arXiv:2602.05689v1 [math.CT] 5 Feb 2026

类型论语义中 π-族上的多项式函子

JOSEPH HUA、YIMING XU

摘要。Martin-Löf 类型论的模型所对应的上下文范畴，若包含单位类型、 Σ 类型和 Π 类型，则不必是局部笛卡尔闭的，但必然是一个 π-族。我们利用这一 π-族结构来构建多项式函子理论。本文在这一较弱的设定下，提出了 MLTT 严格语义的两种等价概念，分别是初等模型（重新表述带族范畴（上下文范畴））和代数模型（重新表述自然模型）。这些组成部分构成了一套实用的步骤，可用于构造 MLTT 模型：构建初等模型，从初等模型中提取一个 π-族，然后利用基于 π-族结构构造的多项式函子，将初等模型转换为代数模型。

目录

1. 引言 1.1. 概述 1.2. 形式化与设计考量 1.3. 贡献 1.4. 论文结构 1
1.5. 致谢 1
2. 初等语义 2
3. π- 族中的多项式函子 3
4. 代数语义 3
5. 初等语义与代数语义之间的转换 3
5.1. 从初等模型构造代数模型 3
5.2. 从代数模型构造初等模型 8
5.3. 从 π-族中提取代数类型构造子 15
6. 结论 17
7. 相关工作 18
7.1. 多项式函子 25
7.2. 族 26
7.3. MLTT 语义 28
8. 未来工作 28
参考文献 28
29
29
29
29

1. 引言

1.1. **概述**。 本文将发展 π-族 [Joy17], 中的多项式函子理论，并探讨它们在 Martin-Löf 类型论（MLTT）语义中的作用。我们定义了两种严格语义（将判断相等的类型解释为相等对象）的概念，分别称为 初等 和代数 语义。后者广泛运用了多项式函子。我们构造了这两种概念之间的转换，表明 MLTT 的模型可以用任一种形式来呈现。

多项式函子理论（或容器）为以抽象且有条理的方式处理参数化数据提供了一般框架。本文未涉及的该理论的多种应用包括 W-类型的语义 [Dyb97] [MP00], 泛型编程[AAGM03], 动力系统 [NS 24], 群上同调 [Tam93], Witt 向量与配边[Bru05] [Bru07] [BJ25], 仅举数例。多项式函子在 Awodey 的自然模型中发挥着关键作用 [Awo18]。

多项式函子在局部笛卡尔闭（LCC）范畴中研究得最为充分 [GK13]：若 $\mathcal{C}$ 是局部笛卡尔闭范畴，则每个映射 $f\colon E \to B$ 在 $\mathcal{C}$ 中都充当多项式函子 $P_f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 的签名。Weber [Web15] 将该理论推广到具有拉回的范畴，其中多项式签名（定义 3.5）必须是可指数化映射。此推广涵盖了 Cat 和 Top 等实例，而二者都不是局部笛卡尔闭范畴。然而，直觉主义类型论的初始模型（带有单位类型、 Σ-类型和 Π-类型）并非 Weber 推广的实例：上下文扩张 $\Gamma.A \to \Gamma$ 仅相对于其他上下文扩张才是可指数化的。因此，我们考虑将 π-族作为多项式的适当背景。

一个 π-clan 的概念可以追溯到 Paul Taylor [Tay87]，，他称之为展示类；后来 Joyal [Joy17]，亦提出此概念，该术语即源于此人。两项工作都将 π-族论证为最小的范畴结构，即对含单位类型-、Σ-与 Π-类型的直觉主义类型论进行弱解释（判断相等的类型被解释为同构对象）所必需的结构。我们的工作讨论严格模型；它们尤其是弱的，并且必然确定一个 π-clan。

在本文中，我们定义初等语义，它类似于上下文范畴 [CD11]，因为对类型构造子的描述与直觉主义类型论的语法表述十分接近。每个判断都对应于关于上下文范畴中箭头的某个显式语义事实。因此，为直觉主义类型论语法编写到初等语义的解释函数，会如人所愿地直接[1]。初等语义不需要多项式函子理论或 π-族。

另一方面，代数语义 是对自然模型的一种重新表述：每个类型构造子的可容许性，都可以简洁地表述为存在一个拉回方块[2]，该方块对应于多项式函子之间的一个笛卡尔自然变换。为了兼得初等语义与代数语义各自的优势，我们提供了两者之间的双向转换。这些结果验证了我们对代数模型的定义是正确的，而这正是本文的主要贡献。

1.2. **形式化与设计考量**。本文是更广泛的 HoTTLean 项目的一部分[HAC+25]，该项目在 Lean 中内置了一种用于直觉主义类型论的领域专用语言，并将其应用于群胚模型。因此，我们的许多结果都在 Lean 中进行了形式化。具有形式化对应项的定义和定理均以符号 ◫ 标注，这些符号嵌入了指向 HoTTLean 代码库和 Mathlib 中代码的链接 [The20]。HoTTLean 代码库可在以下地址找到

github.com/sinhp/HoTTLean/tree/TYPES2026

这个 Lean 库最初旨在简化群胚模型的表述，是 HoTTLean 项目的一部分。最初，我们使用自然模型理论来定义群胚模型。在尝试了多种方案后，包括采用 Uemura 的可表示映射范畴[Uem23]，我们最终采用了目前的方法。下面将说明我们作出这一选择的原因。

- 令 $\mathcal{C}$ 表示一个上下文范畴。HoTTLean 旨在处理多个小宇宙（即在 $\mathcal{C}$ 中的小宇宙）。此外，添加一个大的所有类型的分类器（即在 Psh($\mathcal{C}$) 中、但不在 $\mathcal{C}$ 中的分类器）——正如自然模型所采用的方法——会给用户带来额外负担。我们的第一个观察是，只处理小宇宙就足够了。第二个观察是，这样做时，最终只需处理可表示预层。这需要证明可表示预层在多项式运算下封闭，而 π-族中的多项式理论可视为系统地证明这些封闭条件的方法。最后，我们通过省去预层和 Yoneda 嵌入来简化表达式，转而直接在 $\mathcal{C}$中进行工作。

- 从 Psh($\mathcal{C}$) 到 $\mathcal{C}$ 的转变，使我们更接近一种内语言，用于 $\mathcal{C}$。事实上，HoTTLean 旨在构建一种领域专用语言，用于推理 $\mathcal{C}$ 的对象，而非 Psh($\mathcal{C}$)。

- 在 $\mathcal{C}$ 而非 Psh($\mathcal{C}$) 中工作的另一个优势在于处理大小问题。Lean 针对 Psh($\mathcal{C}$) 的宇宙层级演算涉及 $\mathcal{C}$ 的两个宇宙变量（一个用于对象，

[1] SynthLean 中提出的领域专用语言、解释函数和认证类型检查器 [NHC+26] 现已修改为以初等语义而非自然模型为目标。在本文中，我们将只讨论语义，而不介绍整个项目的这一方面。[2] Id-类型实际上并非表示为拉回方块，但这一问题可通过使用 Path-类型来解决，见 [AH26]。

一个用于映射），以及另一个用于预层取值所在的范畴 Type u，而这三个变量以用户需要确定的某些方式受到约束。

- 对于群胚 [HS98]与单纯 [KL21] 直觉主义类型论模型，Uemura 的可表示映射范畴提供了一个足够便利的框架。事实上，单纯集合 是局部笛卡尔闭的，且（分裂）同构纤维化在 Grpd [Vid18]中是可指数化的。然而，若要在 Uemura 的设定中处理直觉主义类型论的初始模型，由于纤维化并非可指数化映射，人们将不得不再次取预层。

1.3. **贡献**。 我们的主要贡献如下：

- 我们发展了 π-族中的多项式函子理论，它比典型的局部笛卡尔闭范畴语境更为一般。
- 我们将多项式函子理论应用于 π-族中的 MLTT 语义，即以 Martin-Löf 代数的风格给出类型构造子的代数表述[Awo25]。
- 我们将本文中与 HoTTLean 项目相关的结果形式化。

1.4. **论文结构**。 本文结构如下。从第 2 节开始，我们定义初等语义。在第 3 节中，我们定义 π-族，并在这一框架下介绍多项式函子。借助多项式函子，我们在第 4 节定义代数语义。最后，我们在第 5 节定义初等语义与代数语义之间的双向转换。

1.5. **致谢**。 我们衷心感谢 Steve Awodey 最初提出这一研究方向，并在整个研究过程中持续给予指导和启发。我们也从与 HoTTLean 项目成员 Mario Carneiro、Sina Hazratpour、Wojciech Nawrocki、Shuge Rong 和 Spencer Woolfson 的讨论中获益良多，并与他们一起检验了这些想法。我们还感谢 Reid Barton 与我们讨论本研究的进一步推广。本文所述工作得到了美国空军科学研究办公室通过多学科大学研究计划（MURI）资助，项目编号为 FA9550-21-1- 0009。第二作者 Yiming Xu 的研究经费由欧盟资助（欧洲研究委员会，Nekoka，101083038）。然而，文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究委员会的观点。欧盟和资助机构均不对这些观点和意见承担责任。

2. 初等语义

下文中，我们固定一个范畴 $\mathcal{C}$，用其对象解释上下文，用其态射解释代换。

定义 2.1(◫)。 一个宇宙 在 $\mathcal{C}$ 中由一个态射 $\mathsf{tp} : \mathsf{Tm} \to \mathsf{Ty}$ 以及为每个对象 $\Gamma.A$和态射 $A : \Gamma \to \mathsf{Ty}$所选定的一个拉回组成。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma.A & \xrightarrow{\mathsf{var}_A} & \mathsf{Tm} \\ {\scriptstyle d_A}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{tp}} \\ \Gamma & \xrightarrow[A]{} & \mathsf{Ty} \end{array}$$

我们将 $A : \Gamma \to \mathsf{Ty}$ 视为上下文 Γ中的一个类型，并将所选定的拉回 $\Gamma.A$视为上下文扩张$d_A : \Gamma.A \to \Gamma$。我们还将满足 $a \gg \mathsf{tp} = A$ 的态射 $a : \Gamma \to \mathsf{Tm}$ 视为类型 A的一个项。[3]

可以将 $\mathsf{tp} : \mathsf{Tm} \to \mathsf{Ty}$ 视为上下文扩张 $d : (X : \mathsf{Ty}. x : X) \to (X : \mathsf{Ty})$，方法是取类型 $A : \mathsf{Ty} \to \mathsf{Ty}$ 为恒等态射 $\mathrm{id}_{\mathsf{Ty}} : \mathsf{Ty} \to \mathsf{Ty}$。

注记 2.2。 下文中，设 $\mathcal{C}$ 是初始模型（即直觉主义类型论的上下文与代换的语法范畴）的上下文范畴。我们比较 Psh($\mathcal{C}$) 中的自然模型与 $\mathcal{C}$ 中的宇宙。

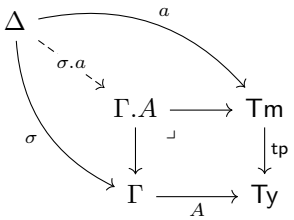
自然模型可以是“大”的，其中基底 U 可能无法由 $\mathcal{C}$中的对象表示。因此， U 不一定对应于语法中的任何小宇宙。

[3]为与 Lean 中的形式化相匹配，我们采用与 Lean 库所用类似的记号风格。特别地，态射复合的顺序将遵循“箭头”约定，记作 $f \gg g$，而非 $g \circ f$。

这也意味着，自然模型可以对 $\mathcal{C}$中的所有依赖族 进行分类。另一方面，上下文范畴中的宇宙 $\mathsf{Tm} \to \mathsf{Ty}$ 必须源自语法中出现的某个小宇宙，并且只能对“小型”依赖族进行分类。

自然模型被假定为一种“可表”的自然变换，这意味着每当 Γ 是可表预层时， $\Gamma.A$ 也可表。这确保上下文在上下文扩张运算下封闭。在我们的设定中，由于所有对象都是上下文，我们不对宇宙施加此类条件。

定义 2.3 ([])。 对于 $\sigma:\ \Delta \to \Gamma$，类型 $A:\ \Gamma \to \mathsf{Ty}$和项 $a:\ \Delta \to \mathsf{Tm}$，满足 $a \gg \mathsf{tp} = \sigma \gg A$，我们用以下记号表示到上下文扩张的映射 $\sigma.a:\ \Delta \to \Gamma.A$，它由拉回诱导



定义 2.4 (单位类型)。 一个初等单位类型结构 由宇宙 $\mathsf{tp} : \mathsf{Tm} \to \mathsf{Ty}$ 上的以下数据组成

(1) 对任意上下文 Γ，存在一个类型 $\mathsf{Unit}_\Gamma:\ \Gamma \to \mathsf{Ty}$。(2) 构造 Unit_Γ 在代换下稳定，即对于任意 $\sigma:\ \Delta \to \Gamma$，我们有

$$\sigma \gg \mathsf{Unit}_\Gamma = \mathsf{Unit}_\Delta$$

(3) 对于任意上下文 Γ，存在唯一的映射 $\mathsf{unit}_\Gamma:\ \Gamma \to \mathsf{Tm}$，满足 $\mathsf{unit}_\Gamma \gg \mathsf{tp} = \mathsf{Unit}_\Gamma$。

引理 2.5。 构造 unit_Γ 在代换下是稳定的，即对于任意 $\sigma:\ \Delta \to \Gamma$，我们有

$$\sigma \gg \mathsf{unit}_\Gamma = \mathsf{unit}_\Delta$$

证明。 这由 unit_Δ 作为满足 $\mathsf{unit}_\Delta \gg \mathsf{tp} = \mathsf{Unit}_\Delta$的映射的唯一性自动得到:

$$\sigma \gg \mathsf{unit}_\Gamma \gg \mathsf{tp} = \sigma \gg \mathsf{Unit}_\Gamma = \mathsf{Unit}_\Delta$$

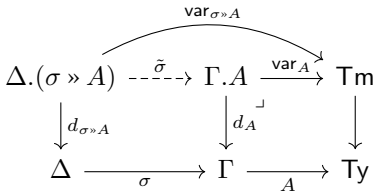
□

定义 2.6(Π-类型， [])。 宇宙 $\mathsf{tp} : \mathsf{Tm} \to \mathsf{Ty}$ 上的一个初等 Π-类型结构 由以下内容组成

(1) 对于任意上下文 Γ、类型 $A:\ \Gamma \to \mathsf{Ty}$ 以及依赖类型 $B:\ \Gamma.A \to \mathsf{Ty}$，存在一个类型 $\Pi_A B:\ \Gamma \to \mathsf{Ty}$。(2) 构造 $\Pi_A B$ 在代换下是稳定的，即对于任意 $\sigma:\ \Delta \to \Gamma$，我们有

$$\Pi_{\sigma \gg A}(\tilde{\sigma} \gg B) = \sigma \gg \Pi_A B$$

其中 $\tilde{\sigma} := (d_{\sigma \gg A} \gg \sigma)$。$\mathsf{var}_{\sigma \gg A}$ 如



(3) 在 (1) 的假设下，对于任意满足 $b \gg \mathsf{tp} = B$ 的 $b:\ \Gamma.A \to \mathsf{Tm}$，存在一个映射 $\mathsf{lam}\, b:\ \Gamma \to \mathsf{Tm}$，使得 $\mathsf{lam}\ b \gg \mathsf{tp} = \Pi_A B$。
(4) 构造 $\mathsf{lam}\, b$ 在代换下是稳定的。对于任意 $\sigma:\ \Delta \to \Gamma$

$$\mathsf{lam}(\tilde{\sigma} \gg b) = \sigma \gg \mathsf{lam}\, b$$

(5) 在 (1) 的假设下，对于任意满足 $f \gg \mathsf{tp} = \Pi_A B$ 的 $f:\ \Gamma \to \mathsf{Tm}$，存在一个映射 $\mathsf{unlam}\ f:\ \Gamma.A \to \mathsf{Tm}$，使得 $\mathsf{unlam}\, f \gg \mathsf{tp} = B$。

(6)（β-规则与 η-规则）运算 lam 与 unlam 互为逆运算。

$$\mathsf{unlam}(\mathsf{lam}\, b) = b \quad \text{and} \quad \mathsf{lam}(\mathsf{unlam}\, f) = f$$

引理 2.7 (◫)。 *unlam*的稳定性可以由lam是一个在代换下稳定的逆映射这一性质推出。证明。

$$\begin{aligned} &\mathsf{unlam}(\sigma \gg f) \\ =\ &\mathsf{unlam}(\sigma \gg \mathsf{lam}(\mathsf{unlam}\, f)) \\ =\ &\mathsf{unlam}(\mathsf{lam}(\tilde{\sigma} \gg \mathsf{unlam}\, f)) \\ =\ &\tilde{\sigma} \gg \mathsf{unlam}\, f \end{aligned}$$

□

引理 2.8。 假设tp 具有初等 Π-类型，并固定映射 $A : \Gamma \to \mathsf{Ty}$、 $B : \Gamma.A \to Ty$ 和 $\sigma : \Delta \to \Gamma$。以下形式的交换方块之间存在一个双射

(1)
$$\begin{array}{ccc} \Delta.(\sigma \gg A) & \xrightarrow{b} & \mathsf{Tm} \\ {\scriptstyle \tilde{\sigma}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{tp}} \\ \Gamma.A & \xrightarrow[B]{} & \mathsf{Ty} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{f} & \mathsf{Tm} \\ {\scriptstyle \sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{tp}} \\ \Gamma & \xrightarrow[\Pi_A B]{} & \mathsf{Ty} \end{array}$$

由 $b \mapsto \mathsf{lam}\ b$和$\mathsf{unlam}\ f \leftarrow\!\shortmid f$给出。

证明。 我们首先检查 lam(b) 的类型是否正确

$$\mathsf{lam}(b) \gg \mathsf{tp} = \Pi_{\sigma \gg A}(\tilde{\sigma} \gg B) = \sigma \gg \Pi_A B$$

反过来，由于 f 的类型是

$$f \gg \mathsf{tp} = \sigma \gg \Pi_A B = \Pi_{\sigma \gg A}(\tilde{\sigma} \gg B)$$

我们有 unlam(f) » tp $= \tilde{\sigma} \gg B$。由 β-规则和 η-规则可知，这二者互为逆。□

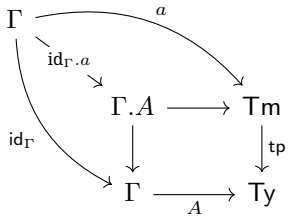
定义 2.9 (Σ-类型, ◫)。宇宙 tp : Tm $\to$ Ty 上的初等 Σ-类型结构由以下内容组成

(1) 对于任意上下文 Γ、类型 $A : \Gamma \to \mathsf{Ty}$ 以及依赖类型 $B : \Gamma.A \to \mathsf{Ty}$，都存在一个类型 $\Sigma_A B : \Gamma \to \mathsf{Ty}$。(2) 构造 $\Sigma_A B$ 在代换下保持稳定，这意味着对于任意 $\sigma : \Delta \to \Gamma$，我们有

$$\Sigma_{\sigma \gg A}(\tilde{\sigma} \gg B) = \sigma \gg \Sigma_A B$$

其中 $\tilde{\sigma}$ 与定义2.6中的相同。

(3) 在 (1) 的假设下，对于任意 $a : \Gamma \to \mathsf{Tm}$ 和 $b : \Gamma \to \mathsf{Tm}$，使得 $a \gg \mathsf{tp} = A$ 且$b \gg \mathsf{tp} = \mathrm{id}_\Gamma.a \gg B$，存在一个映射 pair($a$, b) : $\Gamma \to \mathsf{Tm}$，满足 pair(a, b) » tp $= \Sigma_A B$。



(4) 构造 pair(a, b) 在代换下稳定。对于任意 σ： $\Delta \to \Gamma$

$$\mathsf{pair}(\sigma \gg a, \sigma \gg b) = \sigma \gg \mathsf{pair}(a, b)$$

（5）在假设（1）成立的情况下，对于任意满足 $s \gg \mathsf{tp} = \Sigma_A B$ 的 $s : \Gamma \to \mathsf{Tm}$，存在映射第一投影 $s : \Gamma \to \mathsf{Tm}$ 和第二投影 $s : \Gamma \to \mathsf{Tm}$，使得第一投影 $s \gg \mathsf{tp} = A$ and 第二投影 $s \gg \mathsf{tp} = (\mathrm{id}_\Gamma.$第一投影 $s) \gg B$。

（6）（β-规则）操作第一投影和第二投影对使用 pair 形成的项进行解构。

$$\mathsf{fst}\ (\mathsf{pair}(a, b)) = a \quad \text{and} \quad \mathsf{snd}\ (\mathsf{pair}(a, b)) = b$$

(7) (η-规则) 反之，操作pair 重构由第一投影和第二投影拆分的项。

$$\mathsf{pair}(\mathsf{fst}\ s, \mathsf{snd}\ s) = s$$

引理 2.10 (□, □)。 代换下第一投影和第二投影的稳定性可由代换下pair 的稳定性以及 β- 和 η-规则推出。

证明。

$$\begin{aligned}
&\mathsf{fst}(\sigma \gg s)\\
=&\,\mathsf{fst}(\sigma \gg \mathsf{pair}(\mathsf{fst}\ s, \mathsf{snd}\ s))\\
=&\,\mathsf{fst}(\mathsf{pair}(\sigma \gg \mathsf{fst}\ s, \sigma \gg \mathsf{snd}\ s))\\
=&\,\sigma \gg \mathsf{fst}\ s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{snd}(\sigma \gg s)\\
=&\,\mathsf{snd}(\sigma \gg \mathsf{pair}(\mathsf{fst}\ s, \mathsf{snd}\ s))\\
=&\,\mathsf{snd}(\mathsf{pair}(\sigma \gg \mathsf{fst}\ s, \sigma \gg \mathsf{snd}\ s))\\
=&\,\sigma \gg \mathsf{snd}\ s
\end{aligned}$$

□

引理 2.11。 假设tp具有初等 Σ-类型，并固定一个映射 $\sigma : \Delta \to \Gamma$。在交换方块对之间存在一个双射

(2)
$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{a} & \mathsf{Tm} \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathsf{tp}} \\ \Gamma & \xrightarrow[A]{} & \mathsf{Ty} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{b} & \mathsf{Tm} \\ {\scriptstyle\sigma.a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathsf{tp}} \\ \Gamma.A & \xrightarrow[B]{} & \mathsf{Ty} \end{array}$$

以及方形

(3)
$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{p} & \mathsf{Tm} \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathsf{tp}} \\ \Gamma & \xrightarrow[\Sigma_A B]{} & \mathsf{Ty} \end{array}$$

通过正向应用 $(a, b) \mapsto \mathsf{pair}(a, b)$，反向应用 (第一投影 p, 第二投影 p) $\mapsto p$ 给出。

证明。假设 方程（2）。那么，$\mathsf{pair}(a,\ b)$ 是替换后 Σ-类型 $\sigma \gg \Sigma_A B = \Sigma_{\sigma \gg A}(\tilde{\sigma} \gg B)$的一个项

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\mathsf{pair}(a,b)} & \mathsf{Tm} \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathsf{tp}} \\ \Gamma & \xrightarrow[\Sigma_A B]{} & \mathsf{Ty} \end{array}$$

反过来，给定方程（3）， p 是替换后 Σ-类型 $\sigma \gg \Sigma_A B = \Sigma_{\sigma \gg A}(\tilde{\sigma} \gg B)$，那么第一分量的类型判断正确: 第一投影$(p)$≫tp $= \sigma \gg A$，且第二投影(p) 可按如下方式进行类型判断:

$$\mathsf{snd}(p) \gg \mathsf{tp} = (\mathsf{id}_\Delta.\mathsf{fst}(p)) \gg \tilde{\sigma} \gg B = (\sigma.\mathsf{fst}(p)) \gg B$$

□

定义 2.12 (Id-类型, □)。 一个初等Id-类型结构定义在宇宙tp： Tm $\to$ Ty 由以下内容组成

(1) 对于任意上下文 Γ、类型 $A : \Gamma \to \mathsf{Ty}$，以及满足 $a_i \gg \mathsf{tp} = A$ 的项 a_0、$a_1 : \Gamma \to \mathsf{Tm}$，都存在一个类型 $\mathsf{Id}_A(a_0, a_1) : \Gamma \to \mathsf{Ty}$。(2) 构造 $\mathsf{Id}_A(a_0, a_1)$ 在代换下保持稳定。(3) 对于任意上下文 Γ、类型 $A : \Gamma \to \mathsf{Ty}$，以及满足 $a \gg \mathsf{tp} = A$ 的项 $a : \Gamma \to \mathsf{Tm}$，都存在一个项 $\mathsf{refl}\ a : \Gamma \to \mathsf{Tm}$，满足 $\mathsf{refl}\, a \gg \mathsf{tp} = \mathsf{Id}_A(a, a)$。(4) 构造 refl 在代换下保持稳定。

(5) 在 (3) 的假设下，可以通过对类型 $\mathsf{Id}_A(a,\ x)$（由 (1) 给出）在 $\Gamma.A$ 上进行上下文扩张，构造上下文 $\Gamma.(x:\ A)$。$\mathsf{Id}_A(a,\ x)$，以及代换

$$\rho_a := \mathsf{id}_\Gamma.a.\mathsf{refl}\, a : \Gamma \to \Gamma.(x:A).\mathsf{Id}_A(a,x)$$

对于任意动机 $C:\ \Gamma.(x:\ A)。\mathsf{Id}_A(a,\ x) \to$ 类型——这意味着 C 由一个以 a 为固定起点的路径族参数化——以及满足以下条件的映射 $c_{\mathsf{refl}}:\ \Gamma \to \mathsf{Tm}$

$$c_{\mathsf{refl}} \gg \mathsf{tp} = \rho_a \gg C$$

存在一个项 $j(C,\ c_{\mathsf{refl}}):\ \Gamma.(x:\ A)。\mathsf{Id}_A(a,\ x) \to \mathsf{Tm}$，满足 $j \gg \mathsf{tp} = C$ 且 $\rho_a \gg j(C,\ c_{\mathsf{refl}}) = c_{\mathsf{refl}}$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{c_{\mathsf{refl}}} & \mathsf{Tm} \\ {\scriptstyle \rho_a}\downarrow & \overset{j(C,c_{\mathsf{refl}})}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{tp}} \\ \Gamma.(x:A).\mathsf{Id}_A(a,x) & \xrightarrow[C]{} & \mathsf{Ty} \end{array}$$

(6) 构造 j 在代换下保持稳定。

我们最终会看到（结合引理 4.6、命题 5.4 和命题 5.11）最后一个条件 (6) 可以通过调整 j 获得。如果 j 在代换下不稳定，我们总可以将其替换为另一个 j'，使其在代换下稳定。

注 2.13。在前面对类型构造子的阐述中，为求简洁，我们始终只使用单个宇宙 tp。然而，我们可以推广定义，使 Π-类型和Σ-类型分别允许 A 处于宇宙 tp_0、B 处于第二个宇宙 tp_1，以及 $\Pi_A B$ 处于第三个宇宙 tp_2。例如，这种更一般的表述可用于描述 Lean 的“宇宙多态”Π-类型。更一般的表述可见于我们的形式化文件。

在存在多个宇宙的情况下，通常要求恒等类型具有大消去性质，这意味着恒等消去的动机 C 不必与取恒等类型的类型 A 处于同一个宇宙中。在某些系统中，甚至可能要求 $\mathsf{Id}_A(a_0,a_1)$ 位于不同的宇宙中。例如，在 Lean 类型论中，$\mathsf{Id}_A(a_0,a_1)$ 位于命题宇宙 Prop 中。

正如我们将在第4节看到的，使用单个宇宙可能会导致Type：Type悖论。我们通过考虑宇宙提升来解决这一问题。通常，可以考虑一个无限的宇宙提升序列，使得每个类型（包括宇宙）都是某个足够大的宇宙中的项。以下定义给出了“依 Coquand 风格”的非累积宇宙提升的语义 [Coq13, GKNB20, HFAM23]。

定义 2.14 (◫, ◫)。一个宇宙态射 $l:\ \mathsf{tp}_0 \to \mathsf{tp}_1$ 由一对映射 $l_{\mathsf{Ty}}:\ \mathsf{Ty}_0 \to \mathsf{Ty}_1$和 $l_{\mathsf{Tm}}:\ \mathsf{Tm}_0 \to \mathsf{Tm}_1$ 组成，使得下面的方形是一个拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Tm}_0 & \xrightarrow{l_{\mathsf{Tm}}} & \mathsf{Tm}_1 \\ {\scriptstyle \mathsf{tp}_0}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{tp}_1} \\ \mathsf{Ty}_0 & \xrightarrow[l_{\mathsf{Ty}}]{} & \mathsf{Ty}_1 \end{array}$$

假设 $\mathcal{C}$ 有一个终对象 1。宇宙提升由一个宇宙态射 $l:\mathsf{tp}_0 \to \mathsf{tp}_1$以及一对映射 $U_0:\ 1 \to \mathsf{Ty}_1$ 和 $\mathsf{asTm}:\ \mathsf{Ty}_0 \to \mathsf{Tm}_1$ 构成，使得下述方形是一个拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Ty}_0 & \xrightarrow{\mathsf{asTm}} & \mathsf{Tm}_1 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{tp}_1} \\ 1 & \xrightarrow[U_0]{} & \mathsf{Ty}_1 \end{array}$$

映射 l_{Ty} 和 l_{Tm} 允许将较小宇宙中的类型和项提升到较大的宇宙中。第一个拉回方块确保宇宙提升与上下文扩张在同构意义下可交换。

$$\Gamma.A \cong \Gamma.(A \gg l_{\mathsf{Ty}})$$

第二个拉回方块提供了较大宇宙中的一个类型，用以表示较小的宇宙；这等价于提供一个同构

$$1.U_0 \cong \mathsf{Ty}_0$$

也可以对宇宙态射施加额外要求，例如要求 l_{Ty} 是单态的，或者要求上述同构是严格相等 $\Gamma.A = \Gamma.(A \gg l_{\mathsf{Ty}})$ 和 $1.U_0 = \mathsf{Ty}_0$。

3. π-族中的多项式函子

如果 $\mathcal{C}$ 是局部笛卡尔闭的，那么 $\mathcal{C}$ 中的任意映射 $f\colon E \to B$ 都可以视为一个 多项式签名。每个这样的多项式签名都会导出一个多项式函子，记作 $P_f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，其定义为以下复合

$$\mathcal{C} \xrightarrow{E^*} \mathcal{C}/E \xrightarrow{f_*} \mathcal{C}/B \xrightarrow{B_!} \mathcal{C}$$

本节将说明， π-族为发展多项式函子的一般理论提供了良好的框架。在此框架中，我们同样将多项式函子定义为三重复合，但将其限制在适当的子范畴上。

注 3.1. 为简化说明，我们仅介绍“单变量”的多项式函子。在 Lean 形式化过程中，我们首先构造“多变量”的多项式函子，然后再将其特化为单变量情形。关于“多变量”多项式函子的介绍可参见 [GK13]。

定义 3.2 (◫)。 固定一个函子 $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$。的部分右伴随 L，记作 $L \dashv_\partial \partial R$，由两个全子范畴 $\partial\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 和 $\partial\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{D}$、一个函子 $\partial R : \partial\mathcal{D} \to \partial\mathcal{C}$（如下图所示），以及对所有 $X \in \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ 和 {v39> 的一个同态集双射组成。

$$\mathcal{D}(L(X), Y) \cong \mathcal{C}(X, \partial R(Y))$$

在 X 和 Y 中都是自然的。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \hookleftarrow & \partial\mathcal{C} \\ {\scriptstyle L}\downarrow & \dashv_\partial & \uparrow{\scriptstyle \partial R} \\ \mathcal{D} & \hookleftarrow & \partial\mathcal{D} \end{array}$$

成为部分右伴随的条件，比成为 L 的某个限制的右伴随更强，

$$\partial L : \partial\mathcal{C} \to \partial\mathcal{D}$$

如果这样的限制存在。事实上，考虑同构右侧，而映射在 $\mathcal{C}$ 中的定义域在限制后的伴随中只能取自 ∂C，我们则允许它是 C 中的任意对象。

以下定义改编自 Joyal 的笔记 [Joy17], ，并且可以进一步追溯至[Tay87]。为避免引入冗余假设，这些条件的组合在 Lean 中并未作为单一定义出现。因此，形式化结果的链接分别针对每个独立条件提供。

定义 3.3。一个预氏族[4] $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$ 由一个范畴 $\mathcal{C}$ 及其映射类 $\mathcal{R}$ 中的 $\mathcal{C}$ 成员称为 $\mathcal{R}$-映射，并满足以下条件：

(1) 沿任意态射对 $\mathcal{R}$-映射的拉回都存在，且为 $\mathcal{R}$-映射。（◫， ◫）（2）所有同构都属于 $\mathcal{R}$。（◫）（3） $\mathcal{R}$对复合封闭。（◫）

遵循 Joyal 的记法，我们用 $\mathcal{R}(X)$ 表示切片 $\mathcal{C}/X$ 的全子范畴，其中对象的底映射属于 $\mathcal{R}$。对于任意 $f\colon Y \to X$，我们都有一个函子 $f_!\colon \mathcal{C}/Y \to \mathcal{C}/X$，它位于这两个

[4]为了方便，我们引入了“预氏族”这一术语；该术语并未出现在文献中。

切片范畴之间，并且有一个部分右伴随

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}/Y & \longleftarrow & \mathcal{R}(Y) \\ {\scriptstyle f_!}\downarrow & \dashv_\partial & \uparrow{\scriptstyle \partial f^*} \\ \mathcal{C}/X & \longleftarrow & \mathcal{R}(X) \end{array}$$

其中， ∂f^*将一个关于 X的 $\mathcal{R}$-映射映至沿 f的拉回。若 f是一个 $\mathcal{R}$-映射，则 ∂f^*可扩展为切片范畴之间的拉回函子 $f^*\colon \mathcal{C}/X \to \mathcal{C}/Y$，且 $f_!$可限制为映射 $\partial f_!\colon \mathcal{R}(Y) \to \mathcal{R}(X)$。此外，

$$f_! : \mathcal{C}/Y \dashv \mathcal{C}/X : f^* \quad \text{and} \quad \partial f_! : \mathcal{R}(Y) \dashv \mathcal{R}(X) : \partial f^*$$

预氏族 $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$ 在另外满足以下条件时称为 π-预氏族

（4） $\mathcal{R}$ 对推前封闭。 (□, □)。这意味着，对于任意 $\mathcal{R}$-映射 $f\colon Y \to X$，拉回存在一个部分右伴随

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}/X & \longleftarrow & \mathcal{R}(X) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & \dashv_\partial & \uparrow{\scriptstyle \partial f_*} \\ \mathcal{C}/Y & \longleftarrow & \mathcal{R}(Y) \end{array}$$

由此可知，对于 $f\colon Y \to X$，在一个 π-预氏族 $\mathcal{R}$中，我们有一个伴随

$$\partial f^* : \mathcal{R}(X) \dashv \mathcal{R}(Y) : \partial f_*$$

假设 $\mathcal{C}$ 有一个终对象 1。我们将满足唯一映射 $X \to 1$属于 $\mathcal{R}$ 的对象 X 称为 $\mathcal{R}$-对象。在另外满足以下条件时，(π-)预氏族称为 (π-)族

(5) 所有对象都是 $\mathcal{R}$-对象。(□)

Following Joyal [Joy17], 对于预氏族 $(\mathcal{C},\ \mathcal{R})$，我们将 $(\mathcal{R}(X)\ \mathcal{R}|_{\mathcal{R}(X)})$ 称为 局部氏族 在 X处。

例 3.4。 下面给出前述定义的一些例子。

- 如果 $\mathcal{C}$ 是一个局部笛卡尔闭范畴，那么（4）可以表述为 $\mathcal{R}$在环境推前运算下封闭。特别地，如果 $\mathcal{R}$ 由 $\mathcal{C}$中的所有映射构成，那么（$\mathcal{C}$，$\mathcal{R}$）构成一个 π-clan。
- 如果 $\mathcal{C}$ 是一个 Quillen 模型范畴，且 $\mathcal{R}$ 是纤维化类，那么 $(\mathcal{C},\ \mathcal{R})$ 构成一个预氏族。若进一步 $\mathcal{C}$ 是局部笛卡尔闭范畴，且模型结构满足 Frobenius 性质，那么 $(\mathcal{C},\ \mathcal{R})$是一个 π-预氏族 [GS17]。当然，无论哪种情况，将其限制到纤维对象的全子范畴，都会得到一个（π-）氏族。
- 由前面的例子可知，小范畴范畴上的经典模型结构构成一个 clan $(\mathsf{Cat}\ \mathcal{I})$，其中 $\mathcal{I}$由（分裂）同构纤维化组成 [Joy17]。这将限制为小群胚范畴 $(\mathsf{Grpd}^{\mathcal{I}}|_{\mathsf{Grpd}})$ [Joy17]上的一个 $(\mathsf{Grpd}^{\mathcal{I}}|_{\mathsf{Grpd}})$是一个 π-clan，这一点已在 Lean 中形式化（□, □, □, □）。
- 单纯集合上的 Kan-Quillen 模型结构sSet 产生一个 π-预氏族 [Joy17]。
- 具有充分结构（足够多的宇宙、单位类型-、Σ-，以及 Π-类型）的直觉主义类型论模型构成一个 π-clan。关于这一事实的精确表述见推论5.7。

从现在起，我们固定一个 π-clan $(\mathcal{C},\ \mathcal{R})$ 和一个 $\mathcal{R}$-映射 $f\colon E \to B$。

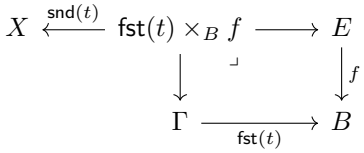
定义 3.5 (□, □)。 与多项式签名$f \in \mathcal{R}$ 相关联的多项式函子 $P_f\colon \ \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 由以下复合定义

$$\mathcal{C} \quad \simeq \quad \mathcal{R}(1) \xrightarrow{Y^*} \mathcal{R}(E) \xrightarrow{f_*} \mathcal{R}(B) \xrightarrow{X_!} \mathcal{R}(1) \quad \simeq \quad \mathcal{C}$$

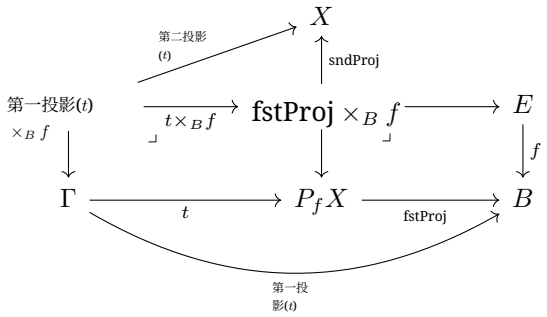
命题 3.6 (□, □, □)。 多项式函子由其泛性质刻画：存在一个双射

$$\mathcal{C}(\Gamma, P_f X) \cong \sum_{\mathsf{fst} \in \mathcal{C}(\Gamma, B)} \mathcal{C}(\mathsf{fst} \times_B f, X)$$

该双射对 $\Gamma \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 和 $X \in \mathcal{C}$ 都是自然的。对于给定的 $t:\ \Gamma \to P_f X$，依赖和中的一个元素可以形象地表示为



特别值得关注的是，将恒等态射 $\mathsf{id} \in \mathcal{C}(P_f X, P_f X)$ 应用于自然双射后，得到一个泛性质对 $\mathsf{fstProj} = $第一投影$(\mathsf{id}):\ P_f X \to B$ 和 $\mathsf{sndProj} = $第二投影$(\mathsf{id}) : \mathsf{fstProj} \times_B f \to X$，所有其他态射都可经由它们分解



证明。 我们首先定义 $\mathsf{fstProj}:\ P_f X \to B$，它是定义局部氏族 $\mathcal{R}(B)$ 中对象 $f_* E^* X$ 的底态射。于是对于 $t:\ \Gamma \to P_f X$，我们可以定义第一投影$(t) := t \gg \mathsf{fstProj}:\ \Gamma \to B$。注意，确实有 $\mathsf{fstProj} = $第一投影$(\mathsf{id})$。

结合部分伴随 $f^* \dashv f_*$ 和 $E_! \dashv E^*$，我们得到

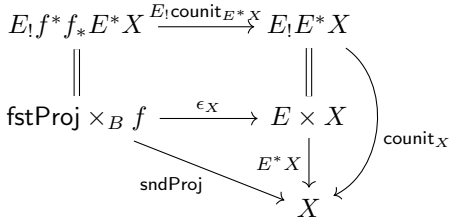
$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}/B(\mathsf{fst}(t), \mathsf{fstProj}) \\
=&\mathcal{C}/B(\mathsf{fst}(t), f_* E^* X) \\
\cong&\mathcal{C}/E(f^* \mathsf{fst}(t), E^* X) \\
\cong&\mathcal{C}(E_! f^* \mathsf{fst}(t), X) \\
=&\mathcal{C}(\mathsf{fst}(t) \times_B f, X)
\end{aligned}$$

请注意，这里用到了部分伴随的全部效力，而不仅仅是限制在子范畴上的伴随。事实上，由于第一投影(t)（因而 f^*第一投影(t) 和 $E_! f^*$第一投影(t)）不必属于 $\mathcal{R}$，推导中间的三个方程都需要通过部分伴随导出同构。我们利用这一点，将 $\mathsf{snd}(t) : $第一投影$(t) \times_B f \to X$ 定义为 $t : $第一投影$(t) \to \mathsf{fstProj}$ 在切片 $\mathcal{C}/B$ 中沿着上述同构序列的转置。接着可以定义 $\mathsf{sndProj} := \mathsf{snd}(\mathsf{id})$，并利用部分伴随的自然性验证

$$\mathsf{snd}(t) = (t \times_B f) \gg \mathsf{sndProj}$$

我们将 t留给读者根据 $\mathsf{fst}(t)$ 和 $\mathsf{snd}(t)$ 自行推导。

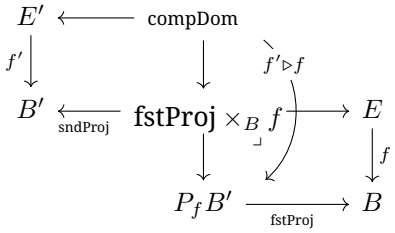
为了显式计算 sndProj（从而计算 snd），我们给出以下方程 :



其中，伴随 $f^* \dashv f_*$ 的余单位的 $E^* X$ 分量记为 ϵ_X。 □

π-clan 的结构足以确保多项式函子的复合正确进行。下面的定义与局部笛卡尔闭范畴语境中的对应定义完全类似。

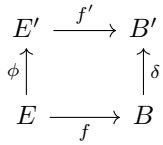
定义 3.7 （◫）。 如果 $f\colon\ E \to B$ 和 $f'\colon\ E' \to B'$ 都属于 $\mathcal{R}$，那么我们可以如下构造 多项式复合 $f' \triangleright f\colon\ \mathsf{compDom} \to P_f B'$：



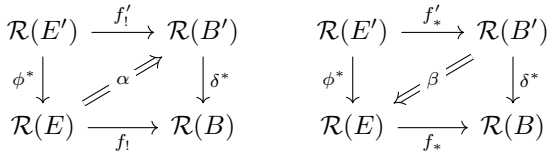
这是多项式函子的多项式签名，因为 $\mathcal{R}$ 在拉回下稳定（公理(1)），并且在复合下封闭（公理(3)）。相伴的多项式函子 $P_{f'\triangleright f}\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 由自然同构[5]刻画

$$P_{f'\triangleright f} \cong P_{f'} \gg P_f$$

引理 3.8(◫, ◫)。 对于任意交换方块

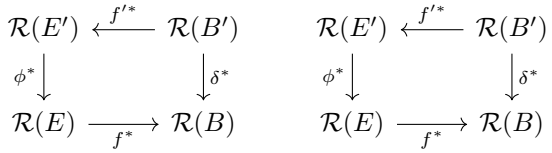


若 f 和 f' 都是 $\mathcal{R}$-映射，则存在 *Beck–Chevalley*（*BC*）自然变换



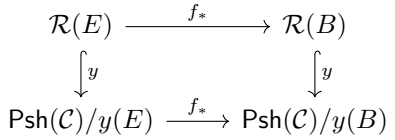
此外，若该方形是一个拉回，则这些自然变换都是自然同构。

证明。 它们分别定义为以下自然同构的左伴随伴子和右伴随伴子伴子 （参见 Mathlib 和 [HR24]）



在局部笛卡尔闭范畴中，此类证明的常用方法依赖于 共轭理论，如 [HR24]所示。而在我们的情形中，我们改用伴随伴子演算。

对于 f，在一个 π-clan $\mathcal{R}$ 中的态射，可以验证 $f_!,\ f_*\colon \mathcal{R}(E) \to \mathcal{R}(B)$ 和 $f^*\colon \mathcal{R}(B) \to \mathcal{R}(E)$ 都交换（相差一个典范自然同构），并与 Yoneda 嵌入 $y\colon \mathcal{R}(X) \to \mathsf{Psh}(\mathcal{C})/y(X)$ 相容。例如，f_* 的图为



[5]后续论述不需要这个同构，但为完整起见仍在此提及。因此，省略其构造。

It f ˜可知， α 和 β 是 $\mathsf{Psh}(\mathcal{C})$ 中相应伴随态射 $\tilde{\alpha}$ 和 β 的限制。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Psh}(\mathcal{C})/y(E') & \xrightarrow{y(f')_!} & \mathsf{Psh}(\mathcal{C})/y(B') \\ {\scriptstyle y(\phi)^*}\downarrow & \overset{\tilde{\alpha}}{\Rightarrow} & \downarrow{\scriptstyle y(\delta)^*} \\ \mathsf{Psh}(\mathcal{C})/y(E) & \xrightarrow[y(f)_!]{} & \mathsf{Psh}(\mathcal{C})/y(B) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathsf{Psh}(\mathcal{C})/y(E') & \xrightarrow{y(f')_*} & \mathsf{Psh}(\mathcal{C})/y(B') \\ {\scriptstyle y(\phi)^*}\downarrow & \overset{\tilde{\beta}}{\Leftarrow} & \downarrow{\scriptstyle y(\delta)^*} \\ \mathsf{Psh}(\mathcal{C})/y(E) & \xrightarrow[y(f)_*]{} & \mathsf{Psh}(\mathcal{C})/y(B) \end{array}$$

由于 $\mathsf{Psh}(\mathcal{C})$ 是局部笛卡尔闭的，伴随函子的微积分 [HR24]的一般理论适用，因此可得˜$\tilde{\alpha}$和 β在交换方块 $y(\phi) \gg y(f') = y(f) \gg y(\delta)$ 为拉回时是同构。 □

命题 3.9. 对于任意三角形

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\rho} & E' \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f'} & \\ & B & \end{array}$$

如果 f 和 f' 是 重 $\mathcal{R}$映射，则存在自然变换[6] $v\colon P_{f'} \to P_f$ 由胡须复合图给出

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{E'^*} & \mathcal{R}(E') & \xrightarrow{f'_*} & \mathcal{R}(B) \\ & {\scriptstyle E^*}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \rho^*} & {\scriptstyle \mathsf{id}^*}\| & \searrow{\scriptstyle B_!} \\ & & \mathcal{R}(E) & \xrightarrow[f_*]{} & \mathcal{R}(B) \xrightarrow[B_!]{} \mathcal{C} \end{array}$$

其中中间单元由 *BC*（引理3.8）给出。

此外，在分量 v_X 上，可以相对于命题 3.6 中的万有性质按如下方式计算。对于映射 $t\colon \Gamma \to P_{f'}X$，投影满足

$$\mathsf{fst}(t \gg v_X) = \mathsf{fst}(t) \qquad \mathsf{snd}(t \gg v_X) = (\mathsf{fst}(t) \times_B \rho) \gg \mathsf{snd}(t)$$

其中第一投影$(t) \times_B \rho$ 如下图所示

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathsf{fst}(t) \times_B f & \longrightarrow & E \\ & {\scriptstyle \mathsf{snd}(t \gg v_X)}\swarrow & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{fst}(t) \times_B \rho} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ X & \xleftarrow[\mathsf{snd}(t)]{} & \mathsf{fst}(t) \times_B f' & \longrightarrow & E' \\ & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ & & \Gamma & \xrightarrow[\mathsf{fst}(t)]{} & B \end{array}$$

证明。 我们将 $\mathsf{fstProj}' = f_*E^*X$ 记作把多项式函子作用到 X 上的结果，其中将其视为局部氏族 $\mathcal{R}(B)$ 中的对象（而不是$\mathcal{C}$中的对象）。通过展开 v 以及 BC 自然变换的定义，可以显式写出在 X 处的分量为 $v_X = B_!(\nu_X)$，其中 $\nu_X\colon \mathsf{fstProj}' \to \mathsf{fstProj}$ 是局部氏族 $\mathcal{R}(B)$中的如下复合

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{fstProj}' & & \xrightarrow{\qquad\qquad \nu_X \qquad\qquad} & & \mathsf{fstProj} \\ {\scriptstyle \mathsf{unit}_{\mathsf{fstProj}'}}\downarrow & & & & \cong \uparrow{\scriptstyle f_* m_X^{-1}} \\ f_*f^*\mathsf{fstProj}' & \xrightarrow[f_* n_{\mathsf{fstProj}'}]{\cong} & f_*\rho^*f'^*\mathsf{fstProj}' & \xrightarrow[f_*\rho^*\mathsf{counit}_{E'^*X}]{} & f_*\rho^*E'^*X \end{array} \tag{4}$$

这里 $n\colon f^* \cong \rho^*f'^*$与 $m\colon E^* \cong \rho^*E'^*$是由交换性给出的典范自然同构，单位：$\mathrm{id}_{\mathcal{R}(B)} \to f_*f^*$是 f 的拉回 - 推前伴随的单位，而余单位：$f'^*f'_* \to \mathrm{id}_{\mathcal{R}(E')}$是 f' 的拉回 - 推前伴随的余单位。

[6]关于 v 的定义已在 HoTTLean（◫）中形式化，但其分量的计算规则尚未形式化。

根据 $v_X = B_!(\nu_X)$ 是局部氏族 $\mathcal{R}(X)$ 中的态射这一定义，下列三角形交换

(5)
$$\begin{array}{ccc} P_{f'}X & \xrightarrow{v_X} & P_f X \\ & \searrow^{\mathsf{fstProj}'} & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{fstProj}} \\ & & B \end{array}$$

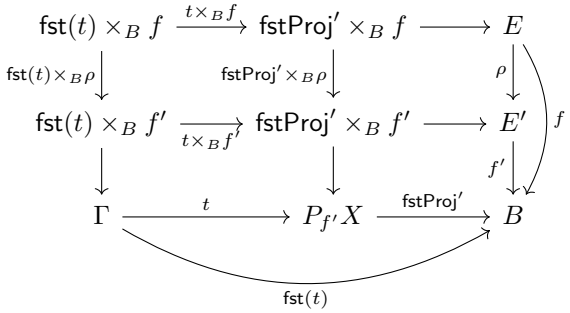
我们还希望建立如下方程，用以关联 $\mathsf{sndProj} : \mathsf{fstProj} \times_B f$ 与 $\mathsf{sndProj}' : \mathsf{fstProj}' \times_B f'$。

(6)
$$\begin{array}{ccc} \mathsf{fstProj}' \times_B f & \xrightarrow{v_X \times_B f} & \mathsf{fstProj} \times_B f \\ {\scriptstyle \mathsf{fstProj}' \times_B \rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{sndProj}} \\ \mathsf{fstProj}' \times_B f' & \xrightarrow[\mathsf{sndProj}']{} & X \end{array}$$

这需要仔细的证明。在证明方程（6）之前，让我们用这两个方程来说明关于第一投影（$t \gg v_X$）与第二投影（$t \gg v_X$）的所需结果。利用方程（5），

$$\mathsf{fst}(t \gg v_X) = t \gg v_X \gg \mathsf{fstProj} = t \gg \mathsf{fstProj}' = \mathsf{fst}(t)$$

利用方程（6）、命题 3.6以及如下图



我们可以得出结论

$$\begin{aligned} &\mathsf{snd}(t \gg v_X) \\ &= ((t \gg v_X) \times_B f) \gg \mathsf{sndProj} \\ &= (t \times_B f) \gg (v_X \times_B f) \gg \mathsf{sndProj} \\ &= (t \times_B f) \gg (\mathsf{fstProj}' \times_B \rho) \gg \mathsf{sndProj}' \\ &= (\mathsf{fst}(t) \times_B \rho) \gg (t \times_B f') \gg \mathsf{sndProj}' \\ &= (\mathsf{fst}(t) \times_B \rho) \gg \mathsf{snd}(t) \end{aligned}$$

为了证明方程（6），我们还来考虑以下内容

(7)
$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{fstProj}' \times_B f & \xrightarrow{v_X \times_B f} & \mathsf{fstProj} \times_B f & \xrightarrow{\epsilon_X} & E \times X \\ {\scriptstyle \mathsf{fstProj}' \times_B \rho}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \rho \times X} \\ \mathsf{fstProj}' \times_B f' & & \xrightarrow[\epsilon'_X]{} & & E' \times X \end{array}$$

回想命题 3.6 的证明中给出的公式 $\mathsf{sndProj} = \epsilon_X \gg E^* X$，并假设方程（7），我们可以计算

$$\begin{aligned}
&(v_X \times_B f) \gg \mathsf{sndProj} \\
=&(v_X \times_B f) \gg \epsilon_X \gg E^* X \\
=&(v_X \times_B f) \gg \epsilon_X \gg (\rho \times X) \gg E'^* X \\
=&(\mathsf{fstProj}' \times_B \rho) \gg \epsilon'_X \gg E'^* X \\
=&(\mathsf{fstProj}' \times_B \rho) \gg \mathsf{sndProj}'
\end{aligned}$$

尚需证明方程（7）。从方程（4）在 $\mathcal{C}/B$中出发，让我们反转同构 $f_* m_X$的方向，并将单位$\mathsf{fstProj}' \gg f_* n_{\mathsf{fstProj}'}$识别为$n_{\mathsf{fstProj}'}$的转置：$f^*\mathsf{fstProj}' \to \rho^* f'^* \mathsf{fstProj}'$于 $\mathcal{C}/E$中在部分伴随 $f^* \dashv f_*$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathsf{fstProj}' & \xrightarrow{\nu_X} & \mathsf{fstProj} & = & \mathsf{fstProj} \\
 & \overset{\mathsf{unit}_{\mathsf{fstProj}'}}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle \tilde{n}_{\mathsf{fstProj}'}} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_* m_X} \\
f_* f^* \mathsf{fstProj}' & \xrightarrow[f_* n_{\mathsf{fstProj}'}]{} & f_* \rho^* f'^* \mathsf{fstProj}' & & \xrightarrow[f_* \rho^* \mathsf{counit}_{E'^* X}]{} & & f_* \rho^* E'^* X
\end{array}$$

现在，在部分伴随 $f^* \dashv f_*$ 下对该图取转置，我们得到 $\mathcal{C}/E$中的如下图

$$\begin{array}{ccccc}
f^* \mathsf{fstProj}' & \xrightarrow{f^* \nu_X} & f^* \mathsf{fstProj} & \xrightarrow{\mathsf{counit}_{E^* X}} & E^* X \\
\downarrow{\scriptstyle n_{\mathsf{fstProj}'}} & & & & \downarrow{\scriptstyle m_X} \\
\rho^* f'^* \mathsf{fstProj}' & & \xrightarrow[\rho^* \mathsf{counit}_{E'^* X}]{} & & \rho^* E'^* X
\end{array}$$

接下来，在部分伴随 $\rho_! \vdash \rho^*$ 下对该图取转置（其中 $\rho_!: \mathcal{C}/E \to \mathcal{C}/E'$ 且 $\rho^*: \mathcal{R}(E') \to \mathcal{R}(E)$），我们得到 $\mathcal{C}/E'$中的如下图

$$\begin{array}{ccccc}
\rho_! f^* \mathsf{fstProj}' & \xrightarrow{\rho_! f^* \nu_X} & \rho_! f^* \mathsf{fstProj} & \xrightarrow{\rho_! \mathsf{counit}_{E^* X}} & \rho_! E^* X \\
\downarrow{\scriptstyle \hat{n}_{\mathsf{fstProj}'}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \hat{m}_X} \\
f'^* \mathsf{fstProj}' & & \xrightarrow[\rho^* \mathsf{counit}_{E'^* X}]{} & & E'^* X
\end{array}$$

当我们将此视为 $\mathcal{C}$中的一个图时，这正是所需的方程（7）。 □

以下引理中定义的自然同构在[GK13]中被称为“分配律”。

引理 3.10. 设 $g: Z \to Y$与 $f: Y \to X$ 为 π-*clan* $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$ 中的 $\mathcal{R}$-映射。考虑该图

$$\begin{array}{ccccc}
Z & \xleftarrow{\epsilon} & f \times_X q & \xrightarrow{f'} & f_* Z \\
 & \overset{g}{\searrow} & \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle q := f_* g} \\
 & & Y & \xrightarrow[f]{} & X
\end{array}$$

其中 $\epsilon: f \times_X q \to Z$ 是伴随 $f^*: \mathcal{R}(X) \dashv \mathcal{R}(Y): f_*$ 的余单位。于是存在典范自然同构 $g_! \gg f_* \cong \epsilon^* \gg f'_* \gg q_!$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{R}(Z) & \xrightarrow{\epsilon^*} & \mathcal{R}(f \times_X q) & \xrightarrow{f'_*} & \mathcal{R}(f_* Z) \\
 & \overset{g_!}{\searrow} & & & \downarrow{\scriptstyle q_!} \\
 & & \mathcal{R}(Y) & \xrightarrow[f_*]{} & \mathcal{R}(X)
\end{array} \tag{8}$$

证明。 我们参见 [Joy17，命题 2.4.15。]。 □

我们可以利用这一同构来分析 f_* 对 $\mathcal{R}(Y)$ 中对象 W 与 Z 之间的 $\mathcal{R}$-映射 $h\colon W \to Z$ 的作用。我们记 H 为局部氏族 $\mathcal{R}(Z)$ 中底态射为 h 的对象，记 1_Z 为 $\mathcal{R}(Z)$ 的终对象，其底态射为 id_Z，并记 $\underline{H}\colon H \to 1_Z$ 为使得 $g_!H = h$ 成立的映射。则

$$
\begin{array}{ccccc}
f_*W & = & f_*(g_!H) & \cong & q_!(f'_*(\epsilon^*H)) \\
{\scriptstyle f_*h}\downarrow & & {\scriptstyle f_*(g_!\underline{H})}\downarrow & & {\scriptstyle q_!(f'_*(\epsilon^*\underline{H}))}\downarrow \quad \searrow {\scriptstyle q_!(\underline{f'_*(\epsilon^*H)})} \\
f_*Z & = & f_*(g_!1_Z) & \cong & q_!(f'_*(\epsilon^*1_Z)) \quad \cong \quad q_!1_{f_*Z}
\end{array}
\tag{9}
$$

因此，我们可以记录以下结果。

推论 3.11. 在引理 3.10 的假设和记号下，设 $h\colon W \to Z$ 是对象 $\mathcal{R}$之间的一个映射 W 和 Z，位于 $\mathcal{R}(Y)$。对于一个在与同构进行前复合和后复合下稳定的映射类 $\mathcal{H}$，我们有：f_*h 是一个映射 $\mathcal{H}$，当且仅当对象 $f'_*(\epsilon^*h)$ 在 $\mathcal{R}(f_*Z)$ 具有一个属于$\mathcal{H}$的底映射。

4. 代数语义

固定一个 π-clan $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$。$\mathcal{R}$ 是一个特异族类，其中每个族（在同构意义下）都可以看作一系列语义语境扩张 $\Gamma.A_1.\cdots.A_n \to \Gamma$。这一观点将在定理5.6 和推论5.7中得到论证。

定义 4.1 (◫)。一个代数宇宙在$(\mathcal{C},\ \mathcal{R})$ 中是一个宇宙，位于 $\mathcal{C}$ 中，并且同时是一个 $\mathcal{R}$-映射。我们称宇宙 t 是 $\mathcal{R}$-代数的；当上下文中明确所指的 π-clan 时，也简称为代数的。

我们在这一设置下复现 [Awo25] 中所描述的类型构造子，并运用我们关于多项式函子的总体理论。

定义 4.2 (单位类型)。设 $\mathcal{C}$ 具有一个终对象 1。在代数宇宙 $\mathsf{tp} : \mathsf{Tm} \to \mathsf{Ty}$ 上，一个代数单位类型结构由映射 $\mathsf{Unit} : 1 \to \mathsf{Tm}$ 和 $\mathsf{unit} : 1 \to \mathsf{Ty}$ 组成，满足

$$
\begin{array}{ccc}
1 & \xrightarrow{\mathsf{unit}} & \mathsf{Tm} \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{tp}} \\
1 & \xrightarrow[\mathsf{Unit}]{} & \mathsf{Ty}
\end{array}
$$

定义 4.3(Π-类型，◫)。代数 Π-类型结构定义在代数宇宙$\mathsf{tp}\colon\ \mathsf{Tm} \to \mathsf{Ty}$上，由映射 $\Pi\colon\ P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Ty} \to \mathsf{Ty}$ 以及$\mathsf{lam}\colon\ P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm}$组成，满足

$$
\begin{array}{ccc}
P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Tm} & \xrightarrow{\mathsf{lam}} & \mathsf{Tm} \\
{\scriptstyle P_{\mathsf{tp}}\mathsf{tp}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{tp}} \\
P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Ty} & \xrightarrow[\Pi]{} & \mathsf{Ty}
\end{array}
$$

是一个拉回方块。

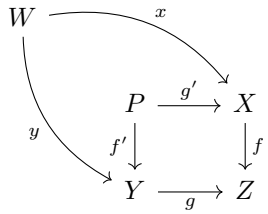
定义 4.4(Σ-类型，◫)。在代数宇宙 $\mathsf{tp} : \mathsf{Tm} \to \mathsf{Ty}$ 上的代数 Σ-类型结构由映射 $\Sigma\colon P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Ty} \to \mathsf{Ty}$ 和 $\mathsf{pair} : \mathsf{compDom} \to \mathsf{Tm}$ 构成，使得

$$
\begin{array}{ccc}
\mathsf{compDom} & \xrightarrow{\mathsf{pair}} & \mathsf{Tm} \\
{\scriptstyle \mathsf{tp}\triangleright\mathsf{tp}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{tp}} \\
P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Ty} & \xrightarrow[\Sigma]{} & \mathsf{Ty}
\end{array}
$$

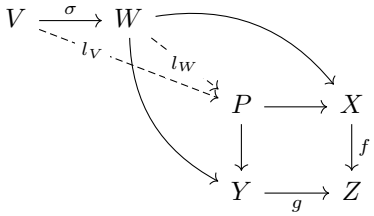
是一个拉回方块。这里，我们使用定义 $\mathsf{tp} \triangleright \mathsf{tp}$ 中的多项式复合 3.7。**定义 4.5** (弱拉回，◫)。考虑以下方形

$$
\begin{array}{ccc}
P & \xrightarrow{g'} & X \\
{\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
Y & \xrightarrow[g]{} & Z
\end{array}
$$

对于这个方形，一个弱拉回结构 $l_\bullet$ 由以下内容组成：对每个锥（W、x、y），

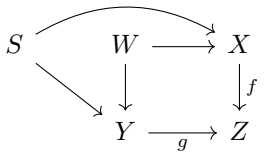


一个选定的提升 $l_W\colon W \to P$，满足 $l_W \fatsemi g' = x$ 和 $l_W \fatsemi f' = y$。当对于任意锥态射 $\sigma\colon V \to W$，选定的提升都满足 $\sigma \fatsemi l_W = l_V$ 时，我们称弱拉回结构是相容的。

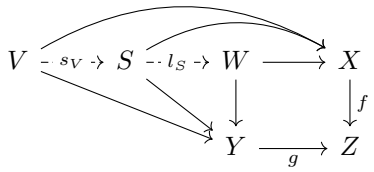


引理 4.6 (◫)。 当（强）拉回存在时，任何弱拉回结构都可以替换为相容弱拉回结构。

证明。 考虑以下图，其中 S 是一个（强）拉回，而 W 具有弱拉回结构。



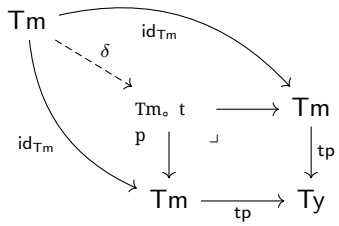
我们为 W 定义一个新的弱拉回结构 $l'_\bullet$。根据（强）拉回的泛性质，S 有唯一的弱拉回结构，记为 $s_\bullet$，且该结构相容。对于任意锥 V，通过将 S 的提升与 W 的提升复合，取 $l'_V \coloneqq s_V \fatsemi l_S\colon V \to W$。



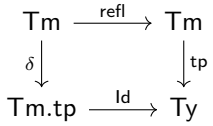
那么，由于 $s_\bullet$ 是相干的，$l'_\bullet$ 也是相干的。 □

定义 4.7 (恒等类型)。 在代数宇宙 $\mathsf{tp} : \mathsf{Tm} \to \mathsf{Ty}$ 上的代数恒等类型结构由以下内容组成

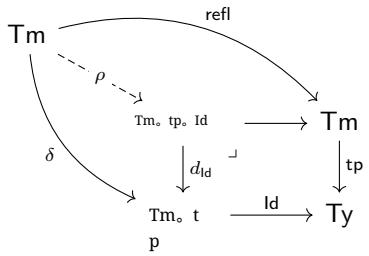
(1) 考虑由上下文扩张给出的如下拉回。



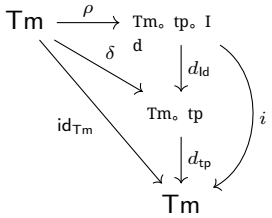
此处 Tm.tp 是上下文 $X:\mathsf{Ty}.\,x:\ X.\,y:\ X$。恒等类型的形成与自反性由一个交换方块来建模



（2）接着考虑 Id 的上下文扩展，以及代换 $\rho := \mathrm{id}_{\mathsf{Tm}}.\mathrm{id}_{\mathsf{Tm}}$.



这构成了一个三角形 $\rho \gg i = \mathrm{id}_{\mathsf{Tm}}$,



由此根据命题 3.9，可得一个自然变换 $v:\ P_i \to P_{\mathsf{id}_{\mathsf{Tm}}} \cong \mathsf{Tm} \times (-)$。其中$j$-规则，或 Id-消去，由要求以下自然性方形具有弱拉回结构来刻画。

$$\begin{array}{ccccc} P_i\mathsf{Tm} & \xrightarrow{v_{\mathsf{Tm}}} & P_{\mathsf{id}_{\mathsf{Tm}}}\mathsf{Tm} & \cong & \mathsf{Tm}\times\mathsf{Tm} \\ {\scriptstyle P_i\mathsf{tp}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P_{\mathsf{id}_{\mathsf{Tm}}}\mathsf{tp}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{Tm}\times\mathsf{tp}} \\ P_i\mathsf{Ty} & \xrightarrow[v_{\mathsf{Ty}}]{} & P_{\mathsf{id}_{\mathsf{Tm}}}\mathsf{Ty} & \cong & \mathsf{Tm}\times\mathsf{Ty} \end{array}$$

（3）弱拉回结构是相容的。

最后这个条件在某种程度上是辅助性的，因为只要存在（强）拉回，任何弱拉回结构都可以根据引理 4.6修正为相容的弱拉回结构。事实上，$\mathsf{Tm} \times_{\mathsf{tp}}$ 是 tp 的一个拉回，而后者具有所有选定的（强）拉回。

与 [Awo25], 不同，我们的恒等类型采用 Paulin-Mohring 风格定义，如 [NHC+26]，原因有二。首先（而且相当显然），i 是一个比 $i \gg \mathsf{tp}$更小的表达式，因此上下文扩张的计算也更简单。其次，我们采用具有多项式签名 $\mathsf{id}_{\mathsf{Tm}}$的多项式函子很方便，它生成乘积函子 $\mathsf{Tm} \times (-)$。

5. 初等语义与代数语义之间的转换

本文所呈现工作的主要贡献，是在一个 π-clan 中定义代数模型，并表明 MLTT 的代数语义不必假设局部笛卡尔闭结构。本节给出的翻译确保了我们定义的正确性。该证明源于这一观察：任何对类型和项的解释（来自初等模型、自然模型或上下文范畴）都会自动产生一个拉回稳定映射类 R。具体而言，对于一个宇宙 $\mathsf{tp} : \mathsf{Tm} \to \mathsf{Ty}$，可以将 R 取为 tp 的拉回所构成的映射类。也就是说，所有由该宇宙分类的类型族。我们有如下关于 tp 的条件与关于 R 的条件之间的对应关系。

(10)

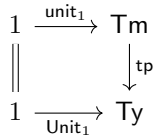
tp 的性质	R 的性质
代换	在拉回下稳定
单位类型	包含所有同构
Σ-类型	在复合下封闭
Π-类型	在推前下封闭

因此，一个 π-预氏族[7] $(\mathcal{C},\ \mathcal{R})$ 自然地由一个宇宙 tp 以及具有初等 单位类型、 Σ和Π类型的宇宙自然产生。此外，宇宙 tp 是一个 $\mathcal{R}$映射。

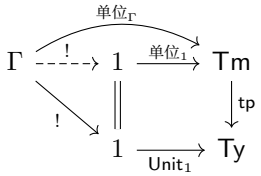
5.1. **从一个初等模型构造代数模型**。 为保持一般性，我们将相对于一个代数宇宙来表述命题 5.1、命题 5.3、命题5.2和命题 5.4 ，即相对于一个固定的 π-clan 来表述。将宇宙转换为代数模型所需的更精细条件，见推论5.7。

命题 5.1. 若tp 是一个代数宇宙，则tp 上的初等单位类型会导出tp上的代数单位类型。

证明。B 通过取上下文 1 上的初等单位类型，我们构造一个交换方块



这是一个拉回，因为该图的锥必定具有如下形式



□

命题 5.2 (□)。 如果 tp 是一个代数宇宙，初等 Π-类型在 tp 上可导出代数 Π-类型在 tp 上。

证明。要定义映射 $\Pi' : P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Ty} \to \mathsf{Ty}$，只需利用 Yoneda 嵌入并定义自然变换 $y(\Pi') : y(P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Ty}) \to y(\mathsf{Ty})$。假设有映射 $\alpha : \Gamma \to P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Ty}$。由命题 3.6，这可视为由映射 $A : \Gamma \to \mathsf{Ty}$ 与 $B : \Gamma.A \to \mathsf{Ty}$ 组成的 pair。我们将 α 记为 (A, B)。利用 tp 上的初等 Π-类型，我们将 $y(\Pi')$ 在 Γ 上的分量定义为

$$\begin{aligned} y(\Pi')_\Gamma : \mathcal{C}(\Gamma, P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Ty}) &\to \mathcal{C}(\Gamma, \mathsf{Ty}) \\ (A, B) &\mapsto \Pi_A B \end{aligned}$$

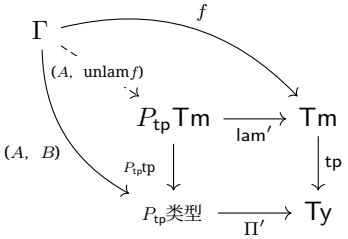
$y(\Pi')$ 的自然性随后由 $\Pi_A B$ 在代换下的稳定性得出。

我们可以用完全相同的方式定义 $\mathsf{lam}' : P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm}$。要证明 $\mathsf{lam}' \fatsemi \mathsf{tp} = P_{\mathsf{tp}}\mathsf{tp} \fatsemi \Pi'$，只需证明应用 Yoneda 嵌入 $y(\mathsf{lam}') \fatsemi y(\mathsf{tp}) = y(P_{\mathsf{tp}}\mathsf{tp}) \fatsemi y(\Pi')$ 后同样成立。事实上，设 $(A,\ b) : \Gamma \to \mathsf{Tm}$，我们已将其分解为一对 $A : \Gamma \to \mathsf{Ty}$ 和 $b : \Gamma.A \to \mathsf{Tm}$，并将后者的类型记为 $B := b \fatsemi \mathsf{tp}$。

[7]参见定义 3.3。

$$
\begin{aligned}
& y(\mathsf{lam}' \gg \mathsf{tp})_\Gamma(A, b) \\
=\ & y(\mathsf{tp})_\Gamma(y(\mathsf{lam}')_\Gamma(A, b)) \\
=\ & y(\mathsf{tp})_\Gamma(\mathsf{lam}\, b) \\
=\ & \mathsf{lam}\, b \gg \mathsf{tp} \\
=\ & \Pi_A B \\
=\ & y(\Pi')_\Gamma(A, B) \\
=\ & y(\Pi')_\Gamma(y(P_{\mathsf{tp}}\mathsf{tp})_\Gamma(A, b)) \\
=\ & y(P_{\mathsf{tp}}\mathsf{tp} \gg \Pi')_\Gamma(A, b)
\end{aligned}
$$

要证明该方形是一个拉回，设 $(A,\ B) : \Gamma \to P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Ty}$ 和 $f : \Gamma \to \mathsf{Tm}$ 构成该图的一个锥，那么 $(A,\ \mathrm{unlam} f) : \Gamma \to P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Tm}$ 就是到拉回中的唯一提升。

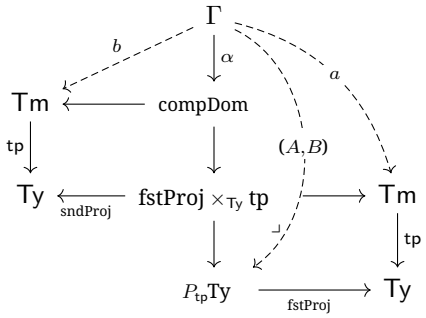


这是因为根据 β-规则和 η-规则，$\mathrm{unlam}\ f$ 是唯一的映射 $b : \Gamma.A \to \mathsf{Tm}$，使得 $\mathsf{lam}\ b = f$。 □

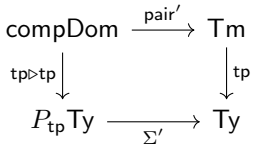
命题 5.3 (田)。 若 tp 是代数宇宙，则初等 Σ-类型在 tp 上产生代数 Σ-类型在 tp上。

证明。 我们可以像 $\Sigma' : P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Ty} \to \mathsf{Ty}$ 在命题 Π' 中的定义方式一样来定义5.2。

要定义映射 $\mathsf{pair}' : \mathsf{compDom} \to \mathsf{Tm}$，只需使用 Yoneda 嵌入并定义自然变换 $y(\mathsf{pair}') : y(\mathsf{compDom}) \to y(\mathsf{Tm})$。假设我们有一个映射 $\alpha : \Gamma \to \mathsf{compDom}$。根据命题 3.6，我们可以将 α 分解为以下映射



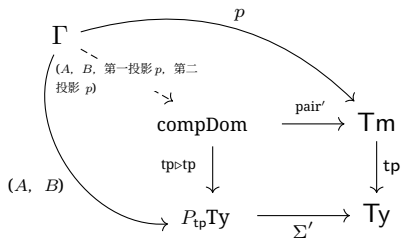
我们有 $a \gg \mathsf{tp} = A$ 以及 $b \gg \mathsf{tp} = \mathrm{id}_\Gamma.a \gg B$。然后我们定义 $y(\mathsf{pair}')_\Gamma : \alpha \mapsto \mathsf{pair}(a, b)$。$y(\mathsf{pair}')$ 的自然性由 pair 在代换下的稳定性得出。



为了证明该方形可交换，我们验证对于 $\alpha = (A, B, a, b) : \Gamma \to \mathsf{compDom}$

$$\begin{aligned}
& y(\mathsf{pair}' \gg \mathsf{tp})_\Gamma(A, B, a, b) \\
&= y(\mathsf{tp})_\Gamma(y(\mathsf{pair}')_\Gamma(A, B, a, b)) \\
&= y(\mathsf{tp})_\Gamma(\mathsf{pair}(a, b)) \\
&= \mathsf{pair}(a, b) \gg \mathsf{tp} \\
&= \Sigma_A B \\
&= y(\Sigma')_\Gamma(A, B) \\
&= y(\Sigma')_\Gamma(y(\mathsf{tp} \triangleright \mathsf{tp})_\Gamma(A, B, a, b)) \\
&= y(\mathsf{tp} \triangleright \mathsf{tp} \gg \Sigma')_\Gamma(A, B, a, b)
\end{aligned}$$

要证明该方形是一个拉回，假设 $(A,\ B) : \Gamma \to P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Ty}$ 和 $p : \Gamma \to \mathsf{Tm}$ 构成一个锥，则 $(A,\ B,$ 第一投影 $p,$ 第二投影 $p) : \Gamma \to P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Tm}$ 是到该拉回的唯一提升。



若 $(A,\ B,\ a,\ b) : \Gamma \to \mathsf{compDom}$，则 $(A,\ B,\ a,\ b) \gg \mathsf{lam}' = p$ 当且仅当 $\mathsf{pair}(a,\ b) = p$，当且仅当$a =$第一投影 p 且 $b =$第二投影p，由 β 和 η 规则得出。□

命题 5.4。 若 tp 是代数宇宙，则 tp 上的初等Id-类型会产生 tp上的代数Id-类型。以此方式构造的弱拉回结构会自动具有相干性，只要初等消去 j在代换下稳定。

证明。 (1) 要定义映射 $\mathsf{Id}' : \mathsf{Tm.tp} \to \mathsf{Ty}$，只需使用 Yoneda 嵌入并定义一个自然变换 $y(\mathsf{Id}') : y(\mathsf{Tm.tp}) \to y(\mathsf{Ty})$。假设我们有一个映射 $\alpha : \Gamma \to \mathsf{Tm.tp}$。它可以视为一对映射 $a_0,\ a_1 : \Gamma \to \mathsf{Tm}$，使得 $a_0 \gg \mathsf{tp} = a_1 \gg \mathsf{tp}$。我们用 $A := a_0 \gg \mathsf{tp}$ 表示这个复合。利用 tp 上的初等 Id-类型，我们定义$y(\mathsf{Id}')_\Gamma : \alpha \mapsto \mathsf{Id}_A(a_0,\ a_1)$。 $y(\mathsf{Id}')$ 的自然性随即由 $\mathsf{Id}_A(a_0,\ a_1)$ 在代换下的稳定性得出。

接下来，我们以相同的方式定义 $\mathsf{refl}' : \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm}$，即构造一个自然变换$y(\mathsf{refl}') : y(\mathsf{Tm}) \to y(\mathsf{Tm})$。假设我们有一个映射 $a : \Gamma \to \mathsf{Tm}$。利用 tp 上的非结构化恒等类型，我们定义 $y(\mathsf{refl}')_\Gamma : a \mapsto \mathsf{refl}\, a$。然后， $y(\mathsf{refl}')$ 的自然性由 $\mathsf{refl}a$ 在代换下的稳定性推出。

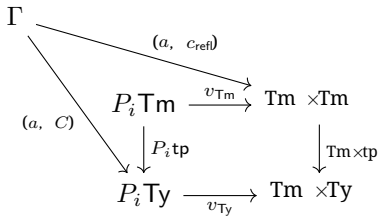
要证明 $\mathsf{refl}' \gg \mathsf{tp} = \delta \gg \mathsf{Id}'$，只需证明经 Yoneda 嵌入后该结论成立

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{Tm} & \xrightarrow{\mathsf{refl}'} & \mathsf{Tm} \\
{\scriptstyle\delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathsf{tp}} \\
\mathsf{Tm.tp} & \xrightarrow{\mathsf{Id}'} & \mathsf{Ty}
\end{array}
\quad\rightsquigarrow\quad
\begin{array}{ccc}
y(\mathsf{Tm}) & \xrightarrow{y(\mathsf{refl}')} & y(\mathsf{Tm}) \\
{\scriptstyle y(\delta)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y(\mathsf{tp})} \\
y(\mathsf{Tm.tp}) & \xrightarrow{y(\mathsf{Id}')} & y(\mathsf{Ty})
\end{array}$$

事实上，假设 $a : \Gamma \to \mathsf{Tm}$。记 $A := a \gg \mathsf{tp}$。那么

$$y(\mathsf{tp})_\Gamma(\ y(\text{自反}')_\Gamma(a)) = y(\mathsf{tp})_\Gamma(\text{自反}\ a) = \text{自反}\, a \gg \mathsf{tp} = \mathsf{Id}_A(a,\ a) = y(\mathsf{Id}')_\Gamma(a \gg \delta) = y(\mathsf{Id}')_\Gamma(y(\delta)_\Gamma(a))$$

(2) 假设我们有一个锥



根据多项式函子的泛性质，命题 3.6 以及命题 3.9中的计算，我们可以将 (a, c_{refl}) 和 (a, C) 分解为三个映射 $a : \Gamma \to \mathsf{Tm}$ 和 $c_{\mathsf{refl}} : \Gamma \to \mathsf{Tm}$ 以及 $C : a \times_{\mathsf{Tm}} i \to \mathsf{Ty}$ 使得

$$c_{\mathsf{refl}} \fatsemi \mathsf{tp} = (a \times_{\mathsf{Tm}} \rho) \fatsemi C$$

我们希望构造一个（相容的）提升 $(a, c) : \Gamma \to P_i\mathsf{Tm}$，同样根据命题 3.6和命题 3.9 ，我们可以通过组合两个映射 $a : \Gamma \to \mathsf{Tm}$ 和 $c : a \times_{\mathsf{Tm}} i \to \mathsf{Tm}$来完成，它们满足

$$c \fatsemi \mathsf{tp} = C \quad \text{and} \quad a \times_{\mathsf{Tm}} \rho \fatsemi c = c_{\mathsf{refl}}$$

让我们用上下文扩展替换拉回的记号，从而重新表述该问题。拉回 $a \times_{\mathsf{Tm}} i$ 是 $\Gamma.(x : A).\mathrm{Id}_A(a, x)$，而 $a \times_{\mathsf{Tm}} \rho$ 是下图中的代换 ρ_a

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma & \xrightarrow{\ a\ } & \mathsf{Tm} \\
{\scriptstyle \rho_a}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\
\Gamma.(x : A).\mathsf{Id}_A(a, x) & \longrightarrow & \mathsf{Tm.tp.Id} \\
{\scriptstyle d_{\mathsf{Id}_A(a,x)}}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle d_{\mathsf{Id}}} \\
\Gamma.(x : A) & \longrightarrow & \mathsf{Tm.tp} \\
{\scriptstyle d_A}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle d_{\mathsf{tp}}} \\
\Gamma & \xrightarrow[\ a\ ]{} & \mathsf{Tm}
\end{array}$$

因此 $C : \Gamma.(x : A).\mathrm{Id}_A(a, x) \to \mathsf{Ty}$ 是一个动机，并且

$$c_{\mathsf{refl}} \fatsemi \mathsf{tp} = \rho_a \fatsemi C$$

初等 Id 消去给出一个项 $j(C, c_{\mathsf{refl}}) : \Gamma.(x : A).\mathrm{Id}_A(a, x) \to \mathsf{Tm}$，满足$j \fatsemi \mathsf{tp} = C$以及 $\rho_a \fatsemi j(C, c_{\mathsf{refl}}) = c_{\mathsf{refl}}$。因此，我们只需取 $c := j(C, c_{\mathsf{refl}})$ 即可得出结论。

若 j 在代换下稳定，则提升会自动相干。通常情况下，若它不相干，我们可以利用引理 4.6 中的（强）拉回将其替换为相干提升。

□

到目前为止，我们只将宇宙上的基本类型构造子转换成了代数类型构造子。下述定理给出了将基本宇宙转换为代数宇宙的充分条件。

定义 5.5。设 $t : Y \to X$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射。我们将 f 的所有拉回构成的类称为

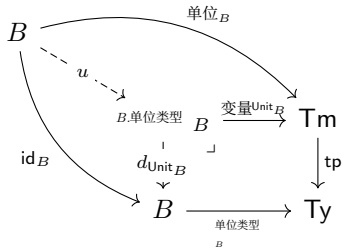
$$\mathcal{R}_t := \{\, f : E \to B \mid \text{there exists } \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle t} \\ B & \longrightarrow & X \end{array} \,\}$$

由 f 生成的主类。在适当情况下，我们会将“类”一词替换为“预氏族”（或“氏族”等）。

定理 5.6。设 $\mathsf{tp} : \mathsf{Tm} \to \mathsf{Ty}$ 是一个具有初等单位类型-、Σ-以及 Π-类型的宇宙。由 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$（定义 5.5）生成的主类 π-预氏族 $(\mathcal{C}, \mathcal{R}_{\mathsf{tp}})$。由于 tp 沿恒等态射 $\mathsf{id} : \mathsf{Ty} \to \mathsf{Ty}$ 的自身拉回，tp属于 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$。

证明。tp 的每个拉回 $f:\ E \to B$ 都同构于一个上下文扩张 $d_A:\ \Gamma.A \to \Gamma$，其中$\Gamma :=B$，且 $A:\ \Gamma \to \mathsf{Ty}$ 是拉回方块 $B \to \mathsf{Ty}$ 中给定的映射。因此，在不失一般性的情况下，凡方便之处，我们都假设此类映射是上下文扩张。

(1) 映射 tp 有选定拉回。因此，根据拉回粘贴，所有 $\mathcal{R}$-映射沿所有态射的拉回都存在，且为 $\mathcal{R}$-映射。(2) 设 $f:\ E \to B$ 是一个同构。则基本类型构造子 $\mathsf{Unit}_B:\ B \to \mathsf{Ty}$ 将 f分类。为证明这一点，只需证明 $d_{\mathsf{Unit}_B}:\ B.\mathsf{Unit}_B \to B$ 是一个同构，其逆为代换 $u := \mathsf{id}_B.\mathsf{unit}_B:\ B \to B.\mathsf{Unit}_B$。



这立即满足 $u \gg d_{\mathsf{Unit}_B} = \mathsf{id}_B$。反过来，根据到拉回的映射的唯一性，要证明 $d_{\mathsf{Unit}_B} \gg u = \mathsf{id}_{B.\mathsf{Unit}_B}$，只需注意到

$$d_{\mathsf{Unit}_B} \gg u \gg d_{\mathsf{Unit}_B} = d_{\mathsf{Unit}_B} \gg \mathsf{id}_B = \mathsf{id}_{B.\mathsf{Unit}_B} \gg d_{\mathsf{Unit}_B}$$

and

$$d_{\mathsf{Unit}_B} \gg u \gg \mathsf{var}_{\mathsf{Unit}_B} = \mathsf{id}_{B.\mathsf{Unit}_B} \gg \mathsf{var}_{\mathsf{Unit}_B}$$

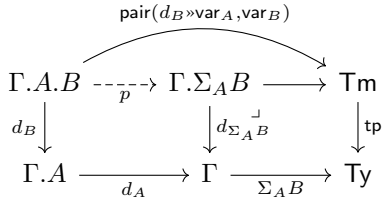
第二个方程成立，因为两边都是单位类型 $\mathsf{Unit}_{B.\mathsf{Unit}_B}$的唯一项。

$$d_{\mathsf{Unit}_B} \gg u \gg \mathsf{var}_{\mathsf{Unit}_B} \gg \mathsf{tp} = d_{\mathsf{Unit}_B} \gg \mathsf{unit}_B \gg \mathsf{tp} = d_{\mathsf{Unit}_B} \gg \mathsf{Unit}_{B.\mathsf{Unit}_B} = \mathsf{Unit}_{B.\mathsf{Unit}_B}$$

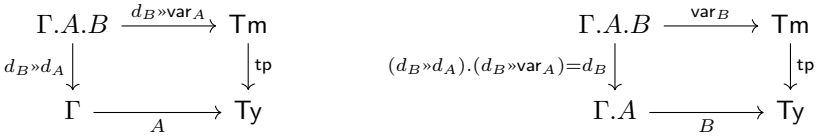
and

$$\mathsf{id}_{B.\mathsf{Unit}_B} \gg \mathsf{var}_{\mathsf{Unit}_B} \gg \mathsf{tp} = \mathsf{var}_{\mathsf{Unit}_B} \gg \mathsf{tp} = d_{\mathsf{Unit}_B} \gg \mathsf{Unit}_{B.\mathsf{Unit}_B} = \mathsf{Unit}_{B.\mathsf{Unit}_B}$$

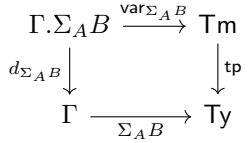
(3) 假设 $d_B:\ \Gamma.A.B \to \Gamma.A$ 和 $d_A:\ \Gamma.A \to \Gamma$ 是两个可复合的上下文扩张。我们要证明 $d_B \gg d_A$ 也属于 $\mathcal{R}$。只需证明它由映射 $\Sigma_A B{:}\Gamma \to \mathsf{Ty}$ 分类，也就是说，构造一个同构 $p:\ \Gamma.A.B \to \Gamma.\Sigma_A B$，使得 $p \gg d_{\Sigma_A B} = d_B \gg d_A$。考虑由下式给出的映射 p



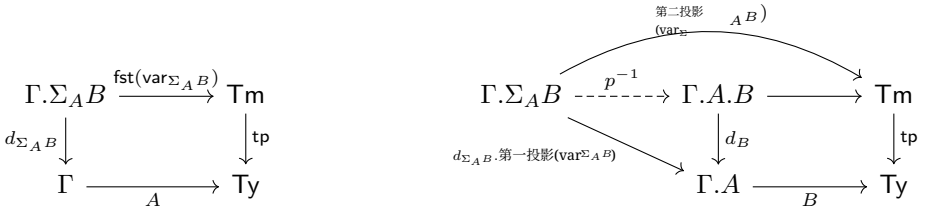
利用引理 2.11，要验证外层方形的交换性，只需验证两个更简单的方形交换:



接下来，我们对 p 的逆元的候选由以下给出。根据引理2.11，该方形



产生两个方形



根据拉回的泛性质，要证明 $p \gg p^{-1} = \mathsf{id}_{\Gamma.A.B}$，只需验证以下三个方程

$$
\begin{aligned}
& p \gg p^{-1} \gg d_B \gg d_A \\
=\ & p \gg (d.\mathsf{fst}(\mathsf{var})) \gg d_A \\
=\ & p \gg d \\
=\ & d_B \gg d_A
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
& p \gg p^{-1} \gg d_B \gg \mathsf{var}_A \\
=\ & p \gg (d.\mathsf{fst}(\mathsf{var})) \gg var_A \\
=\ & p \gg \mathsf{fst}(\mathsf{var}) \\
=\ & \mathsf{fst}(p \gg \mathsf{var}) \\
=\ & \mathsf{fst}(\mathsf{pair}(d_B \gg \mathsf{var}_A, \mathsf{var}_B)) \\
=\ & d_B \gg \mathsf{var}_A
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
& p \gg p^{-1} \gg \mathsf{var}_B \\
=\ & p \gg \mathsf{snd}(\mathsf{var}) \\
=\ & \mathsf{snd}(p \gg \mathsf{var}) \\
=\ & \mathsf{snd}(\mathsf{pair}(d_B \gg \mathsf{var}_A, \mathsf{var}_B)) \\
=\ & \mathsf{var}_B
\end{aligned}
$$

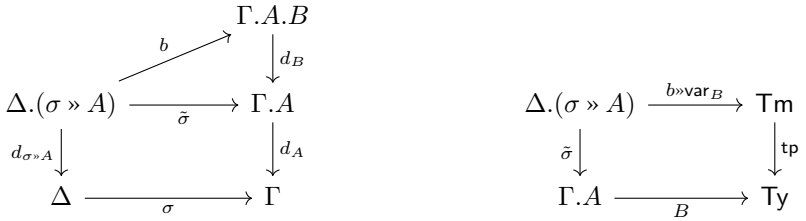
类似地，要证明 $p^{-1} \gg p = \mathsf{id}_{\Gamma.\Sigma_A B}$，只需验证以下两个方程 s

$$
\begin{aligned}
& p^{-1} \gg p \gg d_{\Sigma_A B} \\
=\ & p^{-1} \gg d_B \gg d_A \\
=\ & (d_{\Sigma_A B}.\mathsf{fst}(\mathsf{var})) \gg d_A \\
=\ & d_{\Sigma_A B}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
& p^{-1} \gg p \gg \mathsf{var}_{\Sigma_A B} \\
=\ & p^{-1} \gg \mathsf{pair}(d_B \gg \mathsf{var}_A, \mathsf{var}_B) \\
=\ & \mathsf{pair}(p^{-1} \gg d_B \gg \mathsf{var}_A, p^{-1} \gg \mathsf{var}_B) \\
=\ & \mathsf{pair}((d.\mathsf{fst}(\mathsf{var}_{\Sigma_A B})) \gg \mathsf{var}_A, \mathsf{snd}(\mathsf{var}_{\Sigma_A B})) \\
=\ & \mathsf{pair}(\mathsf{fst}(\mathsf{var}_{\Sigma_A B}), \mathsf{snd}(\mathsf{var}_{\Sigma_A B})) \\
=\ & \mathsf{var}_{\Sigma_A B}
\end{aligned}
$$

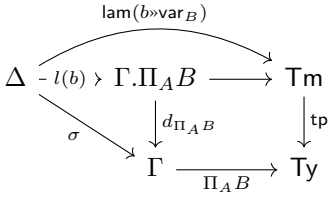
(4) 再次考虑两个可复合的上下文扩张 $d_B \colon \Gamma.A.B \to \Gamma.A$ 和 $d_A \colon \Gamma.A \to \Gamma$。只需证明 $d_{\Pi_A B} \colon \Gamma.\Pi_A B \to \Gamma$ 是一个推前 $d_{A*} d_B$，也就是说，对于任意 $\sigma \colon \Delta \to \Gamma$，存在一个自然双射

$$l : \mathcal{C}/\Gamma.A\,(d_A^* \sigma, d_B) \cong \mathcal{C}/\Gamma\,(\sigma, d_{\Pi_A B})$$

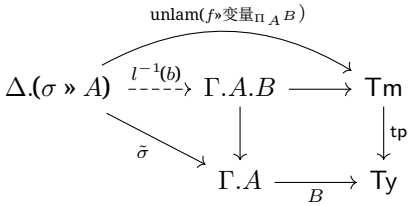
与之前一样，记作 $\tilde{\sigma} := d_A^* \sigma$。假设 $b \colon \tilde{\sigma} \to d_B$ in $\mathcal{C}/\Gamma.A$。



根据引理2.8，这将得到一个属于替换后的 Π-类型的项，从而得到所需的映射 $l(b) \colon \sigma \to d_{\Pi_A B}$ 属于 $\mathcal{C}/\Gamma$。



反过来，给定 $f\colon \sigma \to d_{\Pi_A B}$，我们同样可以得到



由拉回的泛性质和引理 2.8 可知，l 和 l^{-1} 互为逆。

此外，l 关于 $\sigma \in \mathcal{C}/\Gamma$ 是自然的：对于任意 $\tau\colon \Xi \to \Delta$，我们有 $l(\tilde{\tau} \gg b) = \tau \gg l(b)$。我们利用拉回的泛性质验证这一点

$$l(\tilde{\tau} \gg b) \gg d_{\Pi_A B} = \tau \gg \sigma = \tau \gg l(b) \gg d_{\Pi_A B}$$

and

$$l(\tilde{\tau} \gg b) \gg \mathsf{var}_{\Pi_A B} = \mathsf{lam}(\tilde{\tau} \gg b \gg \mathsf{var}_B) = \tau \gg \mathsf{lam}(b \gg \mathsf{var}_B) = \tau \gg l(b) \gg \mathsf{var}_{\Pi_A B}$$

□

每个类型构造子都分别对应于 π-预团的一个公理（参见方程（10）），我们本可以更一般地陈述此定理，以强调这些对应关系。这个 π-预团之所以不是一个完整的 π-clan，归结于一个 Type : Type 问题，我们希望规避这一问题；如果 $\mathsf{Ty} \to 1$ 是 tp的拉回，就会出现这个问题。下面的定理通过要求存在无限层级的宇宙来解决这一问题。

推论 5.7. 假设 $\mathcal{C}$ 有终对象，并且我们有一列以自然数为指标的（非代数）宇宙提升

$$\mathsf{tp}_0 \xrightarrow{l_0^1} \mathsf{tp}_1 \xrightarrow{l_1^2} \mathsf{tp}_2 \longrightarrow \cdots$$

此外，假设每个 tp_n 都具有初等 单位类型-、 Σ-和 Π-类型。我们用 $(\mathcal{C}, \mathcal{R}_n)$ 表示由 π-预团生成的主tp_n（使用定理 5.6）。那么它们的并集

$$\mathcal{R} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n$$

在限制到 $\mathcal{R}$-对象的子范畴时，构成一个 π-*clan* $(\mathcal{R}(1)\ \mathcal{R})$。每个宇宙 tp_n 都是 $(\mathcal{R}(1)\ \mathcal{R})$-代数的。此外，每个代数宇宙 tp_n 都具有代数的 单位类型-、 Σ-和 Π-类型。

证明。 由于宇宙提升 l_n^{n+1}为提升类型和项提供拉回方块，

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Tm}_n & \longrightarrow & \mathsf{Tm}_{n+1} \\ {\scriptstyle \mathsf{tp}_n}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{tp}_{n+1}} \\ \mathsf{Ty}_n & \longrightarrow & \mathsf{Ty}_{n+1} \end{array}$$

我们得到这些预团是嵌套的

$$\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{R}$$

一般而言，将范围限制在 $\mathcal{R}$-对象的子范畴上，会把一个预氏族 $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$ 转化为一个族 $(\mathcal{R}(1)\ \mathcal{R})$。我们来验证 $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$ 是一个 π-预氏族：

(1) $\mathcal{R}$-映射的拉回存在，且属于 $\mathcal{R}$，因为这对每个 $\mathcal{R}_n$都成立。(2) 所有同构都属于 $\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}$。

(3) 如果 $g\colon Z \to Y$ 和 $f\colon Y \to X$ 属于 $\mathcal{R}$，那么就存在两个自然数，使得 $g \in \mathcal{R}_n$和 $f \in \mathcal{R}_m$，因此 g 和 f 都属于 $\mathcal{R}_{\max(m,n)}$。 最后，我们注意到 $\mathcal{R}_{\max(m,n)} \subseteq \mathcal{R}$ 在复合下封闭。(4) 与(3)类似。

我们通过应用命题5.1、命题5.3 和命题5.2来完成证明。请注意，代数 Σ 和 Π-类型的理论需要将多项式函子应用于tp_n : $\mathsf{Tm}_n \to \mathsf{Ty}_n$，因此，为了应用命题$\mathsf{Tm}_n$ 和Ty_n ，必须检查它们是 $\mathcal{R}$-对象。5.3 和命题5.2。事实上，宇宙提升 l_n^{n+1}为Ty_n提供了一个分类器。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Ty}_n & \xrightarrow{\mathsf{asTm}} & \mathsf{Tm}_{n+1} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{tp}_{n+1}} \\ 1 & \xrightarrow[U_n]{} & \mathsf{Ty}_{n+1} \end{array}$$

因此，Ty_n 是一个 $\mathcal{R}_{n+1}$-对象。由于tp_n 是一个 $\mathcal{R}_{n+1}$-映射，且 $\mathcal{R}_{n+1}$ 对复合封闭，我们也有Tm_n 是一个 $\mathcal{R}_{n+1}$-对象。命题5.4中的这些条件也可以类似地验证。□

5.2. **由代数模型构造初等模型**。由于下列定理的证明与上一节中相应的逆向结果非常相似，我们仅给出证明概要。

命题 5.8。如果tp 是一个代数宇宙，那么tp上的代数单位类型会导出tp 上的初等单位类型。

证明。我们可以将代数单位类型与到终对象的唯一映射进行预复合，从而定义初等单位类型。□

命题 5.9(◫)。如果tp 是一个代数宇宙，那么 Σ-类型在tp上会导出初等 Σ-类型在tp上。

证明。 对于一对 $A : \Gamma \to \mathsf{Ty}$ 和 $B : \Gamma.A \to \mathsf{Ty}$，我们可以将 $(A, B) : \Gamma \to P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Ty}$ 与代数 Σ-类型 $P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Ty} \to \mathsf{Ty}$ 复合，从而定义初等 Σ-类型。□

命题 5.10 (◫)。 如果 tp 是一个代数宇宙，那么 tp 上的代数 Π-类型会导出 tp上的初等 Π-类型。

证明。 对于一对 $A : \Gamma \to \mathsf{Ty}$ 和 $B : \Gamma.A \to \mathsf{Ty}$，我们可以将 $(A, B) : \Gamma \to P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Ty}$ 与代数 Π-类型 $P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Ty} \to \mathsf{Ty}$ 复合，从而定义初等 Π-类型。□

命题 5.11。 如果 tp 是一个代数宇宙，那么 tp 上的代数Id-类型会导出tp上的初等 Id-类型。如果所提供的弱拉回结构是相容的，那么 j 在代换下稳定。

证明。 固定 $A : \Gamma \to \mathsf{Ty}$ 和 $a : \Gamma \to \mathsf{Tm}$，使得 $a \gg \mathsf{tp} = A$。

(1) 对于任意满足 $b \gg A = \mathsf{tp}$ 的 $b : \Gamma \to \mathsf{Tm}$，将 $\mathsf{Id}_A(a,\ b) : \Gamma \to \mathsf{Ty}$ 定义为以下复合：

$$\Gamma \xrightarrow{a.b} \mathsf{Tm.tp} \xrightarrow{\mathsf{Id}} \mathsf{Ty}_1$$

(2) $\mathsf{Id}_A(a,\ b)$ 在代换下的稳定性源于到拉回的映射的唯一性

$$\mathsf{Id}_{\sigma \gg A}(\sigma \gg a, \sigma \gg b) = ((\sigma \gg a).(\sigma \gg b)) \gg \mathsf{Id} = \sigma \gg (a.b) \gg \mathsf{Id}$$

(3) 自反路径构造子 refl_a 是以下复合

$$\Gamma \xrightarrow{a} \mathsf{Tm} \xrightarrow{\mathsf{refl}} \mathsf{Tm}$$

根据交换性，项 refl_a 的类型正确

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathsf{Tm} & \xrightarrow{\mathsf{refl}} & \mathsf{Tm} \\ & \overset{a}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{tp}} \\ \Gamma & \xrightarrow[a \times_{\mathsf{Tm}} a]{} & \mathsf{Tm} \times \mathsf{Tm} & \xrightarrow[\mathsf{Id}]{} & \mathsf{Ty} \end{array}$$

(4) 自反在代换下的稳定性显而易见。

(5) 假设 $C : \Gamma.(x : A)。\mathsf{Id}_A(a, x) \to \mathsf{Ty}$ 是一个动机，且 $c_{\mathsf{refl}} : \Gamma \to \mathsf{Tm}$ 满足

$$c_{\mathsf{refl}} \gg \mathsf{tp} = \rho_a \gg C$$

我们可以先将基本构件识别为其代数对应物的拉回。

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma & \xrightarrow{a} & \mathsf{Tm} \\
{\scriptstyle \rho_a}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\
\Gamma.(x : A).\mathsf{Id}(a, x) & \longrightarrow & \mathsf{Tm.tp.Id} \\
{\scriptstyle d_{\mathsf{Id}_A(a,x)}}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle d_{\mathsf{Id}}} \\
\Gamma.(x : A) & \longrightarrow & \mathsf{Tm.tp} \\
{\scriptstyle d_A}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle d_{\mathsf{tp}}} \\
\Gamma & \xrightarrow[a]{} & \mathsf{Tm}
\end{array}$$

根据命题 $P_i X$ 中的泛性质3.6，一对映射 $a : \Gamma \to \mathsf{Tm}$ 和 $\gamma : \Gamma.(x : A)。\mathsf{Id}_A(a, x) \to X$

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xleftarrow{\gamma} & \Gamma.(x : A).\mathsf{Id}(a, x) & \longrightarrow & \mathsf{Tm.tp.Id} \\
 & & {\scriptstyle d_{\mathsf{Id}_A(a,x)}}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle d_{\mathsf{Id}}} \\
 & & \Gamma.(x : A) & \longrightarrow & \mathsf{Tm.tp} \\
 & & {\scriptstyle d_A}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle d_{\mathsf{tp}}} \\
 & & \Gamma & \xrightarrow[a]{} & \mathsf{Tm}
\end{array} \qquad i$$

等价于一个态射$(a, \gamma) : \Gamma \to P_i X$。然后，利用命题 v 中自然变换 v 的计算3.9，我们为弱拉回图构造一个锥

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma & \xrightarrow{(a, c_{\mathsf{refl}})} & \mathsf{Tm} \times \mathsf{Tm} \\
{\scriptstyle (a,C)}\downarrow & \searrow^{(a, \rho_a \gg C)} & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{Tm} \times \mathsf{tp}} \\
P_i \mathsf{Ty} & \xrightarrow[v_{\mathsf{Ty}}]{} & \mathsf{Tm} \times \mathsf{Ty}
\end{array}$$

生成一个（相干的）提升（见定义4.7 第（3）部分）

$$(a, j) : \Gamma \to P_i \mathsf{Tm}$$

根据弱拉回性质。由命题3.9，我们得到

$$j : \Gamma.(x : A).\mathsf{Id}_A(a, x) \to \mathsf{Tm}$$

满足 $j \gg \mathsf{tp} = C$和 $\mathsf{id}_\Gamma.a.$自反 $a \gg j(C, c_{\mathsf{refl}}) = c_{\mathsf{refl}}$。

（6）如果弱拉回结构是一致的，那么 j 在代换下的稳定性就成立。同样，根据4.6引理，我们总能将弱拉回结构修正为一致的结构。

□

5.3. **从一个 π-clan 中提取代数类型构造子。** 在 [Awo18], 中给出了另一种类型的翻译，其中从一个 $\pi : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_0$ 由 π-clan（或 闭且稳定的映射类 在 [Awo18]中）构造出一个自然模型。该构造称为 严格化，它构造出从伪函子范畴到严格函子范畴的包含函子的左伴随。它将由一个 π-clan （$\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$）刻画的伪函子

$$\mathcal{R}(-) : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Cat}$$

化为一个等价的（严格）函子 $\mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Cat}$。在 [Awo18的命题 28], 中，证明了所构造的自然模型具有 Σ型和 Π型。进一步假设 π-clan 是一个“π-tribe”[Joy17] （或称为 [Awo18]中的“可分解”）后，证明所构造的自然模型还具有Id类型[Awo18的命题 30]。为确保类型构造子在代换下的稳定性，这两个证明都依赖于 π-clan 的完整结构，包括推前。

类似的构造也用于 [KL21的定理 2.3.4。], 其中，通过将一个宇宙与该宇宙所分类的映射所满足的某些闭包条件相结合，构造了单纯集合中 MLTT 的一个严格模型。

为了找到 [Awo18的命题 28] 以及 [KL21的定理 2.3.4] 在我们的设定中的类似结果，我们寻找使宇宙具有代数类型构造子结构的充分预部落条件。这也可以看作定理5.6的逆命题。与 [Awo18的命题 28], 命题5.12不同，它不会附带“严格化”结果：我们假设宇宙tp 作为前提，而这已经给出了类型的严格解释。

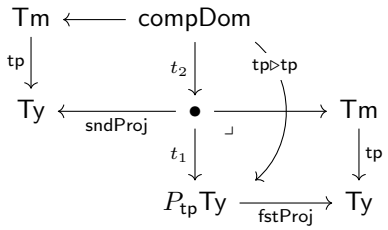
命题 5.12. 设$(\mathcal{C},\mathcal{R})$ 是一个 π-*clan*，且$\mathsf{tp} : \mathsf{Tm} \to \mathsf{Ty}$ 是一个$(\mathcal{C},\mathcal{R})$-代数宇宙（定义4.1）。我们用 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$ 表示由tp 生成的主类（定义5.5）。

- 如果 $\mathcal{C}$ 有终对象，且 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$ 包含所有同构，那么就存在[8] 一个定义在 tp 上的代数单位类型结构（作为一个$(\mathcal{C},\mathcal{R})$-代数宇宙）。
- 如果 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$ 在复合下封闭，那么就存在一个定义在 tp上的代数 Σ类型结构。
- 如果 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$ 在推前下封闭，那么就存在一个定义在 tp上的代数 Π类型结构。

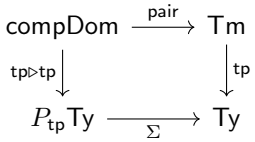
综合起来，如果 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$ 是一个 π-预氏族，那么 tp 就刻画单位类型、 Σ-类型和 Π-类型。

证明。 （单位类型。）单位类型的情形由 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$ 的定义，以及将假设应用于终对象上的恒等映射得出。

(Σ-类型。）假设 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$ 在复合下封闭。考虑定义多项式复合的图 $\mathsf{tp} \triangleright \mathsf{tp}$ (定义 3.7）。



根据主类的定义，拉回 t_1 与 t_2 属于 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$。因此它们的复合 $\mathsf{tp} \triangleright \mathsf{tp}$ 也属于 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$。于是存在两个映射 $\mathsf{pair} : \mathsf{compDom} \to \mathsf{Tm}$ 与 $\Sigma : P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Ty} \to \mathsf{Ty}$，构成一个拉回方块



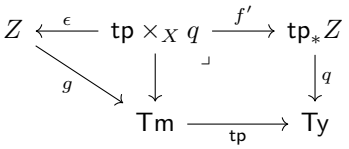
（Π-类型。）假设 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$ 在推前下封闭。与前一情形类似，只需证明多项式作用 $P_{\mathsf{tp}}\mathsf{tp} : P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Tm} \to P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Ty}$ 属于 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$。我们展开多项式函子的定义

$$P_{\mathsf{tp}}X = \mathsf{Ty}_!(\mathsf{tp}_*(\mathsf{Tm}^* X))$$

首先， $h := \mathsf{Tm}^*\mathsf{tp} : \mathsf{Tm}^*\mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm}^*\mathsf{Ty}$ 在 $\mathcal{R}(\mathsf{Tm})$ 中以一个 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$-映射作为其在 $\mathcal{C}$ 中的底映射，因为$\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$ 在拉回下稳定。由于

$$P_{\mathsf{tp}}\mathsf{tp} = \mathsf{Ty}_!(\mathsf{tp}_* h)$$

是 $\mathsf{tp}_* h$ 的底映射，因此只需证明一般而言，$\mathsf{tp}_* : \mathcal{R}(\mathsf{Tm}) \to \mathcal{R}(\mathsf{Ty})$ 保持 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$-映射（其对象属于 $\mathcal{R}(\mathsf{Tm})$）。令 $g : Z \to \mathsf{Tm}$ 为一个 $\mathcal{R}$-映射，并令 $h : W \to Z$ 为一个 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$-映射。记 $q := \mathsf{tp}_* g$。我们得到一个类似于引理 3.10 的图。



[8] 遗憾的是，在 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$ 的定义中具有拉回方块这一条件仅仅是命题性的；人们可以更构造性地重新表述该定理。

我们应用推论 3.11。首先， $h : W \to Z$ 是对象 W 和 Z 之间的一个 $\mathcal{R}$-映射，它们属于 $\mathcal{R}(Y)$，因为 $h \in \mathcal{R}_{\mathsf{tp}} \subseteq \mathcal{R}$ 并且 $\mathcal{R}$ 在复合下封闭。此外， $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$ 在拉回下稳定，因此在与同构进行前复合和后复合时也稳定。因此， $\mathsf{tp}_* h$ 是一个 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$-映射，当且仅当 $\mathcal{R}(\mathsf{tp}_* Z)$ 中的对象 $f'_*(\epsilon^* h)$ 在 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$ 中有一个底映射。事实上， $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$ 在拉回下稳定，因此 $\epsilon^* h$ 属于 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}(\mathsf{tp} \times_X q)$。拉回 f' 属于 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$，且 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$ 在推前下封闭，因此 $f'_*(\epsilon^* h)$ 属于 $\mathcal{R}(\mathsf{tp}_* Z)$。

□

例 5.13. 与当前的形式化构造相比，命题 5.12 在表述上更接近文献中出现的同伦类型论（HoTT）模型。例如，文献 [KL21，定理 2.3 中定义 HoTT 单纯形模型时就采用了这种方法。4], 而文献 [Awo23] 中的 HoTT 立方体模型也采用了这种方法。在这两种情况下，都会构造一个宇宙，该宇宙对某个特定映射类（具有小纤维的纤维化）进行分类，并证明该映射类在某些运算下封闭。

在命题 5.12 中，我们非常谨慎，不对 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$ 作过多假设。如果 $(\mathcal{C}, \mathcal{R}_{\mathsf{tp}})$ 是一个 clan，就会遇到 $\mathsf{Type} : \mathsf{Type}$ 问题。为了解决这个问题，同时又能表达多项式 $P_{\mathsf{tp}}\mathsf{Ty}$，我们假设存在一个更大的 π-clan $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$，且 $\mathcal{R}_{\mathsf{tp}} \subseteq \mathcal{R}$。

例 5.14。 我们将命题 5.12 应用于直觉主义类型论 [HS98]的群胚模型。这里 $\mathcal{C} = \mathsf{Grpd}$是大群胚范畴（固定一种大小概念），而 $\mathcal{R}$ 是Grpd中的分裂等纤维化类。我们取$\mathsf{tp} : \mathsf{Tm} \to \mathsf{Ty}$ 为小分裂等纤维化的分类器[9], , 也就是说，纤维为小的分裂等纤维化。仔细处理大小问题后，可以证明小分裂等纤维化类$\mathcal{R}_{\mathsf{tp}}$ 包含所有同构，在复合下封闭，并且在推前下封闭。

在 HoTTLean 项目 [HAC+25]中，直觉主义类型论的群胚模型 [HS98] 是通过定义分类小分裂等纤维化的宇宙来构造的，如上所述。然而，宇宙上的严格类型构造子是用初等语义来构造的。尽管宇宙很容易定义，但手动定义这些宇宙上的 Σ- 和 Π-类型结构会导致需要处理类型之间的大量等式，因此最好尽可能避免这种情况 [EBW+23]。命题 5.12提出了定义群胚模型的另一种方法，或许有助于解决这些问题。在未来的工作中，我们计划尝试这种不同的方法。

6. 结论

我们提出了一种在 π-族中定义 MLTT 语义的方法，称为代数语义，它推广了文献中的局部笛卡尔闭类比。该方法的关键步骤是在这一框架中引入多项式函子，因为它们是定义代数类型构造子的核心。一旦建立了 π-族中多项式函子的通用理论，我们方法的其余部分便与局部笛卡尔闭情形类似，详见 [Awo25]。

此外，我们通过证明该定义能够以预期的方式刻画类型构造子，验证了其正确性。具体而言，我们证明代数语义与严格 MLTT 语义的一种初等表述可以相互转换；这种表述称为初等语义。我们在 HoTTLean 中的应用体现了该方法的有效性。在这个库中，我们定义了初等语义和代数语义，并将二者之间的转换形式化，从而确保我们用于定义群胚模型的初等定义正确无误。

7. 相关工作

7.1. **多项式函子**。 Weber [Web15] 在具有拉回和可指数化映射的范畴这一一般环境中发展了多项式函子理论。Aberlé 和 Spivak [AS25] 研究了多项式函子理论及其在单值化环境中对直觉主义类型论类型构造子的建模应用，并在 Agda 中形式化了相关结果。我们的多项式函子库基于 Lean 库 Poly[Haz24], , 该库形式化了 Weber 所采用环境下的多项式函子。Uemura [Uem22] 将可指数化映射刻画为某个普适映射的模型，并用带有某些自然变换的自函子来刻画多项式自函子。

[9]具体而言，分类器可通过对以下包含关系应用格罗滕迪克构造来构造$\mathsf{Core}(\mathsf{grpd}) \to \mathsf{Grpd} \to \mathsf{Cat}$。此处 $\mathsf{Core}(\mathsf{grpd})$ 是小群胚范畴的核心。在 Cat中可以找到类似的构造，见 [Hes07]。

7.2. **族**。 我们在 π-族中发展多项式函子理论所依据的大部分理论由 Taylor [Tay87] 和 Joyal [Joy 17]提出。基于族的 MLTT 语义描述与我们的描述之间的关键区别，在于我们使用宇宙来确保严格相容性。近来，Frey[Fre25] 证明了一个关于族的 Gabriel–Ulmer 式对偶定理，从而完善了将族视为具有函子语义和理论-模型对偶性的内语言这一图景。

7.3. **MLTT 语义**。 MLTT 语义有多种呈现方式，包括显示映射范畴 [Tay87] （或族）、理解范畴 [Jac93], 带族范畴 [Dyb97],以及自然模型 [Awo18]。其中一些呈现方式在单值背景下进行了比较，见 [ALV18], ，但未考虑类型构造子。这些等价关系的形式化可在 UniMath 库中找到 [GAM+25]。我们的工作还借鉴了 Uemura 关于具有可表示映射的范畴的研究 [Uem23], ，该研究通过 Lawvere 的函子语义 [Law63]对自然模型进行了分析。

8. 未来工作

我们阐述了 π-族中多项式函子的基础理论，唯一目的在于构建类型论的代数语义。这一理论的完整图景具有普遍意义，值得进一步探索；第一作者将在其博士论文中对此进行详细论述。

虽然我们的工作已经是对局部笛卡尔闭范畴的推广，但它仍有进一步推广的潜力。借鉴 [Web 15], 的类似思路，其中多项式签名被视为有限极限范畴中的指数态射，我们或许可以不再将多项式签名视为 π-clan 中的任意态射，而将其视为一种“相对于预氏族可指数化”的态射。

Uemura [Uem22]使用广义代数理论的语言，在有限极限范畴中刻画了多项式函子和可指数化性。这或许可以用预氏族的术语重新表述。此外，我们希望按照 Lawvere 函子语义的风格，重新表述 Uemura 对自然模型的分析 [Uem23] ， [Law63], 并以我们的代数模型给出相应的表述。

参考文献

[AAGM03] Michael Abbott、Thorsten Altenkirch、Neil Ghani 和 Conor McBride。《容器的导数》。载于《第六届类型化 λ 演算与应用国际会议论文集》（TLCA'03），第 16–30 页，柏林、海德堡，2003 年。Springer-Verlag。[AH26] Steve Awodey 和 JOSEPH HUA。《代数类型论中的路径类型》，2026 年。[ALV18] Benedikt Ahrens、Peter LeFanu Lumsdaine 和 Vladimir Voevodsky。《单值基础中的类型论范畴结构》。Logical Methods in Computer Science，14，2018 年。[AS25] CB Aberlé 和 David I Spivak。《同伦类型论中的多项式宇宙》。Electronic Notes in Theoretical Informatics and Computer Science，5，2025 年。[Awo18] Steve Awodey。《同伦类型论的自然模型》。计算机科学中的数学结构，28(2)：241–286，2018 年。[Awo23] Steve Awodey。《笛卡尔立方模型范畴》。arXiv 预印本 arXiv:2305.00893，2023 年。[Awo25] Steve Awodey。《代数类型论，第一部分：Martin-Löf 代数》，2025 年。[BJ25] Terrence Bisson 和 André Joyal。《配边中的 Dyer–Lashof 代数（扩展摘要）》，2025 年。[Bru05] Morten Brun。《Witt 向量与 Tambara 函子》。Advances in Mathematics，193(2)：233–256，2005 年。[Bru07] Morten Brun。《Witt 向量与等变环谱在配边中的应用》。Proceedings of the London Mathematical Society，94(2)：351–385，2007 年。[CD11] Pierre Clairambault 和 Peter Dybjer。《局部笛卡尔闭范畴与 Martin-Löf 类型论的双等价》。载于《类型化 λ 演算与应用国际会议》，第 91–106 页。Springer，2011 年。[Coq13] Thierry Coquand。《类型论的预层模型》。未发表札记，2013 年。[Dyb97] Peter Dybjer。《在 Martin-Löf 类型论中用良序表示归纳定义的集合》。理论计算机科学，176(1)：329–335，1997 年。[EBW+23] Joey Eremondi、Kevin Buzzard、Eric Wieser、Jannis Limperg、Eric Rodriguez、Joe Hendrix、Alex Keizer、Trebor Huang 和 Junyan Xu。《Zulip 聊天档案：类型转换与 HEq》，2023 年。https://leanprover-community.github. io/archive/stream/270676-lean4/topic/Casting.20vs.20HEq.html [访问日期：2026-01-27]。[Fre25] Jonas Frey。《族的对偶：Gabriel–Ulmer 对偶的推广》。The Journal of Symbolic Logic，第 1–38 页，2025 年。[GAM+25] Daniel R. Grayson、Benedikt Ahrens、Ralph Matthes、Niels van der Weide、Anders Mörtberg、cathlelay、Langston Barrett、Peter LeFanu Lumsdaine、Marco Maggesi、Vladimir Voevodsky、Tomi Pannila、Gianluca Amato、Michael Lindgren、Mitchell Riley、Skantz、CalosciMatteo、Arnoud van der Leer、Tobias-Schmude、Daniel Frumin、Auke

Booij、Hichem Saghrouni、Dennis、varkor、Dimitris Tsementzis、niccoloveltri、Anthony Bordg、Dominik Kirst、Karl Palmskog、Satoshi Kura 和 Tamara von Glehn。《Unimath/unimath：v20250923》，2025年9月。[GK13] Nicola Gambino 和 Joachim Kock。《多项式函子与多项式单子》。剑桥哲学学会数学学报，154(1)：153–192，2013年。[GKNB20] Daniel Gratzer、G. A. Kavvos、Andreas Nuyts 和 Lars Birkedal。《多模态依赖类型论》。载于《第 35 届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑研讨会论文集》（ LICS '20 ），第 492–506 页，美国纽约州纽约，2020 年。计算机协会。[GS17] Nicola Gambino 和 Christian Sattler。《弗罗贝尼乌斯条件、右适当性与一致纤维化》。纯粹与应用代数学杂志，221(12)：3027–3068，2017年12月。[HAC+25] Joseph Hua、Steve Awodey、Mario Carneiro、Sina Hazratpour、Wojciech Nawrocki、Spencer Woolfson 和 YIMING XU。《HoTTLean：在 Lean 中形式化 HoTT 元理论》。TYPES 2025，2025 年。[Haz24] Sina Hazratpour。《Poly：多项式函子的 Lean4 形式化》，2024 年。[Hes07] Kathryn Hess。《范畴的丛理论》。https://ncatlab.org/nlab/files/HessLackBundCat.pdf，2007 年。[访问日期：25-01-2026]。[HFAM23] Kuen-Bang Hou (Favonia)、Carlo Angiuli 和 Reed Mullanix。《宇宙多态性的序理论分析》。ACM程序设计语言会议录，7(POPL)，2023 年 1 月。[HR24] Sina Hazratpour 和 Emily Riehl。《由泛点定义的纤维化的弗罗贝尼乌斯性质的 2-范畴证明》。计算机科学中的数学结构，34(4)：258–280，2024 年。[HS98] Martin Hofmann 和 Thomas Streicher。《类型论的群胚解释》。载于《建构性类型论二十五年（威尼斯，1995）》，牛津逻辑指南第 36 卷，第 83–111 页。牛津大学出版社，纽约，1998 年。[Jac93] Bart Jacobs。《理解范畴与类型依赖语义》。理论计算机科学，107(2)：169–207，1993 年。[Joy17] Andre Joyal。《关于氏族与部落的札记》，2017 年。[KL21] Krzysztof Kapulkin 和 Peter LeFanu Lumsdaine。《单值基础的单纯形模型（据 Voevodsky）》。欧洲数学学会杂志，23(6)：2071–2126，2021 年。[Law63] F William Lawvere。《代数理论的函子语义：以及函子语义背景下的一些代数问题》。蒙特艾利森大学，1963 年。[MP00] Ieke Moerdijk 和 Erik Palmgren。《范畴中的良基树》。纯粹与应用逻辑年刊，104(1)：189–218，2000 年。[NHC+26] Wojciech Nawrocki、Joseph Hua、Mario Carneiro、YIMING XU、Spencer Woolfson、Shuge Rong、Sina Hazratpour 和 Steve Awodey。《用于综合数学的认证型 Lean 证明助手》。载于《第 15 届 ACM SIGPLAN认证程序与证明国际会议论文集》（CPP '26），第 88–103 页，美国纽约州纽约，2026 年。计算机协会。[NS24] Nelson Niu 和 David I. Spivak。《多项式函子：交互的数学理论》，2024 年。[Tam93] Daisuke Tambara。《关于乘法转移》。代数通讯，21(4)：1393–1420，1993 年。[Tay87] Paul Taylor。《递归域、指标范畴论与多态性》。博士论文，剑桥大学，1987 年。[The20] Mathlib社区。《Lean数学库》。载于《第 9 届 ACM SIGPLAN认证程序与证明国际会议论文集》（POPL '20），第 367–381 页。ACM，2020 年 1 月。[Uem22] Taichi Uemura。《普适可指数化箭头》。纯粹与应用代数学杂志，226(7)：106991，2022 年 7 月。[Uem23] Taichi Uemura。《类型论语义的一般框架》。计算机科学中的数学结构，33(3)：134–179，2023 年。[Vid18] Jakob Vidmar。《群胚的多项式函子与 W-类型》。博士论文，利兹大学，2018 年。[Web15] Mark Weber。《具有拉回的范畴中的多项式》。Theory Appl. Categ，30(16)：533–598，2015 年。