arXiv:2602.05685v1 [math.AG] 5 Feb 2026

# Olsson 扇上的向量丛

LUCA BATTISTELLA、FRANCESCA CAROCCI 和 JONATHAN WISE

Abstract. Artin 扇是锥复形的代数几何实现。我们研究弱凸 Olsson 扇，它从两个方面推广了 Artin 扇：首先，它们允许存在线性空间，因此也涵盖热带环面；其次，它们定义在基对数概形上，从而提供了等变托里几何的相对版本。我们确定了 Olsson 扇具有良好性质的条件，即其几何由组合数据决定。我们着手研究 Olsson 扇上的拟凝聚层，尤其是向量丛：描述了在（细分后的）锥情形下它们的模叠，并指出了一般情形下代数性的一些缺失；Weyl 凸性在这一背景下自然出现。

Contents

1. 引言2 2. 幺半群与对数结构5 确立对数术语，并提供幺半群同态性质与有理多面体锥之间的对应表 3. Olsson 锥与 Olsson 扇16 介绍 Olsson 锥与 Olsson 扇；说明扇由锥沿 ´étale 关系粘合而成 4. 关于环面向量丛31 回顾 Klyachko、Perling 和 Payne 关于环面向量丛及其模空间的结果 5. Olsson 扇上的拟凝聚层38 根据组合数据，阐述 Olsson 锥上的可逆层、拟凝聚层和局部自由层，以及截面和上同调 6. Olsson 扇上的向量丛模空间51 保证 Olsson 扇上向量丛模叠具有代数性的条件，以及代数性失效的示例；并讨论其与 Bruhat–Tits 厦的联系

参考文献 57

日期：2026年1月。

## 1. Introduction

1.1. **Olsson 扇及其 ´étale 层**。我们对一般有限生成饱和对数概形上的相对 Artin 扇概念进行初步研究。我们称之为*Olsson* 扇，因为它们最早出现在 Olsson 关于对数结构与代数栈的研究中 [Ols03]：Olsson 的相对对数结构叠是典型示例。Artin 锥体现了等变托里几何；Olsson 扇则允许在族中进行粘合与变化。

在 $S$ 上的 Olsson 扇可以简洁地定义为带有对数结构的代数栈，且在 $S$上为对数 ´平展。我们的第一个结果断言，Olsson 扇总是具有由 Olsson 锥给出的（严格） ´平展图表，即那些可由$S$的特征幺半群的饱和扩张所表示的 Olsson 扇。

**定理 1.1.** 设 $S$ 为精细饱和对数概形，并设 $\Sigma$ 为 $S$上的 *Olsson* 扇。则 $\Sigma$ 容许由 *Olsson* 锥给出的严格 ´平展覆盖。

参见定理 3.21 的证明，其中涉及对 ´平展层在 Olsson 扇上的研究。下一个定理与定理 1.1 相结合，表明 ´平展层在 Olsson 扇上的上同调是组合地确定的：

**定理 1.2.** 设 $S$ 为精细饱和对数概形，并设 $\pi\colon \sigma \to S$ 为 $S$ 上的一个 *Olsson* 锥。则对所有 ´平展阿贝尔群层 $F$ （在$\sigma$ 上）以及所有 $p > 0$，有 $\mathrm{R}^p\pi_* F = 0$ 。

事实上，在 ´上平展局部地考虑 $S$，这些结果表明，一个´平展层 $F$ 在 Olsson 扇 $\Sigma$ 上（该扇由 Olsson 锥 $\sigma_i \to S$ 覆盖）的上同调，是 Čech 复形 $C^\bullet(\mathcal{U}\ F) = \prod_{(i_0\dots i_n)}\Gamma($ $\sigma_{i_0}\times_\Sigma \sigma_{i_1}\cdots\times_\Sigma\sigma_{i_n},\ F)$ 的上同调。见推论 3.20。

1.2. **弱凸锥与局部自由层**。 最终，我们的目标是在关于对数 Grassmannian 与对数线性级数的工作中使用 Olsson 扇。对于这些应用，我们需要考虑 Olsson 扇上的局部自由层，以及热带环面及其内部的非严格凸锥上的局部自由层。回忆热带乘法群由下式定义

$$\mathbf{G}_{\mathrm{trop}}(S) = \Gamma(S, \bar{M}_S^{\mathrm{gp}});$$

在 $S$ 上的热带环面是有限生成饱和对数概形上的层 $\mathrm{Hom}(X, \mathbf{G}_{\mathrm{trop}})$，其中 $X$ 是一个 ´étale 层，其值为有限生成无挠阿贝尔群，称为该环面的特征群。为以统一的方式表述同时适用于 Olsson 锥和热带环面的结果，我们引入弱凸 *Olsson* 锥，即热带环面中凸但不一定严格凸的区域。

在接下来的几个结果中，我们回顾一个重要构造。设 $S$ 是一个精细饱和对数概形，且 $\alpha$ 是 $M_S^{\mathrm{gp}}$ 的一个截面。$\alpha$ 在投影 $M_S^{\mathrm{gp}} \to M_{\mathrm{gp}S}$ 下的原像是一个 $\mathrm{O}_S^*$-扭子，记为 $\mathrm{O}_S^*(-\alpha)$。我们将 $\mathrm{O}_S(\alpha)$ 的 $\mathrm{O}_S^*$-等变态射 $\mathrm{O}_S^*(-\alpha) \to \mathrm{O}_S$ 层记作 $\mathrm{O}_S(\alpha)$。

当 $M_\sigma^{\mathrm{gp}}$ 是一个在 $S$ 上的 Olsson 推行，我们将 $M_S^{\mathrm{gp}}$ 的截面称为常数。

**定理 1.3**。设 $S$ 是一个精细饱和对数概形。设 $\pi: \sigma \to S$ 是 $S$上的一个普遍满射弱凸 *Olsson* 锥。那么，在 $S$的严格 *étale* 拓扑下局部地，$\sigma$ 上的每个可逆层$\mathcal{L}$ 都同构于 $\pi^*L(\lambda)$，其中 $S$ 上有某个可逆层 $L$，且 $\sigma$上有某个线性函数 $\lambda$。线性函数 $\lambda$ 由$\mathcal{L}$ 唯一确定，除加上常数外。此外，对于所有 $p > 0$ 都有$\mathrm{R}^p\pi_*\mathcal{L} = 0$，且自然同态

$$\varinjlim_{\mu \le \lambda} L(\mu) \to \pi_*\mathcal{L}$$

是一个同构。（余极限取遍所有常数 $\mu \le \lambda$。）

**定理 1.4**。设 $S$ 是一个精细饱和对数概形。设 $\sigma$ 是 $S$上的一个普遍满射弱凸 *Olsson* 锥。设$\mathcal{E}$ 是 $\sigma$上的一个局部自由层。那么存在一个严格 *étale* 覆盖 $f: S' \to S$，使得 $f^*\mathcal{E}$ 分裂为可逆层的直和。

定理 1.3 与 1.4 完整刻画了弱凸锥上的局部自由层，从而推广了 Klyachko 对仿射托里克簇上的等变向量丛的描述。[Kly89]。

**推论 1.5**。设 $S$ 是一个有限型、饱和对数概形。设 $\sigma$ 是 $S$ 上一个普遍满射、整、弱凸的 *Olsson* 锥，且 $\Sigma$ 是 $\sigma$ 的一个整细分。那么，$S$ 上以 $\Sigma$ 上的局部自由层为参数的群胚纤维范畴是一个代数栈。

定理 1.3与 1.4可以直截了当地推广到 Olsson 扇。我们没有费心表述这些结论，因为推论 1.5 并不能推广：Olsson 扇上的局部自由层所构成的栈往往不是代数栈（见第 6 节）。不过，我们认为下面的推论或许能为如何更广泛地理解 Olsson 扇上的向量丛提供一些线索：

**推论 1.6.** 设 $S$ 为一个精细饱和对数概形。设 $T$ 为 $S$ 上由弱凸 *Olsson* 锥 $\sigma$ 张成的热带环面。设 $\tau$ 为 $\sigma$ 在 $T$ 中的 *Weyl* 凸包。则 $\sigma$ 上的任意局部自由层均可唯一地（在唯一同构意义下）延拓到 $\tau$。

详见定义 6.11 和推论 6.12 。

1.3. **历史**。 概形 $X$ 上的环面结构是一个开子集 $U \subset X$，使得偶对（$X$，$U$）在 $'$平展拓扑中局部同构于（$Y$，$V$），其中$Y$ 是环面簇，而 $V$ 是其稠密环面。借助局部同构，局部模型（$Y$，$V$）的扇的组合学对应于（$X$，$V$）的局部几何特征 [KKMSD06]。

Kato 指出 [Kat94]利用对数几何可以更直接地建立这种联系。对数概形 $X$ 具有双重身份：既通过其结构层成为一个概形$\mathcal{O}_X$，也通过其特征幺半群成为一个幺半空间$M_X$。Kato 证明，概形的基本理论可以用幺半群重述——沿开子集粘合幺半群的谱——从而得到一种理论，其研究对象如今称为***Kato*** 扇 [ACM+16] 或幺半概形 [Ogu18]。由于对数概形也是幺半空间，因此可以描述从对数概形到 Kato 扇的态射，进而通过拉回，将扇上的组合构造转移到对数概形上。例如，环面爆破可由 Kato 扇的细分拉回得到。

Kato扇的构件是幺半群的谱。每个幺半群的谱都表示一个作用于对数概形上的函子，而 Olsson 证明，由幺半群 $P$ 表示的函子总可以由一个代数栈表示 $\mathcal{A}_P$，并带有对数结构。Olsson 利用这些局部模型构造了一个对数结构的模叠 [Ols03]。

Olsson 的代数栈 $\mathcal{A}_P$ 也可以拼接起来，从而得到表示 Kato 扇的代数栈 [AW18、ACM+16、CCUW20]。由于一次缺乏灵感的同名化，这些代数栈后来被称为***Artin*** 扇。

最初，Artin 扇的用途在于确保某些涉及代数几何与组合学交互的构造具有代数性，例如映入扇的稳定映射。这些应用只涉及从 对数概形 到 扇的映射。因此，没有必要深入考虑定义 Artin 扇所基于的底。然而，最近人们逐渐认识到，从 扇到代数栈的映射同样包含重要信息，涉及稳定性 [Hei17、HL18]，良模空间的存在性 [AHLH23],以及 Donaldson–Thomas理论 [BHLNK25]。

最后，在对数 Gromov–Witten 理论和 Donaldson–Thomas理论中所研究的正规交叉对的扩张 $X^\dagger$ [Ran22、MR24]，是 Olsson 扇（在 $X \times \mathrm{Spec}(k,$ **自然数)** 上）的实例。对这些扇上的凝聚的层族的研究，是新颖的对数层理论的核心 [MR24、MR25、Ken23、KR25]。相关地，Olsson 扇似乎也是讨论 Lafforgue 对薄Schubert 胞腔的紧化的自然语言 [Laf03]。

除了对数线性级数（将在下文描述）之外，这些应用也构成了本研究的动机。

1.4. 对数线性级数。我们的初始动机来自以下经典问题：当一条光滑曲线退化为结点曲线时，线性系的极限是什么？回顾 Eisenbud 和 Harris 对曲线 $X_0$ 的情形给出的答案：该曲线有两个分支 $D$、$E$，且只有一个结点 $q$ [EH86]：设 $L_D$ 为多重次数为 $(d, 0)$ 的线丛，而 $L_E$ 为其多重次数为 $(0, d)$ 的扭转；精细极限线性系由两个截面向量空间 $V_D \subseteq H^0(D, L_D)$ 和 $V_E \subseteq H^0(E, L_E)$ 构成，它们在结点 $q$ 处的消失序列相匹配。截面在 $q$ 处的消失行为使 $V_D$ 和 $V_E$ 成为滤过向量空间，而所谓匹配，恰好意味着相伴分次向量空间之间（经过反转和平移后）的一个同一化 $\mathrm{gr}(V_D^\bullet) \cong \mathrm{gr}(V_E^{d-\bullet})$。这些数据恰好等价于 $\Gamma = \mathbf{A}^1 \bigsqcup_{B\mathbf{G}_m} \mathbf{A}_1$, 上的一个向量丛的数据；当赋予自然的对数结构时，$\Gamma$ 就是结点曲线 $X_0$ 的 Olsson 扇。

因此，我们转而考虑参数化下列数据的模问题，我们称之为对数线性级数 [BCWb]：一条对数曲线 $X$，其 Olsson 扇为 $\Gamma$；一个对数线丛 $L$，定义在 $X$上；以及一个向量子丛 $V$，即 $L$ 到 $\Gamma$的前推的子丛。在研究该模问题的代数性时，我们进而研究 Olsson 扇上的向量丛。

我们在下文第6 节中证明，单独参数化 $V$ 的叠一般不是代数的。因此，对数线性级数的代数栈的构造将需要对 $V$加以限制。我们将这一额外限制的进一步讨论留待今后的工作，但我们指出，适当受限的向量丛的一族例子可见于 Lafforgue 对薄舒伯特胞腔的紧化上的重言丛 [Laf03，BCWa]。

1.5. **致谢**。本文是我们持续探索如何从对数模空间的视角理解极限线性级数这一努力的一部分。我们受益于与 Omid Amini、Andreas Gross、Patrick Kennedy-Hunt、Arne Kuhrs、Kevin K¨uhn、Diane Maclagan、Sam Molcho、Navid Nabijou、Sam Payne、Dhruv Ranganathan、Terry Song、Martin Ulirsch、Alejandro Vargas 和 Annette Werner 的交流，也受到了多家机构的热情接待，包括柏林（洪堡）大学、博洛尼亚大学、科罗拉多大学（博尔德分校）、剑桥大学、法兰克福大学、日内瓦大学、海德堡大学、洛桑大学（洛桑联邦理工学院），以及位于莱顿的洛伦兹中心。

## 2. Monoids and logarithmic structures

2.1. **幺半群同态的性质**。给定一个（交换）幺半群 $P$，以及一个带有 $P$-作用的集合 $S$（一个 $P$-集），若存在一个 $p \in P$使得 $p + s_1 = s_2$，则称 $s_1 \leq s_2$ 在 $S$ 中；这尤其适用于 $P$ 本身以及 $P^{\mathrm{gp}}$。在这种情况下，$\leq$是一个预序关系；当且仅当 $P$ 是尖锐时，它才是一个序关系。若 $P$是整的，则 $P$ 的指定等价于预序阿贝尔群 $(P^{\mathrm{gp}}, \leq)$ 的指定。若幺半群 $P$的 $P_{\mathrm{gp}}$上的预序是

全序的（特别地， $P$ 是饱和的）。幺半群赋值是到一个赋值幺半群的幺半群同态。

**定义 2.1.** 幺半群同态 $h\colon P \to Q$ 称为局部[1]，如果 $h^{-1}(Q^*) = P^*$，或等价地 $h^{-1}(Q^+) = P^+$，其中 $P^*$ 表示 $P$ 的单位子群，并且 $P^+ = P \setminus P^*$ 是极大理想。

**定义 2.2.** 设 $P$， $Q$ 为整幺半群。态射 $h\colon P \to Q$ 称为正合，如果下列图表是笛卡尔的：

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{h} & Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^{\mathrm{gp}} & \xrightarrow{h^{\mathrm{gp}}} & Q^{\mathrm{gp}} \end{array}$$

等价地：如果 $x \in P_{\mathrm{gp}}$ 且 $h^{\mathrm{gp}}(x) \geq 0$ 则 $x \geq 0$。同样等价地： $x$， $y \in P^{\mathrm{gp}}$ 在 $Q^{\mathrm{gp}}$ 中有可比较的像，则 $x$ 与 $y$ 在 $P^{\mathrm{gp}}$ 中已经可比较。

**注 2.3.** 正合同态 $h$ 是局部的，并且若 $P$ 是尖锐的（见 [Ogu18，命题 I.2.1.15]；在此情形下， $h^{\mathrm{gp}}$ 也是单射的）。

**例 2.4.** 态射 $s$：**自然数**$^2 \to$ **自然数**，$(a,\ b) \mapsto a + b$ 是局部的，但不是单射。特别地，它不正合。

下一命题借助对偶（严格凸有理多面）锥给出正合性的刻画 $\sigma_P = \mathrm{Hom}(P, \mathbf{R}_{\geq 0})$，当 $P$ 与 $Q$ 均为有限生成且饱和时。为了对不必有限生成的幺半群表述该命题，我们需要 $\sigma_P$ 的一个合适替代。为此，我们使用所有赋值的集合，并认识到 $\sigma_P$ 本质上是秩 1 赋值的集合（仅有的有限型、尖锐赋值幺半群是 0 与 **自然数** [Ogu18，命题 I.2.4。2]）。

**注 2.5.** 赋值幺半群的谱关于特殊化关系是全序的；因此，可以把 $P$ 的高秩赋值在几何上理解为在 $\sigma_P$ 的一个细分中选取一个锥旗。

在陈述该命题之前，我们需要一个术语。给定幺半群同态 $h\colon P \to Q$，我们称赋值 $g\colon Q \to W$ 延拓赋值 $f\colon P \to V$，如果存在局部态射 $V \to W$ 使下列图表交换：

[1]这一条件有时也（尤其是在第三位作者的著作中）被称为尖性。此处我们沿用 [Ogu18]的术语。

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{h} & Q \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ V & \longrightarrow & W \end{array}$$

**命题 2.6.** 假设 $h: P \to Q$是饱和幺半群的同态。考虑下列条件：

*(i)* 同态 $h$ 是正合的。*(ii)* $P$ 的每个赋值都可延拓为 $Q$的一个赋值。*(iii)* $P$ 的每个秩 1 赋值都可延拓为 $Q$的一个赋值。*(iv)* $P$ 的每个秩 1 赋值都可延拓为 $Q$的一个秩1 赋值。

条件*(i)* 和*(ii)* 等价，且推出*(iii)*。若 $P$ 有限生成，则*(iii)* 等价于*(i)* 和*(ii)*。若 $Q$ 有限生成，则*(i)* 推出*(iv)*。若 $P$ 和 $Q$ 都有限生成，则所有条件等价。

**推论 2.7**。设 $h$: $P \to Q$ 是整、饱和、有限生成幺半群之间的一个同态，设 $\phi$: $\sigma_Q \to \sigma_P$ 是与 $h$对偶的严格凸有理多面锥之间的同态。那么， $h$ 是正合的，当且仅当 $\phi$ 是满射。

命题 2.6 的证明。首先，假设 $P$ 的每个赋值都可以延拓为 $Q$ 的一个赋值，并且 $x \in P^{\mathrm{gp}}$ 是满足 $h^{\mathrm{gp}}(x) \geq 0$ 的元素。那么，对于 $Q$ 的所有赋值 $g$，都有 $g(h^{\mathrm{gp}}(x)) \geq 0$，因此对于 $P$ 的所有赋值 $f$，都有 $f(x) \geq 0$。但是，如果对于 $P$ 的每个赋值都有 $f(x) \geq 0$，那么 $x \geq 0$,[2]，所以我们得出结论， $h$ 是正合的。因此 (ii) 推出 (i)。

如果 $P$ 是有限生成的（因此 $P/P^*$ 对偶于一个严格凸有理多面锥），那么 $x \geq 0$ 当且仅当 $f(x) \geq 0$ 对 $P$ [Ful93，第 9] 页中所述的所有秩 1 赋值都成立。因此，上一段论证的最后一步只要求 $f$ 在 $P$ 有限生成时具有秩 1。因此，当 (iii) 推出 (i) 时， $P$ 是有限生成的。

现在假设 $h$ 是正合的，并令 $f$ 为 $P$的一个赋值。我们希望证明 $f$可延拓为 $Q$ 的一个赋值。由于幺半群的正合态射的推出仍然正合 [Tsu19，命题 I.3.2 (2)]，通过沿 $f$ 作推出，我们可将问题归约到 $P$ 是赋值的情形。由于 $h$ 是局部的（注 2.3）， $Q$的任意局部赋值都可延拓到$f$。这表明 (i) 推出 (ii)。

如果 $Q$ 是有限生成的，且 $f$ 是秩 1 赋值，则上一段的论证可归结为情形 $P$ =**自然数**。在此情形下， $Q$ 是有限生成的，因此

[2]这可由 Hahn 嵌入定理推出 [Hah07]，，但直接证明更快：利用 Zorn 引理，取 $V$ 的一个子幺半群 $P^{\mathrm{gp}}$，使其在满足 $P[-x] \subset V$ 且该包含为局部的所有子幺半群中关于包含关系极大。于是 $f$: $P \to V$ 是一个赋值，并且 $f(x) \leq 0$。然而根据假设， $f(x) \geq 0$ 也成立。由于 $P[-x] \to V$ 是局部的， $x$ 必须是 $P[-x]$ 的单位元，因此 $x \in P$。另见 [Ogu18，命题 I.2.4.1]。

它具有一个局部秩 1 赋值，该赋值自动延拓 $f$。这表明(i)蕴含(iv) 当 $Q$是有限生成的。

由于 (iv) 显然蕴含 (iii)，因此当 $P$ 和 $Q$都有限生成时，我们得出所有条件彼此等价。□

**例 2.8**。令 $Q = \mathbf{N}x + \mathbf{N}y$，并令 $P$ 为 $Q$ 中满足 $a = b = 0$ 或 $b > 0$ 的 $ax + by$ 的集合。则 $P \hookrightarrow Q$ 不是正合的，但 $P$ 的每个秩 1 赋值都可延拓为 $Q$ 的秩 1 赋值。$P$ 存在一个秩 2 赋值，它不能延拓为 $Q$ 的赋值，并且其中对于所有整数 $n$，$y > 0$、$x < 0$ 和 $nx \leq y$。

下一个定义纳入了 [Kat89，命题 41]。

**定义 2.9**。设 $P$ 和 $Q$ 为整幺半群。称态射 $h\colon P \to Q$ 为整，如果满足以下等价条件：

(1) 给定 $x_1$，$x_2 \in P$和 $y_1$，$y_2 \in Q$ 使得 $h(x_1) + y_1 = h(x_2) + y_2$，则存在 $x_3$，$x_4 \in P$和 $y \in Q$，使得 $y_1 = h(x_3) + y$，$y_2 = h(x_4) + y$，并且$x_1 + x_3 = x_2 + x_4$。

(2) 对于每个 $P \to P'$满足 $P'$整的态射，推出 $P' \oplus_P Q$是整的。此外，如果 $h$ 是单射的，则它是整的，当且仅当诱导的环同态 **整数环**$[P] \to$ **整数环**$[Q]$ 是平坦的（等价地，在对任意域进行基变换后仍然是平坦的）。

我们将 $X_P$所对应的环面簇记为谱 **整数环**$[P]$。

**Re注 2.10**。局部的整态射是正合的 [Tsu19，命题 I.2.11 ].

**例 2.11**。同态

$$h : P = \mathbf{N}x+\mathbf{N}y \longrightarrow Q = \mathbf{N}x+\mathbf{N}y+\mathbf{N}(z-x)+\mathbf{N}(z-y) \subset \mathbf{Z}x+\mathbf{Z}y+\mathbf{Z}z$$

是正合的，但不是整的。事实上，$h(x) + (z - x) = h(y) + (z - y)$，但对于 $z - x$ 或 $z - y$，都不存在形如 $h(p) + q$ 的非平凡分解。

注 2.12。设 $h : P \to Q$ 是有限型尖锐幺半群之间的整态射。则定义 2.9 (1) 表明，$Q$ 在由 $P$ 的作用所确定的偏序下是滤过的。由于 $Q$ 也是诺特的，这意味着 $Q$ 是一个自由的 $P$-模 [Kat00, §1], ，也就是说，存在一个子集 $S \subseteq Q$，使得函数 $P \times S \to Q, (x, s) \mapsto h(x) + s$ 是双射。这样的子集 $S$ 称为 $Q$ 作为 $P$ 上的模的基；显然，$S$ 与 $Q/P$ 一一对应。当且仅当 $h$ 是分裂单射时，基才可以是 $Q$ 的子幺半群。

在下一个命题中，我们考察整性的若干几何后果。对于该命题，请回忆：由子集 $S$ 对 $P$ 进行局部化所得的是 $P$的尖锐商 $P[-S]^\sharp = P[-S]/P[-S]^*$。同态 $P \to P[-S]^\sharp$在所有从 $P$ 到尖锐幺半群 $R$、且将 $S$ 映到 0 的同态中具有初始性。类似地，我们可以将态射 $h$的局部化定义为：$P \to Q$ 的局部化

在 $h^{-1}(0)$ 处的局部化，其中 $Q$是尖锐的。如果 $\sigma$ 是与有限型饱和幺半群 $P$对偶的有理多面体锥，且 $\tau$ 是 $\sigma$的一个面，那么 $\tau$ 与以下幺半群对偶：由在 $\tau$上为零的线性函数构成的子幺半群对 $P$ 进行局部化所得的幺半群。

**命题 2.13**。设 $h\colon P \to Q$ 是有限生成、饱和、尖锐幺半群之间的同态。考虑以下条件：

> ***(i)*** 同态 $h$ 是整的。***(ii)*** 对于 $Q$ 的每个局部化 $Q \to Q'$，复合 $P \to Q \to Q'$ 的局部化是正合的。***(iii)*** 设 $h'\colon P' \to Q$ 是 $P \to Q$ 的局部化。对于每个 $q \in Q^{\mathrm{gp}}$，若存在某个 $p \in (P')^{\mathrm{gp}}$ 使得 $h'(p) \leq q$，则存在一个极大的这样的对象。

那么，*(i)* 与*(iii)* 等价，且蕴含*(ii)*。

我们将在下文的命题 2.23中看到，在拟饱和假设下，这三个条件彼此等价。

证明。若 $h$ 是整的，且 $Q \to Q'$ 是一个局部化，则局部化 $P' \to Q'$由 [Tsu19，命题 I.2.3 和命题 I.27]可知是整的。由于 $P' \to Q'$ 按构造是局部的，注2.10 表明它是正合的。因此(i) 蕴含(ii)。

为了证明 (iii) 蕴含 (i)，我们使用 Kato 的等式判据（定义 2.9 ((1))）。设 $h(x_1) + y_1 = q = h(x_2) + y_2$。令 $x$ 为 $P^{\mathrm{gp}}$ 的一个极大元，使得 $h(x) \leq q$。设 $y = q - h(x)$，由于 $h(x) \leq q$，故它属于 $Q$。令 $x_3 = x - x_1$和 $x_4 = x - x_2$。由于 $x \geq x_1$、$x_2$，它们属于 $P$。于是 $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ 和 $h(x_3) + y = q - h(x_1) = y_1$，并且 $h(x_4) + y = q - h(x_2) = y_2$，如所需。

另一方面，为了证明 (i) 蕴含(iii)，我们不失一般性地假设（同样根据 [Tsu19，命题 I.2.3 和命题 I.2.7]） $h$ 是局部的。Kato 的等式判据蕴含，下界集合

$$P_{\leq q} = \{x \in P^{\mathrm{gp}} \mid h(x) \leq q\}$$

要么为空，要么是滤子的。假设它非空。通过将 $x$ 发送到 $q-x$， $P_{\leq q}$ 中的一个升序列 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots$ 会诱导出一个降序列 $q - x_1 \geq q - x_2 \geq \cdots$（下界为 0）。由于 $Q$ 是有限生成的，任何这样的序列都会稳定。由于 $h$ 是单射的，这意味着原序列也会稳定。因此， $P_{\leq q}$ 是一个升链稳定的滤子偏序集，因而具有一个极大元。□

我们考察条件(iii)，即下界的存在性。我们将 $\inf(q) = \sup P_{\leq q}$记作 $P_{\leq q}$的最大值，并约定当 $\inf(q) = -\infty$ 为空时 $P_{\leq q}$ 为无穷大。如果 $\inf(q)$ 存在且 $\inf(q) \neq -\infty$，我们也将 $\inf(q) =$ 记为 $\min(q)$。我们证明下界在局部化下表现良好：

**引理 2.14**。设

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q & \longrightarrow & Q' \end{array}$$

是有限生成、饱和、尖锐幺半群的一个交换方块，其中水平态射是局部化。设 $q$ 是 $Q$ 的一个元素，并设 $q'$ 是它在 $Q'$中的像。那么$\inf(q')$ 是$\inf(q)$ 的像，前提是后者存在。

证明。 将 $P' = P[-p]^\sharp$写作某个 $p \in P$。若 $x \in P^{\mathrm{gp}}$表示 $P'_{\leq q'}$的一个元素，则对某个整数 $n \geq 0$，有 $x \leq q + np$。因此 $x - np \leq q$，所以 $x - np$ 属于 $P_{\leq q}$。于是 $P_{\leq q}$ 映满 $P'_{\leq q'}$。特别地，若 $P_{\leq q} = \varnothing$，则 $P'_{\leq q'} = \varnothing$，因此$\inf(q') = -\infty$，当且仅当 $\inf(q) = -\infty$。此外， $P'_{\leq q'}$ 上的序由 $P_{\leq q}$上的序诱导，所以若 $P_{\leq q}$和 $P'_{\leq q'}$ 非空，则 $P_{\leq q}$ 的极大元必定映到 $P'_{\leq q'}$的极大元。□

以下条件确保所有下确界均有限。

**定义 2**。**15** [Ogu18，定义 I.4.3。1]。整幺半群的态射 $h\colon P \to Q$ 称为竖直（或有界）的，如果 $\mathrm{coker}(h)$，或者等价地， $Q$ 在 $Q^{\mathrm{gp}}/P_{\mathrm{gp}}$中的像是一个群。等价地，对于每个 $q \in Q$，存在 $p \in P$ 使得 $q \leq h(p)$。

**推论 2.16**。设 $h\colon P \to Q$ 是有限型、饱和且尖锐幺半群之间的一个整且竖直的同态。那么每个 $q \in Q^{\mathrm{gp}}$ 都有一个最小值$\min(q) \in P^{\mathrm{gp}}$。

现在回到命题（ii）的条件2.13。由推论 2.7，这意味着每个面 $\tau$ 都 $\sigma_Q$ 满射到 $\sigma_P$的一个面上。这个条件等价于相应环面簇态射的纤维的等维性[AK00，引理 4。1]。此外，如果 $X_P$ 是一个光滑环面簇，那么根据奇迹平坦性，我们就得到了一个用锥刻画整性的结果。不过一般而言，锥上的满射性弱于整性，以下例子将说明这一点。

**例 2.17.** 令 $P =$ **自然数**$u \oplus$ **自然数**$v \oplus$ **自然数**$w/(u + w = 2v)$，且 $h\colon P \to Q =$ **自然数**$^2$ 映射 $u \mapsto (2,0)$ $v \mapsto (1,1)$ $w \mapsto (0,2)$。那么 $h$ 是正合的，其局部化也正合：将 $u$ 或 $w$取逆后，我们得到恒等态射 **自然数** $\to$ **自然数**；进一步取更多元素的逆后，我们得到 0。另一方面， $h$ 不是整的： $Q$ 显然不是一个自由的 $P$-模；或者说， $h(u) + (0,1) = h(v) + (1,0)$成立，但 $(1,0)$ 或 $(0,1)$ 都不存在非平凡分解。

从几何角度看， $Q$ 表示斜率为整数的区间上的整数值函数，而 $P$ 表示斜率为偶数 整数的区间上的整数值函数。元素(2,1)表示在区间端点处取值分别为2和1的函数

，而 $P_{\leq(2,1)}$ 中的函数(2,0)和(1,1)没有共同的上界。

接下来我们引入饱和性，它是对整性的加强，并且具有更清晰的几何解释。我们概述 [Tsu19，定义 I.3.5、定义 I.3.7、命题 I.3。8]：

**定义 2.18.** 设 $h\colon P \to Q$ 是整幺半群的一个同态。设 $Q'$ 是整幺半群范畴中沿乘以-$n$ 同态 $[n]\colon P \to P$的 $h$ 的推出。乘以-$n$ 的同态 $[n]\colon Q \to Q$唯一地经由 $h'\colon Q' \to Q$分解。若对每个正整数 $n$，上述态射$h'$ 都是正合的，则称 $h$为拟饱和 。

**引理 2.19** [Mol21，定理 2.1。4]。 假设 $P$ 和 $Q$ 都是有限生成、整、尖锐的幺半群，并且 $h\colon P \to Q$ 是正合且拟饱和的。那么，每个同态 $P \to$**自然数** 都经由 $Q$分解。

证明。假设 $v\colon P \to$ 自然数 是一个我们希望经由 $Q$ 分解的同态。我们可以将 $P$ 替换为自然数，并将 $Q$替换为其沿 $v$ 的推出（在整幺半群的范畴中）。因此我们假设 $P =$ 自然数。特别地， $P$ 是饱和的，故由 [Tsu19，命题 I.3.9] 可知 $Q$ 是饱和的。我们将 $Q$ 替换为一个极大局部化，使得 $P \to Q$ 仍然正合；由 [Tsu19，命题 I.3.18]，它在 $P$上仍然拟饱和。于是 $Q$ 的对偶是一个严格凸的有理多面锥，它满射到 $\mathbf{R}_{\geq 0}$ 上，并且（由于我们选取了保持正合性的极大局部化）它没有同样满射到 $\mathbf{R}_{\geq 0}$上的真面。因此我们可以将 $Q$ 等同于自然数，并将 $P \to Q$ 等同于某个正整数 $n$的乘以$n$ 映射。但该映射仅对 $n = 1$ [是饱和的，见 Tsu19，引理 I.5.2]。□

**注 2.20.** 对偶地，引理 2.19 指出，正合的拟饱和态射在整格上是满射。

**例 2.21.** 从**自然数**到自身的乘法 $n$ 是正合的，但不是拟饱和的。

现在我们总结 [Tsu19，定义 I.3.12、命题 I.3.14、命题 I.4.1、定理 I.6。3]:

**定义 2.22.** 饱和幺半群的同态 $h\colon P \to Q$ 若是整的，且满足以下任一等价条件，则称为饱和的：

(1) $h$是拟饱和的。(2) 对于每个饱和幺半群 $P'$ 以及任意态射 $P \to P'$，整幺半群范畴中的推出$P' \oplus_P Q$ 是饱和的。(3) 对于任意 $p \in P$、 $q \in Q$和满足 $h(p) \leq nq$的**自然数** $n \in$ ，存在一个 $p' \in P$，使得 $p \leq np'$ 且 $h(p') \leq q$。

(4) 对于任意 $p \in P^+$、 $q \in Q$和满足 $h(p) \leq nq$的**自然数** $n \in$ ，存在一个 $p' \in P^+$ ，使得 $h(p') \leq q$。

以下命题实质上已包含于 [Mol21的定理 2.1 中。4], 但我们在证明中补充了一些细节。

**命题 2.23**。 设 $h\colon P \to Q$ 是有限生成、饱和、尖锐幺半群之间的同态。若 $h$ 是拟饱和的，则命题*2.13* 中的条件彼此等价，并且它们都等价于 $h$的饱和性。

证明。 我们需要证明，在附加假设(ii) 蕴含命题 (iii) 的 2.13 的条件下， $h$ 是拟饱和的。我们不妨假设$h$是局部的（将 $P$替换为其局部化 $P'$即可，其中 $P \to Q$；注意到 $P \to P'$是一个整态射）。

设 $q \in Q$。我们将下界集合 $P_{\leq q} \subset P$简记为 $S$。令 $p$为 任意一个 元素，属于 $S$。令 $Q'$ 为 $Q$ 的最小局部化，其中 $q = h(p)$。令 $P' = P'_p$为 $P \to Q \to Q'$ 的局部化。于是 $P' \to Q'$根据 (ii)是正合的。我们论证 $P \to P'$ 在从 $P$到整饱和尖幺半群的同态中具有泛性质， $R$ 满足 $p \geq S$ 属于 $R$。

事实上，设 $P \to R$ 是这样一个同态。设 $Q_R$ 是 $P \to Q$沿 $P \to R$的推出，并设 $Q'_R$ 是 $P \to Q'$的推出。则 $Q'_R$ 是 $Q_R$ 的最小局部化，使得 $q$ 与 $h$（$p$）的像一致。为证明 $P \to R$经由 $P'$分解，只需证明 $R \to Q'_R$ 是局部的：于是 $P \to R$ 经由 $P \to Q'_R$的局部化分解，而该局部化是 $P'$的一个局部化。

我们验证诱导映射 $R \to Q'_R$ 是局部的。假设 $x \in R$ 在$Q'_R$中的像为0。则存在正整数 $n$ ，使得 $x \leq n$（$q - p$）在 $Q_R$中成立。但 $R \to Q_R$是拟饱和态射 $P \to Q$ 的推出，故由[Tsu19，命题I.3.6], 知其为拟饱和，且 $Q_R \to Q'_R$ 是一个局部化，故由 [Tsu19，引理I.3.17]知其为拟饱和。因此 $R \to Q'_R$ 是拟饱和态射的复合，故为拟饱和 [Tsu19，命题I.3.6]。因此 [Tsu19，命题I.4.1] 蕴含存在 $y \in R$ ，使得 $x \leq ny$ 且 $y \leq q - p$ 在$Q_R$中。最后， $p + y \leq q$，故 $p$在 $S$中关于 $R$的极大性蕴含 $y = 0$。因此 $x = 0$亦然。

现在假设 $v$ 是 $P$的局部赋值。由于根据假设 $h$ 是正合的，依据命题 2.6，$v$ 可延拓到 $Q$ 。于是 $v(S)$ 不大于 $v(q)$，因此根据赋值幺半群的定义，存在某个 $p_0 \in S$ ，使得 $v(p_0) \geq v(S)$。由 $P'_{p_0}$的泛性质，赋值 $v$可经由 $P'_{p_0}$分解。但这意味着 $P \to P'_{p_0}$是局部的。由于它被定义为一个局部化，这意味着它是一个同构。因此 $p_0 \geq S$ 属于 $P$。□

**定理2.24**。 设 $h\colon P \to Q$ 是有限生成、饱和、尖锐幺半群之间的单同态。以下条件等价：

*(i)* 同态 $h$ 是饱和的；*(ii)* 环面簇态射 $h^\vee\colon X_Q \to X_P$ 是平坦的且纤维约化；*(iii)* 对每个环面除子 $D_\rho \in X_P$，其在 $h^\vee$ 下的原像在一般点处约化；*(iv)* 锥态射 $\phi\colon \sigma_Q \to \sigma_P$ 是 弱半稳定 的，按[Mol21定义2.1中的意义。2]，也就是说（其中 $N_P = \mathrm{Hom}(P^{\mathrm{gp}}, \textbf{整数环})$）：

- $\sigma_Q$ 的每个面 $\tau$ 都满射到 $\sigma_P$ 的一个面上，并且
- 幺半群 $\phi(\tau \cap N_Q) = \phi(\tau) \cap N_P$ 相等。

证明。 等价关系 (1)⇔(2)⇔(3) 是 [Tsu19，定理 II.4.2 和 II.4 中所证明判据的特例。11]命题2.23与命题 2.6及引理 2.19结合起来，表明 (i) 与 (iv)等价。 □

**例 2.25**。 在研究退化时有用的一类重要态射是 分割态射（带边界）：它是对复合、推出和有限乘积封闭的精细幺半群态射中包含小对角态射的最小一类 $\Delta_k\colon$ **自然数** $\to$ **自然数**$^k$（分别为和零截面$0_k\colon$ $0 \to$ **自然数**$^k$） [Gil16，定义 5.8。1]。若 $h\colon P \to Q$ 是分割态射，则它是饱和的；当且仅当它没有边界时，它是竖直的 [Gil16，命题 5.8。6]。

2.2. **对数几何与代数栈**。

**定义 2.26.** 设 $S$ 为一个概形。一个对数结构在 $S$ 上是一个 ´平展（等价地，fppf [Ols03，定理 A.1]）幺半群层 $M_S$ 在 S 上，并带有一个对数[3] 同态 $\varepsilon\colon M_S \to \mathcal{O}_S$，其中$\mathcal{O}_S$ 被赋予其乘法幺半群结构。商 $M_S/\varepsilon^{-1}\mathcal{O}_S^*$ 称为特征幺半群层，并且¯记为 $M_S$。

对数结构态射是幺半群层的态射 $f\colon M_S \to M'_S$，使得 $\varepsilon' \circ f = \varepsilon$。

对数概形 $S$是一个对（$S$，$\epsilon\colon M_S \to \underline{\mathrm{O}}_S$），其中 $S$是一个概形，$\varepsilon$是 $S$上的对数结构。

对数概形态射（$S$，$M_S$）$\to$（$T$，$M_T$）是概形态射$f\colon S \to T$，连同一个同态 $f^{-1}\underline{M}_T \to M_S$，使得该方块

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}M_T & \longrightarrow & f^{-1}\mathcal{O}_T \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_S & \longrightarrow & \mathcal{O}_S \end{array}$$

可交换。对数概形范畴通过遗忘对数结构的投影纤维化于概形之上。代数

[3]也就是说，$\mathrm{O}_S$ 中的每个单位元在 $M_S$中都有唯一的原像。

空间和代数栈被定义为该投影的笛卡尔截面。关于代数栈上的对数结构，参见[Ols03，§5] 。

设 $S$ 是一个对数概形。在 $S$ 上存在一个阿贝尔群层的正合列：

$$0 \to \mathcal{O}_S^* \to M_S^{\mathrm{gp}} \to \bar{M}_S^{\mathrm{gp}} \to 0$$

由此可知，对于每个局部截面 $\alpha \in M_{\mathrm{gp}S}$，$M_S^{\mathrm{gp}} \to M_{\mathrm{gp}S}$ 的纤维是一个 $\mathsf{O}_S^*$-扭子。我们将此扭子记为 $\mathsf{O}_S^*(-\alpha)$，并将 $\mathsf{O}_S(\alpha)$ 记作 $\mathsf{O}_S^*$-等变态射 $\mathsf{O}_S^*(-\alpha) \to \mathsf{O}_S$ 所构成的可逆层。当 $\alpha \in M_S$ $\varepsilon\colon M_S \to \mathsf{O}_S$ 的限制映射到该纤维时，会得到一个 $\mathsf{O}_S^*$-等变态射 $\varepsilon_\alpha\colon \mathsf{O}_S^*(-\alpha) \to \mathsf{O}_S$，从而得到 $\mathsf{O}_S(\alpha)$ 的一个截面 $\varepsilon_\alpha$；我们也将其视为可逆层之间的态射 $\varepsilon_\alpha\colon \mathsf{O}_S(-\alpha) \to \mathsf{O}_S$。

**定义 2.27.** 设 $S$ 为一个对数概形。若 $S$ 上的幺半群常值层 $P$ 配备幺半群同态 $\varphi\colon P \to \mathsf{O}_S$，且 $M_S$ 是使 $\varphi$ 分解经过的初始对数结构 $\varepsilon\colon P^a \to \mathsf{O}_S$，则称其为 $M_S$ 的 **图表**。该初始对数结构可显式构造为推出 $P \oplus_{\varphi^{-1}\mathcal{O}_S^*} \mathsf{O}_S^*$.

**定义 2.28.** 有限型（且饱和）对数概形是带有对数结构 $\varepsilon\colon M_S \to \mathsf{O}_S$ 的概形，它允许由映射 $U \to S$ 构成的 ′平展覆盖，使得 $M_S|_U$ 具有由有限生成的整（且饱和）幺半群给出的图表。

对数概形态射 $T \xrightarrow{f} S$ 等价于一个概形态射（用同一符号 $f$ 表示），连同对数结构态射 $f^*\colon f^*M_S \to M_T$，其中 $f^*M_S = f^{-1}M_S \oplus_{f^{-1}(\mathcal{O}_S^*)} \mathsf{O}_T^*$。若 $f^*\colon f^*M_S \to M_T$ 是同构，则称该态射为 **严格**。

**定义 2.29.** 设 $S$ 为一个有限生成饱和对数概形。设 $R$ 为 $S$上的一个 ′平展尖锐、饱和幺半群层，并配备一个同态 $M_S \to R$。

我们称 $R$ 相对于 $S$ 拟凝聚，如果存在一个由 ′平展态射$U \to S$ 构成的覆盖，使得作为尖锐、饱和幺半群层，$R\big|_U$ 相对于$\bar{M}_S\big|_U$ 由全局生成元与关系定义。换言之，在过渡到 $S$ 的一个 ′平展覆盖之后，可以找到有限生成、饱和、尖锐幺半群的一个同态 $P \to Q$、一个态射 $P_S \to M_S$，以及一个余笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} P_S & \longrightarrow & \bar{M}_S \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_S & \longrightarrow & R \end{array}$$

其中 $P_S$ 与 $Q_S$ 表示 $S$ 的小 ′平展位点上与 $P$ 和 $Q$相伴的常值层。

我们称 $R$ 相对于 $M_S$为有限型，如果它相对于 $M_S$是拟凝聚的，并且上述 ′平展覆盖中概形 $U$ 上的全局生成元集合可以

¯选为有限的。我们称 $R$ 相对于 $M_S$为有限表示，如果它是有限型¯相对于 $M_S$ ，并且全局关系集合也可以选为有限的。

更一般地，设 $\mathcal{P}$ 是一个在推出下保持稳定的幺半群同态性质。若能找到如上所述的 étale 局部图表，使得 $R$ 具有性质 $\mathcal{P}$ ，则称 $R$ 相对于 $M_S$ 具有性质 $\mathcal{P}$ 。

**注 2.30**。若 $S$ 是一个精细饱和对数概形，且 $R$ 是有限型的¯于 $M_S$ ，那么 R´edei 定理 [Gri01，推论 1。3] 表明 $R$ 也是有限表示的¯于 $M_S$。在更一般的底上，这些概念会有所不同。

有限型（及饱和）对数结构及态射的图表构造见 [Kat89， §2] 以及 [Ols03，§2]。若 $X_P$ 表示与精细饱和幺半群 $P$ 相关联的环面簇（配备其环面对数结构），则 $X_P$ 表示对数概形上的函子

$$S \mapsto \mathrm{Hom}\big(P, \Gamma(S, M_S)\big).$$

若 $T$ 是 $X_P$ 的稠密环面，则 $\mathbf{A}_P = [X_P/T]$ 表示函子

$$S \mapsto \mathrm{Hom}\big(P, \Gamma(S, \bar{M}_S)\big).$$

等价地，代数栈 $S \to \mathbf{A}_P$ 之间的态射（忽略对数结构）可视为一组可逆层 $\mathsf{O}_S(\alpha)$，对每个 $\alpha \in P^{\mathrm{gp}}$ 各有一个，并且在 $\alpha \leq \beta$ 时具有态射 $\mathsf{O}_S(\alpha) \to \mathsf{O}_S(\beta)$，同时满足与 $P^{\mathrm{gp}}$ 的群结构以及由 $P$ 诱导的偏序相容的预期条件。叠 $\mathbf{A}_P$ 称为 $P$ 的 *Artin* 锥 。

W我们概述 [Ols03，定理 1.1 和推论 525] ：

**定理 2.31.** 设 $S$ 是一个有限型对数概形。考虑以下纤维范畴，它纤维化于 $S$-概形范畴之上：

$$\mathbf{Log}_S(f\colon \underline{T} \to \underline{S}) = \{\text{在 } T\text{} \text{上、定义于 } f^*M_S \text{ 之上的有限型对数结构 } \underline{M_T}$$

以严格态射为箭头。则 $\mathbf{Log}_S$ 是上的有限表示代数栈$S$。此外，存在一个可表示的、 ´*étale*且满射的态射：

$$\coprod_{\{U,\beta,h\}} \underline{U} \times_{\mathcal{A}_P} \mathcal{A}_Q \to \mathbf{Log}_S,$$

其中$\underline{U} \to \underline{S}$是 ´*étale*， $\beta\colon P \to M_{S|U}$是一个图表，而 $h\colon P \to Q$ 是有限生成整幺半群的态射。

**注 2.32.** 若限制在精细饱和对数方案的范畴内，则可作出类似的陈述。绝对情形对应于取带有平凡对数结构的$S$ = 谱**整数环** 。形如$U \times_{\mathcal{A}_P} \mathbf{A}_Q$ 的代数栈是本文的核心；我们称之为*Olsson* 预锥。

设 $f\colon S \to T$ 是对数概形态射。则 $f^*$ 诱导特征层的态射 $f^*\colon f^{-1}\bar{M}_T \to \bar{M}_S$。特别地，特征幺半群及其群化的局部截面均可沿对数概形态射拉回。当含义可由上下文明确时，我们通常将此拉回记为 $\alpha \in M_S$（而非 $f^*\alpha$）。

如果 $S$ 是一个精细饱和对数概形，则它有一个极小分层，在其上 $M_S$ 是局部常值的。我们称此为 $S$的对数分层。

**定义 2.33** [MW22，定义 2.2.2.2]。一个精细饱和对数概形$S$ 称为原子，如果它是诺特的，具有唯一的连通闭分层，并且 $\Gamma(X, M_X) \to M_{X,\,x}$ 对闭分层的所有点 $x$ 是一个双射。

## 3. Olsson cones and Olsson fans

Artin 锥是等变托里克几何。Olsson（预）锥是基方案上等变托里克几何的变体。我们研究它们的局部结构，着眼于拟凝聚层与向量丛。我们通过用线性空间（热带环面）延拓 Olsson（预）锥，引入一种温和但有用的推广——弱凸（预）锥。Olsson 扇是通过以可组合地描述的方式粘合 Olsson 锥而得到的。

### 3.1. Olsson 锥。

**定义 3.1.** 设 $S$ 为一个精细饱和对数概形，且 $R$ 为一层有限生成、饱和、尖锐幺半群，位于 $M_S$ 之上，如定义 2.29所述。

定义层 $\Theta_R$，它在精细饱和对数方案 $f\colon T \to S$（位于 $S$ 之上）上，为由幺半群同态 $f^{-1}R \to \bar{M}_T$ 构成的集合，且与来自 $f^{-1}\bar{M}_S$ 的结构同态交换：

$$\Theta_R(T) = \mathrm{Hom}_{f^{-1}\bar{M}_S}(f^{-1}R, \bar{M}_T).$$

**注 3.2.** 如果我们将同样的构造应用于有限生成、饱和、尖锐幺半群$R$，并将其视为带有平凡对数结构的点上的层，则可得到 Artin 锥：

$$\mathcal{A}_R(T) = \mathrm{Hom}(R, \bar{M}_T).$$

Artin 锥的可表性很容易推广到相对情形。

**引理 3.3.** 设 $S$ 是一个精细饱和对数概形，且 $R$ 是一个有限型整饱和尖幺半群的 *étale* 层，其中有限型是相对于 $M_S$ 而言的。则 $\Theta_R$ 可由一个带有精细饱和对数结构的代数栈表示。若 $R$ 在 $M_S$ 上是整的或饱和的，则 $\Theta_R$ 在 $S$ 上分别是整的或饱和的。

证明。这些断言在 $S$ 的严格 ´etale 拓扑下都是局部的，并且在 $S$ 中 ´etale 局部地，可以找到有限生成、饱和、尖锐幺半群 $P, Q$，以及同态 $P \to \Gamma(S, M_S)$ 和 $P \to Q$，使得 $R$ 适合于如下余笛卡尔图：

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & \bar{M}_S \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q & \longrightarrow & R \end{array}$$

参见 [Kat89，§2]。那么在 $S$上局部地，有 $\Theta_R = S \times_{\mathcal{A}_P} \mathcal{A}_Q$，而可表示性陈述可由绝对情形 [Ols03，命题 5 得出。17]此外， $Q$若假设 $P$ 在 $R$ 上是整的或饱和的，则¯在 $M_S$. 上可以取为整的或饱和的。由基变换可知， $\Theta_R \to S$ 分别是整的或饱和的。□

**定义 3.4**。令 $S$ 为一个精细饱和对数概形。上的*Olsson* 预锥是指一个带对数结构、定义在 $S$ 上的代数栈，它同构于_$\Theta_R$，其中 ´是一个有限型 $R$ 幺半群层，定义在 $M_S$ 上的 ´étale 层。

我们已经看到，每个 Olsson 预锥都存在一个局部表示$S \times_{\mathcal{A}_P} \mathcal{A}_Q$，它位于 ´的严格 étale 拓扑中 $S$。我们将在推论 3.8 中看到，任何在 $S$ 上带对数结构且具有此类局部表示的代数栈都是 Olsson 预锥。

我们可以非常明确地描述 Olsson 预锥的局部结构，这将有助于研究拟凝聚层及其截面。

**命题 3.5.** 设 $h\colon P \to Q$ 是有限型、饱和、尖锐幺半群之间的一个同态。设 $S$ 是一个代数栈，且带有一个态射 $S \to \mathcal{A}_P$。设 $X_P$ 和 $X_Q$ 分别是与 $P$ 和 $Q$相关联的环面簇。设 $T_P$ 和 $T_Q$ 分别是特征群为 $P^{\mathrm{gp}}$ 和 $Q^{\mathrm{gp}}$的代数环面。

*(i)* 积 $S \times X_Q$ 由 谱$_S$ $A$ 表示，其中

$$A = \mathcal{O}_S[Q] = \bigoplus_{q \in Q} x^q \mathcal{O}_S,$$

其分次为由 $X_Q$诱导的 $Q^{\mathrm{gp}}$-分次。

*(ii)* 纤维积 $S \times_{\mathrm{B}T_P} X_Q$ 由 谱$_S$ $B$ 表示，其中

$$B = \bigoplus_{\alpha \in P^{\mathrm{gp}}} y^\alpha x^{h(\alpha)} A(\alpha) = \bigoplus_{\substack{\alpha \in P^{\mathrm{gp}}, \beta \in Q^{\mathrm{gp}} \\ h(\alpha) \le \beta}} y^\alpha x^\beta \mathcal{O}_S(\alpha).$$

$Q^{\mathrm{gp}}$分次扩展为使 $y^\alpha$ 的次数为0。

*(iii)* 纤维积$S \times_{\mathcal{A}_P} X_Q$ 由谱$_S C$ 表示，其中

$$C = B\Big/\big\langle(\varepsilon_p y^p - 1)x^{h(p)}B\big\rangle_{p\in P} = B\Big/\big\langle(\varepsilon_p - y^{-p})B(-p)\big\rangle_{p\in P},$$

并且 $\epsilon_p$ 是相应的 $\mathcal{O}_S(p)$ 截面。此理想是二项式理想，并且关于 $Q^{\mathrm{gp}}$-分次是齐次的。

*(iv)* $S \times_{\mathcal{A}_P} \mathcal{A}_Q = [\mathrm{Spec}(C)/T_Q]$ ，其中 $T_Q$-作用由上述 $Q^{\mathrm{gp}}$-分次诱导。

证明。 (i) 略。

(ii) 纤维积 $S \times_{\mathrm{B}T_P} X_Q$ 是 Spec $A$ 上的泛概形，配备可逆层 $x^{-h(\alpha)}A$ 和 $A(\alpha)$ $= A\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathsf{O}_S(\alpha)$ 之间的同构，这些同构以齐性态射的方式依赖于 $\alpha \in P^{\mathrm{gp}}$。等价地，它是 Spec $A$ 上的泛概形，配备 $x^{h(\alpha)}A(\alpha)$ 的平凡化，并以齐性态射的方式依赖于 $\alpha \in P^{\mathrm{gp}}$。这是[4]的谱

$$B = \bigoplus_{\alpha\in P^{\mathrm{gp}}} y^\alpha x^{h(\alpha)}A(\alpha) = \bigoplus_{\substack{\alpha\in P^{\mathrm{gp}}\\ q\in Q}} y^\alpha x^{h(\alpha)+q}\mathcal{O}_S(\alpha) = \bigoplus_{\substack{\alpha\in P^{\mathrm{gp}},\beta\in Q^{\mathrm{gp}}\\ h(\alpha)\le\beta}} y^\alpha x^\beta \mathcal{O}_S(\alpha)$$

$y^\alpha$ 中的元素 $\alpha \in P^{\mathrm{gp}}$ 只是占位符。形式上，乘以 $y^p$给出一个从 $x^{h(p)}B$ 到 $B(-p)$ 的同构。根据定义，同构 $y^p$ 下降到商 $[\mathrm{Spec}(B)/T_Q]$，因此它们在 $Q^{\mathrm{gp}}$-分次中的次数必须为 0。

(iii) 纤维积 $S \times_{\mathcal{A}_P} X_Q$ 是相对于 $S \times_{\mathrm{B}T_P} X_Q$ 定义的，条件是：由 $\mathsf{O}(-p) \to \mathsf{O}$ 的两种解释经由两个映射 $S \times_{\mathrm{B}T_P} X_Q \to \mathbf{A}_P$诱导出的可逆层映射应当一致。在我们的坐标中，其中一个映射是包含 $x^{h(p)}B \to B$ ，另一个是 $\varepsilon_p : B(-p)$ $\to B$。根据构造，我们有

$$x^{h(p)}B = \bigoplus_{\alpha\in P^{\mathrm{gp}}} y^\alpha x^{h(\alpha+p)}A(\alpha) = \bigoplus_{\alpha\in P^{\mathrm{gp}}} y^{-p+\alpha}x^{h(\alpha)}A(-p+\alpha)$$

and

$$B(-p) = \bigoplus_{\alpha\in P^{\mathrm{gp}}} y^\alpha x^{h(\alpha)}A(-p+\alpha)$$

它们通过乘以 $y^p$彼此同构。纤维积 $S \times_{\mathcal{A}_P} X_P$ 由通过这个同构识别这两个映射来定义。

[4]回忆一下，若 $Y$ 是一个代数栈，且 $L, M$ 是 $Y$ 上的两个可逆层，则从 $L$ 到 $M$ 的同构层可由下列 $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$- 扭子表示，该扭子在 $Y$ 上：

$$\mathrm{Spec}_Y \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} z^n (L\otimes M^\vee)^{\otimes n}.$$

因此，$S \times_{\mathscr{A}_P} X_P = \operatorname{Spec} C$，其中 $C$ 是 $B$ 关于由 $(\varepsilon_p y^p - 1)x^{h(p)}B$ 生成的理想的商，$p$ 遍历 $P$。由于 $y^p\colon x^{h(p)}B \to B(-p)$ 是一个同构，我们也可以将该理想的生成元写作 $(\varepsilon_p - y^{-p})B(-p)$。(iv) 显然。

□

**推论 3.6.** 设 $h\colon P \to Q$ 是有限生成、饱和、尖锐幺半群之间的同态，并设 $X_P$ 是与 $P$相关联的环面簇。假设态射 $S \to \mathscr{A}_P$可以经由 $S \to X_P$ 分解，该分解对应于对所有 $p \in P^{\mathrm{gp}}$的平凡化 $v^p : \mathcal{O}_S \simeq \mathcal{O}_S(p)$ 。

*(ii)′* 纤维积 $S \times_{\mathrm{B}T_P} X_Q$ 由 谱$_S B'$ 表示，其中

$$B' = \bigoplus_{\alpha \in P^{\mathrm{gp}}} u^\alpha A = \bigoplus_{\substack{\alpha \in P^{\mathrm{gp}} \\ q \in Q}} u^\alpha x^q \mathcal{O}_S.$$

$Q^{\mathrm{gp}}$分次可扩展，使得 $u^\alpha$ 的次数为 $\alpha$。

*(iii)′* 纤维积 $S \times_{\mathscr{A}_P} X_Q$ 由 谱$_S C'$ 表示，其中

$$C' = B' \Big/ \left\langle \varepsilon_p(v^{-p}) - u^{-p}x^{h(p)} \right\rangle_{p \in P}.$$

该理想是二项式，并且关于 $Q^{\mathrm{gp}}$分次是齐次的。

证明。 利用平凡化 $v^p$，环 $B$ 也可以表示为命题 3.5 (ii) 中的形式

$$B = \bigoplus_{\substack{\alpha \in P^{\mathrm{gp}}, \beta \in Q^{\mathrm{gp}} \\ h(\alpha) \le \beta}} v^\alpha y^\alpha x^\beta \mathcal{O}_S = \bigoplus_{\substack{\alpha \in P^{\mathrm{gp}} \\ q \in Q}} u^\alpha x^q \mathcal{O}_S$$

其中 $u^\alpha = v^\alpha y^\alpha x^{h(\alpha)}$ 是 $B$的可逆元。由于 $v^{-p}$ 生成 $B(-p)$，定义$C$ 的理想由 $\varepsilon_p(v^{-p}) - y^{-p}v^{-p} = \varepsilon_p(v^{-p}) - u^{-p}x^{h(p)}$ 生成，其中 $p \in P$。□

在推论 3.6的设定下，令 $M$ 为 $P^{\mathrm{gp}} \to Q^{\mathrm{gp}}$的像。由于 $M$ 是 $Q^{\mathrm{gp}}$的子群，它是有限生成且无挠的，因此是自由群，所以我们可以选择满射 $P_{\text{群}} \to M$的一个分裂。这诱导出包含 $K \subset P^{\mathrm{gp}}$的一个分裂 $g\colon P_{\text{群}} \to K$。我们可以用它从上述代数 $B'$ 和 $C'$ 的谱中分离出一个代数环面因子，如下所示。

记 $C'_q$ 为 $C'$ 的第 $q$ 个分次分量（其中 $q \in Q^{\mathrm{gp}}$），则当 $p \in M$ 时，我们可以通过单位元 $u^p$ 将 $C'_q$ 与 $C'_{h(p)+q}$ 识别。若 $\alpha$ 是 $Q^{\mathrm{gp}}$ 中 $M$ 的一个陪集，则利用这些识别，我们将 $C''_\alpha$ 定义为所有 $q \in \alpha$ 对应的 $C'_q$ 的公共值。此定义良定，因为对于 $p \in P$，有 $u^{p+p'} = u^p u^{p'}$ gp。于是 $C'' = \bigoplus_{\alpha \in Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}}} C''_\alpha$ 是一个由以下元素生成的分次环

(i) $x^q$ 对于 $q \in Q$，其位于分次 $[q]$（其中 $[q] = q + M$ 是包含 $q$的 $M$陪集$Q^{\mathrm{gp}}$），并且

(ii) $u^p$ 对于 $p \in K$，其位于分次 0，

满足

(iii) $x^{q+q'} = x^q x^{q'}$ 对所有 $q$，$q' \in Q$，(iv) $u^{p+p'} = u^p u^{p'}$ 对所有 $p$，$p' \in K$，(v) 当 $p \in K$ 时 $x^{h(p)} = u^p \varepsilon_p(v^{-p})$，以及 (vi) 当 $p \in M$ 时 $x^{h(p)} = \varepsilon_p(v^{-p})$。[5]

通过令 $C'_q = C''_{[q]}$ 并定义$u^p$，可以从 $C''$ 恢复分次环 $C'$：当 $p \in M$ 时，$C'_q \to C'_{h(p)+q}$ 是恒等映射。

**推论 3.7**。在推论3.6的背景下，令 $T_{Q/P}$ 为特征群为 $Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}}$ 的可对角化群。

*(ii)″* $\left[\text{谱}(B')/T_Q\right] \simeq \left[\text{谱}(B'')/T_{Q/P}\right]$，其中 $B''$ 是具有上文*(i)* 至 *(iv)*所述生成元和关系的分次环。*(iii)″* $\left[\text{谱}(C')/T_Q\right] \simeq \left[\text{谱}(C'')/T_{Q/P}\right]$，其中 $C''$ 相对于 $B''$ 由上文*(v)* 和 *(vi)*中的关系定义。

证明。我们可以将 Spec $B' = T_M \times$Spec $B''$和 Spec $C' = T_M \times$Spec $C''$视为同一对象，其中$T_M$ 是特征群为 $M$的代数环面。于是，$T_Q$ 通过投影 $T_Q \to T_M$作用于 $T_M$ 因子。该投影的核为 $T_{Q/P}$，因此我们可以将 $[\text{Spec}(B')/T_Q] = [\text{Spec}(B'')/T_{Q/P}]$和 $[\text{Spec}(C')/T_Q] = [\text{Spec}(C'')/T_{Q/P}]$视为同一对象。□

我们将推论 3.7重新表述如下，并以更具几何意味的方式呈现证明；这一表述独立于命题 3.5中的论证（但本质上与之等价）。

**命题 3.8**。设 $h : P \to Q$是有限生成、饱和、尖锐幺半群之间的同态，设 $X_P$ 是与 $P$相关联的环面簇。设 $K$ 是$h^{\mathrm{gp}}$ 的核，$L$ 是其余核。假设态射 $S \to \mathcal{A}_P$ 可通过 $S \to X_P$分解。则

$$S \underset{\mathcal{A}_P}{\times} \mathcal{A}_Q \simeq S \underset{X_P}{\times} \left(T_K \times [X_Q/T_L]\right)$$

其中，$T_K$ 和 $T_L$ 分别是特征群为 $K$ 和 $L$的可对角化群。

证明。令 $T_P$和 $T_Q$ 分别表示环面簇 $X_P$和 $X_Q$的稠密环面。存在一个可对角化群的正合列：

$$0 \to T_L \to T_Q \to T_P \to T_K \to 0 \tag{1}$$

[5]注意，在这里我们将 $C'_q$ 与 $C'_{h(p)+q}$ 通过 $u^p$ 进行识别，因此我们省略了 $u^p$ 出现在 (iii)′ 中的推论 3.6。

令 $M$为 $P_{\mathrm{gp}}\to Q^{\mathrm{gp}}$的像，并为满射 $P_{\mathrm{gp}}\to M$选取一个分裂。这将诱导出一个分裂

$$T_P \simeq T_K \times T_M$$

与正合列（1）相容。

由于 $X_Q \to \mathbf{A}_P$经由 $X_P$分解，我们得到等同 $X_Q \times_{\mathcal{A}_P} X_P \simeq X_Q \times T_P \simeq X_Q \times T_K \times T_M$。$T_Q$ 在 $X_Q \times T_K \times T_M$ 上的作用在$T_K$上平凡地作用，故
$[X_Q \times T_P/T_Q] = T_K \times [X_Q \times T_M/T_Q] = T_K \times [X_Q/T_L]$。因此我们有

$$S \underset{\mathcal{A}_P}{\times} \mathcal{A}_Q = S \underset{\mathcal{A}_P}{\times} [X_Q/T_Q] = S \underset{X_P}{\times} [X_Q \times T_P/T_Q] = S \underset{X_P}{\times} \big([X_Q/T_L] \times T_K\big),$$

如所断言。 □

注意，推论 3.7以及命题3.8 的同构依赖于 $K \to P^{\mathrm{gp}}$的分裂选取。

接下来的两个例子展示了一些可利用 Olsson 锥实现的几何构造。

**例 3.9.** 设 $f\colon S \to \mathbf{A}_P$是代数栈之间的一个态射，并设 $h\colon P \to \mathbf{0}$ 为零态射。那么 $S \times_{\mathcal{A}_P} \mathbf{A}_0$ 选出对数结构（沿 $f$ 拉回）平凡的开子栈。例如，简单正规交叉除子的开补集就是一个 Olsson 锥。相应的¯幺半群同态 $M_S \to R$ 不是正合的。

例 3.10. 沿正则嵌入的加权爆破的图表是 Olsson 锥的实例。加权爆破又将普通爆破和根栈都推广了。设 $S$ 是一个正则诺特局部环的谱，且$f_0, \ldots, f_n$是一个正则序列。将 $e_0 \mapsto d_0 e_0'$和 $e_i \mapsto e_i' + d_i e_0'$分别映到 $i = 1, \ldots, n$ 的态射 $\mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{N}^{n+1}$，使得 $S \times_{\mathcal{A}^{n+1}} (\mathbf{A}^{n+1})'$ 成为加权正则中心 $(f_0, d_0) + \ldots + (f_n, d_n)$ 中 $S$ 的加权爆破的标准图表（参见[QR22, §5.4]）。

**例 3.11.** 热带曲线最简单的实例及其主要构件，是一条有限长度的边 $e$ $\delta$。设 $\mathcal{A}$ $= \mathcal{A}_{\mathbf{N}}$，并设 $\mu$ 为乘法映射$\mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}$。设 $S =$Spec$(R)$ $\to \mathcal{A}$ 为与元素 $s$ 相关联的秩一对数结构，该元素属于 $R$。根据推论 3.6， $S_e$ 是商栈 $\tilde{S}/\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^2$，˜其中 $S$ 是.....的谱

$$C = R[x_1, x_2, u^{\pm}]/(x_1 x_2 - u^{-1} s),$$

并且 $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^2$ 以权重作用于 $x_1$、 $x_2$ 和 $u$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

推论 3.8 指出，我们可以在 $u = 1$ 处切片以得到一个等价商。我们˜取 $S' =$谱$(C')$，其具有

$$C' = R[x_1, x_2]/(x_1x_2 - s)$$

˜然后 $S_e = S'/\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$，其中 $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ 通过前述作用的反对角线作用（即权重为 $(1, -1)$ 作用于 $x_1$ 和 $x_2$）。这是叠 $ST_R$，它出现在 $S$-完备性 [AHLH23] 的定义中。

前述讨论的普适情形是 $R =$**整数环**$[s]$。在这种情况下，我们˜也可以消去变量 $s$。商 $S'$ 除以$\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ 可以想象为$\mathbf{A}^1$，其中原点被一个含有三个点的叠所取代，这三个点分别对应于$\mathbf{A}^2$的坐标轴中包含的三个$\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-轨道。一般情形可由此情形经基变换得到。

一般而言，$\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^2$在 $\operatorname{Spec} C$ 上的作用对应于态射

$$C \to C \otimes_R R[\lambda_1^{\pm}, \lambda_2^{\pm}]$$
$$(x_1, x_2, u) \mapsto (x_1 \otimes \lambda_1, x_2 \otimes \lambda_2, u \otimes \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}).$$

在底层代数栈的层面上（即不考虑对数结构），$S_e \to S$ 的一个截面对应于一个 $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^2$-扭子 $P \to S$，以及一个$\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^2$-等变态射 $f\colon P \to \tilde{S}$。对偶地，假设该扭子是平凡的，这对应于一个交换图：

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\quad f^\sharp \quad} & R[\mu_1^{\pm}, \mu_2^{\pm}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ C \otimes_R R[\lambda_1^{\pm}, \lambda_2^{\pm}] & \xrightarrow{f^\sharp \otimes \mathrm{id}} & R[\mu_1^{\pm}, \mu_2^{\pm}] \otimes_R R[\lambda_1^{\pm}, \lambda_2^{\pm}] \end{array}$$

毫不意外，等变性迫使

$$x_1 \mapsto a_1\mu_1,\ x_2 \mapsto a_2\mu_2,\ u \mapsto b\mu_1^{-1}\mu_2^{-1}$$

满足 $a_1$、$a_2 \in R$ 以及 $b \in R^*$ 和 $a_1a_2 = b^{-1}s$。如果两个图表（3.11）可由 $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^2$ 对 $P$的作用相互关联（该作用将 $a_1$ 和 $a_2$ 按可逆元缩放），则它们等价。在普适情形下，模去等价后有两个截面，即（$a_1 = 1$、$a_2 = s$、$b = 1$）和（$a_1 = s$、$a_2 = 1$、$b = 1$）。当 $s = 0$ 时，$S_e$ 的底层叠还多出一个截面（模去非唯一同构），由（$a_1 = a_2 = 0$、$b = 1$）给出。

令 $\delta$ 表示 $\mathsf{A}_{\mathbf{N}}$ 上的热带参数，$\gamma$ 表示 $e$ 上的坐标。那么 $\mu^*(\delta) = (1, 1)$ 和 $\gamma = (0, 1)$ 位于 **自然数**$^2 = M_{\mathcal{A}_{\mathbf{N}}^2}$ 中。线丛 $\mathsf{O}_{S_e}(\gamma)$ 对应于平移 $x_2^{-1}C$。$\mathsf{O}_{S_e}(\gamma)$ 的截面对应于 $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^2$-作用的不变量，或者等价地，对应于 $x_2^{-1}C$的零次部分，并可与 $R = x_2^{-1}(x_2R)$ 认同。射线 $\gamma = 0$ 对应于上文所述的截面 $x_1 = u^{-1}s$，$x_2 = 1$；沿此截面对 $\mathsf{O}_{S_e}(\gamma)$ 的限制与预期一致，同构于 $\mathsf{O}_S$。射线

$\gamma = \delta$ 则对应于截面 $x_1 = 1$， $x_2 = y^{-1}s$；这里我们发现，$O_{S_\epsilon}(\gamma)$ 的限制同构于 $O_S(\delta)$。

**引理 3.12.** *Olsson* 预锥 $\Theta_R \to S$ 普遍满射，当且仅当 $M_S \to R$ 正合。

证明。 在 $S$上局部地，我们可以假设 $S$ 是严格亨泽尔的，并记 $\Theta_R = S \times_{\mathcal{A}_P} \mathcal{A}_Q$ 为 $P = M_{S,\ s}$。特别地，映射 $S \to \mathcal{A}_P$ 命中后者的闭点。于是该引理由 [Nak97，A.1，命题], 推出；为方便读者，我们在下文重述该命题。 □

**命题 3.13** [Nak97]。 若 $f : x \to y$ 是有限生成饱和对数概形之间的满射态射，且其底层概形都是点状的，那么 $f$ 是普遍¯ ¯满射，当且仅当 $f^* M_y \to M_x$ 正合。

从现在起，对于 Olsson 预锥，我们将“正合”和“普遍满射”这两个术语交替使用。

**¯定义 3.14. </style}若 是饱和的，则称 为Olsson 锥** 。

**注 3.15.** 之所以称 $\Theta_R$ 为 Olsson 锥时要求其饱和，是出于我们关于 Olsson 扇的结构性结果，即定理3.21。

3.2. **Olsson 扇**。

**定义 3.16.** 设 $S$ 是有限生成饱和对数概形。 $S$ 上的*Olsson* 扇是一个代数栈 $\Sigma \to S$，它带有有限生成饱和对数结构，且是饱和的，并且对数 ´étale 于 $S$。

本节旨在说明，Olsson 扇是由 Olsson 锥沿严格 ´étale 关系粘合而成的。

**命题 3.17.** 设 $S$ 为严格亨泽尔局部环的谱。设$\mathcal{A}_Q \to \mathcal{A}_P$ 是 *Artin* 锥之间的一个态射，其对偶为有限生成饱和幺半群 $P \to Q$之间的局部同态；设 $\sigma \to S$ 是该态射沿映射$S \to \mathcal{A}_P$ （其与闭分层相交）对 $S$ 作基变换所得。则 $\sigma$ 有唯一的闭分层，记为 $Z$。假设 $E$ 是一个代数栈，且它 ***´étale*** 且拟分离地映到 $\sigma$。那么，$E$ 在 $Z$ 上的每个截面都唯一延拓为 $E$ 在 $\sigma$上的一个截面。

证明。 $Z$ 唯一的闭分层是 $\mathbf{A}_Q$ 中唯一闭分层的原像。令 $a$ 为 $Z$上的 $E$ 的一个截面。我们将把它延拓为 $\sigma$上的一个截面。通过将 $S \to \mathbf{A}_P$ 分解为经过一个有限型概形的亨泽尔化，我们可以立即化归到 $S$ 为诺特概形的情形。

我们将使用命题3.8中的记号。选取 $S \to \mathcal{A}_P$经由 $X_P$的一个分解。我们可以将 $\sigma$识别为 $T_K \times [U/T_L]$，其中 $U =$ 谱$(\mathcal{O}_S \otimes_P Q)$。令 $\sigma_0$为 $\sigma$ 在 $S$的闭点上的纤维。于是 $\sigma_0$ 可识别为 $T_K \times [U_0/T_L]$

其中 $U_0 = \text{谱}(k[Q]/P^+k[Q])$，记 $k$ 为 $S$ 在其闭点处的剩余域，记 $P^+$为 $P$的极大理想。$Q$ 在 $U_0$ 中的极大理想$Q^+$ 的零点集是 $U$ 中的一个点 $z$，其剩余域为 $k$。由于 $z$ 被 $T_L$固定，我们可以将 $Z$ 识别为 $T_K \times [z/T_L] = T_K \times \mathrm{B}T_L$。复合

$$\mathscr{A}_Q \to \mathrm{B}T_Q \to \mathscr{A}_Q$$

给出了从 A$Q$ 到其闭分层的收缩。它限制为从 $\sigma_0$到 $Z$的收缩。通过与此收缩复合，我们将 $a$延拓为 $\sigma_0$上的 $E$ 的截面 $a_0$。

令 $V = T_K \times U$，使得 $\sigma = [V/T_L]$。令 $I$ 为 O$_S$的极大理想。对每个正整数 $n$，令 $S_n$ 为 $S$ 中 $I^{n+1}$ 的零点集，并令 $\sigma_n \subset \sigma$和 $V_n \subset V$ 为其原像。由于 $E$ 是 ´étale， $a_0$ 唯一地延拓为 $\sigma_n$上的 $E$ 的截面 $\hat{}\,\hat{}a_n$。令 $V$为沿着 $V_0$对 $V$ 的完备化。则 $E \times_\sigma V$是 $V$上的 ´étale且有限表示。特别地，它是诺特的，并且具有准有限对角线（因为我们假设 $E$ ´在 $\sigma$上étale且准分离）。因此，根据 [HR19，推论 1.5]，系统态射 $\left(a_n|_{V_n}\right)$ 延拓为态射 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}b : V \to E$。由于 $V$ 是仿射的，再次应用 [HR19，推论 1.5] 可知，$\hat{}$ 此延拓是 $V$上 $E$ 的一个截面。

现在我们应用Artin逼近定理。令 $\pi : V \to S$ 为投影，并令 $F = \pi_* E$。由于 $V$ 是拟紧且拟分离的，并且 $E$ 在 $\sigma$上局部有限表示，因此由 $F$ 也在 [上局部有限表示] Gro66，命题（8.13.1） $S$。根据Artin逼近定理 [Art69，˜定理（1.12）],，存在一个 $b \in F（S） = E（V）$，其对 $S_0$ 的限制与$\hat{}\,\tilde{}\,b$的限制一致。特别地， $b$ 对 $Z \times_\sigma V$的限制与 $a$的限制一致。

由于 $V$在 $\sigma$上是仿射的，因此 $V \times_\sigma V$和 $V \times_\sigma V \times_\sigma V$也是仿射的。因此，我们可以重复相同的推理，得到唯一的映射 $V \times_\sigma V \to E$ 和 $V \times_\sigma V \times_\sigma V \to E$，它们延拓了 $a$的限制。合在一起，它们构成了 $E$ 在 $\sigma$上的截面下降数据。由忠实平坦下降，我们得出结论： $b$ 唯一下降为 $\tilde{a}$的一个截面，该截面是 $E$ 在 $\sigma$ 上的截面，并且在 $Z$上的限制为 $a$。

为完成证明，我们证明 $\tilde{a}$在唯一同构的意义下是唯一的。为此，设 $E'$ 为两个扩张 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{a}'$ 之间的同构层，它们都是 $a$到 $E$的延拓。随后， $\tilde{a}|_Z$ 和 $\tilde{a}'|_Z$ 的一致性给出了 $E'$ 在 $Z$上的一个截面。将上述推理应用于 $E'$，以其替代 $E$，即可得到 $\tilde{a}$ 与 $\tilde{a}'$ 在 $\sigma$上的一个同构。第三次应用则表明， $\tilde{a}$ 与 $\tilde{a}'$ 之间的同构是唯一的。□

**注3.18**。我们猜想，命题 3.17 即使没有拟分离性假设也成立。如果这一猜想不成立，那么可能应在 Olsson 扇的定义中加入拟分离性或其他某种条件。

**推论 3.19**。 设 $\pi\colon\ \sigma \to S$ 是有限型、饱和对数概形 $S$上的 *Olsson* 预锥。设 $F$ 是 $\sigma$上的阿贝尔群 *´etale* 层。若 $\pi$ 饱和，或若$F$ 无挠，则 $\mathrm{R}^1\pi_*F = 0$。

证明。我们不妨假设 $S$ 是局部且严格亨泽尔的（因为 $\sigma$ 在 $S$上拟紧且拟分离，这样假设是合理的）。令 $Z$为 $\sigma$ 在 $S$上的闭纤维的闭分层。由于 $F$ 是$\sigma$上的一个 ´etale 层，根据命题 3.17，给出一个截面等价于给出一个在 $Z$ 上的截面。不过，按照命题 3.17 的记号，对于一个可对角化群$T_L$，有 $Z \simeq T_K \times \mathrm{B}T_L$。令 $U_\bullet$ 为由 $Z$ 被 $U_0 = T_K \times \mathrm{Spec}\, k$覆盖所对应的群胚，其中 $k$ 是 $S$ 在其闭点处的剩余域。于是，对所有$n$，都有$U_n = T_K \times T_L^n$。 $F$在 $U_\bullet$上的 Čech 复形为 $C^n = \Gamma(T_K \times T_L^n, F_0)$，其中 $F_0 = F\big|_{U_0}$。余边界条件将 $H^1(U_\bullet, F)$等同于满足以下条件的态射 $\varphi\colon\ T_K \times T_L \to F_0$：对每个 $z, x, y$，都有 $\varphi(z, xy) - \varphi(z, x) - \varphi(z, y) = 0$。也就是说，对每个 $z \in T_K$，$\varphi(z, -)\colon\ T_L \to F_0|_z$都是一个同态。若 $\pi$ 是饱和的，则 $T_L$ 是一个代数环面，因此连通；而 $F_0|_z$ 是离散的，所以每个同态 $T_L \to F_0|_z$ 都为零。一般而言，$T_L$ 是可对角化的，因此其分支群是有限群；若 $F_0|_z$ 无挠，则每个同态$T_L \to F_0|_z$ 都为零。□

**推论 3.20.** 设 $\pi : \sigma \to S$ 是有限生成饱和对数概形 $S$上的一个 *Olsson* 锥。设 $F$ 是 *´etale* 阿贝尔群层，在 $\sigma$上 *´etale*。则对于所有 $p > 0$，$\mathrm{R}^p\pi_*F = 0$。

证明。 我们已在推论 3.19 中看到，对于定义在 $\sigma$上的所有阿贝尔群层 $F$，$^1\pi_*F = 0$。取一个单同态 $F \to I$ 其中 $I$ 是单射。于是，对所有 $p \geq 2$，我们可以将 $\mathrm{R}^{p-1}\pi_*(I/F)$ 与 $\mathrm{R}^p\pi_*F$ 认同。由归纳法即可得出结论。□

**定理 3.21.** 设 $S$ 是一个有限生成饱和对数概形，且设 $\Sigma \to S$是一个拟分离 *Olsson* 扇。则 $\Sigma$ 存在一个由其上 *Olsson* 锥构成的严格 *´etale* 覆盖。

证明。 令 $x$ 为位于 $\Sigma$ 上方、映射到 $S$的几何点 $s$的几何点。我们论证存在一个位于 $S$ 上方的 Olsson 锥 $\sigma$ 以及一个严格的 ´étale $S$-态射 $\sigma \to \Sigma$，使得 $x$ 可经由其分解。将 $S$ 替换为 $s$的一个严格 ´étale 邻域后，我们可以假设同态 $\Gamma(S, M_S) \to M_{S,s}$ 具有一个截面。记$P = M_{S,s}$，这给出了一个映射 $S \to \mathrm{A}_P$。令 $Q = M_{\Sigma,x}$。于是我们置

$$\sigma = \mathscr{A}_Q \underset{\mathscr{A}_P}{\times} S.$$

我们需要提升下图，其中 $\sigma \to \Sigma$ 严格；至少在 $S$ 中 $s$附近进行 ´étale 局部化后如此：

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & \Sigma \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \sigma & \longrightarrow & S \end{array} \tag{2}$$

令$\mathbf{Log}_S$ 为 Olsson 的有限饱和对数结构叠 [Ols03] （见定理 2.31）。要提升（2），等价于提升以下由（非对数）概形和代数栈构成的图表：

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & \Sigma \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \sigma & \longrightarrow & \mathbf{Log}_S \end{array}$$

根据假设，$\Sigma$ 在 ´上是 étale 的，因此这等价于在 $\sigma$ 上寻找 étale 代数栈 $\Sigma \times_{\mathbf{Log}_S} \sigma$ 的一个截面 ˜。令 $S$ 为 $S$ 在 $\tilde{s}$ 处的亨泽尔化，并令 $\tilde{\sigma}$ 为 $\sigma$ 到 $S$ 的基变换。根据假设，$P \to Q$ 是整的（因为它是饱和的）且是局部的（因为它由一个对数结构态射诱导），因此由注 2.10 可知它是正合的；进而，由于 $P$ 是尖锐的，这意味着它是单射。因此，我们可以将 $\sigma$ 的闭分层识别为 B$T$，其中 $T = T_L$ 是与 $L = Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}}$对偶的可对角化群。由于 $\Sigma$是饱和的，$Q^{\mathrm{gp}}/P$gp 无挠，所以 $T$实际上是一个代数环面。因此，$T$ 是连通的，所以 $x$ 上 étale 层的每个截面都是 $T$-等变的。因此，截面 $x \to \Sigma$ 下降为 $\tilde{\sigma}$的闭分层上的一个截面。根据命题 3.17，该截面唯一地延拓为 $\tilde{\sigma}$上的一个截面。最后，$\sigma$ 在 $S$上拟紧且拟分离，因此该截面延拓到 $S$ [中 $s$ 的一个 étale 邻域，见 Gro66，命题 (18.13.1)].[6] □

3.3. **弱凸锥**。

**定义 3.22.** 记 $\mathbf{G}^{\log}$ 和 $\mathbf{G}^{\mathrm{trop}}$ 为有限饱和概形上的群对象，其在 $S$ 处的取值为

$$\mathbf{G}_{\log}(S) = \Gamma(S, M_S^{\mathrm{gp}}) \qquad \text{and} \qquad \mathbf{G}_{\mathrm{trop}}(S) = \Gamma(S, \bar{M}_S^{\mathrm{gp}}).$$

那么，热带环面 $T$ 是定义在 $S$ 上的对数概形的严格 ´étale 拓扑中的群层；它在 $S$ 的严格 ´étale 拓扑下局部同构于 $\mathbf{G}_{\mathrm{trop}}^r \times S$，其中 $r$ 是某个整数。

[6]严格来说，所引用的命题只涉及概形上的 ´étale 层的截面，而 $\sigma$ 是一个代数栈。不过，可以将该命题应用于 $\sigma$ 的群胚表示，从而得到所需的结论。

$S$ 的严格-´étale 位点上的同态层 $X = \mathrm{Hom}_S(T, \mathbf{G}_{\mathrm{trop},S})$，称为 $T$ 的特征群 。

根据 [Wis23，命题 A.2]， $X$ 的特征群在 $S$ 的严格´etale 拓扑下局部是由有限生成自由阿贝尔群构成的常值层。相同的结果表明，热带环面 $T$ 由其特征群决定：$T = \mathrm{Hom}_S(X, \mathbf{G}_{\mathrm{trop},\,S})$。

**定义 3.23**。 令 $R^{\mathrm{a}}$ 表示一个底层群有限生成的偏序阿贝尔群。注意， $R^{\mathrm{a}}$ 自动是自由的。[7] 令 $R = (R^{\mathrm{a}})_{\geq 0}$表示非负元素构成的子幺半群。若 $R$ 作为幺半群有限生成，则称 $R^{\mathrm{a}}$ 为有限生成偏序群。有限生成尖锐幺半群的范畴可以嵌入有限生成偏序群的范畴中；但请注意，一般而言， $R^{\mathrm{gp}}$可能严格包含于 $R^{\mathrm{a}}$ 。若 $R^{\mathrm{a}}$ 是饱和的，则称 $R$ 是饱和的。

**定义 3.24**。 令 $S$ 为一个有限生成饱和对数概形，并令 $R^{\mathrm{a}}$ 为 $S$ 上有限生成且饱和的偏序群层，配备一个从 $M_S^{\mathrm{gp}}$ 出发的¯同态。

我们定义 $\Theta_{R^{\mathrm{a}}}$ 为有限生成饱和对数概形在 $S$上的层，其在 $f$ 上的值 $T \to S$ 是限制为结构态射 $f^{-1}\bar{M}_S \to \bar{M}_T$的偏序群$f^{-1}R^{\mathrm{a}} \to \bar{M}_T^{\mathrm{gp}}$同态的集合。

换言之， $\Theta_{R^{\mathrm{a}}}$ 的一个 $T$ 点是一个交换方块：

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1}\bar{M}_S & \longrightarrow & f^{-1}R & \longrightarrow & \bar{M}_T \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & f^{-1}R^{\mathrm{a}} & \longrightarrow & \bar{M}_T^{\mathrm{gp}} \end{array}$$

层 $\Theta_{R^{\mathrm{a}}}$ 称为弱凸 *Olsson* 预锥；当 $M_S^{\mathrm{gp}} \to R^{\mathrm{a}}$ 饱和时，称为弱凸 Olsson¯锥。

**命题 3.25**。 设 $\Theta_{R^{\mathrm{a}}}$ 为一个弱凸 *Olsson* 预锥。自然态射

$$\Theta_{R^{\mathrm{a}}} \to \Theta_R$$

将 $\Theta_{R^{\mathrm{a}}}$ 表明为 *Olsson* 锥 $\Theta_R$ 上的一个扭子，其作用群为特征群为 $R^{\mathrm{a}}/R^{\mathrm{gp}}$的热带环面。该扭子在 $S$的严格 *´étale*拓扑下局部平凡。

证明。 给定一个有限生成饱和对数概形 $f\colon S' \to S$ 和一个点 $x \in \Theta_R(S')$，即一个与来自 $f^{-1}\bar{M}_S$ 的映射相容的幺半群同态 $x\colon f^{-1}R \to \bar{M}_{S'}$，我们得到相应的群同态 $x^{\mathrm{gp}}\colon f^{-1}R^{\mathrm{gp}} \to \bar{M}_{S'}^{\mathrm{gp}}$。要得到 $\tilde{x} \in \Theta_{R^{\mathrm{a}}}(S')$，就需要选择一个延拓 $\tilde{x} \in \mathrm{Hom}(f^{-1}R^{\mathrm{a}}, \bar{M}_{S'}^{\mathrm{gp}})$，使其沿包含 $f^{-1}R^{\mathrm{gp}} \to f^{-1}R^{\mathrm{a}}$ 限制为 $x^{\mathrm{gp}}$。这类提升的集合是一个

[7] 若该群仅为预序群，则情况并非如此。

¯扭子，其作用群为 Hom($R^{\mathrm{a}}/R^{\mathrm{gp}}$, $M_{S'}^{\mathrm{gp}}$)。这是特征群为 $R^{\mathrm{a}}/R^{\mathrm{gp}}$ 的热带环面的 $S'$-点群，因此我们可以得出， $\Theta_{R^{\mathrm{a}}}$ 是特征群为 $R^{\mathrm{a}}/R^{\mathrm{gp}}$ 的热带环面上的 $\Theta_{R^{\mathrm{gp}}}$ 扭子。

此外， $S' \to \Theta_R$ 到 $S' \to \Theta_{R^{\mathrm{a}}}$ 的提升在严格 ´平展位点 $S'$上构成群 Hom( $R^{\mathrm{a}}/R^{\mathrm{gp}}$, $\bar{M}_{S'}^{\mathrm{gp}}$ ) 下的一个扭子。该扭子的 espace ´etal´e（平展空间）是一个代数栈，它具有一个 ´平展态射，映到 $\Theta_R$ ，且可由代数空间表示。由推论3.19，该扭子可在严格 ´平展拓扑中于 $S$上局部平凡化。□

**定义 3.26.** 热带环面 Hom$_S$($R^{\mathrm{a}}/R^{\mathrm{gp}}$, $\mathbf{G}_{\mathrm{trop},\ S}$) 称为线性空间，而对偶于 $R^{\mathrm{a}}$ 的热带环面称为弱凸锥$\Theta_{R^{\mathrm{a}}}$的张成空间。

**注 3.27.** 注意， $S$ 上的 Olsson 锥与热带环面都是 $S$上弱凸锥的特例。事实上，若 $R^{\mathrm{gp}} = R^{\mathrm{a}}$，则由定义立即得到， $\Theta_R \simeq \Theta_{R^{\mathrm{a}}}$ 作为 $S$上有限型饱和对数¯概形上的预层。在另一极端情形，若 $R = M_S$ 且 $R^{\mathrm{a}} = R^{\mathrm{gp}} \oplus X$ ，其中¯是 $M_S$上有限生成自由阿贝尔群的一个层，则由 [Wis23的命题 A.2] 可知， $\Theta_{R^{\mathrm{a}}}$ 是热带环面 $T$ ，位于 $S$ 上，其特征格为 $X$。

**定义 3.28**。 设 $\varphi\colon P^{\mathrm{a}} \to Q^{\mathrm{a}}$ 是有限型偏序阿贝尔群层的一个同态，并设 $P \to Q$ 是元素 $\geq 0$所成子幺半群之间相应的同态。若 $\varphi$ 的核由 $P$中的元素生成，我们称 $\varphi$ 为局部化 。在这种情况下，我们称弱凸 Olsson 锥的对偶态射为面态射。

**定义 3.29**。 在 $S$ 上的弱凸 *Olsson* 扇 或弱锥复形 $\Sigma$ ，是对数概形上严格 ´étale 拓扑中的一个叠，它由有限多个弱凸 Olsson 锥沿面态射取余极限得到，其中这些对数概形位于 $S$ 上。

3.4. **子锥的星**。 我们基于代数几何中 Zariski 切空间的一个幺半群类比，转而对环面几何中的星构造作局部刻画。我们先从对偶数环的类比开始。回顾定义3.23中的记号。

**定义 3.30.** 设 $M_{\mathrm{a}}$和 $N^{\mathrm{a}}$是有限型、饱和的偏序群。 $M^{\mathrm{a}}$的无穷小扩张 由 $N_{\mathrm{a}}$给出，是有限型、饱和的偏序群$M[\varepsilon N]^{\mathrm{a}}$，其中 $m + \varepsilon n \geq 0$当且仅当 $m > 0$或 $m = 0$且 $n \geq 0$。

例如，**自然数**[$\varepsilon$**自然数**] 是秩二的标准赋值幺半群。注意，$M[\varepsilon N]^{\mathrm{a}}$同时带有一个到 $M_{\mathrm{a}}$的包含（若 $M_{\mathrm{a}}$是偏序群，则它使 $M[\varepsilon N]^{\mathrm{a}}$成为基底上的偏序群），以及一个到 $M_{\mathrm{a}}$的投影。我们将 $M[\varepsilon N]^{\mathrm{a}}$的对偶锥视为 $M^{\mathrm{a}}$的对偶锥的无穷小增厚。

**定义 3.31**。 设 $\sigma$ 是定义在有限生成饱和幺半群（或偏序阿贝尔群）上的协变函子。假设对于某个有限生成饱和幺半群 $M$，有 $x \in \sigma(M)$。我们将定义在有限生成饱和幺半群（或偏序阿贝尔群）上的函子 $\mathrm{Star}_x(\sigma)$记作：它将 $N$映射到 $x$到 $\sigma(M[\varepsilon N])$的提升集合，并称之为 $x$的星 。也就是说：

$$\mathrm{Star}_x(\sigma)(N) = \sigma(M[\varepsilon N]) \underset{\sigma(M)}{\times} \{x\} \tag{3}$$

**注 3.32**。 给定一个态射 $f\colon\ \sigma \to \sigma'$ 以及一个点 $x$ 属于 $\sigma$，我们得到一个态射

$$\mathrm{Star}_x(f)\colon\ \mathrm{Star}_x(\sigma) \to \mathrm{Star}_{f(x)}(\sigma').$$

**引理 3.33**。 星构造与任意极限以及 $\sigma$ 中的滤过余极限交换。

证明。 这由关于极限与余极限交换性的一般性结论可得 [Mac71，§IX。2]。□

**引理 3.34**。 一个（弱凸）锥的星仍然是一个（弱凸）锥。

证明。 如果 $\sigma$ 可由一个有限型偏序阿贝尔群 $R^{\mathrm{a}}$ 通过以下公式表示

$$\sigma(M) = \mathrm{Hom}(R^{\mathrm{a}}, M^{\mathrm{gp}})$$

然后，展开（3），我们得到 $\mathrm{Star}_x(\sigma)$ 也可由一个偏序阿贝尔群 $Q^{\mathrm{a}}$ 表示，其底层群与 $R^{\mathrm{a}}$相同，但若 $a \leq b$ 属于 $Q^{\mathrm{a}}$，则$a \leq b$ 属于 $R$，且 $x(a) = x(b)$。□

**注 3.35**。给定一个带图表 $S$，$M_S$ 的有限型对数概形（$\varphi\colon\ P \to \mathcal{O}_S$，我们将 $\mathrm{Star}_x(S)$ 记为对数概形（$S$，$M'_S$），其中 $M'_S$是与 $Q \hookrightarrow P \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_S$ 相关联的对数结构，且 $Q$ 是引理3.34证明中所述的幺半群。

**定义 3.36**。令 $\sigma$ 为有限型饱和幺半群上的协变函子，它由一个饱和偏序阿贝尔群 $R^{\mathrm{a}}$ 表示。$\sigma$ 的一个 细分是一个子函子 $\Sigma$，满足存在一个子函子的有限族 $\rho_i \subset \Sigma$，使得

(1) 每个 $\rho_i$ 都可以表示为 $R^{\mathrm{a}}$ 上偏序的有限生成细化，(2) 对于每个 $i$ 和 $j$，交 $\rho_i \cap \rho_j$ 都是它们各自的一个面，并且 (3) 如果 $M$是赋值幺半群，那么 $\Sigma(M) \to \sigma(M)$ 是一个双射。

**引理 3.37.** 设 $\sigma$ 是一个有限型弱凸 *Olsson* 预锥。设 $\Sigma$ 是 $\sigma$的细分。设 $x$ 是 $M$的一个 $\Sigma$ 点；我们将诱导出的 $\sigma$ 中的点记作同一个字母。则星$_x(\Sigma)$ 是星$_x(\sigma)$的细分。

证明. 设 $R^{\mathrm{a}}$ 是与 $\sigma$对应的有限生成偏序阿贝尔群，并设 $R$ 是由元素 $\geq 0$组成的子幺半群。假设 $\Sigma = \bigcup \rho_i$ ，其中每个$\rho_i$ 都可表示为 $R^{\mathrm{a}}$的偏序的一个有限生成细化 $R_i^{\mathrm{a}}$ 。设 $x: R^{\mathrm{a}} \to M^{\mathrm{gp}}$ 是给定的 $\sigma$点。设 $Q^{\mathrm{a}}$ 是引理 3.34 中给出的表示 $\mathrm{Star}_x(\sigma)$ 的偏序群。特别地，我们看到 $Q^{\mathrm{a}}$ 的底层群与 $R^{\mathrm{a}}$ 的相同，而由元素 $\geq 0$ 组成的子幺半群 $Q$ 是$R \cap \ker(x)$。由于 $R$ 是 $R^{\mathrm{a}} \otimes$R中的一个有理多面体锥与$R^{\mathrm{a}}$的交，且 $\ker(x)$ 是 $R^{\mathrm{a}}$中的有理子空间，因此 $Q = R \cap \ker(x)$也正是某个有理多面体锥的整点集，故作为幺半群是有限生成的。对每个 $R_i$也可作同样的推理，于是 $R_i \cap \ker(x)$是 $R \cap \ker(x)$的有限生成扩张。这表明

$$\mathrm{Star}_x(\Sigma) = \bigcup_{x \in \rho_i} \mathrm{Star}_x(\rho_i)$$

是有限多个函子的并，这些函子可由表示星$_x(\sigma)$的偏序阿贝尔群的有限生成扩张所表示。

接下来，我们证明星$_x(\rho_i)$∩星$_x(\rho_j)$是星$_x(\rho_i)$与星$_x(\rho_j)$各自的一个面。要使星$_x(\rho_i)$与星$_x(\rho_j)$同时非空， $x$ 必须经由 $\rho_i \cap \rho_j$分解；由假设，后者是 $\rho_i$ 与 $\rho_j$两者的一个面。也就是说，存在某个同时包含于 $R_i$ 与 $-R_j$ 中的 $f \in R^{\mathrm{a}}$ ，使得 $\rho_i \cap \rho_j = \rho_i \cap \{f = 0\} = \rho_j \cap \{f = 0\}$。换言之， $R_i + R_j = R_i[-f] = R_j[f]$， 且 $x^* f = 0$。因此，

$$\begin{aligned}(R_i \cap \ker(x)) + (R_j \cap \ker(x)) &\supset (R_i \cap \ker(x))[-f] \\ &= R_i[-f] \cap \ker(x) \\ &= (R_i + R_j) \cap \ker(x) \\ &\supset (R_i \cap \ker(x)) + (R_j \cap \ker(x))\end{aligned}$$

so

$$(R_i \cap \ker(x)) + (R_j \cap \ker(x)) = (R_i \cap \ker(x))[-f].$$

由于（$R_i \cap \ker(x)$) + ($R_j \cap \ker(x)$) 表示 $\mathrm{Star}_x(\rho_i) \cap \mathrm{Star}_x(\rho_j)$，且由于 $f \in R_i \cap \ker(x)$，这表明 $\mathrm{Star}_x(\rho_i) \cap \mathrm{Star}_x(\rho_j)$ 是 $\mathrm{Star}_x(\rho_i)$ 的一个面。由对称性可知，它也是 $\mathrm{Star}_x(\rho_j)$ 的一个面。

为完成证明，我们证明 $\mathrm{Star}_x(\sigma)$ 的每个赋值点都能提升到 $\mathrm{Star}_x(\Sigma)$。设 $R^{\mathrm{a}} \to M[\varepsilon N]$是 $\mathrm{Star}_x \sigma$) 的一个赋值点（因此 $N$是一个赋值幺半群）。取一个局部赋值 $M \to V$。则图式

$$\begin{array}{ccc} M[\varepsilon N] & \longrightarrow & V[\varepsilon N] \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & V \end{array} \tag{4}$$

是笛卡尔的，且 $V[\varepsilon N]$ 是赋值的。令 $y$ 为由 $V$-点 $\sigma$ 诱导的 $M \to V$。那么，Star $N$-值点 $x(\sigma)$ 与图式中的上方水平箭头复合后，会诱导出 Star$_y(\sigma)$ 的一个点；等价地，这是一个 $V[\varepsilon N]$-值点 $\sigma$，根据假设，它唯一地提升为一个 $V[\varepsilon N]$-值点 $\Sigma$。但由于 (4) 是笛卡尔的，这个点是由 Star$_x(\Sigma)$ 中唯一确定的一个点诱导的，并且该点按要求投影到 Star$_x(\sigma)$。□

**引理 3.38.** 设 $f\colon \sigma \to \sigma'$ 是弱凸 *Olsson* 预锥之间的整态射，$x\colon \tau \to \sigma$ 是从一个 *Olsson* 预锥出发的态射。那么，$f$ 是普遍满射，当且仅当 星$_x(f)$ 是普遍满射。

证明. 对偶地，我们从偏序阿贝尔群的态射出发：

$$R^{\mathrm{a}} \xrightarrow{F} (R')^{\mathrm{a}} \xrightarrow{X} M^{\mathrm{gp}}.$$

回顾引理 3.34，Star$_x(\sigma)$ 由幺半群表示为 $Q = R \cap (X \circ F)^{-1}(0)$（位于同一个偏序群 $R^{\mathrm{a}}$中），对于 $Q'$ 也同样如此。

首先，假设 $R \to R'$ 是正合的。那么

$$F^{-1}(Q') = F^{-1}(X^{-1}(0) \cap R') = (X \circ F)^{-1}(0) \cap F^{-1}(R') = (X \circ F)^{-1}(0) \cap R = Q,$$

因此 $Q \to Q'$ 也是正合的。

反过来，假设 $Q \to Q'$ 是正合的。由于 $R \to R'$ 是整的，只需证明它是局部的，即可由此得到它是正合的（注 2.10）。因此，取 $\alpha \in R$ 使得 $F(\alpha) = 0$。但此时 $\alpha$ 属于 $Q$，因此，由于 $Q \to Q'$ 是局部的且 $Q$ 是尖锐的，我们得到 $\alpha = 0$。□

## 4. On toric vector bundles

我们回顾环面簇上环面等变层理论的若干方面；这些层等价于平凡对数点上的 Olsson 锥（或更一般地，弱凸锥的细分）上的拟凝聚层。过去五十年来，这一主题受到了广泛关注 [Kan75、Kly89、Per04、Pay08、Pay09、DRJS18、KM22、KMT25], ，其中包括与物理学的联系 [FLTZ12]。本节将在将这些结果推广到 Olsson 锥之前，对其中一些结果作简要总结。

**4.1. 作为分次模的等变层。** 我们从仿射情形开始。固定一个基域 $k$。设 $P$ 是有限生成、饱和、尖锐幺半群，设 $\sigma = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(P, \mathbf{R}_{\geq 0})$ 为相应的严格凸有理多面锥，并令 $X_P$ （或 $X_\sigma$）表示与之关联的仿射环面簇 Spec($k[P]$)，其稠密环面为 $T = \mathrm{Hom}(P^{\mathrm{gp}}, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$。令 E 为 $T$ 上的等变拟凝聚层，或者等价地，令 E 为 Artin 锥 $\mathsf{A}_P = [X_P/T]$（或 $\mathsf{A}_\sigma$）上的拟凝聚层。

在 $X_P$ 上的 $T$-等变拟凝聚层等同于一个 $P_{\mathrm{gp}}$-分次的 $k[P]$-模。设 $p\colon \mathsf{A}_P \to \mathsf{B}T$ 为自然的结构态射，且 $\pi$ 为

后者与 $\mathrm{B}T \to \mathrm{Spec}\ k.$ 的复合。那么沿 $p$ 推前会遗忘 $k[P]$-模结构（韦伊限制），因此 $p_*\mathsf{E}$ 是一个 $P^{\mathrm{gp}}$-分次的 $k$-向量空间。进一步推前到点对应于取这个分次向量空间的零次部分。因此，我们可以将等型分解的各部分写如下：对所有 $\delta \in P^{\mathrm{gp}}$，有

$$E^\sigma_\delta := (p_*\mathcal{E})_\delta = \pi_*(\mathcal{E}(\delta)) = H^0(X_P, \mathcal{E}(\delta))^T.$$

**注 4.1.** 若 $\mathsf{E}$ 是凝聚的，则对每个 $\delta \in P^{\mathrm{gp}}$，$E^\sigma_\delta$ 都是有限维向量空间。因此，尽管远非适当，$\mathsf{A}_P$ 仍满足相干推前性质的某种形式。

对于 $P^{\mathrm{gp}}$ 中的每一个 $\delta_1 \le \delta_2$（即 $\delta_2 - \delta_1$ 位于幺半群 $P$ 中），对数结构在相应的线丛之间诱导一个层映射 $\mathsf{O}_{X_P}(\delta_1) \to \mathsf{O}_{X_P}(\delta_2)$，进而诱导 $k$-向量空间的一个线性映射：

$$\chi^{\delta_2}_{\delta_1} : E^\sigma_{\delta_1} \to E^\sigma_{\delta_2},$$

这编码了 $k[P]$-模在 $E = \bigoplus_\delta E^\sigma_\delta$ 上的结构。我们现在以 [Per04] 的记号总结前述讨论：

**定义 4.2** [Per04，定义 5.1、5.2、5.4]。一个 $\sigma$-族 $E^\sigma$ 或 $P$-滤过向量空间 是由 $k$-向量空间组成的集合 $\{E^\sigma_\delta\}_{\delta \in P^{\mathrm{gp}}}$，连同一组线性映射 $\chi^{\delta_2}_{\delta_1}\colon\ E^\sigma_{\delta_1} \to E^\sigma_{\delta_2}$，只要 $\delta_1 \le \delta_2$ 位于由 $P$ 诱导的偏序中的 $P_{\mathrm{gp}}$ 内，并满足对 $P^{\mathrm{gp}}$ 中的 $\delta_1 \le \delta_2 \le \delta_3$ 的相容条件 $\chi^{\delta_3}_{\delta_2} \circ \chi^{\delta_2}_{\delta_1} = \chi^{\delta_3}_{\delta_1}$。我们称 $\chi^\delta$ 为乘法映射。

**命题 4.3** [Per04，命题 5。5] 下面的范畴是等价的：

- $T$-等变拟凝聚层在 $X_P$ 上；
- $P_{\mathrm{gp}}$-分次 $k[P]$ 模（态射是次数为0的分次同态）；
- $\sigma$-族。

为了处理一般的环面簇，我们需要讨论拟凝聚层如何沿环面等变映射拉回，同时牢记面态射这一重要的特殊情形（见 [Per04，定义 5.6，命题 5。7]）。

**命题4.4.** 设 $h\colon\ P \to Q$ 为有限生成、饱和、尖锐幺半群的态射，并设 $f\colon\ X_Q \to X_P$ 表示相应的仿射托里克簇的等变态射。设 $\mathcal{E}$ 为 $X_P$ 上的 $T_P$-等变拟凝聚层，并设 $E$ 为相应的分次 $k[P]$-模。在同构意义下，$X_Q$ 上的拉回等变拟凝聚层 $f^*\mathcal{E}$ 可描述如下：

- 作为一个 $Q^{\mathrm{gp}}$ 分次的 $k[Q]$-模：它是分次张量积 $E \otimes_{k[P]} k[Q$ ].

- 作为一个 $\sigma_Q$-族：其分次为

$$(f^*E)_\delta = \varinjlim_{h(\gamma)\leq\delta} E_\gamma$$

以及自然诱导的乘法映射。

这尤其适用于局部化 $P_\sigma = P \to P[-\delta] = P_\tau$，对于一个面 $\tau \prec \sigma$及其对应的仿射环面簇之间的开嵌入 $X_\tau \subset X_\sigma$，Perling 用它们来刻画一般环面簇上的等变拟凝聚性 [Per04，定义 5.8 和定理 5。9]。请注意，在环面簇的情形下，自然的做法是固定环面的特征格 $P^{\mathrm{gp}}$ （其中 $P$ 是任意极大锥上线性函数构成的幺半群），但当转到一个面 $\tau$ 时，与可逆元对应的乘法映射会成为同构 [Per04，引理 5。3], 因此，通过锐化 $\tau$，我们得到一个等价但在组合上更简单的 $P[-\delta]^\natural$-族。

**定义 4。5** [Per04，定义 5.8]。设 $\Delta$ 是一个正规环面簇$X_\Delta$的扇。令 $\iota_{\tau,\,\sigma}$ 表示 $U_\tau \hookrightarrow U_\sigma$ 中面 $\tau \prec \sigma$ 对应的开嵌入。若一个 $\Delta$-族是由一组 $\sigma$-族 $\{E^\sigma\}_{\sigma\in\Delta}$及同构 $\eta_{\tau,\,\sigma}$构成的集合，其中 $\iota^*_{\tau,\,\sigma}E^\sigma \simeq E^\tau$对 $\tau \prec \sigma$成立，并满足余循环条件 $\eta_{\tau,\,\rho} = \eta_{\tau,\,\sigma} \circ \iota^*_{\tau,\,\sigma}(\eta_{\sigma,\,\rho})$ 对 $\tau \prec \sigma \prec \rho$成立。

因此， $\Delta$-族表示了 $X_\Delta$上的等变拟凝聚层。拟凝聚层的一些性质可以方便地用相应的 $\Delta$-族来刻画。事实上，以下性质都是局部的，因此只取决于构成 E 的 $\sigma$-族。

**命题 4。6** [Per04，定义 5.10 和命题 5。11]。 环面簇上的等变拟凝聚层 $\mathcal{E}$ $X_\sigma$ 是相干的，当且仅当相应的$\sigma$-族 $E$ 是有限的，即满足以下性质：

*(i)* 每个向量空间 $E^\sigma_\delta$ 在 $k$ 上都是有限维的；*(ii)* 对于 $P^{\mathrm{gp}}$ 中的每条严格下降链 $\delta_1 > \delta_2 > \cdots$，都存在一个 $n_0$，使得 $E_{\delta_n}$ 对于 $n \geq n_0$为0 ；*(iii)* 只有有限多个线性函数 $\delta_1$，……， $\delta_N$使得乘法映射之和

$$\bigoplus_{\gamma<\delta} E^\sigma_\gamma \to E^\sigma_\delta \tag{5}$$

不是满射。

该 $k[P]$模 $E$由 $E_{\delta_1},\ldots,E_{\delta_N}$ 生成元有限生成$\delta_1,\ldots,\delta_N$如(iii)中所述。更精确地说，可以通过提升映射 (5) 的有限多个有限维余核的基，找到一个基。因此，对于

$P^{\mathrm{gp}}$ 中的每条无限上升链，其乘法映射最终都会稳定为同构。

**命题 4。7** [Per04，命题 5。13]。 环面簇上的等变相干层 $\mathcal{E}$ $X_\sigma$ 是无挠的，当且仅当相应的乘法映射$\chi_{\delta_1}^{\delta_2}$ 所关联的 $\sigma$-族 $E^\sigma$ 均为单射。

在这种情况下，向量空间 $E_\delta^\sigma$ 都可以视为其余极限$\mathbf{E}^\sigma$的子空间。此外，局部化映射会诱导出单射（事实证明这些映射是同构， [Per04，推论 5。16]）$\mathbf{E}^\sigma \hookrightarrow \mathbf{E}^\tau$ 对于 $\tau \prec \sigma$，因此， $\Delta$-族中的每个向量空间都可以视为$\mathbf{E}^0$ -的子空间，其中 0 是 $\Delta$的极小锥，而它本身是一个向量空间，其维数与$\mathcal{E}$的一般秩相同。自反性体现在这样一个事实中：所有 $\sigma$-族仅由对应于 $\Delta$ [Per04定理 5。19]的射线的那些族决定。

由此，我们得到Klyachko对 $X_\Delta$上带框架托里克向量丛的描述，即借助于相容、有界、递增的**整数环**-滤子来刻画一个固定的向量空间$\mathbf{E}^0$（根据命题4.4，它可与$\mathcal{E}$ 在 $1 \in T$处的纤维等同）。

4.2. **环面向量丛的模空间**。设 $X_\sigma$ 为一个仿射环面簇。下一个命题是 [Kly89，命题 2.1。1] ；另见 [Pay08，命题2。2]。

**命题4.8.** 在 $X_\sigma$ 上的每个环面向量丛都等变地分裂为托里克线丛的直和。这些丛的底线丛是平凡的，而环面作用由一个特征 $u \in P^{\mathrm{gp}}$编码。特别地，有限多重集 $\mathbf{u}(\sigma) \subseteq P^{\mathrm{gp}}$ 与环面向量丛的同构类之间存在双射对应：

$$\mathbf{u}(\sigma) \quad \mapsto \quad \mathcal{E} = \bigoplus_{u \in \mathbf{u}(\sigma)} \mathcal{O}_\sigma(u).$$

若 $\tau \preceq \sigma$ 是一个面， $U_\tau \subseteq X_\sigma$ 是对应的环面不变开子集，则 $\mathcal{E}$ 在 $U_\tau$ 上的限制对应于沿投影 $P_{\mathrm{gp}}/(\rho^\perp \cap P_{\mathrm{gp}}) \to P_{\mathrm{gp}}/(\tau^\perp \cap P_{\mathrm{gp}})$ 的像多重集 $\mathbf{u}(\tau) = [\mathbf{u}(\sigma)]$ 。

**注 4.9.** 多重集 $\mathbf{u}(\sigma)$ 可以解释为 $\mathcal{E}$ 的等变 Chern 特征，参见 [Pay08，第 3] 节。 $\mathcal{E}$ 的秩是 $r$ 的基数。

*改写* 用模叠的语言来说，前述结论如下 ：

**命题 4.10.** 具有固定 *Chern* 特征 $\mathbf{u}(\sigma)$ 的环面向量丛之叠 $\mathfrak{V}_{\mathbf{u}(\sigma)}$ 与分类叠 $\mathrm{B}G(\mathbf{u}(\sigma))$ 同构，其中 $G(\mathbf{u}(\sigma))$ 是 $\mathcal{E} = \oplus_{u \in \mathbf{u}(\sigma)} \mathcal{O}_\sigma(u)$ 的自同构群。

为了更好地理解自同构群 $G(\mathbf{u}(\sigma))$，我们作如下观察。

首先，由于 E 分裂，其自同态代数也随之分裂：

$$\mathrm{Hom}_\sigma(\mathcal{E},\mathcal{E}) = \bigoplus_{u,u'\in \mathbf{u}(\sigma)} \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_\sigma(u),\mathcal{O}_\sigma(u')) = \bigoplus_{u,u'\in \mathbf{u}(\sigma)} H^0(\mathcal{A}_\sigma,\mathcal{O}_\sigma(u'-u)),$$

其中，当且仅当 $u \le u' \in P^{\mathrm{gp}}$ 时，每个因子都非零；此时 $H^0(\mathsf{A}_\sigma,\ \mathsf{O}_\sigma(u'-u)) \simeq k$ 是一维的。

其次，如果 $\tau \prec \sigma$ 是一个面，那么存在一个自然嵌入

$$G(\mathbf{u}(\sigma)) \hookrightarrow G(\mathbf{u}(\tau)). \tag{6}$$

取 $\tau = 0$ 后，我们得到一个从 $G(\mathbf{u}(\sigma))$ 到 $\mathrm{GL}_r(k)$ 的嵌入。我们将把 $G(\mathbf{u}(\sigma))$ 表示为保持某些部分旗不变的抛物子群的交。

**引理 4.11.** 当 $\rho \prec \sigma$ 是一个射线时，群 $G(\mathbf{u}(\rho))$ 是$\mathrm{GL}_r(k)$的一个抛物子群。

证明。 多重集$\mathbf{u}(\rho)$ 的取值属于 $P_{\mathrm{gp}}/(\rho^\perp \cap P_{\mathrm{gp}}) \simeq \mathbf{Z}$。具体而言，我们可以写成$\mathbf{u}(\rho) = (\delta_1^{r_1},\ \ldots,\ \delta_k^{r_k})$，其中这些特征按降序排列 $\delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_k$，且其重数满足 $\sum_{i=1}^k r_i = r$。

从 $P_{\mathrm{gp}}$ 分次 $k[P]$-模的角度来看，线丛 $\mathsf{O}_\sigma(u)$ 对应于 $x^{-u}k[P]$ （当且仅当 $u \ge 0$ 时具有不变截面）。特别地，对于上文的 $\mathsf{E} = \mathsf{E}(\mathbf{u}(\rho))$，我们得到：

$$\dim_k(E^\rho_\delta) = \#\{u \in \mathbf{u}(\rho) : \delta \ge -u\}.$$

带权递增滤子的数据：

$$0 = W_0 \subset W_1 = E^\rho_{-\delta_1} \subset \ldots \subset W_k = E^\rho_{-\delta_k} = \varinjlim_\delta E^\rho_\delta = \mathcal{E}|_1$$

于是等价于向量丛

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}_\rho(\delta_i) \otimes W_i/W_{i-1}.$$

自同构群 $G(\mathbf{u}(\rho)) \subseteq \mathrm{GL}(\mathsf{E}|_1)$ 是保持部分旗 $W_\bullet$不变的抛物子群。□

**引理 4.12.** 给定一个具有射线 $\rho \in \sigma(1)$的锥 $\sigma$，$\mathcal{E}(\mathbf{u}(\sigma))$ 的自同构群是对应于这些射线的抛物子群的交：

$$G(\mathbf{u}(\sigma)) \cong \bigcap_{\rho\in\sigma(1)} G(\mathbf{u}(\rho)) \subset \mathrm{GL}_r(k). \tag{7}$$

证明。 回忆一下， $G(\mathbf{u}(\sigma))$ 是其中可逆元组成的群

$$\mathrm{End}_\sigma(\mathcal{E}) = \bigoplus_{u,u'\in \mathbf{u}(\sigma)} H^0(X_\sigma,\mathcal{O}_\sigma(u'-u))^T.$$

环面簇 $X_\sigma$ 是正规的，因此根据 Hartogs 定理：

$$H^0(X_\sigma, \mathcal{O}_\sigma(u'-u))^T = \bigcap_{\rho\in\sigma(1)} H^0(U_\rho, \mathcal{O}_\rho([u]'-[u]))^T$$

在 $X_\sigma$的函数域中。最后，我们对$\mathbf{u}(\sigma)^2$ 求和，并与$\mathrm{GL}_r(k)$求交。□

现在令 $\Delta$为一个正规托里克簇的扇 $X_\Delta$。等变向量丛的陈特征可以看作一组 $\Psi = \{\mathbf{u}(\sigma)\}_{\sigma\in\Delta}$ 满足面限制兼容性的多重集，参见 [Pay08，第 3]节。我们固定这样一个 $\Psi$。

**命题 4.13**。在$\mathcal{A}_\Delta = [X_\Delta/T]$ 上的、具有固定陈特征 $\Psi$ 的向量丛之叠 $\mathfrak{V}_\Psi$ 可识别为以下逆极限

$$\varprojlim_{\sigma\in\Delta} \mathrm{B}G(\mathbf{u}(\sigma)).$$

证明。Artin 扇$\mathcal{A}_\Delta$ 有一个由 Artin 锥组成的 Zariski 开覆盖$\mathcal{A}_\sigma$， $\sigma\in\Delta$，因此该结论由命题4.10得出。□

Payne 的表述 [Pay08，定理 3.9，推论 3。11]采用如下定义：

**定义 4.14.** 令 $\mathsf{M}_\Psi^{\mathrm{fr}}$ 表示具有固定等变陈特征的 $\Psi$上的带框架的等变向量丛的模叠 $X_\Delta$。也就是说，$\mathsf{M}_\Psi^{\mathrm{fr}}$ 的一个 $S$-点是 $X_\Delta\times S$ 上的一个等变向量丛 $\mathsf{E}$，以及一个同构 $\mathsf{E}\big|_{1\times S}\simeq E\otimes\mathsf{O}_S$；其中 $1\in X_\Delta$ 是稠密环面的单位元，而 $E$ 是一个固定的、维数为 $r$的 $k$-向量空间。

Payne 对带框架向量丛模空间的描述，基于 Kly- achko 的分类 [Kly89，定理 2.2。1]我们将 $\Delta(1)$ 记作扇 $\Delta$的射线集合。

**定理 4.15.** 在 $X_\Delta$ 上具有固定框架$\mathcal{E}|_1\simeq E$ 的 $T$-等变向量丛$\mathcal{E}$ 范畴，等价于满足以下相容条件的弱递增滤过$\{E_\delta^\rho\}_{\delta\in}^{\rho\in\Delta(1)}$ $\mathbf{z}$：

对于每个锥 $\sigma\in\Delta$，记 $P_\sigma = P_{\text{群化}}/(\sigma^\perp\cap P^{\mathrm{gp}})$；那么，存在一个（不一定唯一的）分解 $E=\oplus_{u\in P_\sigma}E_u$，使得

$$E_\delta^\rho = \sum_{u(v_\rho)\geq -\delta} E_u$$

对每个 $\rho\prec\sigma$ 都成立，其中 $v_\rho$ 表示 $\rho$ 的本原生成元。[8]

[8]O关于滤子的约定与 [Kly89] 和 [Pay08]. 中的约定相反。

**推论 4.16.** 具有陈特征$\mathbf{u}(\rho)$ 的向量丛的带框架模空间，在射线 $\mathscr{A}_\rho \cong [\mathbf{A}^1/\mathbf{G}_\mathrm{m}]$ 上同构于部分旗簇 $\mathscr{F}\ell(\mathbf{u}(\rho))$。

证明。 在此情形下，相容条件是平凡的。另见引理 4.11。 □

**定理 4。17** [Pay08，定理 3。9]。 模空间 $\mathcal{M}_\Psi^{fr}$ 是部分旗簇乘积中的局部闭子概形 $\prod_{\rho\in\Sigma(1)}\mathscr{F}\ell(\mathbf{u}(\rho))$，由满足以下条件的旗的集合 $(W_\bullet^\rho)^{\rho\in\Delta(1)}$ 构成；该条件对 $\Delta$ 的所有锥 $\sigma$ 均成立：

$$\dim(\bigcap_{\rho\in\sigma(1)} W_\delta^\rho) = \#\left\{[u]\in\mathbf{u}(\sigma) \;\middle|\; \forall\rho\in\sigma(1),\ [u](v_\rho)\geq -\delta\right\}.$$

这个数值条件是对 Klyachko 相容条件的另一种表述。证明请参阅 [Pay08，命题 3。13] 模叠 $\mathfrak{V}_\Psi$不过是 $\mathcal{M}_\Psi^{\mathrm{fr}}$ 对框架选择上的 GL 群$_r$ 作用的商。接下来，我们将 Payne 的描述与命题4.13中的描述进行比较。

4.2.1. 射线。 由于 GL$_r(k)$ 在簇 Fl(**u**($\rho$)) 上传递作用，而 $G$(**u**($\rho$)) 是部分旗 $W_\bullet$ 的稳定子，因此我们得出

$$[\mathscr{F}\ell(\mathbf{u}(\rho))/\operatorname{GL}_r(k)] \simeq \mathrm{B}G(\mathbf{u}(\rho))$$

证明对于单条射线，我们对 $\mathfrak{V}_{\mathbf{u}(\rho)}$ 的描述与 Payne 的描述一致。

4.2.2. 锥。 设 $\sigma$ 是一个锥。根据约化群在拟射影概形和齐性空间上的作用的一般理论（例如参见[Mil12]），我们有一个局部闭浸入

$$\operatorname{GL}_r(k)\backslash G(\mathbf{u}(\sigma)) \hookrightarrow \prod_{\rho\in\sigma(1)} \mathscr{F}\ell(\mathbf{u}(\rho))$$

因为根据引理 4.12， $G(\mathbf{u}(\sigma))$ 是旗的集合 $\{W_\bullet^\rho\}^{\rho\in\sigma(1)\cdot}$ 的稳定子

GL$_r(k)\backslash G$(**u**($\sigma$)) 与 Payne 的模空间 $\mathsf{M}^{\mathrm{fr}}_{\mathbf{u}(\sigma)}$一致，因为 GL$_r(k)$ 在 $\mathsf{M}^{\mathrm{fr}}_{\mathbf{u}(\sigma)}$ 上的作用在满足 Klyachko 相容条件的 $E$ 的分裂集合上是传递的。

忘掉框架后，我们便得到代数栈的同构

$$\mathrm{B}G(\mathbf{u}(\sigma)) \cong [\mathcal{M}^{\mathrm{fr}}_{\mathbf{u}(\sigma)}/\operatorname{GL}_r(k)]$$

4.2.3. 扇。 对于 $\Delta$ 一个正规环面簇的扇，以及 $\Psi=\{\mathbf{u}(\sigma)\}$ 一个相容多重集族， [Pay08，定理 3.9]表明

$$\mathcal{M}_\Psi^{\mathrm{fr}} = \bigcap_{\sigma\in\Delta}\left(\mathcal{M}^{\mathrm{fr}}_{\mathbf{u}(\sigma)} \times \prod_{\rho\notin\sigma(1)} \mathscr{F}\ell(\mathbf{u}(\rho))\right)$$

其中 交位于由 $\rho\in\Delta$(1) 编号的部分旗簇的乘积中 .

由上文给出的、作为局部闭子概形之交的显式表示可知，对于每个锥 $\sigma$ ，我们都有一个态射

$$[\mathcal{M}_\Psi^{\mathrm{fr}}/\operatorname{GL}_r(k)] \to \mathrm{B}G(\mathbf{u}(\sigma))$$

与面态射相容。因此，极限的泛性质意味着我们有一个同构

$$[\mathcal{M}_\Psi^{\mathrm{fr}}/\operatorname{GL}_r(k)] \to \mathfrak{V}_\Psi.$$

**注 4.18**。 将 $\mathfrak{V}_\Psi$ 表示为逆极限的优势在于，这一视角可以推广到 Olsson 扇上的向量丛模叠，而固定框架的含义则不甚明确。

**注 4.19**。 Payne 构造等变向量丛模叠的方法，可以推广到具有固定等变陈特征的等变相干层模空间。M. Kool 在其博士论文 [Koo10]。

## 5. Quasicoherent sheaves on Olsson fans

本节证明，Olsson 锥上的局部自由层在许多方面与仿射托里克簇上的等变局部自由层相似。

### 5.1. **截面**。

**命题 5.1.** 设 $S$ 为精细饱和对数概形，并设 $\pi\colon \sigma \to S$为 $S$ 上的 *Olsson* 预锥。则 $\pi_*$ 在拟凝聚层上是正合的，且高阶导出前推消失。

证明。该断言 ′在 $S$ 上是 étale 局部的，因此我们可以假设存在有限生成饱和幺半群的局部同态 $P \to Q$ 以及严格态射 $S \to \mathcal{A}_P$，使得 $\sigma = S \times_{\mathcal{A}_P} \mathcal{A}_Q$。由命题 3.5，存在仿射 $S$-概形 $Y = S \times_{\mathcal{A}_P} X_Q$ 以及可对角化群 $T = T_Q$ 在 $S$ 上，使得 $\sigma = [Y/T]$。投影 $\sigma \to S$ 现在分解为：

$$\sigma = [Y/T] \to \mathrm{B}T \to S$$

由于在这两个步骤的每一步中，前推都是正合的，且拟凝聚层的高阶导出前推均消失，因此由 Leray 谱序列，同样的结论对复合成立。□

在下面的命题中，我们采用命题 3.5 的记号。记 $\sigma$ 为 $\mathsf{A}_Q \times_{\mathcal{A}_P} S$。对于每个 $\beta \in Q^{\mathrm{gp}}$，记 $\mathsf{O}_\sigma(\beta)$ 为 $\sigma$ 上的拟凝聚层，其$\gamma$分次分量为 $C_{\beta+\gamma}$。这个记号显然与沿投影 $\pi\colon \sigma \to S$的拉回相冲突，因为若 $\beta \in P^{\mathrm{gp}}$，则 $\pi^*\mathsf{O}_S(\beta)$ 是一个拟凝聚层，其 $\gamma$分次分量为 $C_\gamma(\beta)$。然而，命题 3.5 (iii) 表明，这两个分次模通过乘以 $y^\beta$典范地同构。当 $\beta \in P^{\mathrm{gp}}$时，我们通过这个同构，将对 $\mathsf{O}_\sigma(\beta)$ 的这两种自然解释视为相同。

**命题 5.2.** 设 $h\colon P \to Q$ 是有限型、饱和、尖锐幺半群之间的一个同态，并设 $\pi\colon \sigma = S \times_{\mathcal{A}_P} \mathcal{A}_Q \to S$ 是沿态射 $S \to \mathcal{A}_P$基变换所诱导的 *Olsson* 预锥。若 $\gamma \in Q^{\mathrm{gp}}$，则

$$\pi_* \mathcal{O}_\sigma(\gamma) = \varinjlim_{\substack{\alpha \in P^{\mathrm{gp}} \\ h(\beta) \le \gamma}} \mathcal{O}_S(\alpha),$$

且 $\mathrm{R}^i \pi_* \mathcal{O}_\sigma(\gamma) = 0$ 对所有 $i > 0$。

证明。高阶上同调的消失来自命题 5.1。沿 $\pi$ 的前推对应于取不变量，其中作用来自环面 $T_Q = \mathrm{Hom}(Q^{\mathrm{gp}}, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$。由于 $C(\gamma)$ 是 $C$，其分次的平移量为 $\gamma$，则前推$\pi_* \mathcal{O}_\sigma(\gamma)$ 是 $C$ 位于分次 $\gamma$ 的分次分量之和。由命题3.5，我们可以写出

$$C = \bigoplus_{\substack{\alpha \in P^{\mathrm{gp}}, \beta \in Q^{\mathrm{gp}} \\ h(\alpha) \le \beta}} y^\alpha x^\beta \mathcal{O}_S(\alpha) \Big/ \Big\langle (\varepsilon_p - y^{-p}) \bigoplus y^\alpha x^\beta \mathcal{O}_S(\alpha - p) \Big\rangle_{p \in P}.$$

位于分次 $\gamma$ 的分量同构于

$$\bigoplus_{\substack{\alpha \in P^{\mathrm{gp}} \\ h(\alpha) \le \gamma}} y^\alpha x^\gamma \mathcal{O}_S(\alpha) \Big/ \big\langle \varepsilon_p - y^{-p} \big\rangle_{p \in P}.$$

这是将 $\varinjlim_{h(\alpha) \le \gamma} \mathcal{O}_S(\alpha)$ 表示为直和之商的通常呈现。□

**推论 5.3。** 设 $P \to Q$是有限生成、饱和、尖锐幺半群的正合同态。设 $S$ 是精细饱和对数概形，并设 $\pi\colon \sigma \to S$ 是 $\mathcal{A}_Q \to \mathcal{A}_P$ 沿 $S \to \mathcal{A}_P$的基变换。则 $\pi_* \mathcal{O}_\sigma = \mathcal{O}_S$。

证明。设 $h\colon P \to Q$ 是一个正合同态，并令 $P_\gamma$ 为满足 $h(\beta) \le 0$ 的所有 $\beta \in P^{\mathrm{gp}}$ 的集合。由于 $h$ 是正合的，这与满足$\beta \le 0$的所有 $\beta \in P^{\mathrm{gp}}$ 的集合相同，而该集合显然有唯一的终对象 0。因此 $\pi_* \mathcal{O}_\sigma = \mathcal{O}_S(0) = \mathcal{O}_S$。□

**推论 5.4。** 设 $T$ 是底为精细饱和对数概形$S$的热带环面，且 $\gamma$是 $T$ 的一个特征。那么，对于所有 $p > 0$ 和 $\pi_* \mathcal{O}_T(\gamma) = 0$，都有$\mathrm{R}^p \pi_* \mathcal{O}_T(\gamma) = 0$，除非 $\gamma = 0$；此时 $\pi_* \mathcal{O}_T = \mathcal{O}_S$。

证明。此断言在 $S$ 的严格-´étale 拓扑下是局部的，因此我们假设 $S$ 是严格亨泽尔的。令 C 为所有普遍满射 $\sigma \to T$ 的范畴，其中 $\sigma$是底为 $S$ 的 Olsson 锥。若 $\sigma_1 \to T$ 和 $\sigma_2 \to T$ 都属于 C，则 $\sigma_1 \times_T \sigma_2$ 也属于 C。

我们论证，$\sigma \in$ C 的集合定义了 $T$ 在严格 ´étale 拓扑中的一个覆盖。若 $U$ 是任意精细、饱和对数概形，则任意态射 $U \to T$在 $U$的严格 ´étale 拓扑下局部地经由某个 $\sigma \in$ C 分解。事实上，$U \to T$

当然可以局部地经由 $S$上的某个 Olsson 预锥 $\tau$ 分解。但此时，对于任意 $\sigma \in$ C， $\tau \to T$都可以经由万有满射 $\mu\colon \tau \times \sigma \to T$分解，其中 $\mu$表示 $T$的群结构中映射 $\tau \to T$ 和 $\sigma \to T$ 之和。

由于 C 覆盖 $T$，因此有一个 Čech 谱序列：

$$H^p(\mathcal{C}, H^q(\sigma, \mathcal{O}_\sigma(\gamma))) \Rightarrow H^{p+q}(T, \mathcal{O}_T(\gamma))$$

其中 $H^p$(C –) 是 Čech 上同调。

但是 $\mathcal{O}(\gamma)$ 在 $\mathcal{C}$ 的各对象上是无环的，这由命题 5.2得出，因此

$$H^p(T, \mathcal{O}_T(\gamma)) = H^p(\mathcal{C}, \mathcal{O}(\gamma)).$$

预层 $\pi_*\mathcal{O}(\gamma)$ 在 $\mathcal{C}$ 上是常值的，其值为 $\mathcal{O}_S$，若 $\gamma = 0$；否则值为 0。事实上，根据命题 5.2，若 $\gamma$ 非零，则它在 $\mathcal{C}$的每个对象上都向下无界。另一方面，对于 $\gamma = 0$，由于 $\pi$ 是普遍满射，因此在对数结构上是正合的，等式 $\pi_*\mathcal{O}(\gamma) = \mathcal{O}_S$ 由推论 5.3证明。

最后，若 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ 属于 C，则 $\sigma_1 \times_T \sigma_2$也属于 C，因此 C 上 O($\gamma$) 的截面复形与无限单形的胞腔上同调相同，故其正次数上同调为零。□

**推论 5.5**。设 $S$ 是一个精细饱和对数概形。设 $\pi\colon \sigma \to S$是一个在 $S$上的弱凸 *Olsson* 预锥。设 $\gamma$ 是 $\sigma$上的线性函数。那么，对所有 $i > 0$，均有$\mathrm{R}^i\pi_*\mathcal{O}_\sigma(\gamma) = 0$，且自然映射

$$\varinjlim_{\substack{\beta \in \overline{M}_S^{\mathrm{gp}} \\ \beta \leq \gamma}} \mathcal{O}_S(\beta) \to \pi_*\mathcal{O}_\sigma(\gamma) \tag{8}$$

是一个同构。

证明。 由命题3.25，通过在 $\sigma$ 的严格 étale 拓扑下局部工作，我们可以将其识别为热带环面$T$ 与 Olsson 预锥 $\sigma'$ 的乘积 ′。对于 $S$，结论由命题$i > 0$5.2 和推论 5.2 以及 Leray 谱序列立即得到。由推论 5.4 可知，当5.4两边的（8）均为零，若 $\gamma$在 $\sigma$ 上方的纤维上不是常数 $\sigma'$。剩下的情形是 $\gamma$ 从 $\sigma'$拉回，此时结论由命题 5.2 和推论5.4立即得到。□

推论 5.3 也意味着普遍满射的 Olsson 预锥的底是一个良模空间：

**命题 5.6**。 设 $S$ 是一个精细饱和对数概形，且设 $\pi\colon \sigma \to S$是一个 *Olsson* 预锥，其到 $S$ 的投影是普遍满射的。那么$\pi\colon \sigma \to S$ 是一个良模空间。特别地，它是满射且普遍闭的。

证明。根据定义 [Alp13，第 1 节，2]，我们必须证明 $\pi$ 是拟紧的（显然），$\pi_*$ 在拟凝聚层上是正合的（命题 5.1），并且$\mathcal{O}_S \to \pi_*\mathcal{O}_\sigma$ 是一个同构（推论 5.3）。满射性和普遍闭性由 [Alp13，定理 4，16]。□

**推论 5.7**。设 $h\colon P \to Q$ 是有限生成、饱和且尖锐幺半群之间的局部整同态，并假设 $\gamma \in Q^{\mathrm{gp}}$。令 $S$ 为一个精细饱和对数概形，并令 $\pi\colon \sigma \to S$ 为沿态射 $S \to \mathcal{A}_P$对$\mathcal{A}_Q \to \mathcal{A}_P$ 进行基变换得到的 *Olsson* 预锥。对于 $S$的每个几何点 $s$，令 $\gamma_s$ 为 $\gamma$ 在 $\sigma_s = \pi^{-1}(s)$ 中的像。则存在 $\bar{M}_S^{\mathrm{gp}} \cup \{-\infty\}$ 的一个截面，使得其在 $S$ 的每个几何点 $s$ 处的茎为 $\gamma_s$的最大下界。

证明。由于 $h$ 是局部整的，命题 2.13保证 $\gamma$ 具有最大下界 $\mu \in P_{\mathrm{gp}} \cup \{-\infty\}$。根据命题 2.14，它与到 $s$的拉回相容。□

推论 *5.8*。设 $P \to Q$ 是有限生成、饱和、尖锐幺半群之间的局部整同态（分别为局部整且竖直同态）。令 $\pi : \sigma \to S$ 为沿态射 $S \to A_P$对 $A_Q \to A_P$进行的基变换。令 $\delta$为推论 *5.7*所保证的 $M_S^{\mathrm{gp}} \cup \{-\infty\}$的截面。则 $\pi_* O_\sigma(\gamma) = O_S(\delta)$，其中约定 $O_S(-\infty) = 0$。特别地，$\pi_* O_\sigma(\gamma)$ 是秩为 $\leq 1$ 的局部自由层（分别为可逆层）。

证明。这直接由推论 2.16 和命题 5.2得出。□

**注 5.9**。尽管 $\delta$ 由推论 $\gamma$ 5.8 唯一确定，但只有 $\mathcal{O}_S(\delta)$ 由$\mathcal{O}_\sigma(\gamma)$ 唯一确定。换言之，线丛$\mathcal{O}_S(\delta)$ 未必能确定 $\delta$。例如，当$S$ 上的所有线丛都平凡时，便是如此。

5.2. $Q/P$**-系统**。由命题 3.5 中 Olsson 前锥的局部描述可立即得出，$\sigma$ 上的拟凝聚层在 $S$局部上可表示为 $Q^{\mathrm{gp}}$-分次 $C$-模。我们通过考察分次分量，使这一描述更加具体，从而推广 Perling 的 $\sigma$-族。

**定义 5.10**。令 $P \to Q$ 为有限生成、饱和、尖锐幺半群的同态。设 $S$ 为一个代数栈，并带有到 $\mathbf{A}_P$ 的态射。$S$ 上的一个 $Q/P$-滤过 拟凝聚层是指由 $S$ 上的拟凝聚层 $\{F_\alpha\}_{\alpha \in Q^{\mathrm{gp}}}$ 以及映射 $f_{\alpha,\beta}$: $F_\alpha \to F_\beta$ 构成的系统，其中只要 $\alpha \leq \beta$ 在由 $Q \subseteq Q^{\mathrm{gp}}$ 诱导的偏序中成立，便有上述映射，并且满足

(i) $f_{\beta,\,\gamma} \circ f_{\alpha,\,\beta} = f_{\alpha,\,\gamma}$ 当 $\alpha \leq \beta \leq \gamma$；(ii) 存在同构 $F_{\alpha+\delta} \simeq F_\alpha \otimes \mathcal{O}_S(\delta)$，当 $\delta \in P^{\mathrm{gp}}$时，这些同构依赖于 $\delta$ 且具有同态性；(iii) 在 (ii) 给出的同构下，映射 $F_\alpha \to F_{\alpha+\delta}$ 与 $\varepsilon_\delta$ 一致，当$\delta \in P$。

**命题5.11**。 设 $P \to Q$ 是有限型、饱和、尖锐幺半群的同态， $S$ 是有限型、饱和的对数概形，且 $S \to \mathcal{A}_P$ 是带有对数结构的叠的态射。令 $\pi$ ： $\sigma \to S$ 表示通过对$\mathcal{A}_Q \to \mathcal{A}_P$作基变换得到的 *Olsson* 预锥。那么， $\sigma$ 上的拟凝聚层等价于 $S$上的 $Q/P$-滤过拟凝聚层。

第一种证明。 定义 5.10 中的数据等价于命题 3.5 记号下的分次$C$-模结构。事实上，由 $F_\alpha$ 的直和可得到一个 $Q^{\mathrm{gp}}$-分次拟凝聚 $\mathsf{O}_S$-模。映射$f_{\alpha,\beta}$ 以命题 3.5 中的记号刻画了 $A$ 的作用；同构 $F_{\alpha+\delta} \simeq F_\alpha \otimes \mathsf{O}_S(\delta)$对应于提升为 $B$-作用；而$f_{\alpha+\delta,\alpha}$ 与 $\varepsilon_\delta$ 在 $\delta \in P$ 时的识别，则对应于下降为 $C$-作用。□

我们给出命题 5.11的另一种直接证明。

第二种证明。 设 $\mathsf{E}$ 是 $\sigma$ 上的拟凝聚层。令

$$\Phi(\mathcal{E}) = \{\pi_* \mathcal{E}(\alpha)\}_{\alpha \in Q^{\mathrm{gp}}},$$

其映射由 $\mathsf{E}(\alpha) \to \mathsf{E}(\beta)$ 在 $\alpha \leq \beta$ 属于 $Q^{\mathrm{gp}}$ 时诱导，这给出 $S$ 上一个 $Q/P$-滤过拟凝聚层。

反过来，如果 $S$ 上的 $Q/P$-滤过拟凝聚层为 $F = \{F_\alpha\}_{\alpha \in Q^{\mathrm{gp}}}$ ，我们可以通过以下方式构造 $\sigma$ 上的拟凝聚层：

$$\Psi(F) = \varinjlim_{\substack{\alpha,\beta \in Q^{\mathrm{gp}} \\ \alpha \leq \beta}} \pi^* F_\alpha(-\beta) = \operatorname{coker}\Big(\bigoplus_{\alpha \leq \beta} \pi^* F_\alpha(-\beta) \to \bigoplus_{\alpha} \pi^* F_\alpha(-\alpha)\Big). \tag{9}$$

第一个直和是对满足 $\alpha \leq \beta$ 的配对 $(\alpha, \beta) \in Q^{\mathrm{gp}} \times Q^{\mathrm{gp}}$ 取的，第二个直和则是对 $Q^{\mathrm{gp}}$ 取的。在 $F_\alpha(-\beta)$ 分量上，该映射是自然映射 $\varepsilon_{\beta-\alpha}$ 到 $F_\alpha(-\alpha)$ 直和项的映射与转移态射 $f_{\alpha,\,\beta}$ 到 $F_\beta(-\beta)$ 直和项的映射之差。

我们论证ue that $\Phi(\Psi(F)) = F$ 利用投影公式[9] 以及 $\pi_*$ 的正合性:

$$\begin{aligned}\Phi(\Psi(F))_\gamma &= \pi_*\Big(\varinjlim_{\substack{\alpha,\beta\in Q^{\mathrm{gp}}\\ \alpha\le\beta}} \pi^*F_\alpha(-\beta+\gamma)\Big)\\ &= \varinjlim_{\substack{\alpha,\beta\in Q^{\mathrm{gp}}\\ \alpha\le\beta}} F_\alpha\otimes\pi_*\mathcal{O}_\sigma(-\beta+\gamma)\\ &= \varinjlim_{\substack{\alpha,\beta\in Q^{\mathrm{gp}},\ \delta\in P^{\mathrm{gp}}\\ \alpha\le\beta\le\gamma-\delta}} F_\alpha(\delta)\\ &= \varinjlim_{\delta\in P^{\mathrm{gp}}} F_{\gamma-\delta}(\delta) = F_\gamma\end{aligned}$$

因此 $\Phi(\Psi(F)) \simeq F$，所以 $\Psi$ 是完全忠实的。另一方面，若 E 是 $\sigma$ 上的拟凝聚层，则有映射 $\Psi(\Phi(\mathrm{E})) \to \mathrm{E}$。令 $K$ 和 $L$ 分别为其核与余核。由于 $\Phi$ 由命题 5.1 可知是正合的，因此 $\Phi(K) = \Phi(L) = 0$。所以只需证明 $\Phi(\mathrm{E}) = 0$ 当且仅当 $\mathrm{E} = 0$。

但是存在一个可对角化群 $T$，以及一个使 $\sigma \to S$ 经由 B$T$分解的分解，其中 $\tau\colon \sigma \to \mathrm{B}T$ 是仿射的。若 $\Phi(\mathrm{E}) = 0$，则 $\tau_*\mathrm{E} = 0$，进而可推出 $\mathrm{E} = 0$，因为 $\tau$ 是仿射的。□

**注 5.12**。当 $S$ 是一个具有平凡对数结构的点时，因此 $\sigma$ 就是 Artin 锥 $\mathcal{A}_Q$，前一个命题便归结为 Perling 关于拟凝聚层与 $\sigma$-族 [Per04], 在第 4.1节中回顾的等价关系。

**推论 5.13**。设 $h\colon P \to Q$ 和 $g\colon Q \to R$ 是有限生成、饱和、尖锐幺半群之间的同态。设 $S$ 是一个有限生成、饱和对数概形，并带有到$\mathcal{A}_P$ 的态射；设 $\psi\colon \tau \to \sigma$ 是在 $S$ 上的 *Olsson* 锥态射，由 $\mathcal{A}_R \to \mathcal{A}_Q$ 拉回得到。设 $\mathcal{F}$ 是 $\sigma$ 上的拟凝聚层，且 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in Q}$ 是其对应的 $Q/P$-滤过$\mathcal{O}_S$-模。那么 $\psi^*\mathcal{F}$ 对应于一个 $R/P$-滤过模

$$\Big\{\varinjlim_{g(\alpha)\le\beta} F_\alpha\Big\}_{\beta\in R^{\mathrm{gp}}}.$$

证明。设 $\rho\colon \tau \to S$ 和 $\pi\colon \sigma \to S$ 为投影。由命题 5.11可得

$$\begin{aligned}(\psi^*\mathcal{F})_\beta &= \rho_*(\psi^*\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_\tau(\beta)) = \pi_*\left(\mathcal{F}\otimes\psi_*\mathcal{O}_\tau(\beta)\right)\\ &= \pi_*\Big(\mathcal{F}\otimes\varinjlim_{\substack{\alpha\in Q^{\mathrm{gp}}\\ g(\alpha)\le\beta}}\mathcal{O}_\sigma(\alpha)\Big) = \varinjlim_{\substack{\alpha\in Q^{\mathrm{gp}}\\ g(\alpha)\le\beta}}\pi_*\mathcal{F}(\alpha) = \varinjlim_{\substack{\alpha\in Q^{\mathrm{gp}}\\ g(\alpha)\le\beta}} F_\alpha.\end{aligned}$$

[9]由于 $\pi\colon\sigma \to S$ 分解为一个仿射态射后接投影 B$T \to S$，其中 $T$ 是一个可对角化群，因此对于 $S$ 上的所有 拟凝聚层 $F$（而不仅仅是平坦层），我们有 $\pi_*(G\otimes\pi^*F) = \pi_*(G)\otimes F$。

□

若假设态射 $S \to \mathcal{A}_P$ 经由环面簇 $X_P$分解，则可以得到更简单的描述；在这种情况下，我们可以使用命题 3.8的局部描述。

**定义 5.14.** 设 $h\colon P \to Q$ 是有限生成、饱和、尖锐幺半群的同态。设 $S$ 是一个代数栈，并带有到 $X_P$ 的态射。设 $K$ 是 $P^{\mathrm{gp}} \to Q^{\mathrm{gp}}$ 的核， $L$ 是其余核，而 $M$ 是其像。固定满射 $P_{\mathrm{gp}} \to M$ 的一个分裂$P_{\mathrm{gp}} = K \oplus M$。 $S$ 上的一个约化 $Q/P$-滤过拟凝聚层，是由 $S$ 上的拟凝聚层系统 $\{E_\alpha\}_{\alpha \in L}$ 以及以下数据组成

(i) 对每个 $q \in Q$ ，给定映射 $x^q = x^q_{\alpha,\beta}\colon E_\alpha \to E_\beta$ ，使得 $q + \alpha = \beta$；以及 (ii) 对每个 $p \in K$，给定同构 $u^p = u^p_\alpha : E_\alpha \to E_\alpha$ ，满足

(iii) 对所有 $q, q' \in Q$，有 $x^q x^{q'} = x^{q+q'}$ ；(iv) 对所有 $p, p' \in K$，有 $u^p u^{p'} = u^{p+p'}$ ；(v) 对于 $p \in M$， $x^{h(p)}\colon E_\alpha \to E_\alpha$ 与乘以 $\varepsilon_p(v^{-p})$ 的映射一致；(vi) 对于 $p \in K$， $x^{h(p)}\colon E_\alpha \to E_\alpha$ 与乘以 $u^p\varepsilon_p(v^{-p})$ 的映射一致；以及 (vii) 对所有 $q \in Q$ 和 $p \in K$， $x^q$ 与 $u^p$ 可交换。

定义 5.14在主要关注的情形下会大大简化，此时$P \to Q$ 是单射。在这种情况下，分裂 $g$ 是唯一的，因此同构 $u$可以省略。

**推论 5.15**。 设 $P \to Q$ 是有限生成、饱和、尖锐幺半群之间的同态，且 $S \to X_P$ 是概形态射。设 $\pi\colon \sigma \to S$ 表示通过基变换从 $\mathcal{A}_Q \to \mathcal{A}_P$得到的相对 *Olsson* 锥。那么， $\sigma$ 上的拟凝聚层等价于 $S$上的约化 $Q/P$-滤过拟凝聚层。

请注意，推论 5.15 中的等价并非典范的，而是取决于包含 $K \subset P^{\mathrm{gp}}$的一个分裂的选择。不过，当这个分裂唯一时，即当 $K = 0$ 或 $K = P^{\mathrm{gp}}$时，该等价是典范的。

证明。 这只是根据分次分量来诠释分次 $C''$-模（采用推论 3.7中的记号）。 □

关于 $\sigma$ 上拟凝聚层的某些性质，可以有效地用 $Q/P$-滤过系统来表述。我们讨论有限表示性，以及在整性假设下的（对数）平坦性。我们在 $S = \mathrm{Spec}(R)$ 上局部工作，并假设存在一个态射 $S \to X_P$。我们继续用 $C''$ 指代推论 3.7 中的代数。注意，当 $P_{\mathrm{gp}} \to Q^{\mathrm{gp}}$ 是单射时， $C'' = R \otimes_{\mathbf{Z}[P]} \mathbf{Z}[Q]$。

**命题 5.16**。 设 $\sigma$ 是定义在 $S$ 上的 *Olsson* 预锥，由态射 $\mathcal{A}_Q \to \mathcal{A}_P$ 对有限生成、饱和、尖锐幺半群 $h\colon P \to Q$ 作基变换得到。设 $\mathcal{E}$ 是 $\sigma$ 上的拟凝聚层。设 $\{E_q\}_{q\in Q^{\mathrm{gp}}}$ 是其关联的 $Q/P$-滤过系统。设 $E$ 是按命题 *3.5* 的记号所定义的关联 $C$-模。下列条件在 $\acute{}$ 中作 *étale* 局部化后等价：$S$

*(i)* $\mathcal{O}_\sigma$-模$\mathcal{E}$ 是有限型的。*(ii)* $C$-模 $E$ 是有限型的。*(iii)* $\mathcal{O}_\sigma$-模$\mathcal{E}$ 是有限个 $\mathcal{O}_\sigma(\alpha_i)$的直和 $\bigoplus$ 的商。*(iv)* 存在一个有限子集 $F \subset Q^{\mathrm{gp}}$，使得对每个 $q \in Q^{\mathrm{gp}}$，都存在某个$p \in P$，使得映射

$$\bigoplus_{\substack{f\in F\\ f\le h(p)+q}} E_f \to E_{h(p)+q}$$

是满射。

若$\mathcal{E}$ 具有一个约化的 $P/Q$-滤过系统 $\{E'_\alpha\}_{\alpha\in Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}}}$（换言之，若 $S \to \mathcal{A}_P$ 经由环面簇 $X_P$分解），我们取 $C'' = \mathcal{O}_S \otimes_{\mathbf{Z}[P]} \mathbf{Z}[Q]$ 和 $E'$ 作为相应的 $C''$-模。那么，上述条件也等价于以下条件：

*(v)* $C''$-模 $E'$ 是有限型的。*(vi)* 存在 $Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}}$ 的有限子集 $F$，使得对所有 $\alpha \in F$，$E'_\alpha$ 都是$\mathcal{O}_S$上的有限型模，并且 $E'$ 由 $\alpha \in F$对应的 $E'_\alpha$ 生成，作为一个 $C''$-模。

证明。 (i)、(ii)和 (v)等价，这可由下降立即得到。分次$C$-模总是某个 $C$的移位直和的商，因此分次 $C$-模是有限型的，当且仅当它是 $C$的有限个移位的直和的商。因此，(ii)和(iii) 等价。条目(iv) 只是用 $Q/P$-滤过系统重新表述(iii)；而(vi) 则是用约化的 $Q/P$-滤过系统重新表述。□

对于下一个命题，我们假设幺半群同态$h\colon P \to Q$ 是单射且自由的，并具有有限基 $B \subset Q$。特别地，相关的 Olsson 锥 $\sigma$ 在基底 $S$上是整的，见注2.12。商群 $(Q/P)^{\mathrm{gp}}$ 记作 $L$。按照 [Gil16，定义 7.11，5], 我们选取一个有限生成集 $G \subset Q$：这意味着由 $G$ 生成的子幺半群包含 $B$(因此 $G$ 生成 $Q/P$ 和 $L$）。

**命题 5.17**。 在先前的假设下，$\sigma$上的拟凝聚层 $\mathcal{E}$ 在 $\sigma$上平坦，当且仅当相应的约化 $Q/P$过滤系统 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in(Q/P)^{\mathrm{gp}}}$满足以下性质：

*(1)* 每个 $E_\alpha$ 都是平坦的$\mathcal{O}_S$-模，且

*(2)* 对每个 $g \in G$，$\mathrm{Tor}_1^{C''}(\oplus E_\alpha, C''/x^g C'') = 0$ 和 $(\oplus E_\alpha) \otimes_{C''} C''/x^g C''$ 在 $\sigma$中 $g$ 的零点集上是平坦的。

证明。 这正是对 [Gil16，定理 7.11 的重新表述。7]事实上，在 Olsson 锥上平坦 $\sigma$ 等价于在$L$，$C''$上相对于 $\mathcal{O}_S$（按平凡群分次）的 [Gil16，命题 7.12 所述的分次平坦性。2]。上述定理给出了判定一个分次 $C''$ 模在$Q^{\mathrm{gp}}$，$C''$上相对于 $\mathcal{O}_S$分次平坦的准则。我们作出若干观察，以将分次平坦性与我们的记号联系起来。考虑图表：

$$X = \mathrm{Spec}(C'') \xrightarrow{\pi} Y = [\mathrm{Spec}(C'')/T_L] \xrightarrow{\rho} Z = [\mathrm{Spec}(C'')/T_Q].$$

由于 $\pi$ 是平坦覆盖，$Y$上的拟凝聚层 E 是平坦的，当且仅当 $\pi^*$E 是 $(L, C'')$-分次平坦的。另一方面，对于一个 $L$-分次的 $C''$-模 E，我们有 $(\rho_*\mathrm{F})_\alpha = \mathrm{F}[\alpha]$，即 $\rho_*\mathrm{F} = \oplus_{P^{\mathrm{gp}}}$ F，因此 $\pi^*$E 是 $(L, C'')$-分次平坦的，当且仅当它是 $(Q^{\mathrm{gp}}, C'')$-分次平坦的。□

**注 5.18.** 这些命题推广了 $\Theta_R$ 和 $ST_R$ 上有限表示平坦模的刻画，该刻画见 [AHLH23，§7.2]，另见 [Gil16，推论 7.11.9–11]。

注 5.19. 设 $\pi\colon X \to S$ 是定义在带有除子型对数结构的离散赋值环 $R$ 的谱上的对数曲线族，并设 $\tau\colon X \to \Gamma$ 是热带化映射。假设 $X$ 的中心纤维由两个分量组成，且它们在一个结点处相交，因此 $\Gamma$ 可与 $ST_R$等同。设 $L$ 是 $X$上的一个线丛。那么（尽管热带化映射不是适当的）$\tau_* L$是 $\Gamma$上的有限表示平坦模，这一点可通过进一步向下推送至 $S$看出。向量子丛 $\mathrm{E} \subset \tau_* L$ 可通过取相应的约化自然数过滤系统，识别为 Osserman [Oss06]意义下的极限线性级数。

5.3. **向量丛。** 我们首先直接证明命题5.20 （该命题稍后将在推论 5.24中以更一般的方式得到证明），并使用好模空间理论。

**命题 5.20.** 设 $S$ 为精细饱和对数概形，并设 $\pi : \sigma \to S$为普遍满射的 *Olsson* 预锥。若$\mathcal{L}$ 是 $\sigma$ 上的可逆层，则在 $S$的严格 ´平展拓扑中局部地，存在 $M_\sigma^{\mathrm{gp}}$的一个截面 $\lambda$，它在相差 $\bar{M}_S^{\mathrm{gp}}$ 的截面之加法的意义下是唯一的，以及 $S$ 上的一个可逆层 $L$，使得存在一个同构

$$\mathcal{L} \simeq \pi^* L(\lambda).$$

证明。 我们首先注意到，可以假设 $S$ 是严格亨泽尔的。事实上，设$\tilde{S}$ 是 $S$ 在某个几何点处的亨泽尔化，且在 $S$ 上有可逆层 $L$，以及$M_S$的一个截面 $\lambda$，满足 $\mathrm{L}|_{\tilde{S}} \simeq \pi^* L(\lambda)$. $_{S\circ}$ 那么 $L$、 $\lambda$以及该同构都可以延拓到

$s$ 的一个 ´étale 邻域（同构的延拓用到了 $\sigma$ 在 $S$上拟紧且拟分离这一事实）。

根据命题 5.6， $\pi$ 是一个良模空间。由 [Alp13，定理 10.3], ，沿 $\pi$ 的拉回将 $S$ 上的向量丛范畴与 $\sigma$ 上满足以下条件的向量丛 E 的满子范畴等同起来：对于每个像为闭点的几何点 $\bar{x} \to \sigma$ ，稳定子群 $G_{\bar{x}}$ 在 $\mathrm{E} \otimes k(\bar{x})$ 上的作用都是平凡的。由于该断言在 $S$ 的严格 ´étale 拓扑下是局部的，我们可以假设 $\sigma$ 是从某个正合的细饱和幺半群同态 $P \to Q$ 拉回自 $\mathrm{A}_Q \to \mathrm{A}_P$。我们可以假设 $S \to \mathrm{A}_P$ 经由环面簇 $X_P$ 分解，并使用命题 3.8 对 $\sigma$ 的描述。若 $s$ 是 $S$ 的一个几何点，则纤维 $\pi^{-1}s$ 含有唯一的闭分层 $Z$，它同构于 $\mathrm{B}T$，其中 $T$ 是特征群为 $Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}}$ 的可对角化群。L 在 $Z$ 上的限制确定了 $T$ 的一个特征 $\mu$。令 $\lambda$ 为 $\mu$ 在 $Q^{\mathrm{gp}}$ 中的一个提升。则 $\mathrm{L}(-\lambda)$ 沿 $Z$ 的稳定子作用是平凡的。但 $Z$ 是 $\sigma$ 的唯一闭分层，因此由 [Alp13，定理 10.3]， $L = \pi_*\mathrm{L}(-\lambda)$ 可逆，且 $\mathrm{L} \simeq \pi^* L(\lambda)$。□

**命题 5.21.** 设 $S$ 为一个有限生成饱和对数概形。设 $\pi : \sigma \to S$为 $S$上的一个普遍满射 *Olsson* 预锥。若$\mathcal{E}$ 是 $\sigma$上的有限秩局部自由层，则在 $S$的严格 ´平展拓扑中局部地，存在 $M_\sigma^{\mathrm{gp}}$的截面 $\lambda_0, \ldots, \lambda_r$、 $S$上的可逆层 $E_0, \ldots, E_r$，以及一个同构

$$\mathcal{E} \simeq E_0(\lambda_0) \oplus \cdots \oplus E_r(\lambda_r).$$

在置换、在 $S$的严格 ´平展拓扑中作进一步局部化，以及添加 $M_S^{\mathrm{gp}}$ 的截面的意义下， $\lambda_0, \ldots, \lambda_r$是唯一确定的。

证明。 由于该断言在 $S$上是严格-´平展局部的，我们可以假设，对某个细饱和幺半群的正合同态 $P \to Q$， $\sigma$ 是从 $\mathrm{A}_Q \to \mathrm{A}_P$ 拉回的。我们可以假设 $S \to \mathrm{A}_P$通过环面簇 $X_P =$谱 **整数环**$[P]$分解，从而 $\sigma$ 上的拟凝聚层可以等同于 $Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}}$-分次拟凝聚 $Q \otimes_P \mathrm{O}_S$-模。

如果 $s$ 是 $S$的一个几何点，则纤维 $\pi^{-1}s$包含唯一的闭分层 $Z$，同构于$\mathrm{B}T$，其中 $T$是以 $Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}}$为特征群的可对角化群。如果E是 $\sigma$ 上的局部自由层，则E到 $Z$ 的限制可视为$T$-等变的局部自由$\mathrm{O}_S$-模，或等价地，视为 $Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}}$-分次的局部自由$\mathrm{O}_S$-模。如果 $E$ 是对应于E的分次 $Q \otimes_P \mathrm{O}_S$-模，则对应于$\mathrm{E}\big|_Z$ 的分次$\mathrm{O}_S$-模是 $E$的关联分次模 $\mathrm{gr}\, E$ 。

gr $E$ 的一个分次生成元对应于某个 $\lambda \in Q$ 的同态 $\mathrm{O}_Z(\lambda) \to \mathrm{E}\big|_Z$。由于 $E$ 是一个分次 $Q \otimes_P \mathrm{O}_S$-模，我们可以（至少在进一步缩小$S$之后）将生成映射 $\mathrm{O}_Z(\lambda) \to \mathrm{gr}\ E$ 提升为映射 $\mathrm{O}_\sigma(\lambda) \to \mathrm{E}$: 一次提升对应于将 $\mathrm{gr}\, E$ 的一个齐次元素提升到 $E$。为每个.....选取提升

在 a 中 gr $E$ 的有限多个齐次生成元，得到一个映射

$$\bigoplus \mathcal{O}_\sigma(\lambda_i) \to \mathcal{E} \tag{10}$$

且在 $Z$上限制为同构。其核和余核支撑在闭子栈 $W \subset \sigma$上。但根据命题5.6， $\pi(W)$ 在 $W$ 中的像 $S$ 是 $S$的闭子集。我们知道 $s \notin \pi(W)$，因为 $W \subset \sigma$ 是闭的，且不包含 $\pi^{-1}s$的唯一闭点。因此， $\pi(W$在 $S$ 中的补集是 $s$ 的一个开邻域，在此邻域上（10）是同构。

在上述论证中， $\lambda_i$ 由 gr $E$按 $Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}}$ 的分次确定。因此，它们模 $M_S^{\mathrm{gp}}$ 唯一确定。
□

**命题 5.22**。 设 $S$ 是一个精细饱和对数概形。设 $T$ 是定义在 $S$ 上的热带环面，其特征群为 $X$。假设$\mathcal{E}$ 是 $T$上的一个局部自由层。那么存在唯一的分裂$\mathcal{E} \simeq \bigoplus_\lambda E_\lambda(\lambda)$，由 $T$的特征[10] $\lambda$ 作指标，其中每个$E_\lambda$ 都是 $S$上的局部自由层。

证明。 设 E 是 $T$ 上的局部自由层。设 $X$ 是 $T$ 的特征群。该断言在 $S$ 的严格 ´étale 拓扑下是局部的，因此我们可以假设 $X \simeq$**整数环**$^r$，从而 $T \simeq \mathbf{G}^r_{\log}$。

首先证明唯一性。若 $\mathcal{E} = \bigoplus E_\lambda(\lambda)$，其中求和遍历$\lambda \in X$，则推论 5.4 表明，我们可以将 $E_\lambda$ 恢复为 $\pi_*\mathcal{E}(-\lambda$，其中 $\pi: T \to S$ 是投影。

现在证明存在性。对每个 $\lambda \in X$，令 $E_\lambda = \pi_*\mathrm{E}(-\lambda)$，其中 $\pi: T \to S$是投影。由伴随，我们有一个映射

$$\phi\colon \bigoplus E_\lambda(\lambda) \to \mathcal{E}. \tag{11}$$

我们将证明每个 $E_\lambda$ 在 $S$ 上局部自由，并且 $\phi$是同构。

断言 $\phi$ 是同构，意味着对每个 $T$ 上的精细、饱和对数概形 $S'$，诱导映射 $\phi|_{S'}$ 是同构。若 $S'$ 是精细、饱和对数概形，则任意态射 $S' \to T$ 都可经由某个万有满射 $\sigma \to T$分解，其中 $\sigma$ 是 $S$ 上的 Olsson 预锥。因此，只需证明当 $\sigma$ 是 $S$ 上的正合 Olsson 预锥且 $\sigma \to T$ 是万有满射时，$\phi|_\sigma$ 是同构。在这些假设下，令 $\rho: \sigma \to S$为投影。

我们用一个……的延拓 $Q$ 来表示 $\sigma$。命题 5.21 表明，至少在将 $S$ 替换为一个严格的 ´étale 覆盖后，$\mathcal{E}|_\sigma$ 分裂为 $\bigoplus F_\mu(\mu)$，其中 $F_\mu$是 $S$ 上的局部自由层，而 $\mu$ 是 $Q^{\mathrm{gp}}$的截面。 $\mu$ 在 $Q^{\mathrm{gp}}/M_S^{\mathrm{gp}}$ 中， 我们论证它们下降到 $X$。

[10]如果 $T$ 不是分裂的，那么特征 $\lambda$ 及其重数的集合必须视为 $\mathrm{Sym}^r X$ 的一个截面，其中 $X$ 是 $T$ 的特征群，而 $r$ 是 E 的秩。

映射 $\sigma \to T$ 由一个态射 $X \to Q^{\mathrm{gp}}$给出。泛满射性对应于以下要求：

$$\bar{M}_S^{\mathrm{gp}} \oplus X \to Q^{\mathrm{gp}}$$

是正合的，即 $Q$ 的原像是 $M_S \oplus 0$。特别地，$X \to Q^{\mathrm{gp}}/M_S^{\mathrm{gp}}$ 必须是单射。我们可以用幺半群层 $R$ 来表示纤维积 $\sigma \times_T \sigma$，它是 $Q \oplus Q$ 在 $Q^{\mathrm{gp}} \oplus Q^{\mathrm{gp}}$ 除以 $M_S^{\mathrm{gp}} \oplus X$ 的反对角副本后所得商中的像。可以直接验证，$R$ 是尖锐的，因此

$$R^{\mathrm{gp}} = Q^{\mathrm{gp}} \oplus Q^{\mathrm{gp}}/\bar{M}_S^{\mathrm{gp}} \oplus X.$$

特别地，$R^{\mathrm{gp}}/Q^{\mathrm{gp}} \simeq Q^{\mathrm{gp}}/M_S^{\mathrm{gp}} \oplus X$，因此有一个正合列：

$$0 \to X \to Q^{\mathrm{gp}}/\bar{M}_S^{\mathrm{gp}} \xrightarrow{p_1^* - p_2^*} R^{\mathrm{gp}}/Q^{\mathrm{gp}} \to 0 \tag{12}$$

我们回到分裂 $\mathrm{E}\big|_\sigma \simeq \bigoplus F_\mu(\mu)$。令 $\tau = \sigma \times_T \sigma$。那么 $\mathrm{E}\big|_\tau$ 通过两个投影得到两个分裂：

$$\mathcal{E}\big|_\tau \simeq \bigoplus F_\mu(p_1^*\mu) \simeq \bigoplus F_\mu(p_2^*\mu)$$

然而，命题 5.21 表明，模去常数后，$p_1^*\mu$ 和 $p_2^*\mu$ 彼此互为置换，而且关联它们的置换在对角 $\sigma \to \tau$上限制为恒等映射。因此该置换必为恒等映射，且$p_1^*\mu$ 模去常数后与 $p_2^*\mu$ 一致。但现在，(12) 的正合性表明，经过常数调整后，$\mu$ 属于 $X$。

现在我们可以写成 $\mathcal{E}\big|_\sigma \simeq \bigoplus F_\mu(\mu)$，其中求和遍历 $\mu$的特征 $T$。命题5.21 表明

$$\rho_*\mathcal{E}(-\lambda)\big|_\sigma = \bigoplus \rho_* F_\mu(\mu - \lambda) = F_\lambda$$

因为 $\mu - \lambda$在 $\sigma$上无下界（因为 $\sigma \to T$是普遍满射），所以根据推论 5.8，其整体截面为零。由此也可得

$$\bigoplus_\lambda \rho^* F_\lambda(\lambda) \to \mathcal{E}\big|_\sigma \tag{13}$$

是一个同构。

我们可以将其视为

$$\pi_*\mathcal{E}(-\lambda) = \varprojlim_{\sigma \to T} \rho_*\mathcal{E}(-\lambda)\big|_\sigma$$

其中极限取遍所有万有满射 $\sigma \to T$。若 $\tau \to \sigma$ 是 $S$ 上正合 Olsson 预锥之间的万有满射，且 $\psi : \tau \to S$ 是投影，那么根据投影公式，$\rho_*\mathrm{E}(-\lambda)\big|_\sigma \to \psi_*\mathrm{E}(-\lambda)\big|_\tau$ 是同构。由于任意两个到 $T$ 的万有满射的纤维积也是到 $T$ 的万有满射，因此

系统必须是常值的。[11] 我们得出，$\pi_*\mathcal{E}(-\lambda)$ 是$\rho_*\mathcal{E}(-\lambda)\big|_\sigma$的常值，因此特别是局部自由的。此外，映射 (11) 对应于同构系统 (13)，因此它也是同构。□

**推论 5.23.** 设 $S$ 是一个精细饱和对数概形，且 $\sigma$ 是 $S$上的一个普遍满射的弱凸 *Olsson* 预锥。设$\mathcal{E}$ 为 $\sigma$上的局部自由层。则在严格 ´平展拓扑 $S$中局部地，存在分裂$\mathcal{E} \simeq \bigoplus \mathcal{O}_\sigma(\lambda_i)$，其中 $\lambda_0$，……，$\lambda_r$ 为 $\sigma$上的线性函数。这些 $\lambda_i$ 及其重数在指标置换以及加上常数的意义下是唯一的。

证明。设 $T$ 为 $\sigma$ 的线性空间，并设 $\sigma' = \sigma/T$。则命题 3.25 表明，$\sigma'$ 是 $S$ 上的正合 Olsson 预锥，且 $\sigma$ 是 $\sigma'$上的 $T$-扭子。命题 3.25 还表明，该扭子在$S$的严格 ´平展拓扑中是局部平凡的。因此，在用一个严格 ´平展覆盖替换 $S$ 之后，我们可以通过选取映射 $q\colon\ \sigma \to T$将 $\sigma$ 与 $\sigma' \times T$等同。由命题 5.22，$\sigma' \times T$上的局部自由层 E 分裂为 $\bigoplus E_\lambda(\lambda)$，其中求和取遍 $T$的特征 $\lambda$，且 $E_\lambda$是 $\sigma'$上的局部自由层。由命题 5.21，每个 $E_\lambda$ 在 $S$的严格 ´平展拓扑中局部地分裂为 $F_i(\mu_i)$的直和，其中每个 $\mu_i$ 是 $\sigma'$ 上的线性函数，且每个 $F_i$ 在 $S$上局部自由。在重新¨标号之后，我们得到 E 分裂为直和项 $F_i(\mu_i + \lambda_i)$:

$$\mathcal{E} \simeq \bigoplus F_i(\mu_i + q^*\lambda_i)$$

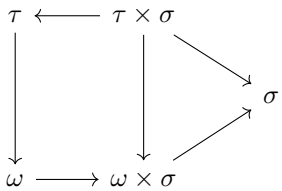
这些分裂中的不确定性包括指标的置换以及给 $\mu_i$加上常数（根据命题 5.21），以及分裂的选择$q\colon\ \sigma \to T$。后者的不确定性是一个态射 $a\colon\ \sigma' \to T$。将 $q$替换为$q + a$ 会将 $\mu_i$ 替换为 $\mu_i - a^*\lambda_i$。那么函数

$$\mu_i - a^*\lambda_i + (q + a)^*\lambda_i = \mu_i + q^*\lambda_i$$

[11]设 $C$是一个具有积的非空范畴，并设 $F$是 $C$上的一个预层，满足对所有 $\tau \to \sigma$ 属于 $C$，$F(\sigma) \to F(\tau)$ 都是同构。那么 $F$ 是常值的：选取一个对象 $\sigma \in C$。对每个$\tau \in C$，我们得到一个同构：

$$F(\sigma) \xrightarrow{\sim} F(\sigma \times \tau) \xleftarrow{\sim} F(\tau)$$

这个同构与限制映射相容，因为如果 $\tau \to \omega$ 是 $C$中的一个态射，那么我们可以将 $F$ 应用于下面的交换图:



在 $\sigma$ 上保持不变。因此，E 的分裂中唯一的歧义是指标的置换和常数的加法。□

**推论 5.24**。 设 $S$ 是一个精细饱和对数概形，且 $\sigma$ 是 $S$ 上普遍满射的弱凸 *Olsson* 预锥。令 $\mathcal{L}$ 为 $\sigma$ 上的可逆层。那么，在 $S$ 的严格 *´étale* 拓扑局部地，存在 $S$ 上的可逆层 $L$ 以及 $M_\sigma^{\mathrm{gp}}$ 的一个截面 $\lambda$，使得 $\mathcal{L} \simeq \pi^* L(\lambda)$。截面 $\lambda$ 在加上常数的意义下唯一。

证明。 这是推论5.23的秩 1 情形。 □

**推论 5.25**。 设 $S$ 是一个精细饱和对数概形。设 $\pi\colon \sigma \to S$ 是一个普遍满射的弱凸 *Olsson* 预锥。则

$$M_S^{\mathrm{gp}} \to \pi_* M_\sigma^{\mathrm{gp}}$$

这是一个同构，并且存在一个正合列

$$0 \to \bar{M}_S^{\mathrm{gp}} \to \pi_* \bar{M}_\sigma^{\mathrm{gp}} \to \mathrm{R}^1\pi_* \mathcal{O}_S^* \to 0.$$

证明。 我们将 $\pi_*$ 应用于下列正合列：

$$0 \to \mathcal{O}_\sigma^* \to M_\sigma^{\mathrm{gp}} \to \bar{M}_\sigma^{\mathrm{gp}} \to 0.$$

我们得到一个行正合的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_S^* & \longrightarrow & M_S^{\mathrm{gp}} & \longrightarrow & \bar{M}_S^{\mathrm{gp}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \pi_*\mathcal{O}_\sigma^* & \longrightarrow & \pi_* M_\sigma^{\mathrm{gp}} & \longrightarrow & \pi_* \bar{M}_\sigma^{\mathrm{gp}} & \longrightarrow & \mathrm{R}^1\pi_*\mathcal{O}_\sigma^* \longrightarrow \mathrm{R}^1\pi_* M_\sigma^{\mathrm{gp}} \end{array} \tag{14}$$

根据推论 5.3，映射 $\mathsf{O}_S^* \to \pi_* \mathsf{O}_\sigma^*$ 是同构。 $\pi_* M_\sigma^{\mathrm{gp}} \to \pi_* M_\sigma^{\mathrm{gp}}$在 $\gamma$ 上的纤维是 $\pi_* \mathsf{O}_\sigma^*(-\gamma)$：换言之，就是 $\mathsf{O}_\sigma^*(-\gamma)$ 在$S$上的平凡化层。根据推论 5.24，除非 $\gamma$是常值的，否则该层为空，因此 $M_S^{\mathrm{gp}} \to \pi_* M\mathsf{gp}_\sigma$是 满射。 $M_\sigma$ 在 $M_S$ 上的正合性意味着 $M_S^{\mathrm{gp}} \to \pi_* M_\sigma^{\mathrm{gp}}$是单射，进而 $M\mathsf{gp}_S \to \pi_* M_\sigma^{\mathrm{gp}}$也是单射。因此，(14) 的下行可以改写为：

$$0 \to \bar{M}_S^{\mathrm{gp}} \to \pi_* \bar{M}_\sigma^{\mathrm{gp}} \to \mathrm{R}^1\pi_* \mathcal{O}_\sigma^* \to \mathrm{R}^1\pi_* M_\sigma^{\mathrm{gp}}$$

映射 $\pi_* \bar{M}_\sigma^{\mathrm{gp}} \to \mathrm{R}^1\pi_* \mathcal{O}_\sigma^*$ 根据推论 5.24是满射。 □

## 6. Moduli of vector bundles on Olsson fans

### 6.1. 整锥及其细分上的向量丛模空间 .

**命题 6.1.** 设 $S$ 是一个精细饱和对数概形，$\sigma \to S$ 是定义在 $S$ 上的普遍满射整弱凸 *Olsson* 锥。那么，$\sigma$ 上的局部自由层由 $S$ 上的一个代数栈参数化。它是一些代数栈 $\mathrm{B}G_{\boldsymbol{\lambda}}$ 的不交并，这些代数栈由 $\boldsymbol{\lambda}$ 索引，其中 $\boldsymbol{\lambda}$ 是由 $\sigma$ 张成的热带环面的特征群的多重子集。群 $G_{\boldsymbol{\lambda}}$ 在 $S$ 的严格 ´*étale* 拓扑下局部同构于以下可逆矩阵群

$$\bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_S(\inf_{\sigma}(\lambda_j - \lambda_i)),$$

其中求和遍历 $\boldsymbol{\lambda}$中的指标对。

证明。至少在将 $S$ 替换为一个严格 ´étale 覆盖之后，推论 5.23 蕴含每个 $\sigma$ 上的局部自由层 E 都分解为 $\bigoplus E_i(\lambda_i)$，其中 $\lambda_i$ 及其重数由 $\sigma$张成的环面的特征群唯一确定。因此，$S$ 的严格 ´étale 站点上的叠 $\mathsf{Hom}(\sigma, \mathrm{BGL}_n)$ 分解为若干分支的不交并，这些分支由 $\lambda_i$ 及其重数的各种选取来标记。对于任意固定的选取 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$，令 $\mathsf{Hom}(\sigma, \mathrm{BGL}_n)_{\boldsymbol{\lambda}}$ 为 $\mathsf{Hom}(\sigma,\mathrm{BGL}_n)$ 中对应的分支。$\mathsf{Hom}(\sigma, \mathrm{BGL}_n)_{\boldsymbol{\lambda}}$ 的任一对象在局部都同构于 $\bigoplus E_i(\lambda_i)$。因此 $\mathsf{Hom}(\sigma, \mathrm{BGL}_n)_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathrm{B}G_{\boldsymbol{\lambda}}$，其中 $G_{\boldsymbol{\lambda}}$ 是 $\bigoplus E_i(\lambda_i)$的自同构群，也就是由可逆矩阵组成的群

$$\pi_* \bigoplus E_j \otimes E_i^\vee(\lambda_j - \lambda_i) = \bigoplus E_j \otimes E_i^\vee(\inf_{\sigma}(\lambda_j - \lambda_i)).$$

该等式来自推论 5.8。这个群是代数群，因此 $\mathsf{Hom}(\sigma,\mathrm{BGL}_n) = \mathrm{B}G_{\boldsymbol{\lambda}}$ 也如此。在 $S$ 中进一步局部化后，我们可以假设这些 $E_i$ 全都平凡。证明完毕。□

**注 6.2。** 也可以使用 [AHR20，定理 5。7]（域上的情形）或 [AHR19，定理 10。14]（混合特征的情形）来证明命题 6.1 。请注意，上文所引结果中的平坦性假设由此处“$\sigma$ 在 $S$ 上为整”这一假设所蕴含。

虽然若 $\pi\colon \sigma \to S$ 是一个正合 Olsson 锥，则根据命题 $\pi$ 5.6，它是一个良模空间，但这一假设不足以得出命题 6.1的结论：见下文的例 6.3。

例 6.3。设 $h\colon P \to Q$ 是例 2.11 中的幺半群同态，它正合但不整。锥 $\sigma_Q$ 由不等式 $0 \le x, y \le z$ 切出。它也可以描述为以顶点 (0, 0, 1)、(1, 0, 1)、(0, 1, 1)、(1, 1, 1) 构成的正方形为底的锥。映射 $\phi\colon \sigma_Q \to \sigma_P = \mathbf{R}^2_{\ge 0}$ 是到前两个坐标的投影，它是满射，但将由 (1, 1, 1) 张成的射线映射到 $\mathbf{R}^2_{\ge 0}$ 的对角线。

设 $S = \mathbf{A}^2$ 带有其标准对数结构，且 $\pi\colon \sigma = S \times_{\mathcal{A}^2} \mathcal{A}_Q \to S$。根据命题 5.21，上的每个向量丛 $\sigma$ 都可分裂（此外，上的向量丛

$S = \mathbf{A}^2$ 都是平凡的）。注意，$x$ 和 $y$ 都被 $z$支配，但 $P_{\leq z}$ 不是滤层，因此 $\pi_* \mathsf{O}_\sigma(z) = \mathcal{I}_0$ 是$\mathbf{A}^2$, 中原点的理想层，它是一个秩为一的无挠层，但不是线丛。

考虑多重特征 $\boldsymbol{\lambda} = (0, z)$，以及 $\mathsf{E} = \mathsf{O}_\sigma \oplus \mathsf{O}_\sigma(z)$。令 $\mathfrak{V}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 为 $\sigma$ 上具有多重特征 $\boldsymbol{\lambda}$的局部自由层所成的叠。那么 $\mathfrak{V}_{(0,z)} \simeq \mathsf{B}G$，其中 $G$ 是 $\mathsf{E}$ 的自同构群。对每个 $S$-概形 $T$，我们有：

$$G(T) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_T^* & \mathcal{J}_0 \otimes \mathcal{O}_T \\ 0 & \mathcal{O}_T^* \end{pmatrix} \subseteq \mathrm{GL}_2(T),$$

它不可表（相干层可表当且仅当它局部自由：参见 [Nit04，推论 2]）。因此 $\mathfrak{V}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 不是代数栈。

我们可以将可表性结果推广到拓扑结构不复杂的弱锥复形，或者至少推广到具有常值纤维拓扑的弱锥复形。

**定义 6.4**。设 $S$ 是一个原子、有限型、饱和对数概形，且 $\Sigma$是 $S$上的弱凸锥复形。我们将 $\sigma$ 的面的偏序集记作 $J(\Sigma)$，并称其为 $\Sigma$的序复形。$\Sigma$ 的正合相交复形是偏序子集 $I(\Sigma) = I(\Sigma/S) \subset J(\Sigma)$，仅由那些在 $S$上为整且普遍满射的锥组成。

我们也可以将 $I(\Sigma)$ 和 $J(\Sigma)$ 视为范畴，今后将不再特别说明。

接下来，我们回顾范畴论中的一些定义：

**定义 6.5**。设 $\phi\colon I \to J$是一个函子。对于 $J$中的对象 $j$，逗号范畴$(j \downarrow \phi)$ 是这样一个范畴：其对象是形如 $(i, u)$ 的对，其中 $i$ 是 $I$中的一个对象，且$u\colon j \to \phi(i)$ 是 $J$ 中的一个态射；从 $(i, u)$ 到 $(i', u')$ 的态射是 $I$ 中的态射 $v\colon i \to i'$，并满足 $\phi(v) \circ u = u'$。如果每个逗号范畴都非空且连通，我们就称 $\phi$ 是余终 的。

范畴 $C$ 的神经 是一个单纯集合，其 $n$-单形是函子$[n] \to C$，其中 $[n]$ 是与全序有限集 $\{0 < \cdots < n\}$相关联的范畴。若范畴之间的函子在取神经后诱导出同伦等价，则称该函子为同伦等价 。若一个范畴同伦等价于一个单点范畴，则称其为可缩。

**注 6.6.** (1) 余终性的意义在于，如果 $\phi : I \to J$ 是余终的，且 $F\colon J^{\mathrm{op}} \to C$是一个函子，那么 $\varprojlim_{j \in J} F(j) = \varprojlim_{i \in I} F(\phi(i))$ [Sta20,Tag 002R]。（2）任何具有始对象或终对象的范畴都是可缩的。（3）可缩范畴必定非空且连通，因此逗号范畴 $j \downarrow \phi$ 均为可缩的函子是余终的。

**命题 6.7.** 设 $S$ 是一个精细饱和对数概形，$\Sigma$ 是其上的一个弱锥复形。假设在 $S$ 的严格 *´étale* 拓扑下的一个原子覆盖上，$I(\Sigma)$ 在 $J(\Sigma)$ 中余终。那么，$\Sigma$ 上的局部自由层由其上的一个代数栈参数化 $S$。

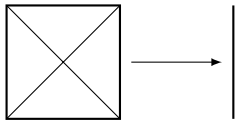
证明。 该断言在 $S$ 的严格 ´étale 拓扑下是局部的。因此我们假设 $S$ 是原子的。于是

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\Sigma, \mathrm{BGL}_n) = \varprojlim_{\sigma \in J(\Sigma)} \underline{\mathrm{Hom}}(\sigma, \mathrm{BGL}_n)$$

极限取遍完整的序复形 $J(\Sigma)$ of $\Sigma$。若正合的交复形 $I(\Sigma)$ 在 $J(\Sigma)$ 中余终，则取前者上的极限是等价的[Mac71，第 IX 节。3]。代数栈的有限极限仍是代数栈，因此只需注意到，当 $\sigma$ 是 上一个整的、普遍满射的弱凸 Olsson 锥时，$\mathrm{Hom}(\sigma, \mathrm{BGL}_n)$ 是定义在 $\overline{S}$ 上的代数栈；这由命题6.1得出。□

接下来我们证明，整锥的一个整细分满足余终性假设，其中该整锥是一个整的、普遍满射的弱凸 Olsson 预锥。

**注 6.8**。 并非每个整锥的细分都是整的：



对于非整细分，下面的命题可能不成立。

**命题 6.9**。 设 $S$ 是一个原子、有限型、饱和对数概形。设 $\Sigma' \to \Sigma$ 是 $S$ 上整的、普遍满射的弱锥复形的一个细分。则 $J(\Sigma') \to J(\Sigma)$ 和 $I(\Sigma') \to I(\Sigma)$ 都是同伦等价。

证明。 我们说明 $I$，较容易的情形 $J$ 留给读者。

由 Quillen 定理 A [Qui10]，，只需证明逗号范畴 $I(\Sigma') \downarrow \tau$ 对每个对象 $\tau \in I(\Sigma)$ 都是可缩的。因此，我们将问题化归为以下情形：$\Sigma = \sigma$ 是一个整的、普遍满射的弱凸 Olsson 锥，此时只需证明 $I(\Sigma')$ 是可缩的。

我们将问题化归为通常多面体的细分。设 $s$ 是 $S$ 的 $\overline{\ }$ $\overline{\ }$闭分层中的一个几何点。令 $M_{S,\ s} \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ 为 $M_S$ 的局部赋值，并定义 $M_s$ 为诱导在 $s$ 上的对数结构（其特征幺半群的值群为 $\mathbf{R}$）。令 $\sigma(s)$ 表示 $\sigma$ 的 $s$-点集，并赋予其通常拓扑。那么 $\Sigma'(s)$ 与 $\sigma(s)$ 同胚。我们还将论证，整交复形 $I(\Sigma')$ 与 $\tau(s)$ 的交复形相同，其中 $\subset \sigma(s)$ 取遍 $\Sigma'$ 中的多面体。为此，只需证明，对于每个多面体 $\tau$，在

$J(\Sigma')$ 中， $\tau(s)$ 可缩当且仅当 $\tau$ 在 $S$ 上普遍满射。事实上， $\tau(s)$ 是凸的，因此它可缩当且仅当非空，所以我们只需证明 $\tau(s)$ 非空当且仅当 $\tau$ 在 $S$ 上普遍满射。若 $\tau(s)$ 非空，则取 $t \in \tau(s)$，幺半群的对偶同态 $M_{\sigma,s} \to M_{\tau,t}$ 必须是局部的；由于它也是整的，根据注 2.10，它是正合的，因此 $\tau \to \sigma$ 普遍满射。反之，若 $\tau \to \sigma$ 普遍满射，则基变换 $s \times_S \tau \to s$ 是满射，因此根据零点定理及其幺半群类比， $s \times_S \tau$ 有一个 $s$-值点。[12]

我们得出结论， $I(\Sigma')$ 等价于凸区域 $\sigma(s)$ 的某个多面体细分的交复形，因此是可缩的。□

**命题 6.10.** 设 $S$ 是一个原子有限型饱和对数概形。设 $\sigma$ 是 $S$ 上一个整的、普遍满射的弱凸 *Olsson* 锥，且 $\Sigma'$ 是 $\sigma$ 的一个整细分。那么，包含 $I(\Sigma') \to J(\Sigma')$ 是余终的。

证明。 记 $(\tau \downarrow I(\Sigma'))$ 为包含 $I(\Sigma') \to J(\Sigma')$ 的包含映射的逗号范畴，其中 $\tau$ 是 $\Sigma'$ 中的一个锥。要证明该命题，只需证明 $(\tau \downarrow I(\Sigma'))$ 非空且连通；事实上，我们将证明它是可缩的。

根据逗号范畴的定义，$(\tau \downarrow I(\Sigma'))$ 的对象是 $\Sigma'$ 中包含 $\tau$ 且在 $S$ 上整且正合的锥。由引理 3.38，这可识别为 $I(\text{星}_\tau(\Sigma)/\,\text{星}_\tau(S))$。由引理 3.37，$\text{星}_\tau(\Sigma')$ 是 $\text{星}_\tau(\sigma)$ 的一个细分，因此由命题 6.9， $I(\,\text{星}_\tau(\Sigma'))$ 与 $I(\,\text{星}_\tau(\sigma))$ 同伦等价。但是， $\sigma$ 是 $I(\text{星}_\tau(\sigma))$ 的一个终对象，因此 $I(\text{星}_\tau(\sigma))$ 是可缩的。□

我们最后给出命题 6.1 的一个推论。我们认为，这或许能为如何将定理 6.7 适当地推广到更一般的热带空间提供线索。为陈述该推论，我们需要先给出一个定义。

**定义 6.11。** 设 $S$ 是一个精细饱和对数概形，且设 $\pi\colon \sigma \to S$ 是 $S$ 上一个普遍满射、整、弱凸的 Olsson 锥。令 $T$ 为由 $\sigma$ 张成的热带环面。设 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n)$ 是 $T$ 的一个特征组。对于每个 $i$ 和 $j$，令 $\mu_{i,j} \in \bar{M}_S^{\mathrm{gp}} = \inf_\sigma(\lambda_i - \lambda_j)$ 为 $\lambda_i - \lambda_j$ 在 $\sigma$ 上取到的最小值。 $\sigma$ 的*Weyl* 凸包 是 $T$ 中由下列不等式定义的弱凸 Olsson 锥：

$$\lambda_i - \lambda_j \geq \mu_{i,j}$$

对于每个 $i$ 和 $j$。

**推论 6.12。** 设 $S$ 是一个精细饱和对数概形， $\pi\colon \sigma \to S$ 是 $S$ 上一个普遍满射、整、弱凸的 *Olsson* 锥，且 $\mathcal{E}$ 是 $\sigma$ 上的一个局部自由层。那么， $\mathcal{E}$ 可唯一延拓到 $\sigma$ 的 *Weyl* 凸包上，且在唯一同构意义下唯一。

[12]如果 $P$ 是有限生成幺半群，那么它有一个到$\mathbf{R}_{\geq 0}$的局部同态。

证明。由于断言在 $S$ 的严格 ´étale 拓扑中是局部的，根据命题 5.21，我们可以假设 $\mathsf{E} = \bigoplus E_i(\lambda_i)$，其中 $E_i$ 是 $S$ 上的局部自由层，$\lambda_i$ 是由 $\sigma$ 张成的环面 $T$ 的特征。但公式 $\bigoplus E_i(\lambda_i)$ 给出了 E 到 $T$ 上局部自由层 F 的一个延拓。因此，$\mathsf{F}\big|_\tau$ 延拓了 E。命题 5.21 表明，$\mathsf{F}\big|_\tau$ 是 E 到 $\tau$ 的唯一延拓（在同构意义下）。然而，命题 6.1 表明，$\mathsf{F}\big|_\tau$ 的自同构群与 E 的自同构群相同，因此这个延拓在唯一同构意义下是唯一的。□

6.2. **一般情形的警示故事。**

6.2.1. Olsson 扇 上的线丛并非全都来自分片线性函数。例如，设 $\Sigma$ 是一个只有一个顶点的环（不可约节点三次曲线的$\mathbf{G}_\mathrm{m}$ 商）。正规化表明，一个线丛由一个整数（正规化上的斜率或次数）和一个可逆标量（粘合数据）确定。与分片线性函数相对应的线丛只有平凡线丛。

6.2.2. Olsson 扇 上的向量丛一般不会分裂。只需考虑非仿射环面簇上的等变丛：例如，$\mathbf{P}^2$ 的切丛不会分裂。然而，欧拉正合列给出了一个由分片线性函数的直和构成的解消。

另一个例子是三叉图上的以下秩二向量丛，它是这样一个有理曲线的等变版本：将三个 $\mathbb{P}^1$ 粘到第四个 $\{0,1,\infty\}$ 的各点上而得到该曲线（即对其进行一参数平滑化），见 $\mathbb{P}^1$ [MT12，反例 4。5]我们用 Perling数据来描述这个向量丛。设 $R$ 是一个一致化子为 $\pi$ 、分式域为 $K$的离散赋值环。考虑以下四个模相似变换的格

$$\begin{aligned} L_0 &= \langle e_0, e_1\rangle, \\ L_1 &= \langle e_0, \pi e_1\rangle, \\ L_2 &= \langle e_0, \pi^{-1} e_1\rangle, \\ L_3 &= \langle \pi e_0, e_0 + e_1\rangle. \end{aligned}$$

内部 $K^2$。这些格及其间的包含关系，在三叉图 $\Sigma$ 上方 $R$定义了一个秩二向量丛，其中心顶点为 $v_0$ ，叶顶点为 $v_1$，$v_2$，$v_3$。不存在一个 $K^2$ 能使所有包含关系同时对角化的基，[13] 这意味着三叉图上的向量丛不是分裂的。环面概形上的等变向量丛 $X_\Sigma$（在 $R$上）由从扇 $\Sigma$到 PGL 的 Bruhat–Tits 建筑的映射分类[KMT22] ；分裂的向量丛对应于可通过单个

[13]尽管对于每一对边都存在对角基，例如 $\{e_0, e_1\}$ 对于 $\{0,1,2\}$、$\{e_0, e_0+e_1\}$ 对于 $\{0,1,3\}$，以及 $\{e_0+e_1, e_1\}$ 对于 $\{0,2,3\}$。

套间。这个例子以 $\mathrm{PGL}_2(K)$ 的 Bruhat–Tits 厦为模型，从而成为未包含在单个套间中的最小例子。

6.2.3. 下一个例子表明，即使是 Olsson 扇上线丛的叠，也可能不是代数的。

设 $S$ 为完备离散赋值环的谱，并配备其除子型对数结构。用 $\delta$ 表示 $M_S$ 的生成元。设 $\sigma$ 为与由 $\alpha$ 和 $\beta$ 生成且满足关系 $\alpha+\beta=\delta$ 的幺半群对偶的 Olsson 扇。于是 $\sigma$ 是 $S$ 上长度为 $\delta$ 的区间族。设 $\Sigma$ 为将轨迹 $\{\alpha=0\}$ 与 $\{\beta=0\}$ 粘合所得的结果。则 $\Sigma$ 是 $S$ 上长度为 $\delta$ 的圈族。

对每个 $n$，设 $S_n$ 为闭点 $S_0$ 的第 $n$ 阶邻域。设 $\Sigma_n$ 与 $\sigma_n$ 分别为 $S_n$ 在 $\Sigma$ 中和在 $\sigma$ 中的原像。$\sigma_n$ 上的可逆层形如 $\mathcal{O}_{\sigma_n}(\lambda)$，其中 $\lambda$ 是 $\sigma_n$ 上的某个线性函数。由于 $\lambda$ 仅在相差常数的意义下是良定义的，我们可以选取 $\lambda$，使其在 $\{\alpha=0\}$ 处取值为 0，从而对某个整数 $n$ 有 $\lambda=n\alpha$。因此我们可以将 $\sigma_n$ 的Picard群等同于**整数环**。由于 $\Sigma_n$ 的Picard群还多了沿 $\{\alpha=0\}$ 与 $\{\beta=0\}$ 粘合的选择，我们得到 $\mathrm{Pic}(\Sigma_n)\simeq$ **整数环** $\times\Gamma(S_n,\mathcal{O}_{S_n}^*)$。

我们也可以计算 $\Sigma$ 的Picard群。同样，我们有 $\mathrm{Pic}(\sigma)=$ **整数环**。沿轨迹 $\{\alpha=0\}$ 与 $\{\beta=0\}$ 的粘合是 $\mathcal{O}_S^*$ 的一个截面 $g$，但该截面在一般点处必须限制为 1。事实上，$\Sigma$ 是由 $\sigma$ 通过一个 ´平展等价关系得到的，该关系在开点上的限制是平凡的。但如果 $K$ 是 $\mathcal{O}_S$ 的分式域，则 $\mathcal{O}_S^*$ 嵌入 $K^*$，因此 $g=1$。因此$\mathrm{Pic}(\Sigma)=$ **整数环**。

另一方面，如果 $\mathrm{Pic}(\Sigma)$ 可由一个代数空间表示（或者它是某个代数栈的同构类的层），则 $\Gamma(S,\mathrm{Pic}(\Sigma))$ 将与 $\varprojlim\Gamma(S_n,\mathrm{Pic}(\Sigma_n))$ 一致。但我们刚刚已经看到

$$\varprojlim\Gamma(S_n,\mathrm{Pic}(\Sigma_n))=\mathbf{Z}\times\varprojlim\Gamma(S_n,\mathcal{O}_{S_n}^*)=\mathbf{Z}\times\Gamma(S,\mathcal{O}_S^*)\neq\mathbf{Z}.$$

## References

[ACM+16] Dan Abramovich、Qile Chen、Steffen Marcus、Martin Ulirsch 和 Jonathan Wise。对数结构的骨架与扇。载于非阿基米德几何与热带几何，Simons Symposia，第287–336页。Springer，2016。[AHLH23] Jarod Alper、Daniel Halpern-Leistner 和 Jochen Heinloth。代数栈模空间的存在性。《数学发明》，234(3)：949–1038，2023。[AHR19] Jarod Alper、Jack Hall 和 David Rydh。代数栈的 ´étale局部结构。*arXiv*电子预印本，第 arXiv:1912.06162页，2019年12月。[AHR20] Jarod Alper、Jack Hall 和 David Rydh。代数栈的Luna ´étale切片定理。《数学年刊》（第*2*辑），191(3)：675–738，2020。[AK00] Dan Abramovich 和 Kalle Karu。特征0下的弱半稳定约化。《数学发明》，139(2)：241–273，2000。[Alp13] Jarod Alper。Artin栈的好模空间。载于《傅里叶研究所年刊》，第63卷，第2349–2402页，2013。

[Art69] Michael Artin。完备局部环上结构的代数逼近。《高等科学研究所数学出版物》，36(1)：23–58，1969年1月。[AW18] Dan Abramovich 和 Jonathan Wise。对数Gromov-Witten理论中的双有理不变性。组合数学，154(3)：595–620，2018。[BCWa] Luca Battistella、Francesca Carocci 和 Jonathan Wise。对数Grassmannian。准备中。[BCWb] Luca Battistella、Francesca Carocci 和 Jonathan Wise。对数线性级数与容许映射。准备中。[BHLNK25] Chenjing Bu、Daniel Halpern-Leistner、Andrés Ibáñez Núñez 和 Tasuki Kinjo。内蕴Donaldson-Thomas理论。I. 代数栈的分支格。arXiv预印本，arXiv:2502.13892，2025。[CCUW20] Renzo Cavalieri、Melody Chan、Martin Ulirsch 和 Jonathan Wise。热带曲线的模叠。Forum Math. Sigma，8：e23，93，2020。[DRJS18] Sandra Di Rocco、Kelly Jabbusch 和 Gregory G. Smith。环面向量丛与多面体议会。美国数学会汇刊，370(11)：7715–7741，2018。[EH86] David Eisenbud 和 Joe Harris。极限线性级数：基础理论。《数学发明》，85(2)：337–371，1986。[FLTZ12] Bohan Fang、Chiu-Chu Melissa Liu、David Treumann 和 Eric Zaslow。环面簇的 T 对偶与同调镜像对称。《数学进展》，229(3)：1875–1911，2012。[Ful93] William Fulton。《环面簇导论》，数学年刊研究丛书第131卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993。William H. Roever 几何讲座。[Gil16] William Daniel Gillam。对数平坦性。arXiv电子预印本，第arXiv:1601.02422页，2016年1月。[Gri01] P. A. Grillet。《交换半群》，数学进展第2卷（多德雷赫特）。克鲁维尔学术出版社，多德雷赫特，2001。[Gro66] Alexander Grothendieck。 ´《代数几何原理：IV. 概形与概形态射的局部研究》，第三部分。《高等科学研究所数学出版物》，28：5–255，1966。.[Hah07] Hans Hahn。关于非阿基米德大小系统。Wien. Ber.，116：601–655，1907。¨Hei[Jochen Heinloth。代数栈上的Hilbert-Mumford稳定性及其在曲线上G丛中的应用。Epijournal Géom. Algébrique，1：第11篇，37，2017。[HL18] Daniel Halpern-Leistner。 Θ-分层、 Θ-约化栈及其应用。载于《代数几何：盐湖城2015》，纯数学研讨会论文集第97.1卷，第349–379页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2018。[HR19] Jack Hall 和 David Rydh。相干Tannaka对偶与Hom栈的代数性。《代数与数论》，13(7)：1633–1675，2019。[Kan75] Tamafumi Kaneyama。关于近齐性簇上的等变向量丛。《名古屋数学杂志》，57：65–86，1975。[Kat89] Kazuya Kato。Fontaine-Illusie的对数结构。载于《代数分析、几何与数论》（巴尔的摩，马里兰州，1988），第191–224页。约翰斯·霍普金斯大学出版社，巴尔的摩，马里兰州，1989。[Kat94] Kazuya Kato。环面奇点。《美国数学杂志》，116(5)：1073–1099，1994。

[Kat00] Fumiharu Kato. 对数光滑变形与对数光滑曲线模空间. 国际数学杂志, 11(2):215–232, 2000.[Ken23] Patrick Kennedy-Hunt. 对数 Quot 空间：基础与热带化. arXiv 电子预印本, 页码 arXiv:2308.14470, 2023年8月.[KKMSD06] George Kempf、Finn Knudsen、David Mumford 与 Bernard Saint-Donat. 环面嵌入 1, 第339卷. Springer, 2006.[Kly89] Aleksandr A. Klyachko. 环面簇上的等变丛. 《苏联科学院院报·数学辑》, 53(5):1001–1039, 1135, 1989.[KM22] Kiumars Kaveh 与 Christopher Manon. 环面主丛、分段线性映射与 Tits 楼. Math. Z., 302(3):1367–1392, 2022.[KMT22] Kiumars Kaveh、Christopher Manon 与 Boris Tsvelikhovskiy. 离散赋值环上的环面向量丛与 Bruhat-Tits 楼. arXiv 预印本 arXiv:2208.04299, 2022.[KMT25] Kiumars Kaveh、Christopher Manon 与 Boris Tsvelikhovskiy. 离散赋值环上的环面向量丛与 Bruhat-Tits 楼, 2025.[Koo10] Martijn Kool. 环面簇上层的模空间. 博士论文, 牛津大学, 2010.[KR25] Patrick Kennedy-Hunt 与 Dhruv Ranganathan. 对数 Quot 空间、有界性与 K-热带化. arXiv 电子预印本, 页码 arXiv:2508.08175, 2025年8月.[Laf03] L. Lafforgue. 格拉斯曼簇的外科手术, CRM 专著丛书第19卷. 美国数学会, 罗德岛州普罗维登斯, 2003.[Mac71] Saunders MacLane. 工作数学家的范畴论, 数学研究生教材第5卷. 施普林格出版社, 纽约-柏林, 1971.[Mil12] James S Milne. 约化群. https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ RG.pdf, 2012.[Mol21] Sam Molcho. 普适叠半稳定约化. 以色列数学杂志, 242:55–82, 2021.[MR24] Davesh Maulik 与 Dhruv Ranganathan. 对数 Donaldson-Thomas 理论. Forum Math. Pi, 12:论文编号 e9, 63, 2024.[MR25] Davesh Maulik 与 Dhruv Ranganathan. 曲线与层的对数枚举几何. 剑桥数学杂志, 13(1):51–172, 2025.[MT12] Johan Martens 与 Michael Thaddeus. Grothendieck 主题变奏. arXiv 预印本 arXiv:1210.8161, 2012.[MW22] Samouil Molcho 与 Jonathan Wise. 对数 Picard 群及其热带化. 组合数学 , 158(7):1477–1562, 2022.[Nak97] Chikara Nakayama. 对数 ´ 平展上同调 . Math. Ann., 308(3):365–404, 1997.[Nit04] Nitin Nitsure. Hom 的可表性蕴含平坦性. 《印度科学院院报·数学科学》, 114(1):7–14, 2004.[Ogu18] Arthur Ogus. 对数代数几何讲义, 剑桥高等数学研究丛书第178卷. 剑桥大学出版社, 剑桥, 2018.[Ols03] MartinC. Olsson. 对数几何与代数栈. 载于 Annales scientifiques de l’Ecole normale sup ´erieure, 第36卷, 第747–791页, 2003.[Oss06] Brian Osserman. 极限线性级数模空间. 傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔）, 56(4):1165–1205, 2006.[Pay08] Sam Payne. 环面向量丛的模空间. 组合数学, 144(5):1199–1213, 2008.

[Pay09] Sam Payne. 环面向量丛、扇的分歧覆盖与解消性质. 《代数几何杂志》, 18(1):1–36, 2009.[Per04] 马库斯·佩林. 分次环与环面簇上的等变层. Math. Nachr., 263/264:181–197, 2004.[QR22] 郭明豪 与 David Rydh. 加权爆破. 准备中, 2022.[Qui10] 丹尼尔·奎伦. 高阶代数 $K$-理论：I [mr0338129]. 载于群上同调与代数 $K$-理论, 高等数学讲义（ALM）第12卷, 第413–478页. 国际出版社, 马萨诸塞州萨默维尔, 2010.[Ran22] Dhruv Ranganathan. 带扩张的对数格罗莫夫-维滕理论. 《代数几何》 , 9(6):714–761, 2022.[Sta20] Stacks Project 作者 . Stacks Project. https://stacks.math.columbia.edu, 2020.[Tsu19] 辻健. 对数概形的饱和态射. 《突尼斯数学杂志》, 1(2):185–220, 2019.[Wis23] Jonathan Wise. 对数 1- 动机的单值配对 . 《突尼斯数学杂志》 , 4(4):587–633, 2023.

**资助**。L.B. 是意大利高等数学研究院代数与几何科学国家研究组的成员。

Università di Bologna, Piazza di Porta S. Donato 5, Bologna 40126, Italy电子邮箱地址: luca.battistella2@unibo.itUniversità di Roma Tor Vergata, Via della Ricerca Scientifica 1, Roma 00133,Italy电子邮箱地址: carocci@mat.uniroma2.itUniversity of Colorado Boulder, Campus Box 395 Boulder, Colorado 80309-0395,US电子邮箱地址: jonathan.wise@colorado.edu