z\,,$$

对于 $A(k)$，在 (3.8) 中定义的结果表明，(3.20) 中的积分为 $-A_k$。这证明代数重数为三与 $A_k = 0$一一对应。代数重数自动为四，是由 ξ_4 方程的可解性推出的，这一点可以通过直接计算验证。证明完毕。

□

尽管我们在参数理论中使用了非线性，但上述若尔当链和重数的结果是由其背后的辛结构所决定的，相关说明见附录 E。

若关于 ξ_5 的方程无解，则上述特征值问题的代数重数将在四处终止，

$$\mathbf{L}(0)\xi_5 = -\left(4k^3\frac{\partial^3}{\partial z^3}\xi_4 + 2\sigma k\frac{\partial}{\partial z}\xi_4\right) - \left(6k^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\xi_3 + \sigma\xi_3\right) - 4k\frac{\partial}{\partial z}\xi_2 - \xi_1\,. \tag{3.21}$$

检查可解性，

$$\left\langle\!\left\langle \xi_1, \left(4k^3\frac{\partial^3}{\partial z^3}\xi_4 + 2\sigma k\frac{\partial}{\partial z}\xi_4\right) + \left(6k^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\xi_3 + \sigma\xi_3\right) + 4k\frac{\partial}{\partial z}\xi_2 + \xi_1 \right\rangle\!\right\rangle \neq 0\,.$$

分部积分并利用周期性

$$-4k^3\left\langle\!\left\langle \frac{\partial^3}{\partial z^3}\xi_1, \xi_4\right\rangle\!\right\rangle - 2\sigma k\left\langle\!\left\langle \frac{\partial}{\partial z}\xi_1, \xi_4\right\rangle\!\right\rangle + 6k^2\left\langle\!\left\langle \frac{\partial^2}{\partial z^2}\xi_1, \xi_3\right\rangle\!\right\rangle + \sigma\left\langle\!\left\langle \xi_1, \xi_3\right\rangle\!\right\rangle - 4k\left\langle\!\left\langle \frac{\partial}{\partial z}\xi_1, \xi_2\right\rangle\!\right\rangle + \left\langle\!\left\langle \xi_1, \xi_1\right\rangle\!\right\rangle \neq 0\,.$$

现在，注意到 $\xi_1 = \widehat{u}$ 并代入

$$-4k^3\left\langle\!\left\langle \widehat{u}_{zzzz}, \xi_4\right\rangle\!\right\rangle - 2\sigma k\left\langle\!\left\langle \widehat{u}_{zz}, \xi_4\right\rangle\!\right\rangle + 6k^2\left\langle\!\left\langle \widehat{u}_{zzz}, \xi_3\right\rangle\!\right\rangle + \sigma\left\langle\!\left\langle \widehat{u}_z, \xi_3\right\rangle\!\right\rangle - 4k\left\langle\!\left\langle \widehat{u}_{zz}, \xi_2\right\rangle\!\right\rangle + \left\langle\!\left\langle \widehat{u}_z, \widehat{u}_z\right\rangle\!\right\rangle \neq 0\,. \tag{3.22}$$

要使链在四阶处终止，必须满足这一条件。我们将发现，这个表达式恰好就是 $\mathscr{K}$ 式（1.15）和（7.1）中正规形的系数。

注 3.6。 例如，在图案形成和天体力学领域的文献中，众所周知， $H_k = 0$ 意味着周期解分支上的一个转折点。令人惊讶的是，上述对此的直接证明是用 $A_k = 0$来表述的，而与 $H_k = 0$ 的联系则间接地由式（*3.11*）得出。

4 非线性正规形理论

本节讨论描述余维二点 $A_k = A_{kk} = 0$ 附近波数调制的非线性正规形的形式和特征，其中使用相位调制 [21]。随后，我们在相位调制上施加辛结构，以证明正规形中的关键系数与作用量相关。

正规形的推导始于以下试探形式

$$u(x) = \widehat{u}(z + \phi, k_0 + \varepsilon q) + \varepsilon^2 w(z + \phi, X, \varepsilon)\,, \tag{4.1}$$

其中 k_0 是未扰动波的波数，且

$$X = \varepsilon x\,, \quad q = \phi_X\,, \quad \varepsilon^2 w = \varepsilon^2 w_2 + \varepsilon^3 w_3 + \varepsilon^4 w_4 + \cdots\,. \tag{4.2}$$

将试探形式（4.1）代入（1.1），然后按 ε 的泰勒级数展开，并逐阶求解。该过程的全部细节见附录 B，但这里需要指出作用量所起的核心作用。条件A_k（k_0） $=0$ 和 A_{kk}（k_0） $=0$ 分别是在正规形中分析 q_X 项和 qq_X 项时产生的可解性条件。前者是调制方法中的主要奇异性，并导致正规形中出现三阶导数。后者则自然引入三次非线性，使其成为正规形中的主导非线性。附录 B 中的直接渐近分析也证实，我们在临界点处得到如下正规形：

$$\frac{1}{2}A_{kkk}(k_0)q^2q_X+\mathscr{K}\,q_{XXX}=0\,. \tag{4.3}$$

空间导数的系数 $\mathscr{K}$可以通过多种方式刻画。它作为若尔当链理论中的一个可解性条件出现（例如，方程（3.22））， 也可以用辛约当链理论来刻画。这里我们将通过以下关系，把它与基本波列 $\mu(\nu;\ k)$ 的布洛赫谱联系起来：

$$\mathscr{K}=\frac{1}{24}\mu''''(0;k_0) \tag{4.4}$$

其中，撇号表示对 ν的导数。该公式在附录 D中证明。色散与布洛赫指数之间的联系最初是在耗散型图案形成系统中发现的 [17] ，随后推广到哈密顿系统，并与克莱因指标联系起来，见 [43]。由此得到的正规形完全可以利用原始波的性质——其作用量和布洛赫谱——来构造，而这些性质可以独立于渐近分析进行计算。

本文的分析关注余维二点附近的行为；在此处，异宿连接会进一步发展，因此我们必须引入余维二点的展开。形式上，所得的渐近平衡要求

$$A_k(k_0)=\mathcal{O}(\varepsilon^2)\,,\quad A_{kk}(k_0)=\mathcal{O}(\varepsilon)\,,$$

在下文中，我们假设与这些序关系相关的渐近常数分别为 α 和 β 。这些渐近常数的示例及其求法见§4.1。在此类情形下，余维二点的一般展开如下：

$$\frac{1}{2}A_{kkk}(k_0)\,q^2q_X+\alpha\,q_X+\beta\,qq_X+\mathscr{K}\,q_{XXX}=0\,. \tag{4.5}$$

(4.3)的推导细节见附录B。本文将研究其展开形式(4.5)，因为它具有显式的异宿连接。需要注意的是，将$\alpha=\beta=0$设为

4.1 通过正规形得到的异宿连接

现在我们研究(4.5)，以确定异宿连接的判据及其数学形式。首先对(4.5)积分一次，得到常微分方程

$$\mathscr{K}\,q_{XX}+\alpha q+\frac{1}{2}\beta q^2+sq^3+I=0\,,\quad s=\frac{1}{6}A_{kkk} \tag{4.6}$$

其中， I 是积分常数。可以看出， I 起到了该轨道在原始未扰动波上取值的作用量的作用。比较作用量的泰勒级数，可以最清楚地看出这一点，

$$A(k)\approx A(k_0)+A_k(k_0)(k-k_0)+\frac{1}{2}A_{kk}(k_0)(k-k_0)^2+\frac{1}{6}A_{kkk}(k_0)(k-k_0)^3$$

到式（4.6）中的多项式项，回顾 α和 β的定义，并注意到 $k-k_0\approx\varepsilon q$。值得注意的是，式（4.6）具有动能-势能哈密顿系统的形式，其哈密顿量为

$$H_{NF}(q,q_X)=\frac{1}{2}\mathscr{K}q_X^2+Iq+\frac{1}{2}\alpha q^2+\frac{1}{6}\beta q^3+\frac{s}{4}q^4\equiv\frac{1}{2}\mathscr{K}q_X^2+\mathcal{H}(q)\,,$$

需要特别指出的是，势函数 $\mathcal{H}$ 是四次的。接下来的分析将确定该四次势函数满足什么条件时，波数 q 中才会出现异宿连接，从而使原始波产生周期轨道到周期轨道连接。

正规形（4.6）的常数解对应于（1.1）的周期轨道，且具有固定作用量，满足

$$I + \alpha q + \frac{1}{2}\beta q^2 + sq^3 = 0\,. \tag{4.7}$$

也就是说，它们使势函数 $\mathcal{H}$最小，因为上面的多项式对应于条件$\mathcal{H}'$（q） $= 0$。如果方程的两个解在相同的4.7值下都满足（ I 和 H_{NF}，则称它们为共轭周期轨道。

注 4.1。作为正规形的平衡态，共轭轨道具有相同的作用量和哈密顿量，因为正规形是可积的。然而，将它们提升到相空间后，代表性的周期轨道通常不会具有相同的作用量，尽管它们的哈密顿量取值相同。

共轭周期轨道的另一性质是它们具有相同的势能 $\mathcal{H}(q)$。因此，我们判定共轭态的标准完全取决于势能的形状——势能必须有两个位于同一能级的极值点。因此，我们对共轭态的条件可归结为要求 $\mathcal{H}(q)$ 具有如下形式

$$\mathcal{H}(q) = \frac{s}{4}(q - Q_1)^2(q - Q_2)^2$$

对于两个实数 $Q_1 \neq Q_2$。现在，我们试图用正规形的系数来求共轭态的一般形式。将这个问题的两个解记为 Q_1 和 Q_2，其中 $Q_1 \neq Q_2$。根据这些状态为共轭态的定义，为使势能最小，它们必须满足以下两个条件，

$$\begin{aligned} 0 &= I + \alpha Q_1 + \tfrac{1}{2}\beta Q_1^2 + sQ_1^3 \\ 0 &= I + \alpha Q_2 + \tfrac{1}{2}\beta Q_2^2 + sQ_2^3\,, \end{aligned} \tag{4.8}$$

以及它们具有相同势能值的第三个条件，

$$IQ_1 + \frac{1}{2}\alpha Q_1^2 + \frac{1}{6}\beta Q_1^3 + \frac{s}{4}Q_1^4 = \mathcal{H} = IQ_2 + \frac{1}{2}\alpha Q_2^2 + \frac{1}{6}\beta Q_2^3 + \frac{s}{4}Q_2^4\,. \tag{4.9}$$

现在的目标是求解三个方程（4.8）和（4.9），以求出三个未知数 Q_1、Q_2、I。令人惊讶的是，这里存在一个显式的精确解。由于细节较为冗长，这里略去。结果为

$$Q_1 = -\frac{\beta}{6s} \pm \frac{1}{s}\sqrt{D} \quad \text{and} \quad Q_2 = -Q_1 - \frac{\beta}{3s}\,, \quad D = \frac{1}{12}\beta^2 - s\alpha\,, \tag{4.10}$$

其中，第一项中的符号选取使得 $Q_1 < Q_2$。因此，通过要求我们的根为实数，我们得到异宿连接存在的一个必要条件，即

$$\frac{1}{12}\beta^2 - s\alpha \geq 0 \quad \Rightarrow \quad A_{kk}(k_0)^2 \geq 2A_k(k_0)A_{kkk}(k_0)\,. \tag{4.11}$$

代回一个解，以求得作用量 I 和 $\mathcal{H}$的表达式，

$$I = \frac{\beta}{108s^2}\left(18s\alpha - \beta^2\right)\,, \quad \mathcal{H} = -\frac{(18s\alpha - \beta^2)^2}{1296s^3} = -\frac{9s}{\beta^2}I^2\,. \tag{4.12}$$

因此，对于任意（α，β）$\in \mathbb{R}^2$ 满足 α，$\beta = o\left(\varepsilon^{-1}\right)$，这些公式给出了共轭周期轨道 I 和 $\mathcal{H}$ 存在时的 Q_1 和 Q_2（4.10）中的取值。

这表明共轭周期轨道存在。异宿连接的下一个必要条件是这两个共轭周期轨道都必须是双曲的。双曲性可通过对任一常值态进行线性化（4.6）来确定，记为 Q_0，

$$\mathscr{K}\delta Q_{XX} + \left(\alpha + \beta Q_0 + 3sQ_0^2\right)\delta Q = 0\,. \tag{4.13}$$

因此，当满足以下条件时，基本态是双曲的：

$$\operatorname{sign}\Big(\mathscr{K}\mathcal{H}''(Q_0)\Big) < 0\,.$$

将 Q_1 或 Q_2 代入此条件可知，这两个解在以下条件下是双曲的

$$\frac{\mathscr{K}}{s}\left(\frac{1}{12}\beta^2 - s\alpha\right) < 0\,.$$

由于假设括号内的项为正，以保证共轭态存在，因此双曲性的条件为

$$\operatorname{sign}(\mathscr{K}s) \equiv \operatorname{sign}\big(\mathscr{K}A_{kkk}(k_0)\big) < 0\,,$$

也就是说，底层的定常修正KdV方程是散焦的，这与此前关于此类方程中解的稳定性的研究一致 [14, 24, 18]。这一观察结果以及存在条件总结如下。

设 $\hat{u}(k_0x+\theta_0) \equiv \hat{u}(z)$ 是方程（1.1）的一个周期解。假设引入局部波数扰动 k，满足 $|k-k_0| \ll 1$。那么，只要

$$A_k(k_0) = \mathcal{O}(|k-k_0|^2)\,, \quad A_{kk}(k_0) = \mathcal{O}(|k-k_0|)\,,$$

表示两个周期态之间异宿连接的共轭态双曲对将从点 $A_k(k_0) = A_{kk}(k_0) = 0$ 产生，条件是

$$A_{kk}(k_0)^2 \geq 2A_k(k_0)A_{kkk}(k_0) \quad \text{and} \qquad \operatorname{sign}\big(\mu''''(0;k_0)A_{kkk}(k_0)\big) < 0\,,$$

其中，$\mu(\nu;k_0)$ 是波列 $\hat{u}(z)$ 的布洛赫谱。

最后，为了结束这里的讨论，我们给出正规形（4.6）所规定的两个波列之间异宿连接的显式形式。最直接的推导方法是将该方程乘以 q_X，然后对 X 积分一次，并对所得四次多项式规定重二重根条件（要求（4.11）成立），同时假设 $\mathscr{K}s < 0$。在这种情况下，我们得到如下的一阶常微分方程：

$$q_X = \pm\sqrt{-\frac{s}{4\mathscr{K}}}\,(q-Q_1)(Q_2-q)\,, \quad Q_1 < q < Q_2\,.$$

该方程有一对双曲正切解，分别对应右端的两种符号：

$$q(X) = \frac{(Q_1+Q_2)}{2} \pm \frac{(Q_2-Q_1)}{2}\tanh\big(\delta X\big)\,, \quad \delta = \sqrt{\left|\frac{s}{4\mathscr{K}}\right|}\,\frac{(Q_2-Q_1)}{2\sqrt{2}}\,,$$

这给出了两个渐近波数 $k_0+\varepsilon Q_1$ 和 $k_0+\varepsilon Q_2$之间的典型异宿连接。连接的强度（即其振幅）恰好等于两个根之差。上述形式还表明，连接的强度、（4.6）中的三次项强度以及布洛赫谱共同决定了异宿连接的宽度。由此得到的扰动波相位为

$$\phi(X) = \int Q(Y)dY = \frac{(Q_1+Q_2)}{2}X \pm \frac{Q_2-Q_1}{2\delta}\ln\big(\cosh(\delta X)\big) + \phi_0 \equiv \phi_0 + \varepsilon\frac{Q_1+Q_2}{2}x + \frac{Q_2-Q_1}{2\delta}\ln\big(\cosh(\varepsilon\delta x)\big)\,.$$

当 $x \to \pm\infty$ 时，相位无界，但它在渐近意义上保持一致，且阶数低于原始波相位：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{\phi}{z}\right| < \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon Q_2}{2k_0} \to 0$$

最后，我们指出，这个近似和显式解无法给出周期轨道选定的渐近相位；从几何上看，这对应于图 2 中所示的两个圆柱完全相同且完美相交的特殊情形，因此庞加莱截面上的两个圆重合，这是由于正规形具有可积性。为了渐近地捕捉庞加莱截面上两个圆的分裂，我们需要进行更高阶的分析，甚至可能需要超越所有阶；这留待今后研究。

5 SH357方程

接下来的两节基于 Knobloch et al. [26] 所引入的 SH357 方程。其形式为（1.1），但具有高阶非线性

$$u_{xxxx} + 2u_{xx} + (1-\mu)u + au^3 - bu^5 + u^7 = 0\,, \tag{5.1}$$

将 λ 替换为 [26]，再令 μ，并注意到 $\sigma = 2$。我们最新的主要成果是在该系统中发现了两个余维2点，其中一个具有正确的符号，并为异宿连接分支产生了一个组织中心。在介绍这些结果之前，我们先回顾 [26] 中的一些相关成果。他们计算周期解族并以此为连接这些周期解做准备的策略，与本文有趣地大相径庭。他们采用分岔视角，以分岔参数 μ 为参数开展研究；而我们则采用辛视角，重点关注作用量、哈密顿量和波数空间。

我们重新计算了他们的一些结果以进行验证。图10 展示了我们对 [26] 中图 1(a) 的重新计算结果。左侧显示了绘制在 μ 与 $\|u\|$ 平面上的周期轨道分支，右侧则显示了哈密顿量与 μ的关系。我们的结果在图形精度范围内与 [26]一致。左图的一个有趣性质是，转折点对应于时间稳定性的变化，却无法提供有关空间Floquet乘子的信息。后一个观察结果源于注意到周期解是

$$\mathcal{E}(u,\mu) = \int_\Omega \left[\tfrac{1}{2}u_{xx}^2 + uu_{xx} - \tfrac{1}{2}(\mu-1)u^2 - F(u)\right]\,\mathrm{d}x \tag{5.2}$$

与 $F'(u) \quad = -au^3 + bu^5 - u^7$，且 $\Omega \subset \mathrm{R}$（周期情形下 $\Omega = S^1$ 亦然）。一个关键泛函 i s

$$-\mathcal{E}_\mu = \tfrac{1}{2}\|u\|^2\,.$$

Maddocks [33] 证明，对于一般形式为 (5.2) 的泛函，$(\lambda, -\mathcal{E}_\mu)$ 平面中的转折点对应于（时间）稳定性的变化。这与图10（以及 [26] 中的图 1(a)）一致，因为 $\|u\| = \sqrt{-2\mathcal{E}_\mu}$。还要注意，$H$ 相对于 μ 的曲线与 H 或 $\overline{A}$ 相对于 k 的曲线截然不同。在 (H,μ)–平面中，转折点表现为尖点。基于梯度 μ–的分岔理论预言了这一特征（参见 Thompson [51] 中的图 3）。我们不能直接将 (H,μ) 图重新绘制到 (H,k) 平面中，因为波数是固定的

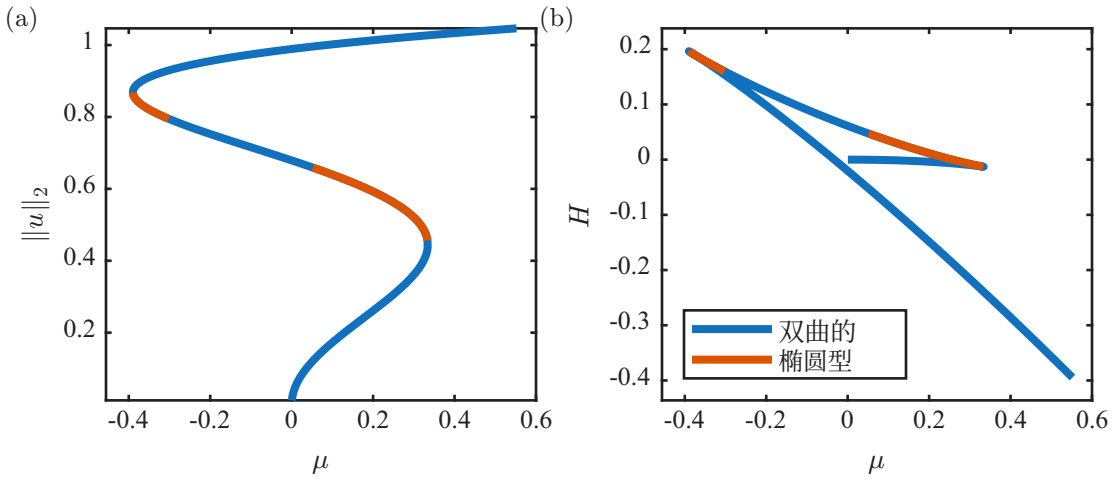

图10： *Our re-calculation of Figure 1, Panel (a), from* Knobloch et al. *[26]. Turning points on the left panel correspond to changes in temporal stability. We have added in our calculation of spatial Floquet multipliers, with blue indicating hyperbolic Floquet multipliers.*

(H,μ) 平面。我们将a 重新采用我们的方法研究这个问题：绘制 H （或 A）随波数的变化 er

因为这样可以得到转折点处空间*Floquet*乘子的分岔。在寻找余维2点时，这种方法尤为重要，因为这些点自然出现在（A，k）和（H，k）空间中，而不会出现在基于 μ–的平面中。

具有三个参数和强非线性的 SH357 方程，是寻找余维二点的绝佳测试案例。

5.1 寻找并延拓余维二点

在本小节中，我们介绍一种用于计算周期轨道场中的余维二点的数值算法，$A_k = A_{kk} = 0$。该算法更为通用（并将应用于 ac-Boussinesq，见§6），但这里将在 SH357 方程的背景下进行阐述。第一步是识别一个余维1奇点；也就是说，一条曲线或一个曲面 $A_k(k, \cdot) = 0$，其中点表示其他参数。第二步是在双参数空间中延拓这个奇点，直至到达一个余维二点。第三步是计算该奇点展开中的异宿连接。

我们用 $\hat{u}(z, k, \mu, a, b)$ 表示一个 2π-周期轨道的多参数场（为简洁起见，有时省略参数）。第一步中，固定参数 μ 和 a，然后研究一个由 k 和 b 参数化的周期轨道族。我们计算 (k, b) 空间中的一条余维1曲线，该曲线由s参数化，定义在某个区间 $s_1 < s < s_2$ 上。参数化曲线 $(k(s)\ b(s))$ 定义为

$$\partial_k A(k(s), b(s)) = 0 \quad (\text{with } a, \mu \text{ fixed}) . \tag{5.3}$$

图11 展示了在 $\mu = 0.3$ 和 $a = 1.5$的情况下，由（5.3）定义的集合的不同视角。

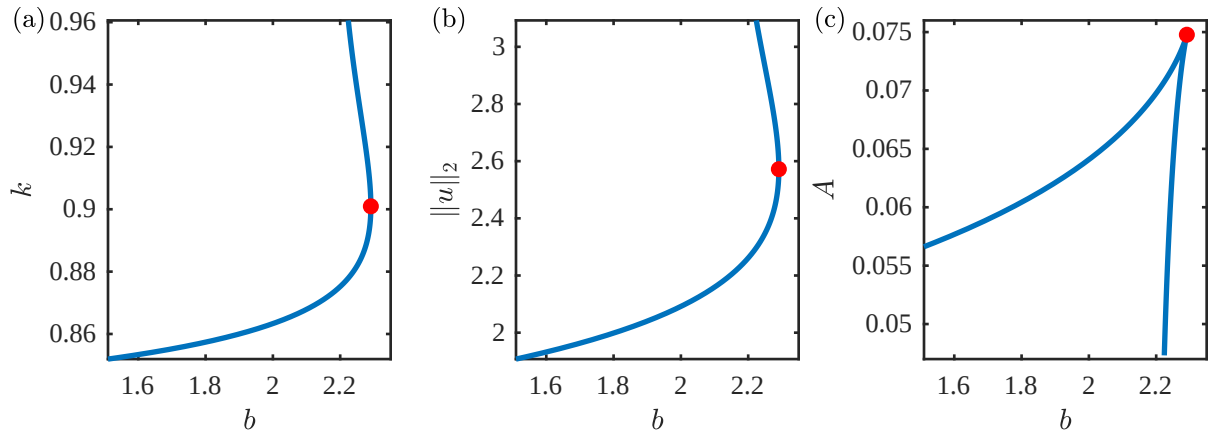

图11： *(a) Plot of the curve* $(k(s)\ b(s))$ *generated by solving (5.3) for the family of periodic orbits of (5.1) with* $\mu = 0.3$ *and* $a = 1.5$. *(b) A plot of the* L^2 *norm of the solution along the same curve as (a). (c) A plot of the action,* A, *along the same solution curve*

原则上，可以沿余维一曲线计算 $\partial_k^2 A(k, b)$，寻找其变号的位置，从而确定余维二点。不过，我们将展示一种更简便的方法。下面总结（k，b）–曲线的几何与作用量导数之间的关系。

引理*5.1.* 假设满足 $A_k(k(s)\ b(s)) = 0$ 的曲线 $(k(s)\ b(s))$ 光滑（至少可微），其中$s_1 < s < s_2$。对于某个 $s^* \in (s_1, s_2)$，假设 $b'(s^*) = 0$、$k'(s^*) \neq 0$，且 $A_{kb}(k(s^*)\ b(s^*)) \neq 0$，则 $(k(s^*)\ b(s^*))$ 对应一个余维二点：

$$A_k(k(s), (s)) = A_{kk}(k(s), b(s)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k'(s) \neq 0 \text{ and } b'(s) = 0 , \quad \text{for some } s^* \in (s_1, s_2) . \tag{5.4}$$

证明. 由于该曲线光滑，函数

$$f(s) := A_k(k(s), b(s)) \,,$$

对每个 s 均为零且可微。因此

$$0 = f'(s) = A_{kk}(k(s), b(s))k'(s) + A_{kb}(k(s), b(s))b'(s) \,.$$

断言（5.4）显然成立。 □

在图 11中，由此引理找到的余维二点以红点标出。它对应于（k， b）平面中曲线上的一个折叠点。

注 5.2. 条件 $A_{kb} \neq 0$ 是一般性的。为此，在（k, b）曲线上建立一个移动正交标架。切向量和一个法向量为

$$\mathbf{t}(s) = \frac{1}{\ell(s)} \begin{pmatrix} k'(s) \\ b'(s) \end{pmatrix} \quad and \quad \mathbf{n}(s) = \frac{1}{\ell(s)} \begin{pmatrix} b'(s) \\ -k'(s) \end{pmatrix} ,$$

其中 $\ell(s) = \sqrt{k'(s)\ k'(s)\ + b'(s)\ b'(s)}$。现在将 $A_k(k, b)$ 的梯度视为（k, b）空间上的一个场，其在 $s = s^*$ 处沿$\mathbf{n}$ 方向的导数为

$$\mathbf{n} \cdot \nabla A_k = \frac{1}{\ell(s)} \begin{pmatrix} b'(s) \\ -k'(s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{kk} \\ A_{kb} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\ell} k'(s) A_{kb} \Big|_{s=s^*} .$$

因此，若 $k'(s^*) \neq 0$， A_{kb} 与 A_k 的法向导数成正比。现在，曲线（5.3）是 A_k（k， b）的零水平集，并且在垂直于该曲线的方向上，曲线两侧的水平集一般都不是零水平集。正是在这个意义上， $A_{kb}(k(s^*)\ b(s^*)) \neq 0$。

上述方法似乎是寻找 $A_k = A_{kk} = 0$ 余维二点的最简单策略。然而，也可以使用不同的参数空间，通过其他方式确定此类余维二点。事实上，最直接的方法是沿着曲线（5.4）计算 A_{kk} ，使用附录A中方程（A-3）里的 A_{kk} 公式，并监测其何时经过零点。有趣的是，在（A、 b）–平面中采用这一策略时，会在余维二点处产生一个尖点，因此很容易识别出该点。

实现引理5.1 的算法基于求解以下系统

$$L(k)\hat{u} + f(\hat{u}) + cu_z = 0, \tag{5.5a}$$
$$L(k)\hat{u}_k + L'(k)\hat{u} + f'(\hat{u})\hat{u}_k + c_k\hat{u}_{kz} = 0, \tag{5.5b}$$
$$A_k(\hat{u}, \hat{u}_k) = 0 \tag{5.5c}$$

对于（$\hat{u}$、$\hat{u}_k$、 c、 c_k）以及 $z \in [0, 2\pi$ 上的一个附加方程参数（例如 b），同时满足周期边界条件和相位条件

$$\int_0^{2\pi} u_z^{\text{old}}(u - u^{\text{old}})\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} u_z^{\text{old}}(u_k - u^{\text{old}})\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} u_z^{\text{old}}(u_{kk} - u^{\text{old}})\mathrm{d}z = 0.$$

这使我们能够延拓周期轨道曲线，其中 $A_k = 0$ ，随后便可在改变另一个方程参数时寻找尖点。定位尖点后，我们再增加两个方程，

$$L(k)u_{kk} + 2L'(k)u_k + L''(k)u + f'(u)u_{kk} + f''(u)(u_k)^2 + c_{kk}(u_{kk})_z = 0,$$
$$L(k)u_{kkk} + 3L'(k)u_{kk} + L'''(k)u + 3L''(u)u_k + f'(u)u_{kkk} + f'''(u)u_k^3 + 3f''(u)u_k u_{kk} + c_{kkk}(u_{kkk})_z = 0,$$
$$A_{kk}(u, u_k, u_{kk}) = 0,$$

针对 $(u_{kk}, u_{kkk}, c_{kk}, c_{kkk})$，并加入与上述类似的另外两个相位条件，以及另一个方程参数（此处为 μ 或 a），以描绘出满足 $A_k = A_{kk} = 0$ 的双参数图。图12展示了这一计算的结果，其中 a 被视为延拓参数，固定值为 $\mu = 0.3$。这些余维二曲线从图11面板中显示的红点发出，即当 $a = 1.5$ 时，b 和 k 的值由此确定。在图12(b)中，我们标出了余维2曲线分支上的两点，p_1,2。在这些余维2点附近计算作用量 $A(k)$，计算结果如面板12(c)所示。在该面板中，虚线表示 p_1 附近的作用量曲线，实线表示 p_2 附近的作用量曲线。

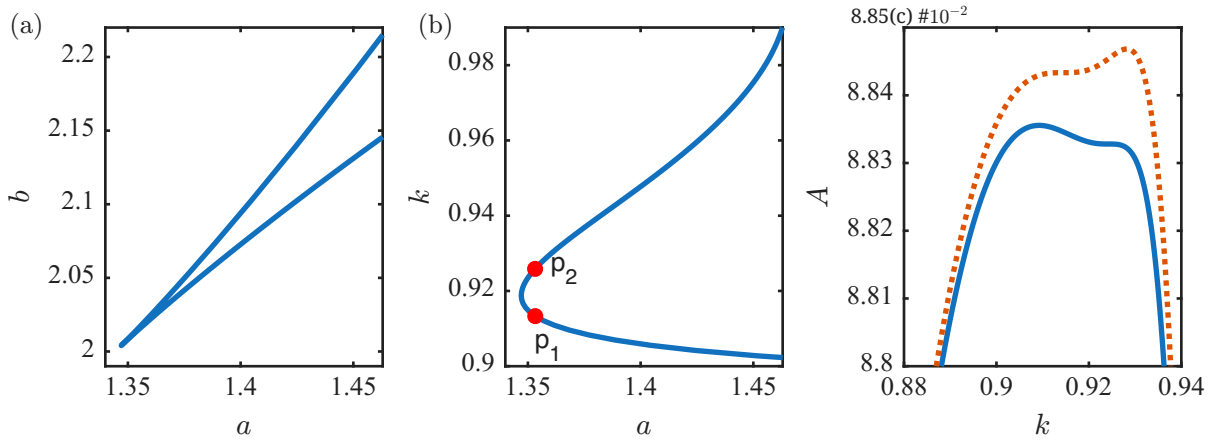

图12： *(a), (b) Parameter space for the SH357 equation (5.1) with $\mu = 0.3$ at which codimension 2 points occur. (c) Plot of the action, $A(k)$ near the points p_1 and p_2 labeled in panel (b), the dashed curve is near the point p_1 and the solid curve is contains p_2.*

我们现在进一步探查余维二点附近的参数空间。我们在图13中总结这些结果，其中绘制了哈密顿量（1.3）随 k变化的一个示例。图13(a) 展示了三次项系数 a变化时哈密顿量的结构。 $b = 2.15$ 的值固定不变，并选取为与图12中的参数延拓所得数值一致。余维二点附近参数取值对应的曲线以黑色显示，其他颜色的曲线则仅有细微的参数变化。这些点存在的参数范围相对较小，体现了本节所述计算方法的审慎性。图13(b) 放大了 (a) 图中用方框标出的小区域，以展示参数变化时哈密顿量临界点的合并与消失。

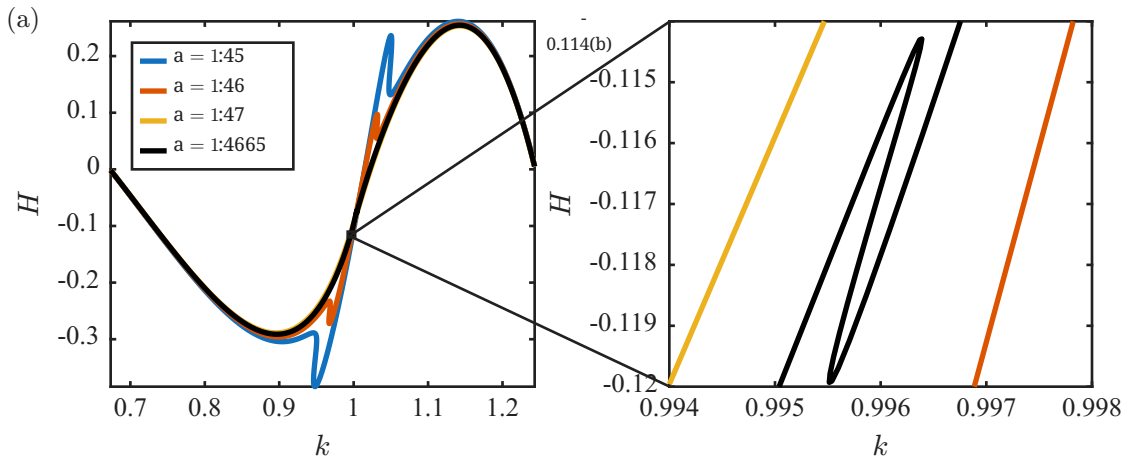

图13： *Behavior of the spa tial Hamiltonian near the codimension 2 point for the SH357 equation with* $\mu = 0.3$ *and* $a = 1.45$.

5.2 余维二点附近的异宿连接

本节将概述如何计算从§5.1中发现的余维二点发出的连接前沿。根据§2.1中关于周期轨道的不稳定流形与稳定流形交集维数的讨论，在数值方法的设置上，我们可以选择要选取哪些渐近参数。具体而言，如果不采用哈密顿约束，我们需要从集合（k_-、k_+、ϕ_-、ϕ_+）中选取两个参数。接下来，我们将简要介绍连接前沿远场核心分解的一种数值实现。这里讨论的一般背景是连接前沿需要选取两个参数的偏微分方程系统，随后我们将说明如何将其推广到保守情形。

我们考虑（1.1）的抽象形式

$$L(\partial_x)u + N(u) = 0, \tag{5.6}$$

其中， L 是线性算子， N 是非线性算子。对 $u(x)$提出的远场核心分解为

$$u(x) = u_-(k_-x + \phi_-)\chi_-(x) + w(x) + u_+(k_+x + \phi_+)\chi_+(x)\,, \tag{5.7}$$

其中， $w(x)$是余项函数， $u_\pm(z)$是满足以下条件的周期轨道

$$L(k_\pm\partial_z)u_\pm + N(u_\pm) + c_\pm(u_\pm)_z = 0, \qquad u_\pm(z+2\pi) = u_\pm(z), \qquad \int_0^{2\pi} u_z^{\text{old}}(u_\pm - u^{\text{old}})dz = 0\,. \tag{5.8}$$

Upo将（5.7）代入方程（1.1，可得到核心方程 w（x），其形式为

$$Lw + \left(w + \sum_\pm u_\pm\chi_\pm\right) - \sum_\pm \left(Lu_\pm + N(u_\pm)\right)\chi_\pm = 0\,. \tag{5.9}$$

我们在一个较大的有限区域 $x \in [-L, L]$上求解该方程，并添加两个相位条件

$$\int_{\pm x = L - 2\pi/k_\pm}^{L} w(x)\cdot\partial_x u_\pm(x; k_\pm, \phi_\pm)dx = 0\,. \tag{5.10}$$

总之，如果我们希望固定哈密顿量等值集的值，就对固定的（k_-， ϕ_-）和（$u_\pm$， w， k_+， ϕ_+）求解（5.8）、（5.9）和（5.10）；或者固定相位（ϕ_-， $\phi+$），并对（$u_\pm$， w， $k_\pm$）求解。

注 5.3。 为了限制在一个哈密顿量等值集上，将 u_- 的积分条件改为哈密顿量约束。这会将周期轨道限制在指定的哈密顿量等值集上（即，这将选出一个 k_-），然后我们还固定 ϕ_-。无论采用哪种方式，这两个周期轨道和核心都将位于某个哈密顿量等值集上。

在数值上，我们通过 $u_\pm$ 傅里叶伪谱方法 [52] 对 w 方程进行离散化。它们在 MATLAB中实现，并使用 AVITABILE ET AL. [2]进行数值延拓。

根据图 12所示的计算结果，我们通过选取参数来寻找余维二点展开中的异宿连接

$$\mu = 0.3, \quad a = 1.45, \quad b = 2.15.$$

随后，通过将定义域左右两端的相位固定为零，并在改变 a 以趋近$a \approx 1.466$处的哈密顿余维二点时求解波数，从而计算出连接两个周期轨道的波前。图 14的面板 (b) 展示了该波前计算结果。面板 (a) 显示，当我们接近余维二点时，波数收敛到同一数值。

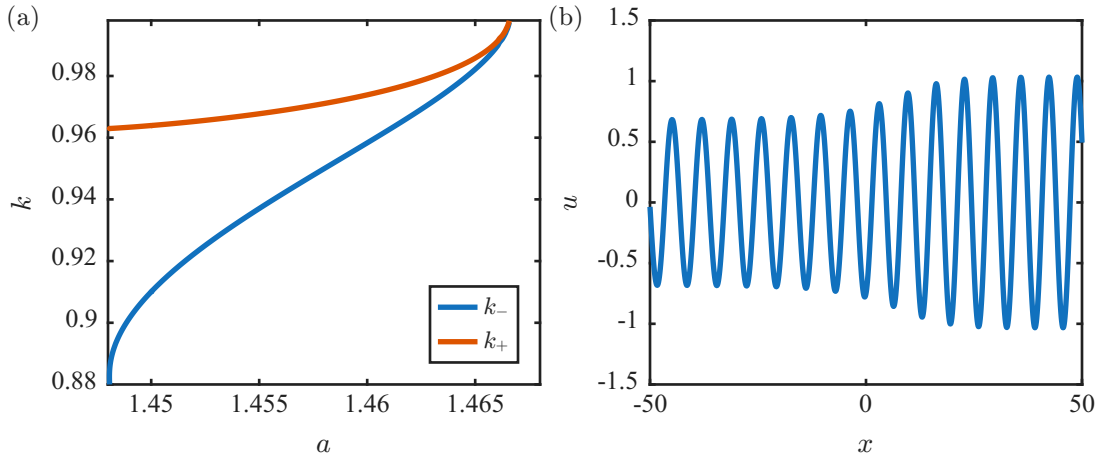

图 14: *Wavenumber of the twp periodic orbits in (a) as a function of the parameter a, coalescing at the codimension two point ($a \approx 1.466$). The right panel (b) shows a connecting orbit at $a = 1.45$ between two distinct periodic orbits in the unfolding of the codimension two point.*

总之，我们建立了一种算法，用于在周期解场中寻找余维二点，并说明了如何按照正规形理论的预测，在余维二点的展开中找到异宿连接。下一节将把这一策略应用于另一种偏微分方程。

6 Boussinesq系统中余维二点附近的波前

本节有三个目的：展示另一个能够找到余维二点的例子，研究一个不能化为SH形式（1.1）的系统，以及首次计算Boussinesq系统中的振荡前沿。我们的策略是先将Boussinesq系统（1.24）化为 $\mathbb{R}^4$，上的定常系统，识别拉格朗日量、哈密顿量和作用泛函，寻找一个周期轨道族，然后实施我们的算法，以聚焦于一个余维二点。

相对于移动参考系， $x \mapsto x - Ct$， （1.24）为

$$-Ch_x + (u + hf'(u))_x + au_{xxx} = 0 \quad \text{and} \quad -Cu_x + f(u)_x + gh_x + ch_{xxx} = 0\,. \tag{6.1}$$

积分一次，并使用 对函数 $F(h,\ u)$ 进行定义于（1.27）中的处理后，它化为$\mathbb{R}^4$,上的保守系统

$$ch_{xx} = F_h \quad \text{and} \quad au_{xx} = F_u\,. \tag{6.2}$$

该系统的拉格朗日量密度和哈密顿量密度为

$$L = \tfrac{1}{2}au_x^2 + \tfrac{1}{2}ch_x^2 + F(h,u) \quad \text{and} \quad H = \tfrac{1}{2}au_x^2 + \tfrac{1}{2}ch_x^2 - F(h,u)\,. \tag{6.3}$$

方程（6.2）可表示为一个正则哈密顿系统，但此处无需用到其结构，只需关注关键不变量。对于由 $h(x,\ s)$ $u(x,\ s)$ 参数化的解族，其作用量密度为 $s\in\mathbb{R}$:

$$A = au_xu_s + ch_xh_s\,. \tag{6.4}$$

它满足作用量守恒律

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial s}\,. \tag{6.5}$$

当 $h,\ u$ 关于 s 是周期性的时，A 在 s 上的积分是一个相对积分不变量。

为计算 ac–Boussinesq系统（1.24）中的余维二点，我们采用与第 5.1 节中针对 Swift-Hohenberg 方程（1.1）所述方法类似的方法进行计算。计算中，我们将积分常数固定为 $\mathscr{A}=-2$ 和 $\mathscr{B}=2$，并令 $C=0$。波数为 k 的周期轨道记为

$$u = \widehat{u}(z,k) \quad h = \widehat{h}(z,k) \quad z = kx, \tag{6.6}$$

并且它们满足方程

$$ak^2\widehat{u}_{zz} + \widehat{u} + \widehat{h}\left(\widehat{u} + \alpha\widehat{u}^2\right) = -2 \quad \text{and} \quad ck^2\widehat{h}_{zz} + \widehat{h} + \frac{1}{2}\widehat{u}^2 + \frac{\alpha}{3}\widehat{u}^3 = +2\,. \tag{6.7}$$

该周期轨道族的作用量为

$$A(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(ak\widehat{u}_z^2 + ck\widehat{h}_z^2\right)\mathrm{d}z\,. \tag{6.8}$$

余维二点发生在 $A_k = A_{kk} = 0$（等价地，$H_k = H_{kk} = 0$）时。

周期解在定义域 $z\in[0,2\pi)$ 上计算，并使用类似于第 5.1节中的方法计算关于 k 的梯度。通过求解 k 和 α 的取值，使其满足$A_k = A_{kk} = 0$（在色散系数 a 和 c固定的情况下），可以找到余维2点。为进行此计算，我们将固定 $c<0$ 的值，并将 a 视为延拓参数。

在图 15中，我们展示了余维2点在 c 取不同值时随 a 变化的延拓结果。在图（a）中，我们展示余维2点处的波数；在图（b）中展示相应的选定 α 值。我们在图 $a=0.2$ 和 $c=-0.3$ 的第三个面板中绘制了余维二点附近的空间哈密顿量。图 15中 $H-k$ 图的几何形状与上一节 SH357 方程中的类似。

为计算从余维二分岔点涌现的前沿，我们将远场周期轨道的相位固定为零，并求解远场周期轨道的波数。SH357 计算中也采用了这一策略。在这种情况下，前沿采用远场-核心分解进行计算。

为找到余维二点，我们逐步增大最高阶非线性项的强度 α，直到在 $\alpha\approx 0.1946$处达到余维二点。在余维二点处，两个波数合并为 $k=k_-=k_+\approx 2.12$。图16(a) 展示了远场周期轨道的波数随 α变化的情况。图16(b) 和 (c) 展示了余维二点附近一个具有代表性的前沿波解，其中 $\alpha=0.194$ 。在这项计算中，周期解的相位固定为零。为便于说明，图17展示了一组类似的周期轨道到周期轨道解，其中 $+\infty$ 附近的周期轨道相位固定为 -0.25。

注 6.1. 对于水波的情形（非线性中含有 $\alpha=0$），策略是将前沿族从 $\alpha\approx 0.194$ 延续至 $\alpha=0$。另一方面，水波理论中也有一些模型包含高阶非线性，例如描述两种密度不同的流体之间界面的 *Boussinesq* 方程（例如 *Nguyen* 与 *Dias* [37]）。

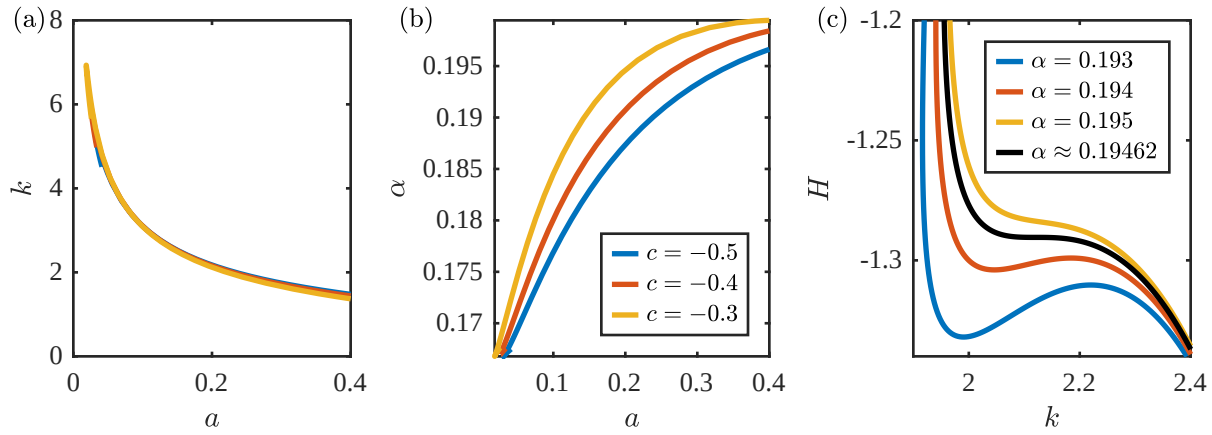

图 15: *(a), (b) Parameter values for codimension two points for the steady ac-Boussinesq equation (6.7). (c) Spatial Hamiltonian near the codimension two point with $a = 0.2$ and $c = -0.3$ for various α showing the emergence of the codimension-two point.*

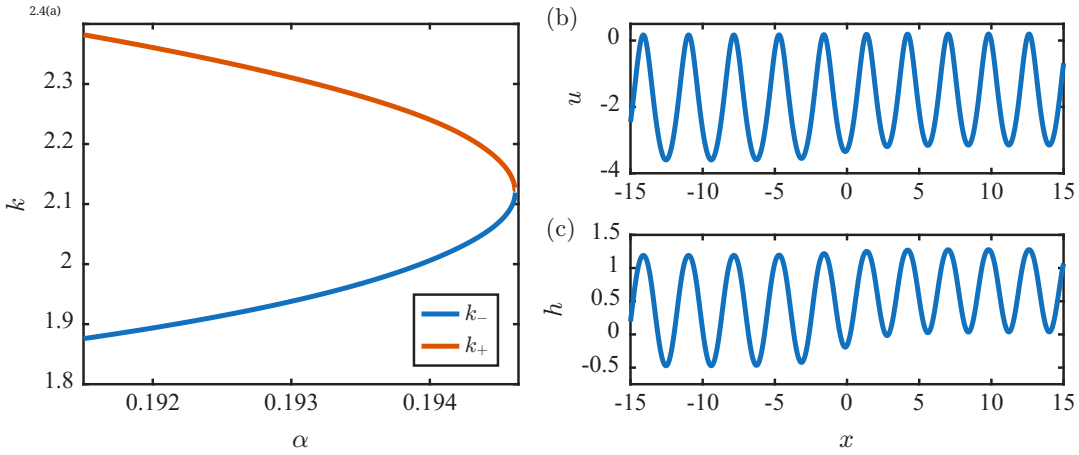

图16: *(a) Wavenumber of the far-field orbits that comprise the front solution of the ac-Boussinesq equation with $a = 0.2$ and $c = -0.3$ that bifurcate from the codimension two point. Panels (b) and (c) show two representative fronts near the codimension two point with $\alpha \approx 0.194$.*

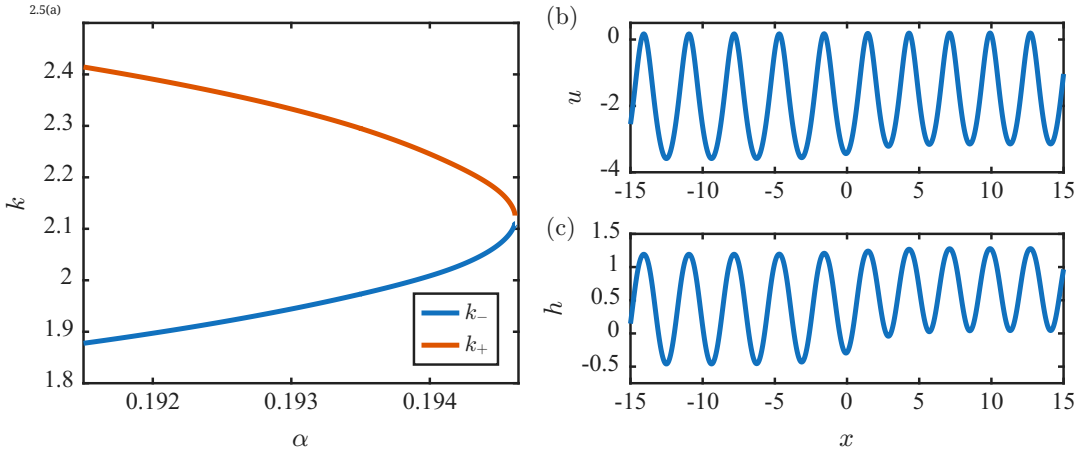

图 17: *Same as Fig. 16, where the phase of the periodic orbit at $+\infty$ is fixed to -0.25* .

7 总结

本文阐明了四维相空间中保守系统的周期轨道到周期轨道的异宿连接的几何结构。这一观点清楚地揭示了渐近相位是如何选定的，以及为何计算渐近相位对于寻找异宿连接并确定其重数至关重要。此外，它指出，（不）稳定流形呈管状结构，至少在双曲情形下如此（与逆双曲型情形相反）。这些观察建立在对先前工作的拓展之上。我们通过在数值计算和正规形理论中引入作用量的作用，为这一研究开辟了新方向，并通过实例展示了相关理论。上述结果指向了许多新的研究方向。

维数计数。 在相空间维数大于 4 时，可以通过维数计数判断渐近相位是否会受到选定。在四维情形下，例如，我们可以看到，左侧周期轨道有一个三维不稳定流形（由两个单位 Floquet乘子和一个不稳定乘子产生），其对应的余维为 $=4-3=1$。右侧周期轨道有一个 3–维稳定流形（由两个单位 Floquet乘子和一个稳定乘子产生），其对应的余维为 $=4-3=1$。余维之和为 2。因此，交点的维数等于相空间维数减去余维之和，即 $4-2=2$，因此需要选定两个参数，交点才会出现。由于周期轨道必须位于同一个哈密顿量等值集上，对于一个波长和相位固定的给定左侧周期轨道，哈密顿量会使右侧周期轨道的波长受到选定，从而在交点形成过程中，右侧周期轨道的相位也需要受到选定。这一维数计数论证可推广至六维及更高维的相空间。事实上，已有研究报告了六维相空间中周期轨道与准周期环面的异宿连接的一些引人关注的结果，见 Baresi et al. [6] 和 Owen & Baresi [38]；后者表明，纽结理论可用于确定准周期异宿连接的重数。

作用量与正规形。 本文的一项关键贡献是利用调制理论对两条双曲周期轨道的合并进行展开，从而得到通有渐近方程（4.5）。该方程引入了一个新的重要量——作用量，用以理解哈密顿系统中的异宿连接。调制方程的优势在于，只需理解周期轨道在合并点处的几何性质，即可帮助人们确定此类异宿连接将在何处出现。尽管这一渐近方程具有普适性，但它遗憾地并未提供关于余维二点或展开处相位选择过程的任何信息。我们推测，这需要进入超越全阶渐近分析。我们还描述了一种用于定位合并点的系统数值方法，并表明该合并点出现在两个不同的系统中。因此，我们认为这一组织中心是常见的。

时空正规形。 回到正规形（1.15），并引入慢时间 $T=\varepsilon^4 t$，同时还将 u_t 加入（1.1），从而得到一个含时调制方程，即Cahn-Hilliard方程，

$$q_T = \left(\mathscr{K} q_{XX} + \tfrac{1}{6} A_{kkk} q^3\right)_{XX} . \tag{7.1}$$

此前，D¨ull [19] 已通过相位调制为一类反应-扩散方程推导出 Cahn-Hilliard方程。在这种情况下，正规形中的非线性是二次的。三次非线性的优点在于，它会在正规形中产生波前。对这一含时偏微分方程的完整分析超出了本文的范围。不过，我们确实指出了两个值得关注的方向。该方程可用于对§4.1中正规形所得到的前沿稳定性作初步近似。根据文献中关于 Cahn-Hilliard方程前沿稳定性的结果（例如 Bricmont et al. [11]），我们有理由乐观地认为，§4.1 中得到的前沿将是稳定的。不过，这种稳定性仅针对核心，并未考虑无穷远状态的稳定性。我们也有理由乐观地认为，含时方程（7.1）是有效的，即它的解将始终接近含时 SH 方程的解。D¨ull [19]证明了二次 Cahn-Hilliard方程的有效性，并将其与耦合反应-扩散方程的解进行了比较。

逆双曲型周期 **周期轨道**。如图9所示，双曲 Floquet 乘子有两种情形 s.

本文聚焦于正情形。负情形（逆双曲型）见图6，但只出现在第三个非连通周期轨道中。逆双曲型情形需要区别处理。例如，不稳定流形不可定向，其结构是莫¨比乌斯带（例如，参见Meiske & Schneider [35] 第 5 节，以及 Aougab et al. [1]第 3 节）。在四维相空间中，可以通过异宿轨道连接双曲周期轨道和逆双曲周期轨道，但此处的余维二奇异性（两个周期轨道的合并）及其相关正规形并不能推广到双曲轨道与逆双曲轨道的合并，因为这需要更高维的相空间。

辛几何。 哈密顿系统中的周期轨道具有马斯洛夫指标。文献中对马斯洛夫指标有多种定义（例如 Long [31]），本文将采用其中一种便于实际操作的定义。因此，一个尚未解决的问题是每条周期轨道的马斯洛夫指标取值有何意义，或者两者之差有何意义。另一个尚未解决的问题是渐近相位的取值，或穿过截面时其取值跳变的意义。它是否具有辛几何或其他特征?

多空间维偏微分方程。 展望未来，原则上，本文提出的方法可以推广到二维空间中的偏微分方程；例如，推广到无限周期条带上的二维六边形前沿。二维六边形前沿的渐近分析应该也能以类似方式进行，从而定位“受应力”的六边形连接，并可能解释在平面上开展的数值研究 [50]。原则上，正规形理论也可以捕捉两种六边形态的合并。用于寻找合并点的大多数数值方法，以及远场核心方法，也都可以推广到二维空间；例如参见 [29, 30]。从渐近分析的角度来看，更有趣的情形是拟周期连接的构造（既包括上文提到的高空间维常微分方程，也包括偏微分方程 [49]），其中会出现多个“作用量”。对这种构造进行展开可能带来新的见解。两座拟周期不变环面的合并也可以通过正规形捕捉。这一研究方向将建立在 Owen & Baresi [38] 的重要成果之上。最后，将这一理论推广到哈密顿系统中的时空波列缺陷也会很有意义；也就是说，构造 [46, 45] 的多辛版本。

数据可用性声明

支持本研究结论的数据可在 [13]公开获取。

致谢

TB、DR和PS感谢艾萨克·牛顿数学科学研究所在2022年秋季举办、由EPSRC资助编号EP/R014604/1支持的色散流体动力学项目期间提供的支持与款待，本工作即在该项目期间启动。作者感谢Michael Shearer在该项目期间就本课题进行的多次有益讨论。DL的工作部分得到EPSRC资助UKRI070的支持。TB和DL感谢Nicola Baresi（萨里太空中心）就天体动力学相关工作进行的富有启发性的讨论。DR和PS感谢萨里数学系资助他们前往开展本项目的访问。
为开放获取之目的，作者已对本投稿所产生的任何作者接受稿版本适用知识共享署名（CC BY）公共版权许可。

—附录—

A k–作用量的导数

在本附录中，我们记录作用量泛函在周期轨道族上取值时的 k–导数公式。作为参考， $A(k)$的公式为

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sigma k\widehat{u}_z^2 - 2k^3\widehat{u}_{zz}^2\right)\,\mathrm{d}z\,. \tag{A-1}$$

导数 A_k、 A_{kk} 和 A_{kkk} 可通过直接计算得到，因此这里只记录结果。一阶导数为

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sigma\widehat{u}_z^2 + 2\sigma k\widehat{u}_z\widehat{u}_{zk} - 6k^2\widehat{u}_{zz}^2 - 4k^3\widehat{u}_{zz}\widehat{u}_{zzk}\right)dz\,. \tag{A-2}$$

再求一次导数，并合并各项

$$\begin{aligned} A_{kk} \;=\; & \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_0^{2\pi} \big(4\sigma\widehat{u}_z\widehat{u}_{zk} + 2\sigma k\widehat{u}_{zk}^2 + 2\sigma k\widehat{u}_z\widehat{u}_{zkk} - 12k\widehat{u}_{zz}^2 \\ & -24k^2\widehat{u}_{zz}\widehat{u}_{zzk} - 4k^3\widehat{u}_{zzk}\widehat{u}_{zzk} - 4k^3\widehat{u}_{zz}\widehat{u}_{zzkk}\big)\,dz\,. \end{aligned} \tag{A-3}$$

求三阶导数并化简，得到

$$\begin{aligned} A_{kkk} \;=\; & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(6\sigma\widehat{u}_{zk}^2 + 6\sigma\widehat{u}_z\widehat{u}_{zkk} + 6\sigma k\widehat{u}_{zk}\widehat{u}_{zkk} + 2\sigma k\widehat{u}_z\widehat{u}_{zkkk} \\ & -12\widehat{u}_{zz}^2 - 72k\widehat{u}_{zz}\widehat{u}_{zzk} - 36k^2\widehat{u}_{zzk}^2 - 36k^2\widehat{u}_{zz}\widehat{u}_{zzkk} \\ & -12k^3\widehat{u}_{zzkk}\widehat{u}_{zzk} - 4k^3\widehat{u}_{zz}\widehat{u}_{zzkkk}\Big)dz\,. \end{aligned} \tag{A-4}$$

k–所有关于 A 的导数都是关于 $\widehat{u}$的二次式，可以用内积表示。例如，

$$A = \sigma k\langle\!\langle \widehat{u}_z, \widehat{u}_z\rangle\!\rangle - 2k^3\langle\!\langle \widehat{u}_{zz}, \widehat{u}_{zz}\rangle\!\rangle\,.$$

内积表示将在正规形理论中发挥重要作用。

B 非线性正规形的推导

本节将概述如何利用相位调制，推导余维二点 $A_k = A_{kk} = 0$ 附近异宿连接产生时的正规形。

常微分方程的相位调制可通过正规形变换实现（例如 Iooss [22], Mielke [36]）。对于偏微分方程，正规形变换较为繁琐，因此通常采用拟设方法（例如 Doelman 等人 [17]）。对于保守系统，偏微分方程的相位调制基于 Whitham调制理论，而该理论建立在平均拉格朗日量之上（例如 Bridges [12]）。在此，即使对于常微分方程，我们也采用拟设方法，因为这种方法更简单，并且在加入时间变量并推导 Cahn-Hilliard方程时，很容易推广到偏微分方程的情形（参见§7）。我们将在事后引入作用量的作用 事后。

如论文正文所述，正规形的推导是通过将试探形式（4.1）代入（1.1），并在 ε中将其展开为泰勒级数，再逐阶求解而得到的。在零阶时，我们得到的只是相位平移后的周期解对应的方程

$$k^4\widehat{u}_{zzzz}(z+\phi,k) + \sigma k^2\widehat{u}_{zz}(z+\phi,k) + V'(\widehat{u}(z+\phi,k))) = 0\,. \tag{B-1}$$

在一阶时，我们得到

$$\mathbf{L}(0)\widehat{u}_k + 4k^3\widehat{u}_{zzzz} + 2\sigma k\widehat{u}_{zz} = 0\,,$$

其中**L(0)** 在（3.14）中定义。由于该方程恰好就是（B-1）关于 k的导数，因此该方程严格成立。在二阶时，我们得到

$$\mathbf{L}(0)w_2 + q_X\left(4k^3\widehat{u}_{zzzk} + 6k^2\widehat{u}_{zzz} + 2\sigma k\widehat{u}_{zk} + \sigma\widehat{u}_z\right) = 0\,.$$

该方程的可解性条件是，与 q_X 成正比的项应与 $\widehat{u}_z$正交，

$$0 = \left\langle \widehat{u}_z, 4k^3\widehat{u}_{zzzk} + 6k^2\widehat{u}_{zzz} + 2\sigma k\widehat{u}_{zk} + \sigma\widehat{u}_z\right\rangle\,.$$

值得注意的是,这一可解性条件恰好就是 $A_k = 0$。通过求导可验证这一结果

$$A(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sigma k\widehat{u}_z^2 - 2k^3\widehat{u}_{zz}^2\right)\,\mathrm{d}z\,.$$

$A(k)$ 的导数记录在附录 A中。从 §3.1 中的约当链理论可知，二阶解为 $w_2 = q_X\xi_3 + c_2\xi_1$ 其中 c_2 是一个任意常数。

在三阶时，经过一些计算，我们得到

$$\mathbf{L}(0)\Big(w_3 - (\xi_3)_k qq_X - \xi_4 q_{XX}\Big) = 0\,,$$

其解显然为,

$$w_3 = (\xi_3)_k qq_X + \xi_4 q_{XX} + c_3\xi_1\,,$$

其中 c_3 是一个任意常数。

四阶可解性条件 生成了正规形。完整的四阶方程 is

$$\mathbf{L}(0)w_4 + \Upsilon q^2 q_X + \mathcal{T} q_{XXX} + \mathsf{Solv} = 0\,, \tag{B-2}$$

其中 Solv 是在可解性条件中恒等于零的项，而两个关键系数为

$$\begin{aligned}\Upsilon \;=\;& 2k^3\widehat{u}_{zzzkkk} + 15k^2\widehat{u}_{zzzkk} + 24k\widehat{u}_{zzzk} + 4k^3(\xi_3)_{zzzzk}\\ &+6\widehat{u}_{zzz} + 6k^2\big(\xi_3\big)_{zzzz}\\ &+\sigma k\widehat{u}_{zkkk} + \tfrac{1}{2}\sigma\widehat{u}_{zkk} + 2\sigma\widehat{u}_{zkk} + 2\sigma k(\xi_3)_{kzz} + \sigma(\xi_3)_{zz}\\ &+\tfrac{1}{2}V''''(\widehat{u})\widehat{u}_k^2\xi_3 + \tfrac{1}{2}V'''(\widehat{u})\widehat{u}_{kk}\xi_3 + V'''(\widehat{u})\widehat{u}_k(\xi_3)_k\,,\end{aligned}$$

and

$$\mathcal{T} = 4k^3(\xi_4)_{zzz} + 2\sigma k(\xi_4)_z + 6k^2(\xi_3)_{zz} + \sigma\xi_3 + 4k\widehat{u}_{zk} + \widehat{u}_z\,.$$

应用可解性条件后得到

$$\mathscr{K}\, q_{XXX} + \kappa q^2 q_X = 0\,,$$

with

$$\begin{aligned}\kappa \;=\;& \langle\!\langle \widehat{u}_z, 2k^3\widehat{u}_{zzzkkk} + 15k^2\widehat{u}_{zzzkk} + 24k\widehat{u}_{zzzk} + 4k^3(\xi_3)_{zzzzk}\\ &+6\widehat{u}_{zzz} + 6k^2\big(\xi_3\big)_{zzzz}\\ &+\sigma k\widehat{u}_{zkkk} + \tfrac{1}{2}\sigma\widehat{u}_{zkk} + 2\sigma\widehat{u}_{zkk} + 2\sigma k(\xi_3)_{kzz} + \sigma(\xi_3)_{zz}\\ &+\tfrac{1}{2}V''''(\widehat{u})\widehat{u}_k^2\xi_3 + \tfrac{1}{2}V'''(\widehat{u})\widehat{u}_{kk}\xi_3 + V'''(\widehat{u})\widehat{u}_k(\xi_3)_k\rangle\!\rangle\,.\end{aligned}$$

另一个系数 $\mathscr{K}$ 是

$$\mathscr{K} = \langle\!\langle \widehat{u}_z, \mathcal{T}\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \widehat{u}_z, 4k^3(\xi_4)_{zzz} + 2\sigma k(\xi_4)_z + 6k^2(\xi_3)_{zz} + \sigma\xi_3 + 4k\widehat{u}_{zk} + \widehat{u}_z\rangle\!\rangle\,.$$

现在的主要挑战是证明 $\kappa = \frac{1}{2}A_{kkk}$ ，证明过程见附录 C。参数 $\mathscr{K}$ 可以有多种解释：它可以与（3.18）中若尔当链终止的条件相关，也可以用布洛赫系数的导数来刻画（见附录D）。

C 证明正规形中 2κ 等于 A_{kkk}

本附录简要说明，正规形中 q^2q_X 的系数（记为 κ）可以用 A_{kkk}表示。详情见补充材料。关于 A 和 A_{kkk} 的公式见附录 A。

将 Υ 记为 q^2q_X 方程中的 ε^4 向量值系数（见方程（B-2））,

$$\begin{aligned}\Upsilon \;=\;& 2k^3\widehat{u}_{zzzkkk}+15k^2\widehat{u}_{zzzkk}+24k\widehat{u}_{zzzk}+6\widehat{u}_{zzz}\\ &+4k^3(\xi_3)_{zzzzk}+6k^2\big(\xi_3\big)_{zzzz}+2\sigma k(\xi_3)_{kzz}+\sigma(\xi_3)_{zz}\\ &+\sigma k\widehat{u}_{zkkk}+\tfrac{5}{2}\sigma\widehat{u}_{zkk}\\ &+\tfrac{1}{2}V''''(\widehat{u})\widehat{u}_k^2\xi_3+\tfrac{1}{2}V'''(\widehat{u})\widehat{u}_{kk}\xi_3+V'''(\widehat{u})\widehat{u}_k(\xi_3)_k\,.\end{aligned}$$

应用可解性条件， q^2q_X 的标量系数 $\langle\!\langle\widehat{u}_z,\ \Upsilon\rangle\!\rangle$ 为

$$\begin{aligned}\kappa \;=\;& \langle\!\langle\widehat{u}_z, 2k^3\widehat{u}_{zzzkkk}+15k^2\widehat{u}_{zzzkk}+24k\widehat{u}_{zzzk}+6\widehat{u}_{zzz}\\ &+\sigma k\widehat{u}_{zkkk}+\tfrac{5}{2}\sigma\widehat{u}_{zkk}\\ &+4k^3(\xi_3)_{zzzzk}+6k^2\big(\xi_3\big)_{zzzz}+2\sigma k(\xi_3)_{kzz}+\sigma(\xi_3)_{zz}\\ &+\tfrac{1}{2}V''''(\widehat{u})\widehat{u}_k^2\xi_3+\tfrac{1}{2}V'''(\widehat{u})\widehat{u}_{kk}\xi_3+V'''(\widehat{u})\widehat{u}_k(\xi_3)_k\rangle\!\rangle\,.\end{aligned}$$

目标是证明 $2\kappa=A_{kkk}$，其中 A_{kkk} 见附录 A。注意， A_{kkk} 是一个二次泛函，因此可以用内积表示。在将其与κ的形式进行比较时，这一点会很有用。将内积形式的 A_{kkk}在一个周期轨道族上取值，可得

$$\begin{aligned}A_{kkk} \;=\;& 6\sigma\langle\!\langle\widehat{u}_{zk},\widehat{u}_{zk}\rangle\!\rangle+6\sigma\langle\!\langle\widehat{u}_z,\widehat{u}_{zkk}\rangle\!\rangle+6\sigma k\langle\!\langle\widehat{u}_{zk},\widehat{u}_{zkk}\rangle\!\rangle+2\sigma k\langle\!\langle\widehat{u}_z,\widehat{u}_{zkkk}\rangle\!\rangle\\ &-12\langle\!\langle\widehat{u}_{zz},\widehat{u}_{zz}\rangle\!\rangle-72k\langle\!\langle\widehat{u}_{zz},\widehat{u}_{zzk}\rangle\!\rangle-36k^2\langle\!\langle\widehat{u}_{zzk},\widehat{u}_{zzk}\rangle\!\rangle-36k^2\langle\!\langle\widehat{u}_{zz},\widehat{u}_{zzkk}\rangle\!\rangle\\ &-12k^3\langle\!\langle\widehat{u}_{zzkk},\widehat{u}_{zzk}\rangle\!\rangle-4k^3\langle\!\langle\widehat{u}_{zz},u_{zzkkk}\rangle\!\rangle\,.\end{aligned}\tag{C-1}$$

在 A_{kkk} 中， k 和 z 是 $\widehat{u}$的导数；而在 κ 中，我们还发现了含有 ξ_3 的项，以及对 ξ_3关于 z 和k 的导数。从 ξ_3 的若尔当链方程出发并进行求导，可得到关于 ξ_3、$(\xi_3)_k$、$(\xi_3)_z$等的方程。将这些方程逐一代回，分部积分并化简，即得所需结果。详细内容见补充材料。

D $\mathscr{K}$与布洛赫谱之间的连接

本附录旨在将空间导数的系数与一个可独立于渐近分析计算的量联系起来；事实证明，这个量就是原始波列$\hat{}$的布洛赫谱。u为说明这一点，我们沿用先前关于相位动力学的研究 [17, 43]，并构造方程（1.1）的布洛赫谱问题:

$$\mathbf{L}(\nu)=(i\nu+k\partial_z)^4+\sigma\,(i\nu+k\partial_z)^2+V''(\hat{u})\tag{D-1}$$

尽管正文聚焦于该算子的戈德斯坦模态（即恰好位于 $\nu=0$ 处），但我们将转而考虑其推广情形：算子在零点附近存在连续谱:

$$\mathbf{L}(\nu)W(z,\nu)=\mu(\nu)W(z,\nu)\,.\tag{D-2}$$

这里我们假设特征值 $\mu(\nu)$ 在 $\nu=0$ 的邻域内至少四次可微。布洛赫谱 $\mu(\nu)$ 与 $\mathscr{K}$ 之间的关系，是通过取 $\nu-$ 导数并将这些导数与基本波的内积联系起来而建立的。由于 $\mathbf{L}(0)$ 与原系统在 $z\to-z$ 变换下保持不变,

由此可知，布洛赫谱在 $\nu \to -\nu$ 变换下也应保持不变。由此观察到，谱 $\mu(\nu)$ 是 ν 的偶函数，因此 $\mu'(0) = \mu'''(0) = 0$。此外，$\mathbf{L(0)}$ 是自伴的。最后，鉴于$\mathbf{L(0)}$ 与原系统的线性算子相一致，该算子提取自 z 对 (1.1) 的导数，因此我们有 $\mu(0) = 0$ 以及 $W(z,\ 0) = \hat{}u_z$ 。。这意味着 $\hat{}u_z$ 按假设也是伴随特征函数。

现在我们来寻找 μ 与基本态之间的关系。在零点处对 (D-2) 求一阶导数，得到

$$\mathbf{L}(0)\partial_\nu W(z,0) = \mu'(0)\hat{u}_z - \mathbf{L}'(0)\hat{u}_z = -(4k^3\hat{u}_{zzzz} + 2k\sigma\hat{u}_{zz})\,,$$

其中，撇号表示对 ν求导。将方程中基本态的 k 阶导数与上述表达式进行比较可得

$$\partial_\nu W(z,0) = i\hat{u}_k\,.$$

对 (D-2) 求二阶导数并在零点处取值，得到下一阶问题：

$$\mathbf{L}(0)\partial_\nu^2 W(z,0) = \mu''(0)\hat{u}_z - 2i\mathbf{L}'(0)\hat{u}_k - \mathbf{L}''(0)\hat{u}_z = \mu''(0)\hat{u}_z + 8k^3\hat{u}_{zzzk} + 4k\sigma\hat{u}_{zk} + 12k^2\hat{u}_{zzz} + 2\sigma\hat{u}_z\,.$$

该系统是可解的；而作为严格等式的导数，它也必须满足可解条件，即右端在主文中定义的内积下为零。我们可以看到

$$\mu''(0) = -\frac{\langle\!\langle \hat{u}_z, 8k^3\hat{u}_{zzzk} + 4k\sigma\hat{u}_{zk} + 12k^2\hat{u}_{zzz} + 2\sigma\hat{u}_z\rangle\!\rangle}{\langle\!\langle \hat{u}_z, \hat{u}_z\rangle\!\rangle}$$

$$= -\frac{1}{2\pi\langle\!\langle \hat{u}_z, \hat{u}_z\rangle\!\rangle}\int_0^{2\pi} 2\sigma\hat{u}_z^2 + 4\sigma\hat{u}_z\hat{u}_{zk} - 12k^2\hat{u}_{zz}^2 - 8k^3\hat{u}_{zz}\hat{u}_{zzk}\,dz = -\frac{2A_k}{\langle\!\langle \hat{u}_z, \hat{u}_z\rangle\!\rangle}\,.$$

注意，通过重新定义 $W(z,\ 0) = \hat{}u_z/\langle\!\langle \hat{}u_z,\ \hat{}u_z\rangle\!\rangle$，即可消去此处的分母。主文中假设的条件是 $A_k = 0$，这意味着 μ 的导数为零，因此这一阶的方程可解，且

$$\partial_\nu^2 W(z,0) = -2\xi_3\,.$$

这将是我们分析的最后几个部分。结合此前的所有结果，求三阶导数可得

$$\mathbf{L}\partial_\nu^3 W(z,0) = -\left[\mathbf{L}'''(0)\hat{u}_z + 3i\mathbf{L}''(0)\hat{u}_k - 3\mathbf{L}'(0)\xi_3\right]$$

由正文可得 $\partial_\nu^3 W(z,\ 0) = -6i\xi_4$。再求一次导数，即可得到最终阶数，并得出关键结果：

$$\mathbf{L}\partial_\lambda^4 W(z,0) = \mu^{(4)}(0)\hat{u}_z - \left[\mathbf{L}''''(0)\hat{u}_z + 4i\mathbf{L}'''(0)\hat{u}_k - 6\mathbf{L}''(0)(2\xi_3) - 4i\mathbf{L}'(0)(6\xi_4)\right]$$

$$= \mu^{(4)}(0)\hat{u}_z - 24\left[\hat{u}_z + 4k\hat{u}_{zk} + (6k^2\partial_{zz} + \sigma)\xi_3 + (4k^3\partial_z^3 + 2\sigma k\partial_z)\xi_4\right]$$

施加可解性条件，并利用 $\mathscr{K}$ 的定义，即可得到所需结果：

$$\mu''''(0) = \frac{24\mathscr{K}}{\langle\!\langle \hat{u}_z, \hat{u}_z\rangle\!\rangle}\,,$$

w注意到，通过重新定义 $W(z,\ 0)$，可以再次消去分母。

E 辛几何的基础

当揭示控制方程的辛结构后，作用量的性质及其含义会变得更加清晰。我们已经证明，一阶形式（1.4）是具有非正则辛算子的哈密顿量形式

$\mathbf{J}$，定义为 （1.5）。现在，我们通过以下变换，将坐标（u_1、 u_2、 u_3、 u_4）变换为正则坐标（q_1、 q_2、 p_1、 p_2）

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} .$$

该变换记为$\mathbf{T}$ ，它在以下意义下是辛的：$\mathbf{T}^T\mathbf{J}_C\mathbf{T} = \mathbf{J}$，其中$\mathbf{J}_C$ 是正则辛算子

$$\mathbf{J}_C := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

一阶形式（1.4）随后变换为

$$-\mathbf{p}_x = \partial_{\mathbf{q}} H \quad \text{and} \quad \mathbf{q}_x = \partial_{\mathbf{p}} H \, , \tag{E-1}$$

其哈密顿函数为，

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = p_1 p_2 - \frac{\sigma}{2} p_2^2 - \frac{1}{2} q_2^2 + V(q_1) \, .$$

在正则坐标中，作用量基于一形式$\mathbf{p} \cdot \mathrm{d}\mathbf{q}$。设 $(\mathbf{q}(x,s),\ \mathbf{p}(x,s))$ 是（E-1）的解，以 s和 2π–为周期变量 s，如（3.6）所示。于是

$$\frac{d}{dx} \oint \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}_s \, \mathrm{d}s = 0 \, ,$$

通过直接计算即可验证这一点。事实上，这就是庞加莱′–卡当定理，在大多数关于哈密顿动力学的教科书中都能找到。图8 展示了该定理应用时的示意图。将$\mathbf{q}$ 和$\mathbf{p}$代回，

$$p_1 (q_1)_s + p_2 (q_2)_s = (u_4 + \sigma u_2)(u_1)_s + u_2 (u_3)_s = (u_{xxx} + \sigma u_x) u_s + u_x u_{xxs} \, ,$$

恢复（3.6）中作用量的定义。

在哈密顿量框架下，另一个更为清晰的结果是公式 $H_k = kA_k$ ，已在引理3.1中证明。这里将由约束变分原理推出。令 $z = kx$ 并代入（E-1），得

$$\underbrace{k \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}_z}_{\nabla A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{q}} H \\ \partial_{\mathbf{p}} H \end{pmatrix}}_{\nabla H} , \tag{E-2}$$

换言之， $2\pi-$ 周期解可刻画为 H 在作用量水平集上的临界点，其中k 为拉格朗日乘子，而（E-2）为拉格朗日必要条件；即 $\nabla H = k \nabla A$。给定这一变分原理的一个解，可得

$$H_k = \langle\!\langle \nabla H, U_k \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \nabla H - k \nabla A, U_k \rangle\!\rangle + k \langle\!\langle \nabla A, U \rangle\!\rangle = k A_k \, ,$$

在解上，其中 $U :=$ （$\mathbf{q}$，$\mathbf{p}$），从而简洁地证明引理3.1，其中 $\langle\!\langle \cdot,\ \cdot \rangle\!\rangle$ 是 2π–周期向量值函数的内积，是对（3.17）的推广。

由于系统（E-1）是一阶的，§3 中的若尔当链理论适用于线性特征值问题

$$\left[D^2 H - k D^2 A \right] \mathbf{v} = \lambda \mathbf{J}_C \mathbf{v} \, .$$

左侧含有一个对称算子，右侧含有一个反对称算子。特征值 λ_* 对应的若尔当链满足

$$\mathbf{L}\mathbf{v}_{j+1} = \lambda_* \mathbf{J}_C \mathbf{v}_{j+1} + \mathbf{J}\mathbf{v}_j \, , \quad j = 1, 2, \ldots \, , \quad \text{with } \mathbf{L} = D^2 H - k \mathbf{J}_C \frac{d}{dz} \, .$$

在辛几何设置中，还会出现其他新的变分刻画。例如，对于 SH357， H 中的所有参数都以线性形式出现，因此可以将其拆分为若干泛函之和

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = H_0 - \mu H_1 - aH_2 - bH_3\,.$$

在这种情况下，拉格朗日必要条件（对（E-2）作推广）为

$$\nabla H_0 = k\nabla A + \mu\nabla H_1 + a\nabla H_2 + b\nabla H_3\,,$$

其中 k， μ， a， b现在被视为拉格朗日乘子。然而，我们尚未发现这种更一般的变分原理有任何优势。

方程的辛形式也简化了相位调制。例如，在没有任何结构的情况下，附录 A_{kkk} 中将其与正规形系数 κ 联系起来的公式颇令人惊讶。采用辛相位调制（例如，Bridges [12]），该公式可以简化为少数几项。事实上，我们先从辛的角度进行计算，然后再变换坐标，使其适用于标量值常微分方程（1.1）。

参考文献

[1] Aougab, T., Beck, M., Carter, P., Desai, S., Sandstede, B., Stadt, M., and Wheeler, A. 局域卷的孤岛分岔与蛇形分岔。《动力系统与微分方程杂志》31, 3 (2019), 1199–1222.[2] Avitabile, D. 空间延展系统中相干结构的数值计算。Zenodo。doi: 10.5281/zenodo.3821169.[3] Bandara, R., Giraldo, A., Broderick, N. G. R., and Krauskopf, B. 具有四次色散的非线性薛定谔方程中的广义孤子与多振荡孤子。《混沌》33, 7 (2023), 073154.[4] Bandara, R. I., Giraldo, A., Broderick, N. G. R., and Krauskopf, B. 具有四次色散的非线性薛定谔方程中具有不同对称类型的无穷多个多脉冲孤子。Phys. Rev. A 103, 6 (2021), 063514.
[5] Bandara, R. I., Giraldo, A., Broderick, N. G. R., and Krauskopf, B. 广义非线性薛定谔方程中周期轨道的分岔。J. Comput. Dyn. 12, 2 (2025), 178–211.[6] Baresi, N., Olikara, Z. P., and Scheeres, D. J. 天体动力学中拟周期不变环面族延拓的全数值方法。J. Astro. Sci. 65, 2 (2018), 157–182.[7] Barrabés, E., Mondelo, J. M., and Ollé, M. 哈密顿系统中周期轨道之间异宿连接族的数值延拓。《非线性》26, 10 (2013), 2747–2765.[8] Beck, M., Knobloch, J., Lloyd, D. J. B., Sandstede, B., and Wagenknecht, T. 局域图案的蛇形分岔、梯级分岔与孤岛分岔。SIAM J. Math. Anal. 41, 3 (2009), 936–972.[9] Beyn, W.-J. 关于动力系统中连接轨道问题的适定性。载于《混沌数值计算》（澳大利亚吉朗，1993），第172卷《当代数学》。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1994年，第131–168页.[10] Bona, J. L., Chen, M., and Saut, J.-C. 非线性色散介质中小振幅长波的 Boussinesq 方程及其他系统。II. 非线性理论。《非线性》17, 3 (2004), 925–952.[11] Bricmont, J., Kupiainen, A., and Taskinen, J. Cahn–Hilliard 前沿的稳定性。Comm. Pure Appl. Math. 52, 7 (1999), 839–871.[12] Bridges, T. J. Symmetry, Phase Modulation and Nonlinear Waves，第31卷。剑桥大学出版社，2017年。

[13] Bridges, T. J., Lloyd, D. J. B., Ratliff, D. J., and Sprenger, P. 异宿轨道_PtoP_1D，2026年。GitHub 代码仓库，https://github.com/David-JB-Lloyd-Lab/Heteroclinics_PtoP_1D。[14] Bronski, J. C., Hur, V. M., and Johnson, M. A. KdV 型方程中的调制不稳定性。载于《非线性波的新方法》。施普林格，2016年，第83–133页。[15] Dieci, L., and Rebaza, J. 点到周期轨道及周期到周期连接。BIT 44, 1 (2004), 41–62。[16] Doedel, E. J., Kooi, B. W., Van Voorn, G. A. K., and Kuznetsov, Y. A. 三维常微分方程中连接轨道的延拓。II. 周期轨道到周期轨道连接。国际分岔与混沌杂志19, 1 (2009), 159–169。[17] Doelman, A., Sandstede, B., Scheel, A., and Schneider, G. 调制波列的动力学。美国数学会，2009年。[18] Driscoll, C., and O'Neil, T. 修正 Korteweg–de Vries 方程椭圆余弦波解的调制不稳定性。《数学物理学杂志》17, 7 (1976), 1196–1200。[19] Düll, W.-P. 相位扩散方程和 Cahn–Hilliard 方程用于反应扩散系统中图案调制的有效性。《微分方程杂志》239, 1 (2007), 72–98。[20] Henry, D., and Scheeres, D. 地月系统中异宿连接综述。载于第73届国际宇航大会论文集，巴黎（2022年），第1–12页。[21] Hoyle, R. B. 《图案形成：方法导论》。剑桥大学出版社，2006年。[22] Iooss, G. 闭轨附近向量场正规形的整体刻画。《微分方程杂志》76, 1 (1988), 47–76。[23] Kaheman, K., Bramburger, J. J., Kutz, J. N., and Brunton, S. L. 双摆中的鞍点输运与混沌。《非线性动力学》111, 8 (2023), 7199–7233。[24] Kamchatnov, A., Kuo, Y.-H., Lin, T.-C., Horng, T.-L., Gou, S.-C., Clift, R., El, G., andGrimshaw, R. H. Gardner方程的振荡激波理论。《物理评论E》86, 3 (2012), 036605。[25] Kirchgraber, U., and Stoffer, D. 日本系统中彗星可能发生的混沌运动——一种基于影踪的计算机辅助方法。《非线性》17, 1 (2004), 281–300。[26] Knobloch, E., Uecker, H., and Wetzel, D. 三次–五次–七次 Swift-Hohenberg 方程中的类缺陷结构与局域图案。《物理评论E》100, 1 (2019), 012204。[27] Knobloch, J., and Riess, T. 涉及周期轨道异宿链的 Lin 方法。《非线性》23, 1 (2010), 23–54。[28] Koon, W. S., Lo, M. W., Marsden, J. E., and Ross, S. D. 天体力学中周期轨道之间的异宿连接与共振转变。《混沌》10, 2 (2000), 427–469。[29] Lloyd, D. J. 平面 Swift–Hohenberg 方程中同宿蛇形区域之外的六边形入侵前沿。SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 20, 2 (2021), 671–700。[30] Lloyd, D. J. B., and Scheel, A. Swift-Hohenberg 方程中晶界的延拓与分岔。SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 16, 1 (2017), 252–293。[31] Long, Y. 辛路径的指标理论及其应用，《数学进展》第207卷。Birkhauser Verlag，巴塞尔，瑞士，2002年。[32] López-Gómez, J., and Mora-Corral, C. 线性算子特征值的代数重数，《算子理论：进展与应用》第177卷。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2007年。

[33] Maddocks, J. H. 稳定性与折叠。Arch. Rational Mech. Anal. 99, 4 (1987), 301–328.[34] Magnus, R. J. 重数的推广与分岔问题。Proc. London Math. Soc. (3) 32, 2 (1976年), 251–278.[35] Meiske, W., and Schneider, K. 积分流形的拓扑结构与倍周期分岔。Zeit. Angew. Math. Phys. 38 (1987), 302–314.[36] Mielke, A. 从空间周期图案出发的定常分岔的空间中心流形方法，载于《耗散系统中的动力学：约化、分岔与稳定性》（G. Dangelmayr、B. Fiedler、K. Kirchg¨assner与A. Mielke著），Pitman Research Notes 352, 1996.[37] Nguyen, H. Y., and Dias, F. 界面波双向传播的Boussinesq系统。Physica D 237 (2008), 2365–2389.[38] Owen, D., and Baresi, N. 纽结理论在检测拟周期轨道之间异宿连接中的应用。天体动力学 8, 4 (2024), 577–595.
[39] Palmer, K. 动力系统中的影踪，《数学及其应用》第501卷。Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特，2000年。[40] Pampel, T. 具有渐近速率的连接轨道的数值逼近。Numer. Math. 90, 2 (2001), 309–348.
[41] Pampel, T. 广义连接轨道计算方法的误差估计。Open Numer. Meth. J. 1 (2009年), 6–19.[42] Rabier, P. J. 广义若尔当链与克拉斯诺塞尔斯基的两个分岔定理。Nonlinear Anal. 13, 8 (1989), 903–934.[43] Ratliff, D. 真非线性及其与相位动力学中修正 Korteweg–de Vries 方程的连接。Nonlinearity 35, 1 (2021年), 30.[44] Ratliff, D., Trichtchenko, O., and Bridges, T. Benjamin–Feir转变附近导致水波频率下移的调制。J. Fluid Mech. 1014 (2025), A1–A23.[45] Roberts, T. V., and Sandstede, B. 反应-扩散方程中接触缺陷的同宿蛇行。Nonlinearity 38, 11 (2025), 论文编号115001, 36.[46] Sandstede, B., and Scheel, A. 振荡介质中的缺陷：走向一种分类。SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 3, 1 (2004年), 1–68.[47] Spear, R., L. 海王星-海卫一圆型限制性三体问题中的平面异宿连接。博士论文，科罗拉多大学，2021年。[48] Sprenger, P., Bridges, T. J., and Shearer, M. 连接不同周期波的Kawahara方程行波解。J. Nonlinear Sci. 33, 5 (2023年), 论文编号79, 39.[49] Subramanian, P., Archer, A. J., Knobloch, E., and Rucklidge, A. M. 三维二十面体相场准晶。Phys. Rev. Lett. 117 (2016年8月), 075501.[50] Subramanian, P., Archer, A. J., Knobloch, E., and Rucklidge, A. M. 无亚临界性的蛇形分岔：作为非拓扑缺陷的晶界。IMA J. Appl. Math. 86, 5 (2021年), 1164–1180.[51] Thompson, J. 通过折叠序列作出的稳定性预测。Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A 292 (1979), 1–23.

[52] Trefethen, L. N. *MATLAB*中的谱方法，软件、环境与工具第10卷。工业与应用数学学会（SIAM），宾夕法尼亚州费城，2000年。[53] Uecker, H., Wetzel, D., and Rademacher, J. pde2path——用于二维椭圆系统中延拓与分岔的MATLAB软件包。数值数学：理论、方法与应用 *7* (2014年), 58–106.[54] Wilczak, D., and Zgliczynski, P. 平面限制性圆型三体问题中周期轨道之间的异宿连接——一项计算机辅助证明。数学物理通讯 *234*, 1 (2003年), 37–75.[55] Wilczak, D., and Zgliczyński, P. 平面限制性圆型三体问题中周期轨道之间的异宿连接。II. 数学物理通讯 *259*, 3 (2005年), 561–576.[56] Zhang, W., Krauskopf, B., and Kirk, V. 如何寻找两条周期轨道之间的余维一异宿环。离散与连续动力系统 *32*, 8 (2012年), 2825–2851.